

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Modelos Cosmológicos numa Teoria Geométrica Escalar-Tensorial da Gravitação: Aspectos Clássicos e Quânticos

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior

João Pessoa

-2016-

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física



Tese de Doutorado

Modelos Cosmológicos numa Teoria Geométrica Escalar-Tensorial da Gravitação: Aspectos Clássicos e Quânticos

Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior

Tese submetida ao Departamento de Física
da Universidade Federal da Paraíba, sob
orientação do Prof. Dr. Carlos Augusto
Romero Filho, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Doutor em Física.

João Pessoa

-2016-

A474m Alves Júnior, Francisco Artur Pinheiro.

Modelos cosmológicos numa teoria geométrica escalar - tensorial da gravitação: aspectos clássicos e quânticos / Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior.- João Pessoa, 2016.

96 f. : il.-

Orientador: Profº. Drº. Carlos Augusto Romero Filho.
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN

1. Teoria Escalar Tensorial Geométrica. 2. Geometria de Weyl.
3. Transição de Fase Geométrica. 4. Dimensões Extras.
5. Compactação Dinâmica. I. Título.

UFPB/BC

CDU – 53(043)



CCEN

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de **Doutorado** do aluno **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior**, candidato ao Título de Doutor em Física na Área de Concentração Física das Partículas Elementares e Campos.

1 Aos vinte e sete dias do mês de setembro do ano de dois mil e dezesseis, às 10h00, no
 2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
 3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
 4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física das
 5 Partículas Elementares e Campos, **Francisco Artur Pinheiro Alves Júnior**. A
 6 comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Carlos Augusto*
 7 *Romero Filho* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir Barbosa*
 8 *Bezerra* (UFPB), *Fábio Leal de Melo Dahia* (UFPB), *Maria Emília Xavier Guimarães*
 9 (UFF) e *Henrique Pereira de Oliveira* (UERJ). Dando início aos trabalhos, o Prof.
 10 *Carlos Augusto Romero Filho* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A
 11 seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição
 12 do trabalho de tese intitulado “*Modelos cosmológicos numa teoria geométrica escalar-*
 13 *tensorial da gravitação: aspectos clássicos e quânticos*”. Concluída a exposição, o
 14 candidato foi argüido pela Banca Examinadora, que **emitiu** o seguinte parecer:
 15 **“aprovado”**. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo
 16 diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos
 17 Menezes, servindo de **Secretário**, redigiu a presente ata que vai assinada pelo mesmo e
 18 pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **27 de setembro de 2016**.

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Fábio Leal de Melo Dahia
UFPB

Prof. Dr. Maria Emília Xavier Guimarães
UFF

Prof. Dr. Henrique Pereira de Oliveira
UERJ

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

Carlos Augusto Romero Filho
Valdir Barbosa Bezerra
Fábio Leal de Melo Dahia
Maria Emília Xavier Guimarães
Henrique Pereira de Oliveira
Danilo Wilson Lemos Menezes

Agradecimentos

- Agradeço à Deus.
- Agradeço aos meu pais e familiares por todo apoio, em especial a minha mãe a meu irmão, Emanuel Abdalla, e a meu pai, e também ao Tio Hélder e à Tia Etiene. Estendo estes agradecimentos à Tia Idê, e reforço os agradecimentos aos primos Filipe, Pedro, Daniel, Rafael e ao Tio Messias e à Tia Aldenia e as minhas avós.
- Agradeço ao professor Carlos Romero pela orientação, pela paciência e pelo aprendizado. E aos professores Joel Batista, Fábio Dahia, Edmundo Monte, e Valdir pela disposição em sempre ajudar.
- Agradeço a minha amiga Laura Pucheu, pela dedicação, determinação e por sua ajuda e colaboração no meu doutorado.
- Agradeço a meu amigo Adriano Braga por ser um excelente professor de Cosmologia Quântica e por sua participação essencial na solução de questões que deram origem aos nossos trabalhos.
- Agradeço ao professor Laércio pela grande ajuda para meu ingresso no doutorado.
- Agradeço ao professor Dionísio e ao professor Sérgio.
- Agradeço aos meus amigos da UFPB, em especial a Adiel Lemos, Thaís Akemi, Ruy, João Paulo, Tony Almeida, Edu Bragança, Rodrigo Avalos, Thiago Ferreira,

Júlio César, Gi Varão e Paulo Henrique (PH). Gostaria de agradecer também aos meus amigos Francinaldo, e Dannilo, este mais conhecido por Salgadinho.

- Aos meus amigos da UFC.
- Aos meus amigos da Soparia e Lanchonete Zona Sul.
- Aos meus amigos que fiz em todos os lugares: no Lúmen, no Aikido, no Karatê, na natação.
- Agradeço à Capes.
- Agradeço à UFPB.

"Não há penitência melhor do que aquela que Deus coloca em nosso caminho todos os dias."

Dom Hélder Câmara

"Sei que o meu trabalho é uma gota no oceano, mas sem ele o oceano seria menor."

Madre Teresa de Calcutá

"Os jovens são o futuro. Eu não mais posso correr, mas quero passar a tocha para eles, como nas olimpíadas. Os jovens tem uma única vida e vale a pena usá-la bem!"

Chiara Badano Luce

Sumário

Agradecimentos	iii
1 Introdução	3
2 Geometria de Weyl	6
2.1 Elementos de Geometria Riemanniana	6
2.1.1 Variedade diferenciável	6
2.1.2 Conexão	7
2.1.3 Métrica	9
2.1.4 Curvatura	12
2.1.5 Desvio geodésico	13
2.2 Geometria de Weyl	14
2.2.1 Conexão de Weyl	16
2.2.2 Transformações de calibre	17
2.3 Weyl integrável	18
2.3.1 A objeção de Einstein	20
2.3.2 Objeção à objeção de Einstein	22

3	Teorias Escalares-Tensoriais	23
3.1	Teoria de Brans-Dicke	23
3.2	Teorias Gerais	25
3.3	Transformações Conformes	26
3.3.1	Aspectos geométricos da transformação conforme	26
3.3.2	A transformação conforme na ação da teoria escalar-tensorial	28
3.4	Equações de Campo	30
3.5	Equações cosmológicas	31
3.6	Limites sobre ω	33
4	Teoria Escalar-Tensorial Geométrica	34
4.1	Teorias WIST	35
4.2	Formalismo de Palatini	36
4.3	Teorias escalares-tensoriais geométricas	37
4.4	Equações de campo	38
4.5	Soluções estudadas	39
5	Cosmologia I: Transição de Fase geométrica	41
5.1	Modelos cosmológicos	42
5.1.1	Soluções usando o método do super-potencial	42
5.2	A constante cosmológica	43
5.2.1	Soluções do sistema	44
5.2.2	Diagramas de fase	46
5.3	Potencial $m\phi^2$	50
5.4	Potencial quártico	52
5.4.1	Potencial exponencial	55
5.5	A transição de fase geométrica e a aceleração tardia do universo	57
5.5.1	Caso $p=0$	58

5.5.2	Uma variação do caso $p=0$	59
6	Cosmologia II : Universos com dimensões extras	61
6.1	Universo modelado segundo Chodos-Detweiler	62
6.2	Brans-Dicke geométrico em n dimensões	62
6.3	Modelo cosmológico	64
6.4	Soluções clássicas	64
6.4.1	Soluções singulares I	65
6.4.2	Soluções singulares II	66
6.4.3	Soluções tipo de Sitter	68
6.4.4	Análise do fator de expansão	69
7	Cosmologia quântica	70
7.1	Aspectos gerais da Cosmologia Quântica	70
7.1.1	Interpretações da Cosmologia Quântica	71
7.1.2	O problema do tempo	72
7.2	Examinando o universo n dimensional anisotrópico	72
7.2.1	O hamiltoniano clássico	73
7.3	Quantizando o modelo	74
7.4	Soluções e valores esperados	75
7.4.1	Valores esperados	78
7.4.2	Caso $n = 5$, o universo com uma dimensão extra	79
7.5	A interpretação de de Broglie-Bohm	81
7.5.1	Mecânica quântica Bohmiana	81
7.5.2	Cosmologia quântica segundo de Broglie-Bohm	82
7.5.3	Universo em cinco dimensões	83
8	Considerações finais	85

RESUMO

Nesta tese, reapresentamos uma teoria escalar tensorial geométrica, que é uma versão da gravitação de Brans-Dicke formulada em um espaço-tempo de Weyl integrável. Com esta teoria fazemos duas aplicações específicas. Uma delas para o estudo de um fenômeno, que chamamos de transição de fase geométrica, uma mudança contínua na estrutura geométrica do espaço-tempo. Este fenômeno parece ocorrer quando o universo se expande aceleradamente. A segunda aplicação reside no estudo clássico e quântico do comportamento de um modelo de universo n -dimensional anisotrópico. A motivação para esta investigação é a busca de soluções que exibem o compactação dinâmica das dimensões extras, que não são observadas.

Palavras-chave: Teoria escalar tensorial geométrica, Geometria de Weyl, Transição de fase geométrica, Dimensões extras, Compactação dinâmica.

ABSTRACT

In this thesis, we deal with a particular geometric scalar tensor theory, which is a version of the Brans-Dicke gravitation, formulated in a Weyl integrable space-time. This formulation is done using the Palatini's variation procedure. The main point of our work is to perform two particular applications of the geometrical Brans-Dicke theory. The first one is the study of geometric phase transition phenomena, that's related to a continuous change in the space-time structure of the universe from a Riemann's geometry to a Weyl's geometry, or in the inverse sense, from Weyl's geometry to Riemann's geometry. This phenomena seems to take place when the universe starts to expand in an accelerated rate. The second one is the investigation of classical and quantum behaviour of an anisotropic n -dimensional universe. To find solutions that display the dynamical compactification of non observed extra dimensions is the main motivation to study such universe.

keywords: Geometric scalar tensor theory, Weyl geometry, Cosmology, Geometrical phase transition, Extra dimensions, Dynamical compactification.

CAPÍTULO 1

Introdução

Em Física, a palavra *cosmologia* refere-se a uma ciência cujo objetivo “é o estudo do universo como um todo: sua evolução, sua história, sua composição”, [1]. É este ramo científico que explica a formação das estruturas como as galáxias, as estrelas e os planetas.

Os cosmólogos realizam seus estudos partindo da utilização de modelos para representar o universo. Uma hipótese, baseada na observação e fundamental na construção destes modelos, o princípio cosmológico, afirma que o universo em grande escala é homogêneo e isotrópico.

Outro ingrediente imprescindível na representação matemática do universo é a escolha da lei de gravitação. Canonicamente, os modelos em cosmologia adotam como teoria gravitacional a Relatividade Geral, que foi desenvolvida por Albert Einstein em 1915. Nesta teoria, a interação gravitacional é entendida como uma manifestação da dinâmica do espaço-tempo, revelando portanto, a importância da geometria na gravitação. A grande questão é que a cosmologia, nestes moldes, vem encontrando limitações ou dificuldades em explicar determinadas questões. Dentre estas, podemos citar os problemas de singularidades iniciais no universo [2, 3] e os problemas relativos à fase de aceleração cósmica atual [4, 5].

Dessa forma, teorias alternativas de gravitação têm sido estudadas [6] e apli-

cadadas em cosmologia. Dentre essas teorias existem aquelas que utilizam a forma da ação da Einstein-Hilbert, mas são ambientadas em geometrias não-riemannianas, como por exemplo a Relatividade Geral formulada em geometria de Weyl [7]. Como também há formulações que mantêm a estrutura geométrica riemanniana, mas que possuem ações distintas da Relatividade Geral. As teorias escalares-tensoriais exemplificam bem esta classe.

As teorias escalares-tensoriais tem uma vantagem em relação à Relatividade Geral (RG), pois enquanto que para tratarmos de cenários inflacionários usando a RG devemos acrescentar um campo escalar para gerar inflação [8], as teorias escalares tensoriais já possuem em sua construção este campo escalar [9].

Outras teorias alternativas podem ser formadas tanto utilizando ações diferentes da teoria de Einstein quanto utilizando geometrias não-riemannianas. Para confeccionar tais modelos, os físicos dispõem de uma ferramenta muito útil, o método variacional de Palatini, que permite que cada ação esteja relacionada a um tipo específico de geometria [10, 11].

Ao aplicarmos o princípio de Palatini em teorias escalares tensoriais, damos luz às formulações distintas da gravitação, ambientadas em um espaço-tempo de Weyl integrável. Estas são as chamadas teorias escalares-tensoriais geométricas [12].

As geometrias de Weyl foram primeiramente propostas em 1918 [13] como parte essencial de uma nova teoria da gravitação. Esta teoria tinha o objetivo de estabelecer uma geometrização tanto para a gravitação quanto para eletromagnetismo. Contudo, seu modelo de gravitação não triunfou devido às sérias críticas levantadas por Einstein. Embora a teoria de Weyl tenha sucumbido, sua geometria reaparece como palco para muitas pesquisas físicas que vão desde a mecânica quântica às teorias de campos [14, 15].

Em cosmologia, as geometrias de Weyl são aplicadas em cenários distintos. Por serem possíveis candidatas a explicar a aceleração do universo [16], muito se tem pesquisado sobre suas contribuições nas teorias de universos inflacionários [17, 18], bem como na busca de soluções compatíveis com as observações da expansão acelerada [19, 20].

Assim, as teorias-escalares tensoriais geométricas se tornam interessantes para aplicações em cosmologia, uma vez que dão uma natureza geométrica para o campo escalar. Neste trabalho aplicamos uma destas teorias, o modelo de Brans-Dicke geométrico, para estudar o universo em aspectos clássicos e quânticos.

Especificamente estudamos dois problemas: a transição de fase geométrica, que é o resultado de nosso artigo [21], e o problema do universo anisotrópico com dimensões extras [22]. Para este fim organizamos esta tese em seis capítulos. No capítulo 1, revisamos alguns pontos sobre a geometria de Riemann e a geometria de Weyl. No capítulo 2, discutimos sobre as teorias escalares tensoriais, que motivam nosso estudo. No capítulo 3, apresentamos as teorias escalares tensoriais geométricas. No capítulo 4, discutimos sobre as transições geométricas, um fenômeno peculiar presente em nossa teoria de gravitação. No capítulo 5, encontramos a versão das teorias escalares geométricas para uma variedade n -dimensional, e aplicamos esta extensão para estudar a compactação dinâmica das dimensões extras de um universo anisotrópico. No capítulo 6, exibimos uma análise deste fenômeno em um universo em escala "microscópica", utilizamos para isso a abordagem de Cosmologia Quântica, revisando seus principais aspectos. Finalmente, escrevemos uma seção onde apontamos algumas considerações importantes sobre a nossa pesquisa.

CAPÍTULO 2

Geometria de Weyl

Neste capítulo estudamos a geometria desenvolvida por Weyl começando com uma revisão das principais estruturas da geometria riemanniana, nos guiando por [23] e pelas referências contidas no capítulo. Em seguida, abordamos a geometria de Weyl em suas duas formas: não integrável e integrável. Por fim, mostramos a teoria da gravitação elaborada por Weyl e a objeção de Einstein à esta formulação.

2.1 Elementos de Geometria Riemanniana

2.1.1 Variedade diferenciável

Em relatividade geral, trabalhamos com o espaço-tempo, e o modelo matemático que utilizamos vem da geometria. Modelamos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável. Uma variedade diferenciável n -dimensional é um espaço contínuo que, localmente, se assemelha ao R^n .

Sobre uma variedade M definimos objetos matemáticos como funções, vetores e tensores. Uma função real f em M é uma atribuição que associa a cada ponto P de M , um número real $f(P)$. Um vetor V_P é um operador definido sobre um ponto P da variedade, que atua sobre funções. O conjunto de todos os vetores definidos em P formam o espaço

tangente em P , $T_P M$. O espaço dual ao espaço tangente $T_P M$ é o espaço cotangente, $T_P^* M$. Nele temos os co-vetores ou 1-formas. Temos ainda espaços formados pelo produto tensorial sucessivo de m espaços $T_P M$ com n espaços $T_P^* M$, os elementos pertencentes a esse conjuntos são chamados tensores do tipo (m, n) . Na variedade ainda podemos definir campos de vetores, campos de 1-formas e campos de tensores. Os campos de vetores é denotado por TM , o campo de 1-formas é denotado por T^*M e o campo de tensores do tipo (m, n) é denotado por $\tau_n^m(M)$.

2.1.2 Conexão

Em uma variedade M não podemos comparar vetores em pontos distintos, pois são pertencentes a espaços vetoriais diferentes. Para fazermos isso precisamos de uma regra para mover vetores na variedade e colocá-los no mesmo espaço vetorial. Normalmente, dotamos a variedade de uma conexão e assim uma comparação pode ser estabelecida.

Definição : Uma conexão afim, em uma variedade M , é uma aplicação $\nabla : T(M) \times T(M) \longrightarrow T(M)$, indicado por $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as propriedades:

$$\begin{aligned} a) \nabla_{fX+gY} U &= f\nabla_X U + g\nabla_Y U, \\ b) \nabla_X (U + V) &= \nabla_X U + \nabla_X V, \\ c) \nabla_V (fU) &= V[f]U + f\nabla_V U. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A quantidade $\nabla_X Y$ é chamada derivada covariante do campo vetorial Y com respeito a direção de X .

Dada uma base $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ para $T(M)$, podemos calcular a derivada covariante de um vetor da base com respeito a outro, pela expressão

$$\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k. \tag{2.2}$$

O termo Γ_{ij}^k corresponde às componentes da conexão em uma dada base. Escolhendo uma base de coordenadas $\{\partial_i\}$, temos a representação para a derivada covariante

$$\nabla_Y X = \nabla_{Y^i \partial_i} (X^j \partial_j) = Y^i (\partial_i X^j + \Gamma_{ik}^j X^k) \partial_j. \tag{2.3}$$

As componentes, $\partial_i X^j + \Gamma_{ik}^j X^k$, da derivada covariante são utilizadas nos livros de cálculo tensorial como definição de derivada covariante [24].

Através da conexão podemos construir o transporte paralelo da seguinte forma: Seja uma curva $\alpha(\lambda)$ na variedade M e $V(\lambda)$ o campo de vetores tangentes associado a esta curva. Então, um campo vetorial U é transportado paralelamente se satisfaz a condição de que $\nabla_V U = 0$ ao longo da curva.

É usual definir o transporte paralelo através de um operador $\frac{D}{d\lambda}$ como

$$\frac{D}{d\lambda}U = \nabla_V U, \quad (2.4)$$

ou ainda podemos escrever

$$\frac{D}{d\lambda}U = \frac{dx^i}{d\lambda} \nabla_{\partial_i} U, \quad (2.5)$$

onde $\frac{dx^i}{d\lambda}$ são as componentes do vetor tangente $V(\lambda)$ em um sistema de coordenadas.

Reescrevendo a equação anterior em termos de suas componentes, obtemos:

$$\frac{d}{d\lambda}U^k + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\lambda} U^j = 0. \quad (2.6)$$

A solução da equação acima, para cada componente k , determina o campo vetorial $U(\lambda)$ transportado paralelamente. Dado um vetor definido em um ponto P da curva, o transporte paralelo deste ocorre de maneira única, devido as condições iniciais necessárias para resolver as equações diferenciais relativas a cada componente.

Com o auxílio do transporte paralelo podemos definir geodésicas afins, que são importantes em gravitação, pois estão relacionadas com as trajetórias dos raios de luz em um espaço-curvo. Seguindo [25], definimos a aceleração de uma curva e em seguida a geodésica afim.

Definição: Uma aceleração de uma curva $\alpha(\lambda)$ em M , é dada por $\nabla_V V$, onde $V(\lambda)$ é o vetor tangente à curva.

Definição: Uma geodésica afim, em uma variedade diferenciável é uma curva com aceleração nula, ou seja, uma curva que satisfaz $\nabla_V V = 0$.

Usando uma representação em um sistema de coordenadas, sejam $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$ as componentes do vetor tangente V . Então, a definição de geodésica afim é expressa por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.7)$$

A definição de derivada covariante bem como o transporte paralelo podem ser estendidos para tensores, usando a regra de Leibniz para cada componente de maneira adequada.

2.1.3 Métrica

Um dos objetos fundamentais da geometria é a métrica. Ela nos permite realizar as medidas de comprimentos, de áreas e também de ângulos na variedade.

Formalmente, definimos uma métrica como um campo tensorial do tipo $\tau_2^0(M)$. Em outras palavras, uma métrica é uma aplicação bilinear g que atua em $T_p M \times T_p M$ cuja imagem pertence aos reais.

Dado uma base $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$, as componentes da métrica são

$$g(E_\alpha, E_\beta) = g_{\alpha\beta}. \quad (2.8)$$

Com o auxílio das componentes de g , podemos calcular a área associada a dois vetores U e V , em um determinado ponto P da variedade, por

$$g(U, V) = g(E_\alpha, E_\beta) U^\alpha V^\beta = g_{\alpha\beta} U^\alpha V^\beta. \quad (2.9)$$

Sejam dois pontos P e Q , em M , infinitesimalmente próximos, e sejam $x^\alpha(P)$ as coordenadas do ponto P e $x^\alpha(Q)$ as coordenadas do ponto Q . O vetor distância, U , entre os pontos P e Q , dado por $U = \Delta x^\alpha \partial_\alpha$, pode nos fornecer por meio da métrica o elemento de distância infinitesimal,

$$ds^2 = g(\Delta x^\alpha \partial_\alpha, \Delta x^\beta \partial_\beta) = g_{\alpha\beta} \Delta x^\alpha \Delta x^\beta. \quad (2.10)$$

Observamos que esta expressão retoma a forma conhecida dos livros de relatividade geral. A métrica é uma estrutura que nos permite fazer uma distinção entre as geometrias. Por exemplo, uma variedade M de dimensão 4, cuja métrica é $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, caracteriza uma geometria Euclidiana. Por outro lado, uma variedade M em quadridimensional cuja métrica é $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, caracteriza uma geometria Lorentziana.

Destacamos dois tipos básicos de geometrias: as geometrias riemannianas, que são extensões das geometrias euclidianas, e as geometrias semi-riemannianas, que são extensões das geometrias de Lorentz.

Definição: Uma variedade é riemanniana se possuir uma métrica simétrica positiva definida, ou seja, dado dois vetores $X, Y \in T(M)$ as condições:

$$\text{i) } g(X, Y) = g(Y, X);$$

ii) $g(X, X) \geq 0$, devem ser satisfeitas.

Esse tipo de métrica é muito comum em física, por exemplo quando resolvemos problemas de mecânica analítica [28]. Mas em gravitação, as métricas utilizadas são semi-riemannianas.

Definição: Uma variedade é semi-riemanniana se possuir uma métrica simétrica e não degenerada.

A condição de ser não degenerada significa que a métrica é inversível. Nestas geometrias, temos três tipos de vetores: tipo nulo, $g(X, X) = 0$, tipo tempo, $g(X, X) > 0$, tipo espaço, $g(X, X) < 0$.

Um conceito que construímos com o auxílio da métrica é o de tempo próprio. Este é o intervalo de tempo medido ao longo de uma curva do tipo-tempo ¹, cujo vetor tangente é $U(\lambda)$. Esse intervalo temporal, $\Delta\tau$, é medido pela expressão

$$\Delta\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g(U(\lambda), U(\lambda))} d\lambda. \quad (2.11)$$

Implicitamente esta equação nos informa que o tempo medido não é influenciado pela aceleração da partícula. Esta ideia é chamada hipótese do relógio [26].

Também com o auxílio da métrica e de suas derivadas podemos, em geometria semi-riemanniana, construir uma conexão muito particular, fundamental para os cálculos em relatividade geral. Esta conexão é dada pelo teorema de Levi-Civita [27], [29], que têm como pré-requisito as definições de compatibilidade e de simetria de uma conexão.

Definição: Uma conexão ∇ em uma variedade semi-riemanniana M é compatível com a métrica se e somente se

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W), \quad (2.12)$$

onde U, V, W são campos vetoriais definidos na variedade.

Esta definição nos informa que o produto escalar entre dois vetores U e W é preservado por um transporte paralelo, na direção do campo V . Simplificadamente, pode-se mostrar que a condição de compatibilidade da métrica é equivalente à condição $\nabla_V g = 0$ que usualmente é escrita como $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

¹Isso assegura que $\Delta\tau$ seja positivo.

Definição: Uma conexão afim ∇ em uma variedade semi-riemanniana M é dita simétrica se satisfaz a relação

$$[V, U] = \nabla_V U - \nabla_U V, \quad (2.13)$$

para $U, V \in TM$.

Usando um sistemas de coordenadas, a condição de simetria pode ser expressa por $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$. Uma vez entendido esses conceitos, podemos enunciar o teorema que determina a conexão em questão.

Teorema de Levi-Civita: Em uma variedade semi-riemanniana M , existe uma única conexão que é ao mesmo tempo compatível e simétrica. Esta conexão é chamada de conexão de Levi-Civita.

Para determinarmos a forma da conexão de Levi-Civita, podemos usar a equação $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, junto com a condição de simetria. Determinamos, com um pouco de manipulação, que a conexão tem a forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}). \quad (2.14)$$

Notamos que esta é uma extensão da conexão usada em geometria de curvas de superfícies².

Ainda com o auxílio da métrica e com a conexão de Levi-Civita, podemos definir as geodésicas métricas, que são as curvas seguidas pelas partículas massivas quando estão somente sob a influência do campo gravitacional.

Definição: Uma curva $\alpha(\lambda)$, que liga dois pontos P e Q de uma variedade M , é uma geodésica métrica se seu comprimento dado por

$$s = \int_P^Q \sqrt{g(\dot{\alpha}(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda))} d\lambda \quad (2.15)$$

for estacionário, isto é, $\delta s = 0$.

As equações que as geodésicas métricas satisfazem, provenientes da nossa definição, tem a seguinte forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}} \dot{x}^\mu. \quad (2.16)$$

²Fazemos um cálculo semelhante com mais detalhes na seção 1.3.1.

Escolhendo uma reparametrização adequada, $\lambda = s$, as equações tomam a forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0, \quad (2.17)$$

Notamos que as equações (2.7) e (2.17) são a mesma equação. Isto reflete o fato de que em geometria semi-riemanniana geodésicas métricas e geodésicas afins coincidem.

2.1.4 Curvatura

Além da métrica e da conexão, outro objeto muito importante em geometria e em gravitação é a curvatura.

Definição: A curvatura R de uma variedade diferenciável M é uma aplicação que associa a cada par de vetores $(X, Y) \in T(M) \times T(M)$ um operador $R(X, Y) : T(M) \rightarrow T(M)$ dado por:

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.18)$$

Desta definição temos três propriedades que destacamos a seguir:

i) A curvatura é uma aplicação bilinear em $T(M) \times T(M)$, ou seja, dados $X, Y, Z \in T(M)$ e f , função definida na variedade, temos que

$$R(fX + Y, Z) = fR(X, Z) + R(Y, Z) \quad (2.19)$$

ii) Para todo par de vetores $(X, Y) \in T(M) \times T(M)$, o operador $R(X, Y)$ é linear, ou seja, dado $Z, W \in T(M)$, temos:

$$R(X, Y)[Z + W] = R(X, Y)Z + R(X, Y)W. \quad (2.20)$$

iii) O operador é anti-simétrico

$$R(X, Y) = -R(Y, X). \quad (2.21)$$

Exibindo o tensor R em uma base $\{E_i\}$, temos a expressão

$$R(E_i, E_j)E_k = \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_k - \nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_k - \nabla_{[E_i, E_j]} E_k. \quad (2.22)$$

Podemos reescrever o tensor R em termos da conexão Γ_{jk}^l , para isto representamos o tensor de curvatura em termos de suas componentes numa dada base E_i ,

$$R(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}^l E_l, \quad (2.23)$$

utilizamos a identidade

$$\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_k = \nabla_{E_i} \Gamma_{jk}^l E_l = \Gamma_{jk,i}^l E_l + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p E_p, \quad (2.24)$$

e o comutador $[E_i, E_j] = C_{ij}^l E_l$, chegamos facilmente na expressão

$$R_{ijk}^l E_l = \Gamma_{jk,i}^l E_l - \Gamma_{ik,j}^l E_l + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^p E_p - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{il}^p E_p - C_{ij}^l \Gamma_{lm}^p E_p. \quad (2.25)$$

Desta maneira as componentes do tensor de Riemann em uma base de coordenadas, $\{\partial_\alpha\}$, assumem a seguinte forma conhecida:

$$R_{\mu\beta\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\mu,\nu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu,\beta}^\alpha + \Gamma_{\rho\mu,\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\rho - \Gamma_{\rho\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\mu}^\rho. \quad (2.26)$$

Quando estamos no espaço euclidiano verificamos que o tensor de Riemann é zero, e a curvatura é nula. Este fato nos dá a informação de que o espaço é plano. Uma interpretação geométrica mais interessante da curvatura vem quando analisamos o desvio geodésico, como em [30].

2.1.5 Desvio geodésico

Consideremos uma congruência de geodésicas, $\gamma(s, t)$, tal que para cada s real, $\gamma_s(t)$ representa uma geodésica parametrizada em t , e para cada t real, a curva $\gamma_t(s)$ representa uma geodésica parametrizada em s .

Vamos examinar as curvas $\gamma_s(t)$. Admitimos que elas estejam inicialmente em paralelo e que compõem uma subvariedade bidimensional. Sejam $x^\mu(\gamma_s(t))$ as componentes da geodésica em questão. Podemos distinguir dois campos de vetores tangentes: T , o campo vetores tangentes a curva $\gamma_s(t)$, e S , o campo de vetores tangentes a curva $\gamma_t(s)$. Em um sistema de coordenadas cartesiano as componentes de T e de S são respectivamente

$$T^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t}, \quad S^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial s}. \quad (2.27)$$

O campo de vetores S nos dá uma distância relativa entre as geodésicas $\gamma_s(t)$ e $\gamma_{s+\delta s}(t)$. A velocidade relativa de afastamento é obtida por

$$V = \frac{DS}{d\lambda} = \nabla_T S. \quad (2.28)$$

De maneira análoga podemos definir a aceleração relativa A de afastamento por

$$A = \frac{DV}{d\lambda} = \nabla_T V = \nabla_T \nabla_T S. \quad (2.29)$$

Utilizando a equação (2.18), e lembrando o fato de que $[\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$, e ainda que $\nabla_S T = \nabla_T S$, podemos rescrever a aceleração relativa como

$$A = \nabla_T V = \nabla_T \nabla_T S = \nabla_T \nabla_S T = R(T, S)T, \quad (2.30)$$

uma vez que $\nabla_T T = 0$, por construção.

Verificamos assim que o paralelismo entre essas curvas só é mantido quando a aceleração relativa entre elas é nula, ou seja, se $R(T, S) = 0$. Isto é característico de espaços *flat*. Em espaços curvos não esperamos que isso ocorra, pois geralmente há uma aceleração relativa entre as geodésicas.

2.2 Geometria de Weyl

Uma vez que lembramos dos conceitos de conexão, de métrica e de curvatura, vamos tratar da geometria estabelecida por H. Weyl.

Em geometria riemanniana, a conexão de Levi-Civita preserva o comprimento de um vetor transportado paralelamente, porém não há garantias de que sua direção permaneça a mesma nesta operação.

Para desenvolvermos uma intuição sobre geometrias de Weyl, discutimos a seguinte ilustração. Imaginemos uma superfície esférica S . Nela traçamos uma geodésica, γ , que corta os dois polos da superfície, ou seja, um grande círculo da esfera. Um vetor V que esteja em um dos polos, ao ser transportado paralelamente ao longo desta curva, após uma volta, ao passar pelo seu ponto de origem este vetor terá sua direção diferente da direção inicial. Esse é um fato conhecido da geometria de superfícies.

Na geometria de Weyl, abandonamos a preservação do comprimento do vetores transportados paralelamente. Assim tanto a direção quanto o comprimento de um vetor

devem mudar devido ao transporte. Segundo Weyl que a variação das componentes e do comprimento, L , de um vetor V transportados paralelamente em uma variedade M fossem da seguinte forma,

$$dV^\alpha = \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha dx^\lambda V^\beta, \quad (2.31)$$

$$dL = L \frac{\sigma_\alpha}{2} dx^\alpha, \quad (2.32)$$

onde representamos por V^α as componentes do vetor V . Notamos a presença de um novo termo σ_α , que altera o comprimento do vetor, como se fosse uma conexão para o comprimento [31]. De maneira a incorporar esta ideia, definimos a geometria de Weyl de acordo com [32].

Definição: Uma variedade de Weyl, é uma variedade diferenciável, M , dotada de três objetos: uma conexão afim, ∇ , uma métrica g e um campo de 1-forma σ , chamado de campo de Weyl. Obedecendo a duas condições:

i) A métrica é simétrica.

ii) Dados três campos de vetores V, U, W , pertencentes a $T(M)$, então a condição de compatibilidade de Weyl é satisfeita, isto é,

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (2.33)$$

ou simplifcadamente³, por

$$V(g(U, W)) = \sigma(V)g(U, W). \quad (2.34)$$

Escolhendo uma base de coordenadas, podemos reescrever a condição de Weyl da forma $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \sigma_\alpha g_{\mu\nu}$, como muitas vezes ela é usada na literatura.

Para entendermos o efeito do campo de Weyl na mudança de comprimento, vamos ilustrar as propriedades do transporte paralelo.

Proposição : Seja M uma variedade diferencial de Weyl, com uma métrica g e um campo de uma forma σ . Então, o comprimento de um vetor U transportado paralelamente ao longo de um curva $\alpha(\lambda)$, se modifica segundo a condição

$$\nabla_{V(\lambda)} g(U, U) = \sigma(V(\lambda))g(U, U), \quad (2.35)$$

³Essa versão de definição segue a ideia de [33].

onde $V(\lambda)$ é o campo vetorial tangente à curva.

Esta condição nada mais é do que aplicação de (2.34), que pode ser facilmente reescrita na forma

$$dL = L \frac{\sigma_\alpha}{2} dx^\alpha, \quad (2.36)$$

resgatando a equação (2.32), que nos informa como se dá a variação com comprimento do vetor U na curva.

2.2.1 Conexão de Weyl

Em geometria riemanniana o teorema de Levi-Civita garante a existência de uma conexão especial dada em termos da métrica e de suas derivadas. No caso da geometria de Weyl, também existe uma conexão especial garantida pelo teorema de Levi-Civita estendido.

Teorema de Levi-Civita estendido : Seja uma variedade diferenciável M , com uma conexão afim ∇ , uma métrica g e um campo de 1-forma σ definidos em M . Existe uma única conexão afim ∇ , tal que seja simétrica, e que obedeça a condição de compatibilidade de Weyl.

Para demonstrar esse teorema de maneira simplificada, adotamos um sistema de coordenadas e reescrevemos a condição de compatibilidade. Somamos a equação de compatibilidade da seguinte forma

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} + \nabla_\nu g_{\alpha\mu} - \nabla_\mu g_{\nu\alpha} = \quad (2.37)$$

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\nu\alpha} - 2\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\mu} = \quad (2.38)$$

$$\sigma_\alpha g_{\mu\nu} + \sigma_\nu g_{\alpha\mu} - \sigma_\mu g_{\nu\alpha}. \quad (2.39)$$

Como a conexão é simétrica alguns termos são eliminados, e após uma manipulação, exibimos a conexão de Weyl em um sistema de coordenadas, como sendo dada por

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\beta = \{\beta_{\alpha\nu}\} - \frac{1}{2}g^{\beta\mu}(\sigma_\alpha g_{\mu\nu} + \sigma_\nu g_{\alpha\mu} - \sigma_\mu g_{\alpha\nu}). \quad (2.40)$$

Esta é a conexão de Weyl, que é determinada não só pela métrica, mas também pelo campo de Weyl σ .

2.2.2 Transformações de calibre

Podemos identificar uma simetria na equação de compatibilidade de Weyl, ao fazermos as seguintes transformações nos campos

$$\bar{g} = e^f g, \quad (2.41)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma + df. \quad (2.42)$$

Essas transformações são denominadas transformações de Weyl, e recalibram os campos métrico e de Weyl. A transformação na métrica é do tipo conforme, e a transformação do campo escalar é uma transformação de compensação, isto é, ela compensa a mudança na métrica [34].

Uma variedade de Weyl, M , é caracterizada pela métrica, g , e pelo campo de Weyl, σ . A uma tríplice (M, g, σ) , se dá o nome de um referencial de Weyl. Ao fazermos uma transformação de Weyl mudamos de um referencial (M, g, σ) para um referencial $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$, por este motivo estas transformações são interpretadas como mudanças de referenciais ou de *frames*.

Em cada referencial temos uma métrica diferente, o comprimento de um vetor muda conforme mudamos de referencial. Em geral, as medidas de área e de volume também dependem do referencial em que foram feitas.

Porém, temos em Weyl alguns objetos geométricos que revelam ser invariantes por essas transformações. A conexão é um exemplo. Se estivermos em um referencial $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$ a equação de compatibilidade é $\bar{\nabla}_\alpha g_{\mu\nu} = \bar{\sigma}_\alpha g_{\mu\nu}$, então encontraríamos uma conexão em coordenadas $\bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta$. Porém, ao aplicarmos as transformações de Weyl notamos que $\bar{\Gamma}_{\alpha\nu}^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$ é a conexão em um referencial (M, g, σ) .

Uma consequência importante da conexão ser invariante é percebida ao estudarmos as geodésicas afins. Observemos uma geodésica afim,

$$\nabla_V V = 0, \quad (2.43)$$

Por uma mudança de referencial, não alteramos a estrutura da curva, pois $\nabla = \bar{\nabla}$. Assim, as geodésicas afins são invariantes por transformações de Weyl.

Se estas geodésicas são invariantes, quando mudamos de referencial, o que podemos dizer do desvio geodésico, ou seja, dada duas geodésicas, o desvio de uma curva em

relação a outra sofre influência da transformação de referenciais? Pela intuição podemos dizer que a resposta é negativa. Mas para uma resposta concreta devemos examinar o tensor de Riemman.

Definimos o tensor de Riemman para a variedade de Weyl, como o tensor de Riemann construído com as conexões de Weyl. Em uma base coordenada ∂_α , ele é dado por

$$R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha = \Gamma_{\beta\gamma|\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda|\gamma}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\tau \Gamma_{\tau\lambda}^\alpha - \Gamma_{\beta\lambda}^\tau \Gamma_{\tau\gamma}^\alpha \quad (2.44)$$

Uma vez que a conexão é um invariante de Weyl, fica evidente da equação acima que, o tensor de Riemann para uma variedade de Weyl, é também invariante. Isso significa que todos os referenciais de Weyl, experimentam a mesma curvatura! Embora o escalar de curvatura para cada um dos referenciais não seja o mesmo, mas $R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha$ é o mesmo.

Assim como a conexão pode ser escrita de maneira que separamos a contribuição da métrica da contribuição do campo de Weyl, o tensor de Riemann pode ser escrito como a soma de contribuições riemannianas mais as contribuições devido ao campo de Weyl. Para fazer isso utilizamos a notação $W_{\beta\gamma}^\alpha = -\frac{1}{2}(\sigma_\gamma\delta_\beta^\alpha + \sigma_\beta\delta_\gamma^\alpha - g_{\beta\gamma}\sigma^\alpha)$, que nos permite escrever:

$$R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha = \bar{R}_{\beta\gamma\lambda}^\alpha + \hat{\nabla}_\gamma W_{\beta\lambda}^\alpha - \hat{\nabla}_\lambda W_{\beta\gamma}^\alpha + W_{\theta\lambda}^\alpha W_{\beta\gamma}^\theta - W_{\theta\gamma}^\alpha W_{\beta\lambda}^\theta, \quad (2.45)$$

onde denotamos por $\hat{\nabla}$ a derivada covariante com conexão riemanniana. Desta expressão percebemos que $R_{\beta\gamma\lambda}^\alpha = -R_{\beta\lambda\gamma}^\alpha$. Esta anti-simetria se reflete no tensor de Ricci, que dado explicitamente em termos do campo de Weyl é

$$R_{\beta\lambda} = \bar{R}_{\beta\lambda} - F_{\beta\lambda} - \frac{1}{2} \left(\hat{\nabla}_\beta \sigma_\lambda + \hat{\nabla}_\lambda \sigma_\beta + g_{\beta\lambda} \hat{\nabla}_\alpha \sigma^\alpha \right) - \frac{1}{2} (\sigma_\beta \sigma_\lambda - g_{\beta\lambda} \sigma_\alpha \sigma^\alpha), \quad (2.46)$$

onde $F_{\beta\lambda} = \partial_\beta \sigma_\lambda - \partial_\lambda \sigma_\beta$. Na equação do tensor de Ricci acima, vemos explicitamente que a anti-simetria está ligada ao termo $F_{\beta\lambda}$, chamado tensor de curvatura do comprimento.⁴

2.3 Weyl integrável

Para entendermos melhor o efeito geométrico do tensor $F_{\beta\lambda}$, vamos considerar uma curva fechada $\alpha(\lambda)$. Seja V um vetor transportado paralelamente a esta curva.

⁴O cálculo cuidadoso do tensor de Ricci em termos do campo de Weyl, pode ser encontrado em [35]. Aqui, somente nos interessa explicitar o tensor $F_{\beta\lambda}$.

Então, a variação de comprimento ao longo da curva é, como já vimos,

$$dL = \frac{L}{2} \sigma_\alpha dx^\alpha. \quad (2.47)$$

Esta equação pode ser integrada, e assim obtemos o comprimento após do vetor V ser transportado em uma curva fechada

$$L = L_0 \exp \left(\oint \frac{\sigma_\alpha}{2} dx^\alpha \right). \quad (2.48)$$

onde L_0 é o comprimento inicial. Utilizando o teorema de Stokes, temos que

$$L = L_0 \exp \left(\int_S \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \right). \quad (2.49)$$

Este teorema é aplicável uma vez que consideramos a região, S , envolta pela curva fechada $\alpha(\lambda)$, simplesmente conexa. Essas equações nos permitem entender como o comprimento é influenciado pela presença do campo $F_{\mu\nu}$, responsável pela "curvatura" do comprimento, do vetor V , após um ciclo. Isso justifica o nome dado ao tensor $F_{\beta\lambda}$.

Esse estranho efeito previsto pela geometria de Weyl foi o motivo que levou Einstein questionar a validade da teoria. Quando estamos na situação particular em que $\sigma = d\phi$, onde ϕ é um campo escalar definido na variedade, a curvatura do comprimento é nula, então, contornamos o problema, pois o comprimento não muda, $L = L_0$.

Essa escolha para a forma do campo de Weyl, caracteriza uma geometria de Weyl Integrável. Nesta geometria os referenciais são representados por (M, g, ϕ) .

As transformações de Weyl tem a seguinte forma

$$\bar{g} = e^f g, \quad (2.50)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f. \quad (2.51)$$

Fazendo a transformação de Weyl usando $f = -\phi$, chegamos em um referencial muito particular, $(M, \gamma = e^{-\phi} g, 0)$, em que o campo de Weyl, $\bar{\phi}$, é nulo. Este referencial possui uma característica riemanniana, uma vez que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$.

Nesse referencial podemos citar mais exemplos de objetos geométricos invariantes por transformações de Weyl, a começar pela métrica γ . Vemos facilmente essa invariância,

$$\gamma = e^{-\phi} g = e^{-\bar{\phi}} \bar{g} = \bar{\gamma}. \quad (2.52)$$

Com o auxílio desta métrica podemos construir o comprimento invariante de Weyl, como o comprimento de uma curva que liga dois pontos, P e Q nesta variedade, dado pela expressão

$$s = \int_P^Q (\gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\lambda. \quad (2.53)$$

Esse elemento de linha além de incorporar o princípio da covariância geral, uma vez que pode ser escrito de maneira independente de coordenadas, ele também incorpora a simetria de calibre presente nas transformações de Weyl.

De maneira semelhante, definimos o tempo próprio invariante, como o tempo medido por um relógio que experimenta uma curva do tipo-tempo. O intervalo de tempo próprio é dado por

$$\Delta\tau = \int_P^Q (\gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\lambda = \int_P^Q e^{-\frac{\phi}{2}} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} d\lambda. \quad (2.54)$$

este é o tempo próprio invariante de Weyl. Ele é o intervalo de tempo medido por qualquer referencial de Weyl.

O ponto importante nestas novas definições, tanto do tempo próprio quanto do comprimento de arco, é que a métrica e o campo escalar de Weyl participam da medida. Minimizando (2.53) deduzimos as equações para as geodésicas métricas de Weyl, dadas por

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.55)$$

onde, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \gamma^{\alpha\beta} (\partial_\mu \gamma_{\nu\beta} + \partial_\nu \gamma_{\beta\mu} - \partial_\beta \gamma_{\mu\nu})$, que é a conexão de Weyl. Dessa forma em Weyl integrável as geodésicas métricas coincidem com as geodésicas afins de Weyl!

De maneira geral, podemos encontrar outros objetos invariantes por transformações de Weyl desde que sejam construídos somente com a métrica invariante de Weyl γ , como por exemplo é a expressão para a forma do r-volume invariante de Weyl, $\bar{\Omega} = \sqrt{-\gamma} dx^1 \wedge dx^2 \dots \wedge dx^r$.

2.3.1 A objeção de Einstein

Uma vez que discutimos os pontos centrais necessários para o entendimento da geometria de Weyl integrável e não-integrável, vamos discutir agora em que contexto essa geometria foi elaborada.

Weyl desenvolveu uma nova teoria da gravitação, que estendia a geometrização

das interações da natureza. Enquanto que a relatividade geral propõe um modelo geométrico para a interação gravitacional, a teoria de Weyl geometrizava tanto a gravitação quando o eletromagnetismo [36] .

A ação deste modelo é dada por:

$$S = \int \sqrt{-g} (R^2 + \lambda F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) dx^4. \quad (2.56)$$

Onde $F_{\mu\nu}$ é o campo eletromagnético geométrico, que é exatamente o que neste capítulo chamamos de curvatura do comprimento, ou seja, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu$, onde σ é o campo vetorial de Weyl.

Esta ação é proposta seguindo o princípio de que todos os termos nela presentes devem ser invariantes por transformações de Weyl. Podemos notar que cada termo da ação é invariante pois,

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} = \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu} \sqrt{-\bar{g}}, \quad (2.57)$$

$$R^2 \sqrt{-g} = \bar{R}^2 \sqrt{-\bar{g}}. \quad (2.58)$$

A teoria de Weyl não conseguiu progredir devido à uma forte crítica levantada por Einstein, que passamos a discutir. Por simplicidade supomos que o campo de Weyl só possua a componente temporal σ_0 , e que esta dependa somente do raio, $\sigma = (\sigma_0(r), 0, 0, 0)$. Seja um relógio pontual, R_1 , fixado em um ponto P da variedade. Dessa maneira o tempo próprio, utilizando (2.48) temos que

$$\tau_{R_1} = \tau_0 \exp(\sigma_0(t - t_0)), \quad (2.59)$$

onde τ_0 é o tempo relativo um "tic-tac" do relógio, ou seja, τ_0 corresponde a duração de um ciclo fundamental, por meio do qual o relógio mede o tempo. Pela expressão do tempo próprio acima, a duração de um "tic-tac" muda simplesmente pela influência do campo de Weyl.

Ao considerarmos este efeito sentido em relógios atômicos, ou seja, tomando R_1 como um relógio atômico, podemos definir uma frequência de oscilação fundamental

$$\omega = \omega_0 \exp(-\sigma_0(t - t_0)), \quad (2.60)$$

que se modifica a medida em que o tempo passa. Dessa forma também as linhas espectrais, relativas ao elemento de que é composto o relógio atômico, ficariam indefinidas, contrariando as evidências experimentais conhecidas.

Esse fenômeno é chamado segundo efeito do relógio. Este efeito está ligado a uma impossibilidade de sincronização entre relógios idênticos devido a ação do campo gravitacional.

2.3.2 Objeção à objeção de Einstein

Embora a objeção de Einstein tenha derrubado a teoria de Weyl, existem alguns questionamentos sobre os argumentos usados:

i) O tempo próprio utilizado por Einstein em sua crítica é o mesmo usado em relatividade geral. Entretanto, como vimos, em uma geometria diferente, a expressão do tempo próprio adquire outra forma. No caso de Weyl integrável, por exemplo, o tempo próprio passa a depender do campo de Weyl. Assim, a expressão do tempo próprio em Weyl não-integrável deve depender da métrica e do campo σ , de maneira a contemplar a invariância de Weyl [37].

ii) O uso da mecânica quântica para investigar o comportamento das linhas espectrais sobre efeito do campo de Weyl parece ser mais adequado, do que usar simplesmente argumentos clássicos [13]. Embora alguns estudos já tenham sido feito nessa linha [38], parece haver um certo desfavorecimento à geometria de Weyl não integrável [39].

Embora existam esses questionamentos a cerca da teoria da gravitação de Weyl destacamos duas contribuições desta teoria. Na física foi principalmente na importante na estruturação das teorias de Gauge, que servem para descrever as interações fundamentais [40]. Na matemática, a contribuição de Weyl, se deve a estabelecer uma nova classe de geometrias.

No capítulo seguinte abordaremos uma classe de teorias da gravitação e discutiremos as teorias escalares tensoriais formuladas em uma geometria riemanniana. Somente no capítulo 3, estabelecemos um relação entre teorias de Weyl e as teorias escalares tensoriais.

CAPÍTULO 3

Teorias Escalares-Tensoriais

As teorias escalares-tensoriais estão entre as mais simples teorias alternativas da gravitação. Enquanto que, na gravitação de Einstein, a métrica desempenha o papel da interação gravitacional, nas teorias escalares-tensoriais, a métrica e o campo escalar fazem esse papel.

De acordo com apontamentos históricos [41], a primeira teoria escalar-tensorial foi proposta por Jordan em seus estudos sobre a projeção de variedades na gravitação. Posteriormente, C. Brans e R. Dicke [42] elaboraram um modelo que se popularizou e tornou-se o principal exemplo de teorias escalares-tensoriais.

Neste capítulo fazemos uma revisão sobre os principais pontos de uma teoria escalar-tensorial, utilizando para isso a teoria de Brans-Dicke como ilustração.

3.1 Teoria de Brans-Dicke

Embora a Relatividade Geral tenha sido formulada tendo como um de seus fundamentos o princípio de Mach [43], os pesquisadores C. Brans e R. Dicke acreditavam por algum motivo que este princípio não estava devidamente incorporado na gravitação de Einstein.

Em termos simples, o princípio de Mach afirma que a inércia de um corpo depende da distribuição de matéria contida em todo o universo e, logo, que não há movimento sem matéria.

Na tentativa de encontrar uma gravitação completamente Machiana, Brans e Dicke propuseram a ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\phi R + \frac{\omega}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + V(\phi) + L_m(\Psi, g) \right]. \quad (3.1)$$

O primeiro termo da ação introduz o campo escalar por meio de um acoplamento não mínimo, ϕR , que modifica o caráter da constante gravitacional, tornando-o dinâmico, $G = \frac{1}{\phi}$. Esta constante gravitacional variável foi considerada essencial para tornar a teoria completamente machiana, pois permite que G dependa da distribuição de matéria presente no universo.

A introdução deste campo escalar associado a G está também relacionada à hipótese dos grandes números de Dirac [44]. Dirac percebeu uma relação entre as constantes fundamentais da física, tais como a carga do elétron e , a massa do próton (m_p), a massa do elétron (m_e), a constante de Hubble (H_0), a constante gravitacional (G), e a idade do universo atual, t_0 . Esta relação é estabelecida pela expressão

$$\frac{e^2}{G m_p m_e} \approx t_0. \quad (3.2)$$

Dirac postulou que esta relação deveria ser estendida para qualquer tempo t . Como consequência, G deve variar com o inverso do tempo cosmológico, enquanto os termos m_p, m_e continuam contantes. Assim, Dirac criou uma lei para as constantes fundamentais da física [45].

O segundo termo da lagrangiana, $\frac{\omega}{\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$, está associada à parte cinética do campo escalar, onde o fator ω é um parâmetro adimensional e livre. O terceiro termo presente nesta lagrangiana é o potencial, $V(\phi)$, é uma generalização da constante cosmológica.

A lagrangiana de matéria, L_m , depende da métrica e do campo de matéria, que simbolizamos por Ψ . A dependência deste lagrangiano em relação ao campo escalar é normalmente evitada, uma vez que fere o princípio de equivalência fraco. Este princípio é bem testado e afirma que partículas unicamente sob o efeito do campo gravitacional seguem trajetórias geodésicas, independentemente de sua constituição material [46].

Um dos principais pontos fracos da teoria de Brans-Dicke é a presença de um parâmetro livre. Os resultados experimentais a nível de sistema solar apontam que ω deve assumir valores muito grandes. Segundo a literatura [47], para muitos casos em que $\omega \rightarrow \infty$, as soluções de Brans-Dicke se aproximam das soluções da Relatividade Geral [48].

Segundo a literatura [46], classes de teorias de Brans-Dicke podem emergir de reduções dimensionais em teorias de Kaluza-Klein e em teorias de branas. De outra forma, segundo V. Faraoni [49], o motivo que torna a teoria de Brans-Dicke importante é sua aplicação em cosmologia. A teoria de Brans-Dicke já incorpora naturalmente um campo escalar, que é muito importante na descrição de determinadas fases do universo.

3.2 Teorias Gerais

A teoria de Brans-Dicke inspirou uma classe de novos modelos de gravitação, também conhecidas como teorias escalares-tensoriais. Uma teoria escalar-tensorial, de maneira geral, possui a seguinte forma

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} [f(\phi)R + h(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi + V(\phi) + L_m(\Psi, g)]. \quad (3.3)$$

A escolha das funções $f(\phi)$ e $h(\phi)$ particularizam o modelo. Uma definição equivalente pode ser dada pela seguinte ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\Phi R + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\partial_\mu\phi + V(\phi) + L_m(\Psi, g) \right]. \quad (3.4)$$

Um exemplo de teoria escalar-tensorial, diferente da teoria de Brans-Dicke, é estudado em [50]. Na tentativa de se aproximar a interação gravitacional da interação fraca, A. Zee propõem a seguinte ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\epsilon\phi^2 R - \frac{1}{2} g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) + L_m(\Psi, g) \right]. \quad (3.5)$$

Na literatura são ainda encontradas variações desta ação. Por exemplo, em [51], com a motivação de estabelecer relações entre o campo de Higgs e a gravidade, utiliza-se campos escalares complexos, estendendo assim a ação (3.5).

3.3 Transformações Conformes

Ao trabalharmos com teorias escalares-tensoriais, as vezes, temos de recorrer à relatividade geral, e podemos fazer isso por meio de uma transformação conforme.

Definição: Seja (M, g) uma variedade diferenciável. Seja Ω uma função escalar, suave, definida em M . Então podemos definir uma nova métrica $\bar{g}$, pela transformação $\bar{g} = \Omega^2 g$.

A operação utilizada para obter a métrica $\bar{g}$ é a transformação conforme. O campo Ω , imprescindível para esta transformação, é chamado de campo conforme. Observe que uma transformação assim relaciona duas variedades, (M, g) e $(M, \bar{g})$, estabelecendo, com isso, uma equivalência matemática entre elas.

Intuitivamente, uma transformação conforme, em um dado ponto P , pode ser pensada como uma ampliação ou redução das medidas efetuadas neste ponto. De maneira geral, uma transformação conforme é isotrópica, uma vez que todas as direções se transformam pelo mesmo fator. Uma outra característica interessante das transformações conformes é que, dados dois vetores em $T_P M$, o ângulo entre eles é preservado mediante tais transformações. Por isso, essas transformações são ditas conformes, em vista que preservam as formas geométricas. Por exemplo, triângulos se transformam em triângulos e retângulos em retângulos.

Outra característica marcante é que os vetores nulos transformados continuam vetores nulos, e, portanto, as curvas como as geodésicas nulas são invariantes por transformações conformes. Ainda por este motivo, as transformações conformes não alteram a estrutura do cone de luz.

3.3.1 Aspectos geométricos da transformação conforme

As geodésicas afins, por outro lado, não são invariantes sob transformações conforme. Isso ocorre devido ao termo de conexão. Seguindo [53], vamos explicitar este caso.

Sejam (M, g) e $(M, \bar{g})$ duas variedades conformalmente relacionadas. Seja também ∇ a conexão relativa à variedade (M, g) , e $\bar{\nabla}$ a conexão relativa à variedade $(M, \bar{g})$.

Relacionamos ambas as conexões por um operador C , definido da seguinte forma:

$$C : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M \quad (3.6)$$

$$C = \nabla - \bar{\nabla}. \quad (3.7)$$

Pela definição acima, ao calcularmos o transporte paralelo de um vetor V em (M, g) , onde $V = \{\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\}$, temos que

$$\nabla_V V = 0 \Rightarrow \bar{\nabla}_V V = C_V V. \quad (3.8)$$

Podemos ver da equação (3.8) que uma geodésica afim em (M, g) é levada em uma curva acelerada em $(M, \bar{g})$. Este termo C_V responsável pela não invariância da curva afim é chamado de "quinta força". Este nome está relacionado com o fato de que a origem desta força não está ligada a nenhuma das quatro interações fundamentais.

Utilizando o tensor C , podemos investigar a conservação do tensor momento-energia, $T^{\mu\nu}$, em um referencial conforme. Tomamos a derivada covariante:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} + C^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} + C^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \quad (3.9)$$

Assumimos que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ em (M, g) , temos então

$$\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = -C^\mu_{\mu\lambda} T^{\lambda\nu} - C^\nu_{\mu\lambda} T^{\mu\lambda}. \quad (3.10)$$

Vamos usar a definição (3.6), que, em um sistema de coordenadas, pode ser escrita como

$$C^\mu_{\beta\lambda} = -\frac{g^{\mu\alpha}}{\Omega} (g_{\alpha\lambda} \nabla_\beta \Omega + g_{\alpha\beta} \nabla_\lambda \Omega - g_{\beta\lambda} \nabla_\alpha \Omega). \quad (3.11)$$

Com essa identidade, mostramos que

$$\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = -2T^{\mu\nu} \nabla_\mu \ln \Omega - 2\delta^{(\nu} T^{\mu)\lambda} \nabla_\lambda \ln \Omega + 2T^{(\mu} g^{\nu)\alpha} \nabla_\alpha \ln \Omega, \quad (3.12)$$

ou, de maneira simplificada,

$$\bar{\nabla}_\mu T^{\mu\nu} = 6T^{\mu\nu} \partial_\mu \ln \Omega - T g^{\nu\alpha} \partial_\alpha \ln(\Omega). \quad (3.13)$$

Contudo, essa equação ainda não se refere ao tensor de energia-momento definido em $(M, \bar{g})$. O tensor de energia-momento, neste referencial, é dado pela transformação que deduzimos abaixo:

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \frac{\delta L_m}{\delta \bar{g}_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} L_m \Rightarrow \bar{T}_{\mu\nu} = \Omega^{-2} T_{\mu\nu}. \quad (3.14)$$

Dessa forma, inferimos que $T^{\mu\nu} = \Omega^{-6} \bar{T}^{\mu\nu}$. E a derivada covariante de $\bar{T}^{\mu\nu}$ é, finalmente,

$$\bar{\nabla}_\mu \bar{T}^{\mu\nu} = -\bar{T} g^{\nu\alpha} \partial_\alpha \ln(\Omega). \quad (3.15)$$

Este resultado é puramente geométrico, e mostra que a lei de conservação do tensor de energia-momento não é conformalmente invariante em geral. No caso particular em que o traço do tensor de energia-momento é nulo, como no eletromagnetismo, a invariância conforme é estabelecida.

Por outro lado, este resultado indica que os fótons não devem experimentar efeitos de uma transformação conforme, enquanto que as partículas de matéria usual, que em geral possuem $T^\mu_\mu \neq 0$, sentem efeitos da transformação conforme. Tais efeitos devem ser percebidos em suas geodésicas. Desta forma, partículas de constituição distintas caminham sobre geodésicas diferentes em $(M, \bar{g})$. Isto viola o princípio da equivalência fraco, e mostra mais uma distinção física entre (M, g) e $(M, \bar{g})$.

Da mesma maneira que a conexão muda por uma transformação conforme, o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o escalar de curvatura também se modificam. Por exemplo, o tensor de Ricci $\bar{R}_{\mu\nu}$ é relacionado com o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ pela expressão

$$\bar{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - 2\nabla_\mu \nabla_\nu \ln \Omega - g_{\mu\nu} \square(\ln \Omega) + 2\nabla_\mu \ln \Omega \nabla_\nu \ln \Omega - 2g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \ln \Omega \nabla_\beta \ln \Omega. \quad (3.16)$$

Consequentemente, o escalar de curvatura em $(M, \bar{g})$ fica relacionado com o escalar de curvatura em (M, g) por

$$\bar{R} = \Omega^{-2} \left(R - 6 \frac{\square \Omega}{\Omega} \right). \quad (3.17)$$

De acordo com a equação (3.16), ao partimos de um espaço tempo (M, g) Ricci-*flat*, $R_{\mu\nu} = 0$, o espaço-tempo conformalmente relacionado não será Ricci-*flat*, pois o campo conforme atua deformando a estrutura do espaço-tempo $(M, \bar{g})$. Este é outro ponto que mostra uma diferença física entre os referenciais das duas teorias conformalmente relacionadas.

3.3.2 A transformação conforme na ação da teoria escalar-tensorial

Vamos analisar os efeitos de uma transformação conforme em relação à ação escalar-tensorial. Ao aplicarmos uma determinada transformação conforme, em que $\Omega =$

$f(\phi)$, ocorre uma mudança no setor gravitacional, no setor cinético do campo de Brans-Dicke, e no setor referente à matéria. Esquemáticamente estas mudanças são

$$\int dx^4 \sqrt{-g} \phi R \rightarrow \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left[\bar{R} - \frac{3}{2f^2} \left(\frac{df(\phi)}{d\phi} \right)^2 \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \quad (3.18)$$

$$\int dx^4 \sqrt{-g} h(\phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \rightarrow \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left[\frac{h(\phi)}{f(\phi)} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \quad (3.19)$$

$$\int dx^4 \sqrt{-g} L_m(\psi, g) \rightarrow \int dx^4 \left[\sqrt{-\bar{g}} \frac{1}{f^2(\phi)} L_m \right]. \quad (3.20)$$

A ação pós-transformada tem a forma

$$\int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{R} + \bar{h}(\phi) \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \bar{U}(\phi) + \bar{L}_m \right), \quad (3.21)$$

onde $\bar{h}(\phi) = \frac{h(\phi)}{f(\phi)} - \frac{3}{2f^2} \left(\frac{df}{d\phi} \right)^2$, $\bar{U}(\phi) = \frac{U}{f^2(\phi)}$ e $\bar{L}_m = \frac{L_m}{f(\phi)^2}$. Adotando a seguinte redefinição do campo,

$$\Phi = \int h(\bar{\phi}) d\lambda, \quad (3.22)$$

chegamos na ação transformada

$$\bar{S} = \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{R} + g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \bar{L}_m \right). \quad (3.23)$$

Esta ação representa a versão conforme da teoria de Brans-Dicke. Ela não é exatamente igual a relatividade geral, pois o termo de matéria, presente na ação, se acopla de forma não usual com o campo escalar, violando a conservação do tensor de energia-momento.

Dizemos que a ação (3.23) é a representação da teoria escalar-tensorial em um referencial de Einstein, enquanto que a teoria escalar-tensorial em sua forma original é a sua representação em um referencial de Jordan.

Pode-se dizer, então, que existe uma equivalência matemática entre uma teoria escalar-tensorial e sua versão conforme. No entanto, afirmar que existe uma equivalência física tem sido um ponto de interrogação. A existência de uma equivalência física é defendida por alguns trabalhos, porém existem resultados que negam esta equivalência.

Dentre estes, alguns defendem que o referencial de Jordan é o referencial onde os processos físicos ocorrem. Outros defendem que o referencial onde a física de ocorre é o de Einstein [49]. Em outras palavras, a questão sobre qual é o verdadeiro referencial físico ainda encontra-se em aberto.

3.4 Equações de Campo

As equações de campo de uma teoria escalar-tensorial podem ser obtidas variando-se a métrica e o campo escalar, seguindo o procedimento usual. Fazendo a variação com respeito a métrica, temos

$$\begin{aligned} \delta S = \int dx^4 \delta \sqrt{-g} \left(\phi R + \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) + k^* L_m \right) \\ + \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} \left(\phi R_{\mu\nu} + \frac{\omega(\phi)}{\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + k^* \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}} \right) + \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \delta R_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $k^* = \frac{8\pi}{c^4}$. Manipulamos o último termo da equação acima, $\int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \delta R_{\mu\nu}$. Para tal usamos a identidade

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda - \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (3.25)$$

que nos permite escrever a variação do tensor de Ricci em duas partes

$$\int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \left(-\nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \right). \quad (3.26)$$

Para simplificar tal expressão, nos utilizaremos do teorema da divergência e chegamos em

$$\int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \phi \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \left(\partial_\lambda \phi \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\nu \phi \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda \right). \quad (3.27)$$

Com o uso da identidade

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{g^{\lambda\beta}}{2} (\nabla_\nu \delta g_{\beta\mu} + \nabla_\mu \delta g_{\nu\beta} - \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu}), \quad (3.28)$$

e da identidade $\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \partial_\mu \ln \sqrt{-g}$, com um pouco de manipulação finalmente chegamos em

$$\int \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi_\nu - g_{\mu\nu} \square \phi). \quad (3.29)$$

A expressão (3.29) nos permite obter a equação para o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\kappa^*}{\phi} T_{\mu\nu} - \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi) - \frac{g_{\mu\nu} V(\phi)}{2\phi} + \frac{1}{\phi} (g_{\mu\nu} \square \phi - \nabla_\mu \nabla_\nu \phi). \quad (3.30)$$

As equações relativas ao campo escalar são

$$R + \left(\frac{\omega(\phi)}{\phi^2} - \frac{1}{\phi} \frac{d\omega}{d\phi} \right) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2 \frac{\omega(\phi)}{\phi} \square \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.31)$$

que são obtidas facilmente utilizando o método variacional, ou equivalentemente a aplicação direta das equações de Euler-Lagrange.

Ao tomarmos o traço da equação (3.30), temos que

$$R = \frac{\kappa^*}{\phi} T - \frac{\omega}{\phi^2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi - 3 \frac{\square \phi}{\phi} + \frac{2V}{\phi}. \quad (3.32)$$

Com esta equação e a sentença (3.31) obtemos uma expressão somente com termos de campo escalar,

$$\square \phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left(\kappa^* T + 2V - \frac{dV}{d\phi} \phi - \frac{d\omega}{d\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right), \quad (3.33)$$

que determina a evolução de G .

3.5 Equações cosmológicas

Muitas das aplicações das teorias escalares-tensoriais se dão na cosmologia, como mencionamos anteriormente. Diversos tipos de problemas foram estudados, dentre eles: o universo permeado com um fluido do tipo poeira [54], o universo permeado com um fluido perfeito [55] e o universo no vácuo com uma constante cosmológica, [56].

Ilustraremos nesta seção uma solução em que o universo está no vácuo, sem a presença de uma constante cosmológica.¹ Neste caso, a interação do campo de Brans-Dicke com a métrica é responsável por produzir uma estrutura de espaço-tempo não trivial. Estas soluções foram obtidas primeiramente por O'Hanlon e Tupper [57].

Utilizando um elemento de linha do tipo Friedmann-Robertson Walker, como utilizado usualmente em cosmologia,

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.34)$$

nas equações de campo de Brans-Dicke, são obtidas as seguintes equações de movimento:

$$G_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{\kappa^*}{\phi} T_{00} - \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 3 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{V(\phi)}{2\phi}, \quad (3.35)$$

¹Este tipo de situação é interessante e é a que nos dedicaremos a estudar em capítulos futuros.

$$G_i^i = \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -\frac{\kappa^*}{\phi} T_i^i + \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{\square \phi}{\phi} - \frac{V(\phi)}{2\phi}. \quad (3.36)$$

Escrevendo a equação de G_0^0 , para esta configuração, temos

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\omega}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 3 \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi}, \quad (3.37)$$

ou de maneira equivalente,

$$-3 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 = \frac{2\omega - 3}{4} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2. \quad (3.38)$$

Assim, encontramos uma relação para o fator de Hubble, $H = \frac{\dot{a}}{a}$, como

$$H = \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3 - 2\omega}{12}} \right) \frac{\dot{\phi}}{\phi}, \quad (3.39)$$

esta relação nos permite encontrar a solução procurada para o fator de escala,

$$a(t) = C_0 \phi^{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-2\omega + 3}{12}}}. \quad (3.40)$$

Para encontrar a solução de $\phi(t)$, recorreremos à equação (3.33),

$$\ddot{\phi} = -3H\dot{\phi}. \quad (3.41)$$

Por conveniência, reescrevemos a equação anterior usando que $\frac{\dot{\phi}}{\phi} = \psi$, e chegamos na forma simplificada

$$\dot{\psi} = \left(\frac{1}{2} - 3\sqrt{\frac{-2\omega + 3}{12}} \right) \psi. \quad (3.42)$$

A solução é, então facilmente, encontrada como

$$\phi(t) = \phi_0(t - t_0)^s, \quad (3.43)$$

onde o parâmetro s é definido por

$$s_{\pm} = \frac{1 \mp \sqrt{3(-2\omega + 3)}}{(4 - 3\omega)}. \quad (3.44)$$

Testando $\phi = t^s$ e $a = t^q$ nas equações, encontramos uma relação entre q e s , $q = \frac{1-s}{3}$. Isso nos permite reescrever a solução como

$$a(t) = a_0(t - t_0)^{q_{\pm}} \quad (3.45)$$

e

$$q_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{3(-2\omega + 3)}}{2 \pm \sqrt{3(-2\omega + 3)}}. \quad (3.46)$$

Encontramos, portanto, dois pares de soluções, (s_+, q_+) e (s_-, q_-) , que são válidas para $\omega > -\frac{3}{2}$ e $\omega \neq 0, -\frac{3}{4}$, respectivamente. Segundo a literatura, estas soluções representam uma violação do princípio de Mach [58].

3.6 Limites sobre ω

Experimentos na escala do sistema solar impõem limites ao parâmetro ω . De acordo com estes resultados, a medida em o parâmetro ω cresce, as previsões da teoria de Brans-Dicke se aproximam das previsões da relatividade geral. Este resultado é um indicativo de que as teorias de Brans-Dicke convergiriam para a relatividade geral quando tomamos $\omega \rightarrow \infty$ [47]. Entretanto, nem sempre isso é verdade como é discutido nesta seção.

Na literatura, frequentemente encontramos a questão: "No limite $\omega \rightarrow \infty$, a teoria de Brans-Dicke se reduz à relatividade geral?". Ou ainda, quando a teoria de Brans-Dicke com um determinado conteúdo material é levada à teoria da relatividade geral com o mesmo conteúdo de matéria.

Faraoni [59] sugere uma explicação razoável para esta questão. Segundo ele, podemos entender o regime assintótico de ω em Brans-Dicke utilizando transformações conformes. O setor gravitacional das teorias de Brans-Dicke é conformalmente invariante diante de uma determinada classe de transformações conformes F_{α} . Assim, ao acrescentarmos um termo invariante conforme, como um $T_{\mu\nu}$ anti-simétrico, a invariância conforme da teoria de Brans-Dicke não é quebrada. Faraoni mostra então que o limite $\omega \rightarrow \bar{\omega}$ é equivalente a uma transformação conforme F_{α} .

Dessa maneira, quando partimos de uma teoria de Brans-Dicke onde todos os termos da ação respeitam essa invariância, o caso assintótico, $\omega \rightarrow \infty$, não pode levar à relatividade geral. Entretanto, se partimos de uma teoria de Brans-Dicke com um termo que quebre a invariância conforme, por exemplo, um tensor de energia-momento de traço não nulo, o limite $\omega \rightarrow \infty$ conduz à relatividade geral, ainda segundo Faraoni. Por exemplo, de acordo com [60], a solução de Brans-Dicke com poeira, $T_{\mu}^{\mu} \neq 0$, tem como limite assintótico de ω a solução da relatividade geral também com poeira.

CAPÍTULO 4

Teoria Escalar-Tensorial Geométrica

No capítulo anterior discutimos as principais propriedades das teorias escalar-tensoriais. Essas teorias diferem da relatividade geral, entre outros aspectos, por não promoverem uma descrição completamente geométrica da gravitação. Uma vez que além da métrica, essas teorias utilizam um campo escalar em sua construção, que não possui representação geométrica.

Uma maneira de atribuir um significado geométrico ao campo escalar, ou seja geometrizar-lo, é através do uso de espaços-tempos de Weyl integrável [61]. Para estudar a gravitação em espaços-tempo descritos por este tipo de geometria foram propostas algumas teorias. Uma das mais curiosas se constitui em reformular a relatividade geral nesta variedade [62]. Duas outras propostas conhecidas são as teorias de *WIST* desenvolvidas por M. Novello et. al., que discutiremos na próxima seção, e as Teorias Escalares Tensoriais Geométricas, que possuem como principal exemplo a teoria geométrica de Brans-Dicke, [12] e [63]. O exame das teorias escalares tensoriais geométricas constitui o principal objetivo deste capítulo.

4.1 Teorias WIST

Diversos tópicos foram estudados dentro do contexto das teorias *WIST*: soluções esfericamente simétricas [64], o problema do colapso gravitacional em geometria de Weyl [65], além de aplicações em problemas de Cosmologia.

A ação de uma teoria *WIST* na ausência de matéria é dada de maneira por

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[R + \lambda \phi_{||\alpha}^\alpha \right], \quad (4.1)$$

onde R é o escalar de curvatura de Weyl, λ é o fator de acoplamento, e ϕ , o campo escalar de Weyl. Podemos reescrever essa ação de uma maneira mais simples substituindo o termo $(\phi_{||\alpha}^\alpha)$ por $\partial_\alpha \partial^\alpha \phi$, pois ambos representam o mesmo fator a menos de uma divergência. Desta forma, podemos reescrever a ação de *WIST*,

$$\int dx^4 \sqrt{-g} (R + 2\lambda \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi). \quad (4.2)$$

Esta forma que pode ser encontrada na literatura [66]. Variando-se a ação (4.2) com respeito a métrica, obtemos a equação para o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \nabla_\nu \phi_\mu - (2\lambda - 1) \partial_\mu \partial_\nu \phi + \lambda g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi = 0. \quad (4.3)$$

Tomando a variação da ação com respeito ao campo escalar temos

$$\square \phi + \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi = 0. \quad (4.4)$$

Uma característica notável sobre da teoria de *WIST* fica evidente quando a consideramos no referencial de Riemann $(M, \gamma, 0)$:

$$\bar{S} = \int dx^4 \sqrt{-\gamma} e^\phi \left[\bar{R} + 2\lambda \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right], \quad (4.5)$$

onde $\bar{R}$ é o escalar de curvatura riemanniano. Podemos renomear $\Phi = e^\phi$ e ficamos com a ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-\gamma} \Phi \left[\bar{R} + 2\frac{\lambda}{\Phi} \gamma^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \right]. \quad (4.6)$$

Esta é a ação de Brans-Dicke. O resultado acima mostra que a teoria de Brans-Dicke pode ser interpretada como uma representação do modelo *WIST* em um referencial riemanniano.

Podemos, entretanto, enxergar a teoria de Brans-Dicke sobre outro ponto de vista, utilizando para isso o campo escalar geométrico de Weyl. A maneira mais formal de se geometrizar o campo de Brans-Dicke é através da aplicação do método de Palatini em teorias escalares tensoriais, como fazemos em seguida.

4.2 Formalismo de Palatini

Uma vez dada a ação de Einstein-Hilbert, podemos derivar as equações de campo por dois métodos variacionais diferentes. Um deles, o mais conhecido, é o formalismo métrico. Um de seus pressupostos é o uso da conexão de Levi-Civita, usual em geometria riemanniana. Assim a ação

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} R(g, \partial g), \quad (4.7)$$

é dependente da métrica e de suas derivadas. Dessa forma tomando a variação da ação com respeito a métrica, encontraremos as equações da relatividade geral.

A outra maneira de se derivar a equação de Einstein é utilizando o formalismo de Palatini. Nele conexão e métrica são entendidos como objetos independentes. A conexão não é imposta, mas deduzida pela variação da ação. Nesta ação,

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma), \quad (4.8)$$

o tensor de Ricci depende somente da conexão. Fazendo a variação de (4.8) com respeito a métrica obtemos a equação do tensor de Einstein, como esperado. Fazendo a variação da ação com respeito a conexão,

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Usando a identidade de Palatini [43]

$$\delta R_{\mu\lambda\nu}^\rho = \nabla_\lambda(\delta\Gamma_{\nu\mu}^\rho) - \nabla_\nu(\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\rho), \quad (4.10)$$

reescrevemos o tensor de Ricci da seguinte forma

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta\Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \nabla_\nu \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\alpha. \quad (4.11)$$

Substituindo (4.11) em (4.9), com um pouco de manipulação, chegamos na equação $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, que caracteriza a geometria riemanniana e portanto, o uso da conexão de Levi-Civita. Dessa forma ambos os formalismos, métrico e de Palatini, são equivalentes em relatividade geral.

Em teorias alternativas da Gravitação surgem diferenças entre estes dois procedimentos variacionais. O formalismo métrico pressupõe que a geometria seja riemanniana para qualquer teoria. No formalismo de Palatini, podemos identificar que cada teoria alternativa possui sua respectiva geometria.

4.3 Teorias escalares-tensoriais geométricas

Para responder a essa questão vamos entender o método variacional de Palatini, aplicando no caso específico das teorias escalares tensoriais. A ação que representa essa classe de teorias, como vista no capítulo anterior, tem a seguinte forma

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ \Phi R + \frac{\omega(\Phi)}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} - V(\Phi) \right\}. \quad (4.12)$$

Usando a prescrição $\Phi = e^{-\phi}$,

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} e^{-\phi} \{ R + \omega(\phi) g^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - e^\phi V(\phi) \}, \quad (4.13)$$

tomando a variação da conexão,

$$\delta S = \int dx^4 \sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} [\nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha]. \quad (4.14)$$

Para retirar os termos divergentes, lembramos de que a divergência de uma densidade tensorial de peso unitário, Θ^α , é dada por $\nabla_\alpha \Theta^\alpha = \Theta_{|\alpha}^\alpha$. Isto vem da definição de derivada covariante de uma densidade tensorial, que relembramos.

Definição: Seja Θ é uma densidade tensorial de peso W . Então, as componentes de sua derivada covariante são dadas por

$$\nabla_\alpha \Theta^\beta = \Theta_{|\alpha}^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta \Theta^\lambda - W \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \Theta^\beta. \quad (4.15)$$

Esta definição nos permite escrever (4.14) como,

$$\delta S = \int dx^4 [\nabla_\beta (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\beta}) \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \nabla_\alpha (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu}) \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha]. \quad (4.16)$$

Simetrizando o primeiro termo desta equação chegamos que

$$\delta S = \int dx^4 \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left[\frac{\delta_\alpha^\nu}{2} \nabla_\beta (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\beta}) + \frac{\delta_\alpha^\mu}{2} \nabla_\beta (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\nu\beta}) - \nabla_\alpha (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu}) \right]. \quad (4.17)$$

Multiplicando a equação anterior por δ_μ^α , deduzimos a expressão

$$\nabla_\alpha (\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\alpha\nu}) = 0. \quad (4.18)$$

Reorganizando esta expressão, temos que

$$-\phi_{|\alpha} g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\beta\lambda} \nabla_\alpha g^{\beta\lambda} g^{\mu\nu} + \nabla_\alpha g^{\mu\nu} = 0. \quad (4.19)$$

Multiplicando esta expressão por $g_{\mu\nu}$, encontramos que

$$\nabla_\alpha g^{\mu\nu} = -\phi_{|\alpha} g^{\mu\nu}. \quad (4.20)$$

ou equivalentemente $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \phi_\alpha g_{\mu\nu}$. Mostramos com este procedimento que a geometria é não riemanniana, e que o campo de Brans-Dicke é o próprio campo escalar de Weyl. Decorre, então, que as **teorias escalares-tensoriais** formuladas seguindo o princípio variacional de Palatini são **geométricas**, pois tanto a métrica quanto o campo escalar de Brans-Dicke fazem parte da variedade de Weyl integrável.

4.4 Equações de campo

Para obter as demais equações de movimento fazemos a variação da ação (4.13) com respeito a métrica,

$$G_{\mu\nu} = \omega(\phi) \left(\frac{1}{2} \phi_{|\alpha} \phi^{|\alpha} g_{\mu\nu} - \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} \right) - \frac{g_{\mu\nu}}{2} V(\phi) \quad (4.21)$$

e ao fazer a variação desta ação com relação ao campo escalar obtemos

$$\square\phi = - \left(1 + \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{d\phi} \right) \phi_{|\mu} \phi^{|\mu} - \frac{e^\phi}{\omega} \left(V + \frac{1}{2} \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (4.22)$$

Observamos que estas equações diferem das equações de campo da teoria de Brans-Dicke, mostradas no capítulo anterior. Quando examinamos a ação no referencial riemanniano, $(M, \gamma, 0)$, ela é dada por

$$\bar{S} = \int dx^4 \sqrt{-\gamma} \{ \bar{R}(\gamma, 0) + \omega(\phi) \gamma^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - V e^\phi \}. \quad (4.23)$$

Observamos que esta é a ação da relatividade geral interagindo minimamente com o campo escalar, de dinâmica não usual, pois seu termo cinético é modificado devido a função $\omega(\phi)$.

Para obtermos as equações de movimento, fazemos a variação da ação (4.23) com respeito a $g_{\mu\nu}$ e com respeito a ϕ . Assim chegamos, respectivamente, em

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \omega(\phi) \left(\frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} \phi_{|\alpha} \phi^{|\alpha} - \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} \right) - \frac{\gamma_{\mu\nu}}{2} e^{2\phi} V, \quad (4.24)$$

$$\bar{\square}\phi = - \left(\frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{d\phi} \right) \phi_{|\alpha} \phi^{|\alpha} - \frac{e^{2\phi}}{\omega} \left(V + \frac{1}{2} \frac{dV}{d\phi} \right), \quad (4.25)$$

onde $\bar{\square}$ é o operador d'alambertiano escrito com a métrica γ .

Por questões de completeza, comentamos sobre o acoplamento com a matéria. Usando ainda um referencial riemanniano, podemos acrescentar o termo de matéria, da mesma forma como fazemos usualmente na relatividade geral, ou seja,

$$\bar{S}_m = \kappa^* \int dx^4 \sqrt{-\bar{g}} L_m(\bar{g}, \Psi, \nabla\Psi) \quad (4.26)$$

que é equivalente ao termo

$$S_m = \kappa^* \int dx^4 \sqrt{-g} e^{-2\phi} L_m(\phi, g, \Psi, \nabla\Psi). \quad (4.27)$$

A inclusão desse termo mostra que acoplamento com a matéria, no referencial de Weyl, possui um peso relativo ao campo escalar, diferindo assim da forma como as teorias escalares tensoriais, usuais, se acoplam com a matéria.

Na nossa abordagem do método de Palatini assumimos que a geometria é determinada apenas pelo setor gravitacional, isto é, os campos g e ϕ . São estes campos que constroem a conexão de Weyl, e portanto, são eles que informam como devem ser as geodésicas métricas. A matéria, nesta formulação, não tem papel para determinar a geometria, dessa forma, ela se restringe a servir de fonte para a curvatura do espaço-tempo. Isso justifica a inclusão da matéria somente após a geometria ser identificada.

4.5 Soluções estudadas

Os casos estudados em Brans-Dicke geométrico [12] foram as solução esfericamente simétricas acopladas com campo escalar não massivo, caso em que $V = 0$. De maneira geral soluções esfericamente simétricas são importantes em gravitação, pois podem descrever estruturas de interesse físico como os buracos negros e como os buracos de minhoca.

Como mostramos anteriormente, o Brans-Dicke geométrico¹ em um referencial riemanniano é equivalente à relatividade geral com campo escalar. Sabemos porém que a relatividade geral minimamente acoplada com um campo escalar não massivo foi estudada anteriormente, por diferentes autores, mas a primeira versão dessa solução é devida a Fisher, [67], que posteriormente foi generalizada por Wymann [68].

As soluções de Brans-Dicke geométrico, no referencial riemanniano, são soluções do tipo Wymann. Elas nos levam a três situações físicas distintas: se $\omega = 0$ temos buracos negros, se $\omega > 0$, temos singularidades nuas. Para alguns de valores em que $\omega < 0$, podemos encontrar buracos de minhoca.

Uma vez que as teorias escalares tensoriais geométricas incorporam a simetria das transformações de Weyl, se estabelece uma equivalência Física entre todos os referenciais. Portanto, um fenômeno observado em um referencial deve ser visto por toda a classe de referenciais. Segundo [63], as três possibilidades de soluções esfericamente simétricas com campo escalar sem massa estão presentes no referencial de Weyl (M, g, ϕ) , obedecendo as mesmas condições para ω . Essa preservação da física mediante a mudança de referenciais é um ponto essencial que distingue as teorias escalares tensoriais geométricas das teorias escalares tensoriais usuais.

Outros casos importantes a serem estudados por uma teoria de gravitação escalar tensorial geométrica podem ser vistos em aplicações na cosmologia. Este é o objetivo dos próximos capítulos da tese.

¹Nesta tese chamamos de Brans-Dicke geométrico a teoria escalar tensorial em que $\omega(\phi)$ é uma constante.

CAPÍTULO 5

Cosmologia I: Transição de Fase geométrica

Neste capítulo, aplicamos a teoria escalar-tensorial geométrica , apresentada no capítulo anterior, em cenários cosmológicos. Como principal resultado, ilustramos a possibilidade do universo sofrer mudanças de fases geométricas, durante sua evolução, ou seja, mostramos que em determinados condições o universo sai de uma situação em que o espaço-tempo é caracterizada por uma geometria é de Riemann, e evolui para uma outra situação em que o espaço-tempo é descrito por uma variedade de Weyl integrável. Tal fenômeno, foi apresentado anteriormente, mas utilizando a teoria *WIST* [70].

Organizamos este capítulo da seguinte forma: na seção 1 apresentamos as equações de campo no contexto da cosmologia, e mostramos o método utilizado para encontrar as soluções. Na seção 2 analisamos o caso em que o potencial é a constante cosmológica e ilustramos como fazer a análise das soluções via sistema dinâmico. Nas seções 3, 4 e 5, utilizamos alguns potenciais conhecidos na literatura, encontramos as soluções de cada modelo e estudamos cada uma utilizando os diagramas de fase. Na seção 6 esquematizamos um novo modelo que guarda uma relação com a aceleração tardia do universo.

5.1 Modelos cosmológicos

A ação escalar tensorial geométrica no *frame* de Weyl (M, g, ϕ) é dada por

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left\{ e^{-\phi} [R + \omega \phi^{|\alpha} \phi_{|\alpha}] - V(\phi) \right\}, \quad (5.1)$$

e no referencial de Riemann, $(M, \gamma, 0)$ a ação tem a forma

$$\bar{S} = \int dx^4 \sqrt{-\gamma} [\bar{R} + \omega \gamma^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - e^{2\phi} V(\phi)]. \quad (5.2)$$

Como os dois referenciais são equivalentes, por simplicidade, escolhemos o referencial riemanniano para as nossas aplicações.¹

Estamos interessados em situações que ilustrem o processo de transição de fase geométrica, e por simplicidade trataremos de situações em que a influência da matéria é desprezada, trabalhamos com configurações de universos que surgem devido a interação da geometria, $g_{\mu\nu}$, com a geometria, ϕ . Estas situações são interessantes pois representam um tipo de universo que evolui somente por efeitos geométricos.

Consideraremos o espaço-tempo homogêneo e isotrópico, como determina a métrica de Friedmann-Robertson-Walker para um universo plano:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.3)$$

onde $a(t)$ representa o fator de escala. De acordo com o capítulo anterior, podemos escrever as equações que determinam a dinâmica do universo da seguinte maneira

$$3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{e^{2\phi}}{2} V(\phi), \quad (5.4)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{e^{2\phi}}{2} V(\phi). \quad (5.5)$$

A equação que determina a dinâmica do campo escalar é dada por

$$\ddot{\phi} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} = -\frac{e^{2\phi}}{\omega} \left(V(\phi) + \frac{1}{2} \frac{dV}{d\phi} \right). \quad (5.6)$$

5.1.1 Soluções usando o método do super-potencial

Para resolver o sistema de equações diferenciais, (5.4), (5.5) e (5.6), usamos o método do super-potencial [71, 72]. Este método se baseia na hipótese de que o parâmetro

¹Aqui estamos tomando ω constante.

de Hubble pode ser escrito como uma função do campo escalar, ou seja, $H = W(\phi)$, onde $W(\phi)$ é uma função denominada de super-potencial.

A escolha do super-potencial $W(\phi)$ determina o potencial $V(\phi)$. A equação do potencial em termos de $W(\phi)$ e suas derivadas é

$$V(\phi) = 2e^{-2\phi} \left(3W^2 - \frac{2}{\omega} W_\phi^2 \right). \quad (5.7)$$

Uma escolha conveniente do super potencial $W(\phi)$ permite obter o potencial $V(\phi)$, e o campo escalar pode ser encontrado pela equação²

$$\dot{H} = -\frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2, \quad (5.8)$$

que é obtida da manipulação de (5.4) e (5.5). Além disso, utilizando a hipótese $H = W(\phi)$, a equação (5.8) toma a forma

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{\omega} \frac{dW}{d\phi}. \quad (5.9)$$

Esta é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, que pode ser solucionada, em princípio. Uma vez que encontramos a função $\phi(t)$, o fator de escala fica estabelecido a partir de (5.8) com a seguinte expressão

$$a(t) = \exp\left[\int_{t_0}^t dt W(t)\right], \quad (5.10)$$

uma vez que $H = W(\phi)$.

5.2 A constante cosmológica

Como primeiro caso de estudo, vamos considerar um universo dominado pela constante cosmológica no referencial de Riemann. Para isso utilizamos o potencial da forma $V(\phi) = e^{-2\phi}\Lambda$ no referencial de Weyl.

As primeiras soluções que descrevem um universo permeado pela constante cosmológica, foram encontradas em 1917 por W. de Sitter. Essas soluções são importantes pois contêm elementos que inspiraram alguns modelos inflacionários [73]. No nosso caso, essas soluções aparecem como um caso particular do modelo.

²Para deduzir a expressão (5.7) aplicamos (5.9) em (5.4) e usamos a hipótese $H = W(\phi)$.

Voltando nossa atenção para as buscas de solução, consideramos o seguinte sistema dinâmico definindo as funções $\theta = 3H$ e $\psi = \dot{\phi}$,

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{\omega}{2}\psi^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (5.11)$$

$$2\frac{\dot{\theta}}{3} + \frac{\theta^2}{3} = -\frac{\omega}{2}\psi^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (5.12)$$

$$\dot{\psi} + \theta\psi = 0. \quad (5.13)$$

A função θ denota o parâmetro de expansão do universo, definido por definição $\theta = \nabla_\mu U^\mu$, onde U^μ corresponde à quadri-velocidade de um observador co-móvel, cujas componentes são expressas em termos da métrica γ , que como vimos, é invariante por transformações de Weyl. Assim, θ é um objeto invariante por transformações de Weyl. Usando θ e ψ nos diagramas de fase, podemos descrever de maneira equivalente o comportamento do universo nos *frames* de Weyl e de Riemann.

Uma vez obtido o sistema de equações, buscamos suas soluções. Para este caso encontraremos um espectro de soluções que dependem dos sinais de ω e Λ .

5.2.1 Soluções do sistema

Em primeiro lugar, consideremos o simples caso no qual $\psi = 0$. Obtemos dois pares de soluções da forma:

$$a_\pm(t) = a_0 \exp\left(\pm\sqrt{\frac{\Lambda}{6}}t\right), \quad \phi = \phi_0. \quad (5.14)$$

A solução denotada por (a_+, ϕ_0) corresponde a um universo em expansão do tipo de Sitter. A outra solução (a_-, ϕ_0) corresponde a um universo em contração do tipo anti-de Sitter.

No caso mais geral, é possível obter soluções do sistema de equações a partir de (5.11), (5.12) e (5.13) chegando ao par de equações desacopladas,

$$\dot{\theta} = \frac{3\Lambda}{2} - 9\theta^2, \quad (5.15)$$

$$\dot{\psi} = \pm\psi\sqrt{\frac{3\omega\psi^2}{2} + 3\frac{\Lambda}{2}}. \quad (5.16)$$

As soluções encontradas para este sistema dependem do sinais de ω e Λ . Para $\omega < 0$ e $\Lambda > 0$, obtemos as seguintes funções

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}}(t - t_0)\right), \quad (5.17)$$

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{|\omega|}} \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right), \quad (5.18)$$

que correspondem a dois pares de soluções

$$a(t) = a_0 \left[\cosh \left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) \right]^{1/3}, \quad (5.19)$$

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_0 \pm \sqrt{\frac{2}{3|\omega|}} \arctan \left[\sinh \left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) \right]. \quad (5.20)$$

O fator de escala indica que em um período $t < t_0$ o universo sofre uma contração, $\theta(t) < 0$, atingindo um tamanho mínimo, a_0 , em $t = t_0$. Imediatamente depois deste instante, $t > t_0$, o universo tem um período de expansão acelerada. Este par de comportamentos caracteriza um universo não singular com *bouncing*.

A solução do campo escalar, $\phi(t)$, corresponde a um Universo que experimenta uma transição de fase geométrica. A fase riemanniana ocorre somente para tempos assintóticos. Nessas assíntotas o universo é do tipo de Sitter (anti-de Sitter). A fase de Weyl é mais expressiva no momento em que o universo atinge sua máxima contração, $t = t_0$, onde $\dot{\phi}(t_0)$ possui seu máximo valor.

Este modelo é, portanto, um modelo tipo *bouncing* com transição de fase geométrica.

Outro tipo de soluções interessantes são obtidas quando $\omega > 0$ e $\Lambda < 0$, cenário no qual o universo experimenta uma sucessão periódica de ciclos caracterizados por um *big bang* seguido de um *big crunch*, sendo portanto um universo n-singular. Os ciclos experimentados por este sistema satisfazem as expressões

$$\theta(t) = \sqrt{-\frac{3\Lambda}{2}} \tan \left[\sqrt{\frac{-3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right], \quad (5.21)$$

$$\psi(t) = \pm \sqrt{-\frac{\Lambda}{\omega}} \sec \left[\sqrt{\frac{-3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right]. \quad (5.22)$$

e as correspondentes soluções

$$a(t) = a_0 \left| \cos \left(\sqrt{-\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) \right|^{1/3}, \quad (5.23)$$

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_0 \pm \sqrt{\frac{2}{3\omega}} \ln \left| \sec \left(\sqrt{\frac{-3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) + \tan \left(\sqrt{\frac{-3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) \right|. \quad (5.24)$$

Percebemos, nesta solução, que o campo de Weyl cresce indefinidamente a medida que o universo colapsa, e que este universo não possui uma fase riemanniana, uma vez que $\psi(t)$ nunca se anula para este caso.

No outro caso, em que $\Lambda > 0$ e $\omega > 0$, as funções $\theta(t)$ e $\psi(t)$ são

$$\theta(t) = \frac{1}{3} \coth \left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right), \quad (5.25)$$

$$\psi(t) = \pm \sqrt{\frac{\Lambda}{\omega}} \operatorname{cosech} \left(\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right). \quad (5.26)$$

e as soluções para os fatores de escala e o campo escalar são

$$a(t) = a_0 \sinh \left| \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right|^{1/3}, \quad (5.27)$$

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_0 \pm \frac{2}{3\omega} \ln \left| \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}} (t - t_0) \right) \right|. \quad (5.28)$$

Este par de soluções descreve um universo singular com *bouncing*. Para tempos muito grandes, o sistema evolui para uma configuração de universo tipo de Sitter quando $t \rightarrow +\infty$, ou anti-de Sitter quando $t \rightarrow -\infty$. Em ambos os limites a variedade que descreve o universo tende a ser riemanniana. No instante $t = t_0$, o universo apresenta uma singularidade e o campo escalar diverge.

O último caso analisado, quando $\Lambda = 0$ e $\omega \neq 0$, nos leva às seguintes soluções

$$a(t) = a_0 (t - t_0)^{1/3}, \quad (5.29)$$

$$\phi_{\pm}(t) = \phi_0 \pm \sqrt{\frac{2}{3\omega}} \ln |(t - t_0)|, \quad (5.30)$$

que representam uma expansão do universo sem fase inflacionária [74].

5.2.2 Diagramas de fase

Nesta seção, analisamos os sistemas dinâmicos correspondentes aos casos apresentados na seção anterior. As equações como vimos anteriormente são

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{\omega}{2} \psi^2 + \frac{\Lambda}{2}, \quad (5.31)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{2} - \frac{3\omega}{4} \psi^2 + \frac{3\Lambda}{4}, \quad (5.32)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi. \quad (5.33)$$

Do ponto de vista da análise de sistemas dinâmicos, as equações (5.32) e (5.33) determinam o campo vetorial no plano de fase. A equação (5.31) fornece uma relação de vínculo entre as variáveis θ e ψ . As soluções físicas correspondem às curvas integrais $(\psi(t), \theta(t))$ que satisfazem as três equações anteriores, simultaneamente.

Os pontos de equilíbrio, (ψ_0, θ_0) , são importantes na descrição do comportamento das soluções do sistema dinâmico. Estes pontos, por definição, cumprem com as condições $\dot{\psi}(\psi_0, \theta_0) = 0$ e $\dot{\theta}(\psi_0, \theta_0) = 0$.

Nos casos em que $\Lambda > 0$ temos quatro pontos de equilíbrio, dois deles são soluções e estão representados, um pela letra A (espaço-tempo do tipo de Sitter) e o outro pela letra B (espaço-tempo do tipo anti- de Sitter). Estes dois pontos correspondem às nossas soluções particulares para $\psi = 0$. Os outros dois pontos de equilíbrio não cumprem com a equação de vínculo, e portanto não fazem parte da solução física do sistema. Nos gráficos que seguem, os pontos A e B correspondem respectivamente as coordenadas $(0, \sqrt{\frac{3\Lambda}{2}})$ e $(0, -\sqrt{\frac{3\Lambda}{2}})$.

Ilustramos abaixo o gráfico para o caso em que $\omega < 0$ e $\Lambda > 0$. As soluções (5.19) e (5.20) estão representadas pelas curvas integrais, semi-elipses, que saem do ponto B e chegam ao ponto A . A semi-elipse a esquerda esta ligada a ϕ_+ e a semi-elipse a direita esta ligada a ϕ_- .

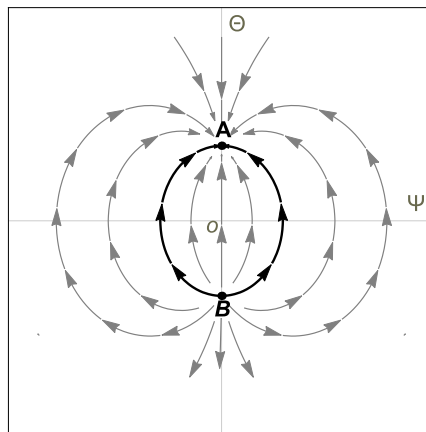


Figura 5.1: Plano de fase para $\Lambda > 0$ e $\omega < 0$.

Notemos ainda que o ponto A , onde as curvas integrais chegam, representa um ponto de equilíbrio estável, enquanto que o ponto B , onde as curvas integrais saem, representa um ponto de equilíbrio instável. Dessa maneira a solução representada por B ,

universo em Riemanniano em contração, ao sofrer pequenas flutuações leva o sistema a experimentar uma transição de fase geométrica, como indicado pelas linhas de campo que formam a elipse. Assintoticamente, no termino da transição o universo torna-se novamente riemanniano e entra numa fase de expansão.

No gráfico seguinte ilustramos o caso em que $\omega > 0$ e $\Lambda < 0$. As soluções (5.23) e (5.24) estão representadas pelas linhas escuras. Não temos pontos críticos, uma vez que $\Lambda < 0$. A figura ilustra um universo que evolui de uma singularidade inicial em $t \rightarrow -\infty$ que evolui para uma singularidade final quando $t \rightarrow +\infty$. Como o campo ψ nunca é nulo, não há transição de fase geométrica e o universo sempre está na fase de Weyl.

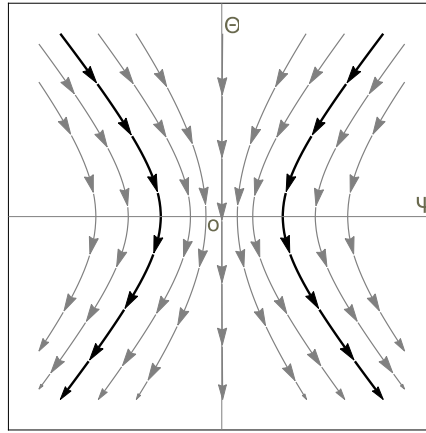


Figura 5.2: Plano de fase para $\Lambda < 0$ e $\omega > 0$.

Na figura abaixo mostramos o comportamento do sistema para $\omega > 0$ e $\Lambda > 0$. As soluções (5.27) e (5.28) são as hipérboles em negrito desenhadas no diagrama de fase. Neste caso o ponto crítico B representa um universo riemanniano anti-de Sitter, que ao sofrer perturbações evolui para universo de Weyl colapsante. O ponto crítico, A , representa um universo riemanniano de Sitter, que vem de uma fase de Weyl singular.

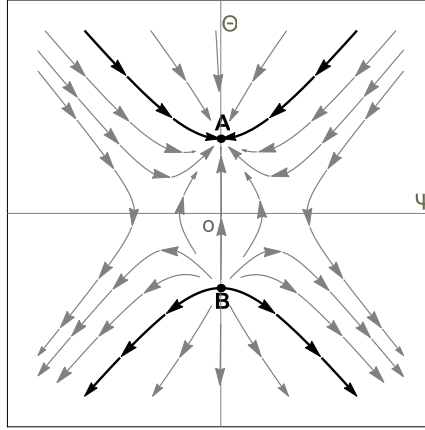


Figura 5.3: Plano de fase para $\omega > 0$ e $\Lambda > 0$.

O gráfico para $\omega > 0$ e $\Lambda = 0$ está disposto abaixo. Neste caso a equação de vínculo se reduz ao par de retas $\theta = \pm \sqrt{\frac{3\omega}{2}}\psi$ e os pontos críticos se degeneram: $A \rightarrow (0, 0)$ e $B \rightarrow (0, 0)$. Portanto a origem do sistema de coordenadas é o único ponto crítico, que corresponde a um espaço-tempo de Minkowski. As soluções (5.29) e (5.30) são as retas desenhadas no gráfico de fase. Para $t > t_0$ estas soluções ligam um universo de Weyl que começa com um *big bang*, ao universo de Minkowski para $t \rightarrow \infty$. Por outro lado para $t < t_0$, temos um universo de Minkowski, que evolui para um *big crunch* em $t \rightarrow t_0$.

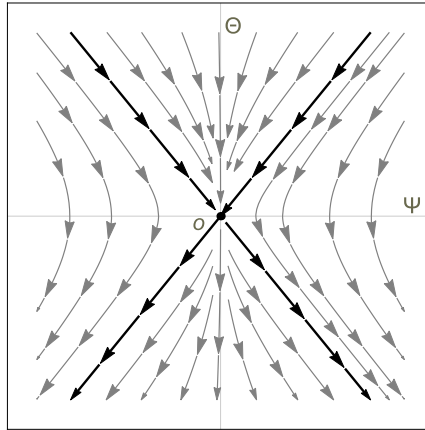


Figura 5.4: Plano de fase para $\omega > 0$ e $\Lambda = 0$.

A situação em que $\Lambda < 0$ e $\omega < 0$, possui soluções que não satisfazem as condições impostas pela equação de vínculo (5.11), portanto não são analisadas aqui.

É importante destacar o fato de que muitas das soluções descritas aqui, para o universo governado pela constante cosmológica, foram obtidos também em outro contexto, usando *string cosmology* [75]. Destacamos ainda que o estudo da constante cosmológica em teorias escalares tensoriais foi analisado em [76], e as soluções encontradas possuem o

comportamento similar aos apresentados nesta seção.

5.3 Potencial $m\phi^2$

Potenciais massivos são conhecidos na literatura [77], e são importantes em modelos de inflação. Consideremos, agora, o seguinte modelo de potencial é massivo,

$$V(\phi) = e^{-\phi} \left(\frac{m^2 \phi^2}{2} + \Lambda \right). \quad (5.34)$$

A solução deste caso pode ser obtida utilizando o formalismo de primeira ordem. Utilizando o super-potencial $W = \alpha\phi$, reescrevemos o potencial

$$U(\phi) = 6\alpha^2 \phi^2 + \frac{4\alpha^2}{\omega}, \quad (5.35)$$

onde parâmetro α fica determinado pela relação $\alpha = \pm \frac{m}{\sqrt{6}}$ e a constante cosmológica $\Lambda = -\frac{4\alpha^2}{\omega}$ ou simplificada por $\Lambda = -\frac{2m^2}{3\omega}$. As soluções correspondentes ao campo escalar³ são

$$\phi(t)_+ = \phi_0 + 3\frac{\Lambda}{m\sqrt{6}}(t - t_0), \quad \phi(t)_- = \phi_0 - 3\frac{\Lambda}{m\sqrt{6}}(t - t_0). \quad (5.36)$$

Estas soluções representam um universo sem fase riemanniana. As soluções para os fatores de escala são

$$a(t)_\pm = a_0 \exp \left(\pm \frac{m}{\sqrt{6}} \phi_0 (t - t_0) + \frac{\Lambda}{4} (t - t_0)^2 \right), \quad (5.37)$$

que expressa um universo crescente para $t > t_0$ e decrescente para $t < t_0$. Para desenhar o diagrama de fase reescrevemos as equações de campo na forma:

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{\omega}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} (m^2 \phi^2 + \Lambda), \quad (5.38)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{2} - 3\frac{\omega}{4} \psi^2 + \frac{3}{4} (m^2 \phi^2 + \Lambda), \quad (5.39)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi - \frac{m^2}{\omega} \phi. \quad (5.40)$$

Para escrever as equações que representam o sistema dinâmico substituímos o campo escalar, $\phi = \pm \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2}{3} \theta^2 - \omega \psi^2 - \Lambda}$, na equação de vínculo (5.38). Isso nos leva em dois diagramas de fase distintos, um para $\phi > 0$, outro para $\phi < 0$.

³Em termos do parâmetro α as soluções podem ser escritas como $\phi(t) = \phi_0 + 3\frac{\alpha\Lambda}{m^2}(t - t_0)$. O sinal de α define se ϕ_+ ou ϕ_- .

$$\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\omega\psi^2, \quad (5.41)$$

$$\dot{\psi}_{\pm} = -\theta\psi \pm \frac{m^2}{\omega} \sqrt{\frac{1}{m^2} \left(\frac{2}{3}\theta^2 - \omega\psi^2 - \Lambda \right)}. \quad (5.42)$$

Dispomos os gráficos dos retratos de fase abaixo. Em cada um deles desenhamos as duas soluções ϕ_+ e ϕ_-

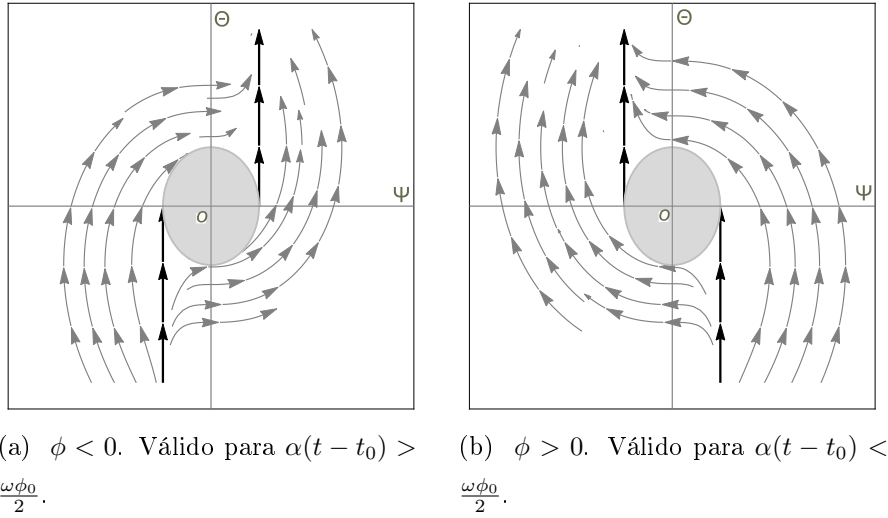


Figura 5.5: Diagrama de fase para $U = \frac{m^2}{2} + \Lambda$.

Nos gráficos anteriores, observamos uma região elíptica sombreada, onde o sistema não está definido. Esta região obedece a equação $\frac{2}{3}\theta^2 - \omega\psi^2 < \Lambda$. Os pontos críticos $\psi = 0$ e $\theta = \pm\sqrt{\frac{3}{2}\Lambda}$ estão situados nas elipses e constituem soluções para o caso particular, visto anteriormente, em que $\phi(t) = 0$.

As soluções (5.37) e (5.36) estão representadas pelas retas $\psi_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{2m}{3|\omega|}}$. Estas soluções são contínuas com respeito ao parâmetro t . Para ilustrar isso, observamos a semi-reta $\psi_+ = \sqrt{\frac{2m}{3|\omega|}}$ a direita da figura 5.5a, válida para $t - t_0 < -\frac{\phi_0}{3\Lambda}\sqrt{6}m$, que se conecta com a semi-reta $\psi_+ = \sqrt{\frac{2m}{3|\omega|}}$ a direita da figura 5.5b, no instante $t = t_0 - \frac{\phi_0}{3\Lambda}\sqrt{6}m$. De maneira semelhante a solução relativa a $\psi_- = -\sqrt{\frac{2m}{3|\omega|}}$, semi-reta a esquerda em 5.5a, se conecta temporalmente com a solução $\psi_- = -\sqrt{\frac{2m}{3|\omega|}}$ em 5.5b, quando $t = t_0 + \frac{\phi_0}{3\Lambda}\sqrt{6}m$.

Por fim, as figuras nos ajudam a concluir que este é um universo eternamente na fase de Weyl e sem singularidade, com períodos de contração e de expansão.

5.4 Potencial quártico

Modelos com potenciais polinomiais foram muito estudados principalmente para obtenção de resultados analíticos em cenários de inflação [78]. Um exemplo típico desta classe de potenciais é dado por

$$V(\phi) = 2\lambda(\phi^2 - \beta)^2 e^{-2\phi}. \quad (5.43)$$

Em teorias escalares-tensoriais este potencial é motivado por uma tentativa de se aproximar a gravitação das interações fundamentais [50, 79].

Usando o método do super-potencial, escolhemos $W(\phi) = A\phi^2 + B$ para buscar as soluções das equações de campo. Temos assim as seguintes equações

$$\dot{\phi} = -\frac{4}{\omega}\phi, \quad (5.44)$$

$$\theta = 3A\phi^2 + 3B. \quad (5.45)$$

Impondo as seguintes condições: $A^2 = \frac{\lambda}{3}$, $\beta = \frac{2}{3\omega}$ e $B^2 = A^2\beta^2$. Encontramos as soluções inflacionários

$$\phi(t) = \phi_0 \exp\left(-\frac{4A}{\omega}(t - t_0)\right), \quad (5.46)$$

$$a(t) = a_0 \exp\left\{-\frac{\omega\phi_0^2}{8}\left[\exp\left(-\frac{8A}{\omega}(t - t_0)\right) - 1\right] + B(t - t_0)\right\}. \quad (5.47)$$

Para fazer o estudo do sistema dinâmico, trabalhamos com as equações

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{\omega}{2}\psi^2 + \lambda(\phi^2 - \beta)^2, \quad (5.48)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{\theta^2}{2} - \frac{3\omega}{4}\psi^2 + \frac{3\lambda}{2}(\phi^2 - \beta)^2, \quad (5.49)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi - \frac{4\lambda}{\omega}\phi(\phi^2 - \beta). \quad (5.50)$$

Escrevemos as equações (5.49) e (5.50) substituindo ϕ e $(\phi^2 - \beta)$, utilizando para isto a equação de vínculo (5.48). Dessa maneira, obtemos as seguintes equações para o sistema dinâmico:

$$\dot{\theta} = -\frac{3}{2}\omega\psi^2, \quad (5.51)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi - \left[\pm\frac{4\lambda}{\omega}\sqrt{\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\theta^2}{3} - \frac{\omega}{2}\psi^2\right)} + \beta}\right]\left[\pm\sqrt{\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\theta^2}{3} - \frac{\omega}{2}\psi^2\right)}\right]. \quad (5.52)$$

Temos quatro pares de equações, que dependem dos sinais das raízes contidas na equação (5.52). O primeiro par de sinais $\pm$ define dois sistemas dinâmicos, que estão associados aos sinais de ϕ . Os outros dois pares de sinais são associados, simultaneamente, da seguinte forma: $+$, se $\phi^2 - \beta > 0$, ou, $-$, se $\phi^2 - \beta < 0$. Temos com isso quatro distintos planos de fase.

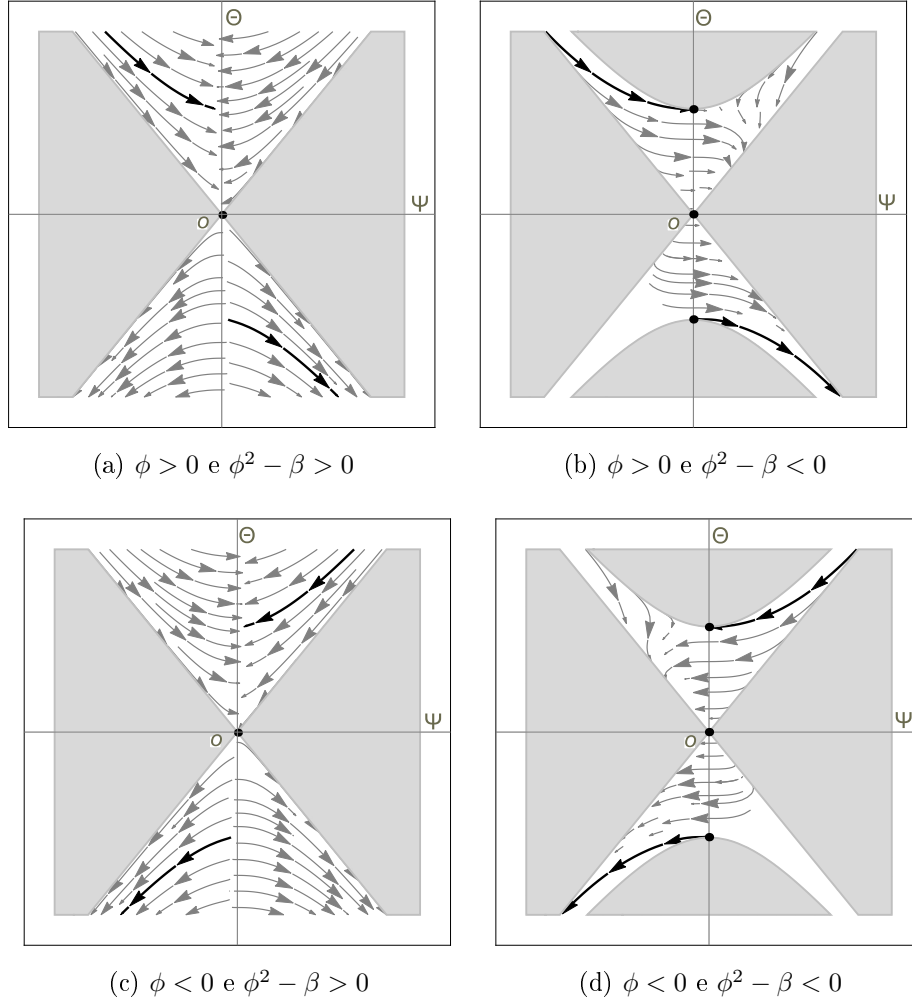


Figura 5.6: Planos de fase para o potencial quártico.

Observando os planos de fase dispostos acima, o ponto crítico $(0, 0)$ pertence aos quatro planos de fase e corresponde a um espaço-tempo de Minkowski. Este ponto crítico ocorre quando $\phi = \pm\sqrt{\beta}$, como pode ser observado através da equação de vínculo (5.48). Em particular, há um par de pontos críticos que só estão presentes para os planos de fase (5.6b) e (5.6d), onde temos $\phi^2 - \beta < 0$. Estes pontos são: $(0, \beta\sqrt{3\lambda})$, universo de de Sitter, e $(0, -\beta\sqrt{3\lambda})$, universo anti-de Sitter.

Outra característica importante, nos diagramas acima, são as regiões em que o sistema dinâmico não está definido, que ocorrem devido a presença de raízes quadradas

em (5.52). Dessa maneira, as soluções estão definidas para região interna do "cone de luz" que é dado pela equação $\theta^2 \geq 3\frac{\omega}{2}\psi^2$, presente em todos os planos de fase. Além disso para os diagramas (5.6b) e (5.6d) notamos a presença de uma região hiperbólica onde o sistema dinâmico também não está definido. Esta região é dada por $\sqrt{\frac{1}{\lambda}(\frac{\theta^2}{3} - \frac{\omega}{2}\psi^2)} \leq \beta$, que é uma consequência de $\phi^2 - \beta < 0$.

Nos gráficos do sistema dinâmico as soluções analíticas são representadas por parábolas da forma

$$\theta(t) = 3B + 3A\phi_0^2 \exp\left(-\frac{8A}{\omega}(t - t_0)\right). \quad (5.53)$$

Onde as constantes A e B devem ter o mesmo sinal, sem esta condição as soluções acessam às regiões excluídas.

Para entender com detalhe essas soluções tomemos o caso em que $A > 0$ e $\phi > 0$, que implica em $\theta > 0$ e $\psi < 0$. Para estas condições, a solução analítica está representada na curva em negrito presente no segundo quadrante das figuras (1.5a) e (1.5b).

Na figura (1.5a) temos a situação em que $\phi^2 - \beta > 0$. Esta solução, válida para $t - t_0 \leq \frac{-\omega}{8A} \ln \left| \frac{-\beta}{\phi_0^2} \right|$, representa um universo que vem de uma singularidade. Na figura (1.5b) temos a situação em que $\phi^2 - \beta < 0$. Esta solução, válida para $t - t_0 \geq \frac{-\omega}{8A} \ln \left| \frac{-\beta}{\phi_0^2} \right|$, corresponde a continuação da curva na figura anterior e representa um universo assintoticamente de Sitter, ao atingir o ponto crítico estável $(0, \beta\sqrt{3\lambda})$. Estas duas soluções, presentes nas figuras em questão, se complementam e exibem a transição de fase geométrica, indo de uma geometria de Weyl para uma geometria Riemanniana.

Analisando o caso em que $A < 0$ e $\phi > 0$, temos as curvas parabólicas com $\theta < 0$ e $\psi > 0$, que estão desenhadas em preto no quarto quadrante das figuras (1.5a) e (1.5b). Novamente quando $\phi^2 - \beta < 0$, situação representada na figura (1.5b), temos uma solução que sai do ponto crítico instável $(0, -\beta\sqrt{3\lambda})$ e se conecta suavemente à curva parabólica destacada em negrito e desenhada na figura (1.5a), válida para $\phi^2 - \beta > 0$. O instante em que a solução sai de uma curva e vai para a outra é dado por $t = t_0 + \frac{\omega}{8A} \ln \left| \frac{\beta}{\phi_0^2} \right|$. Neste caso, a transição de fase geométrica ocorre de Riemman para Weyl.

De maneira análoga devemos entender o comportamento do sistema dinâmico para os casos em que o campo $\phi < 0$, situações representadas pelas figuras (1.5c) e (1.5d). Podemos perceber a presença da simetria $\psi \rightarrow -\psi$ quando comparamos as figuras (1.5a) e (1.5b) com as figuras (1.5c) e (1.5d), e esta é basicamente a diferença

entre os comportamentos das soluções para $\phi > 0$ em relação as soluções para $\phi < 0$.

5.4.1 Potencial exponencial

Apresentamos, nesta seção, um modelo que possui um potencial muito usado em inflação, o potencial exponencial [80,81]. Modelos com potenciais deste tipo representam um caso diferenciado, em que o universo cresce seguindo uma lei de potencia [82]. O potencial em questão é escrito da seguinte forma

$$V(\phi) = V_0 \exp(-(\lambda + 2)\phi), \quad (5.54)$$

onde V_0 e λ são positivos não nulos.

Utilizando o formalismo de primeira ordem, com $W = \alpha e^{\beta\phi}$, com α e β constantes a determinar. Chegamos no sistema de equações

$$\dot{\phi} = -\frac{2\alpha\beta}{\omega} e^{\beta\phi}, \quad (5.55)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \alpha e^{\beta\phi}. \quad (5.56)$$

Identificamos facilmente $\alpha = \pm \sqrt{\frac{V_0}{\omega(6\omega - \lambda^2)}}$ e $\beta = \frac{\lambda}{2}$, e encontramos os pares de soluções

$$a_{\pm}(t) = a_0 \left(\pm \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{V_0}{\omega(6\omega - \lambda^2)}} e^{-\lambda\phi_0/2}(t - t_0) + 1 \right)^{\frac{2\omega}{\lambda^2}}, \quad (5.57)$$

$$\phi_{\pm}(t) = \frac{2}{\lambda} \ln \left| \pm \sqrt{\frac{V_0}{\omega(6\omega - \lambda^2)}} (t - t_0) + e^{\frac{\lambda\phi_0}{2}} \right|. \quad (5.58)$$

Onde o par $(a_+(t), \phi_+(t))$, vale para $t > t_0$ e o par $(a_-(t), \phi_-(t))$ vale para $t < t_0$. Uma das principais características desse modelo é que não há regime que a saída da inflação [83].

Observamos ainda que essas soluções são válidas em duas situações distintas, dependendo de ω . A primeira delas, quando $\omega > \frac{\lambda^2}{6}$. Nesta situação devemos escolher o fator λ de maneira a satisfazer $\frac{2\omega}{\lambda^2} > 1$, garantindo a inflação do universo [84]. A outra situação, descrita quando $\omega < 0$.

Contudo, independente da escolha de ω , o fator de expansão pode é dado por

$$\theta_{\pm}(t) = \theta_0 e^{-\frac{\lambda}{2}\phi_0} \left(\pm \frac{\lambda^2}{2} \sqrt{\frac{V_0}{\omega(6\omega - \lambda^2)}} e^{-\frac{\lambda}{2}\phi_0}(t - t_0) + 1 \right)^{-1}. \quad (5.59)$$

Para analisar o retrato de fase recorreremos as equações do sistema nas variáveis θ e ψ dispostas abaixo

$$\dot{\theta} = \frac{\theta^2}{2} - \frac{3}{4}\omega\psi^2 + \frac{3}{4}V_0e^{-\lambda\phi}, \quad (5.60)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi + \frac{\lambda}{2\omega}V_0e^{-\lambda\phi}, \quad (5.61)$$

$$\frac{\theta^2}{3} = \frac{\omega}{2}\psi^2 + \frac{V_0}{2}e^{\lambda\phi}. \quad (5.62)$$

Manipulando as equações acima, chegamos no sistema dinâmico:

$$\dot{\theta} = -\frac{3\omega}{2}\psi^2, \quad (5.63)$$

$$\dot{\psi} = -\theta\psi + \frac{\lambda}{3\omega}\theta^2 - \frac{\lambda}{2}\psi^2. \quad (5.64)$$

Observando o diagrama de fase do sistema, cujas figuras estão dispostas abaixo, temos as soluções representadas por retas do tipo $\theta = \frac{3\omega}{\lambda}\psi$.⁴ Para $\omega > \frac{\lambda^2}{6}$, a solução (ψ_+, θ_+) esta representada pela semi-reta que ocupa o primeiro quadrante da figura 5.7(a), e corresponde à um universo que vem de uma singularidade num tempo finito, atingindo assintoticamente, $t \rightarrow +\infty$, o ponto de equilíbrio em $(0,0)$, um espaço-tempo de Minkowski. Ainda no caso $\omega > \frac{\lambda^2}{6}$, a solução (ψ_-, θ_-) é representada pela semi-reta desenha no terceiro quadrante da figura 5.7(a), corresponde à um universo que sai de um espaço de Minkowski, em $t \rightarrow -\infty$, e evolui para uma singularidade futura, *Big Rip*.

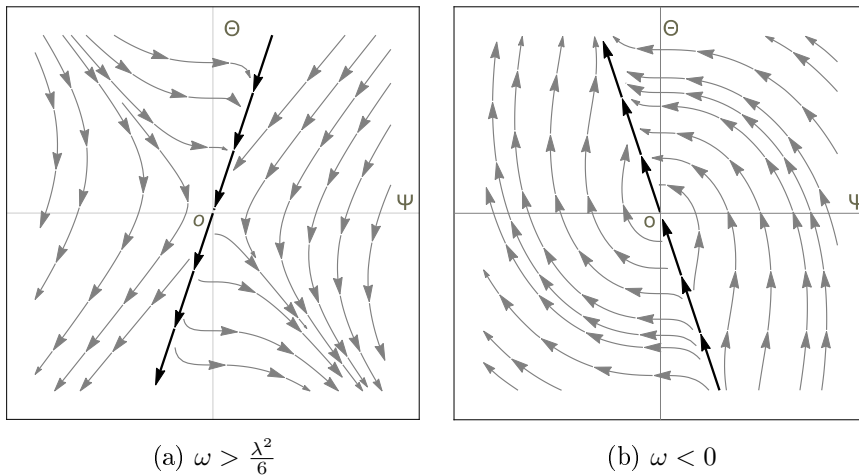


Figura 5.7: Planos de fase para o potencial tipo exponencial.

Analogamente, o retrato de fase para as soluções com $\omega < 0$ são compostas de duas semi-retas. No quarto quadrante da figura 5.7(b) temos a semi-reta correspondente

⁴Usamos a notação $\psi_{\pm} = \dot{\phi}_{\pm}$ e $\theta_{\pm} = 3\frac{\dot{a}_{\pm}}{a_{\pm}}$, por conveniência.

a (ψ_+, θ_+) , que mostram um universo que começa de uma singularidade num tempo finito, e evolui para uma espaço-tempo de Minkowski $t \rightarrow +\infty$. No segundo quadrante da figura 5.7(b) temos uma semi-reta para a solução (ψ_-, θ_-) , que representa o universo evoluindo do espaço-tempo de Minkowski, em $t \rightarrow -\infty$, para uma singularidade num tempo finito.

Neste modelo a transição de fase geométrica ocorre apenas assintoticamente, e nos gráficos acima ela é representada pela passagem das soluções pela origem. Dois perfis de transição podem ser identificados, soluções que partem da fase de Riemman para a fase de Weyl, que são as semi-retas saindo da origem, e soluções que partem da fase de Weyl para a fase de Riemman, que são as semi-retas chegando na origem.

5.5 A transição de fase geométrica e a aceleração tardia do universo

Nas outras seções deste capítulo, utilizamos potenciais conhecidos em inflação para construir modelos em Brans-Dicke geométrico, investigando a possibilidade transição de geometria em diversos casos. Nesta seção adotamos uma postura diferente, motivados pelo fenômeno da transição de fase geométrica, construímos uma classe de *toy models*, que qualitativamente passamos a descrever.

Partimos de um campo $\phi(t)$ que exhibe um perfil de transição de fase geométrica, dado por

$$\phi(t) = \sigma \tanh^{2p+1}(\beta(t - t_0)). \quad (5.65)$$

Onde p é um inteiro positivo. Esta forma do campo escalar é conhecida em estudos de defeitos topológicos, [85], e também em outros contextos [86]. O valor de p em (5.65) particulariza uma determinada forma de transição de fase. Se $p \neq 0$, temos classes de modelos que descrevem uma quadrupla transição de fase geométrica. Este tipo de comportamento é distinto dos exibidos nos exemplos anteriores. Na construção destes modelos admitimos sempre $\omega < 0$.

De acordo com as figuras abaixo, a transição se inicia para um tempo finito, $t < t_0$, quando o universo atravessa uma primeira mudança de fase, de uma geometria de Riemann para uma geometria de Weyl. A medida em que o tempo se aproxima do instante $t = t_0$, o universo evolui em direção a uma fase instantaneamente riemanniana,

onde ocorre uma segunda transição. Após o instante $t = t_0$, o universo sofre outra mudança geométrica, entrando na fase de Weyl, que só termina assintoticamente quando o universo volta ser riemanniano.

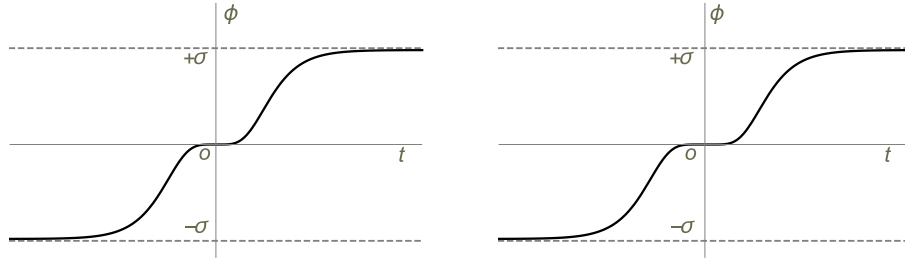


Figura 5.8: Gráficos de $\phi(t)$ para $p = 2$ (a esquerda) e $p = 3$ (a direita). Nota-se que quanto maior o valor de p , maior o período aproximadamente Riemanniano. Aqui usamos $t_0 = 0$.

O fator de expansão deste modelo é dado por

$$\theta_p(t) = \frac{3\omega\sigma^2\beta}{2} (2p+1)^2 \left\{ +\frac{1}{4p+3} \tanh^{4p+3}[\beta(t-t_0)] - \frac{1}{4p+1} \tanh^{4p+1}[\beta(t-t_0)] \right\}. \quad (5.66)$$

Analisando $\theta_p(t)$, temos que o universo assintoticamente em $t \rightarrow -\infty$, se contrai a uma taxa constante. Para $t < 0$ o universo se contrai em um ritmo cada vez uma taxa menor. A medida que se aproxima do instante $t = t_0$, o universo, começa entrar numa fase de contração muito lenta, e em $t = t_0$, o universo é instantaneamente estático e o espaço-tempo é do tipo Minkowski. Imediatamente depois, deste instante o universo experimenta uma fase em que lentamente se expande. A medida que o tempo passa a taxa de expansão torna-se cada vez maior. Quando $t \rightarrow \infty$, assintoticamente, o universo entra em uma fase estacionária de expansão.

5.5.1 Caso $p=0$

Analisando o caso em que $p = 0$. O campo escalar é dado por $\phi(t) = \sigma \tanh[\beta(t-t_0)]$. Ele conecta um universo anti-de Sitter, $t \rightarrow -\infty$, a um universo assintoticamente de Sitter, $t \rightarrow +\infty$. Para estabelecer essa ligação, o campo ϕ passa por uma região intermediária, num tempo finito, em que o universo é instantaneamente do tipo Minkowski, $t = t_0$. Este comportamento é ilustrado na figura abaixo.

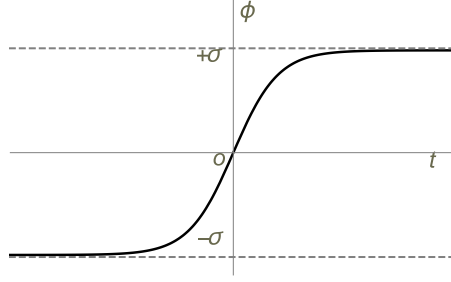


Figura 5.9: Caso $p = 0$. A fase Riemanniano só ocorre assintoticamente. Tomando $t_0 = 0$.

Este modelo é caracterizado pelo seguinte potencial

$$V(\phi) = 6e^{-2\phi} \left[\frac{\omega\beta}{6} \left(3\sigma\phi - \frac{\phi^3}{\sigma} \right) \right]^2 - \omega\sigma^2\beta^2 e^{-2\phi} \left(1 - \frac{\phi^2}{\sigma^2} \right)^2, \quad (5.67)$$

que possui mínimos degenerados, como podemos ver na figura 5.10.

O fator de expansão é

$$\theta(t) = \frac{3\sigma^2\beta\omega}{2} \left\{ \frac{\tanh^3[\beta(t-t_0)]}{3} - \tanh[\beta(t-t_0)] \right\}. \quad (5.68)$$

Neste caso o universo se contrai para tempos $t < 0$. Em $t = t_0$ o espaço-tempo é do tipo Minkowski, e o campo de Weyl assume seu maior valor.

Como podemos observar, este caso nos leva a um universo não singular que sofre *bouncing*, como ilustra o fator de escala abaixo.

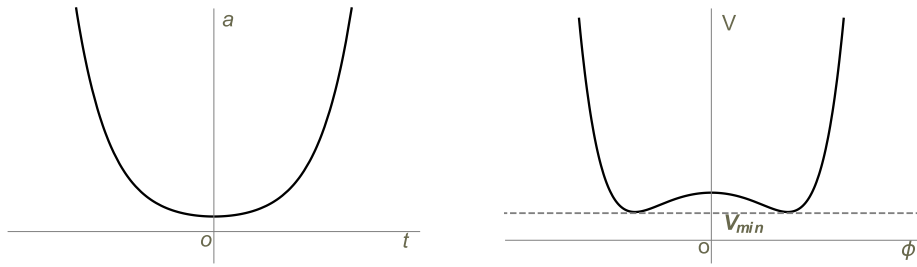


Figura 5.10: À esquerda ilustramos o fator de escala e à direita ilustramos o potencial.

5.5.2 Uma variação do caso $p=0$

Uma variação do modelo $p = 0$, conservando ainda o perfil de transição de fase geométrica em que $\phi(t) = \sigma \tanh[\beta(t-t_0)]$, pode ser feito considerando o seguinte potencial

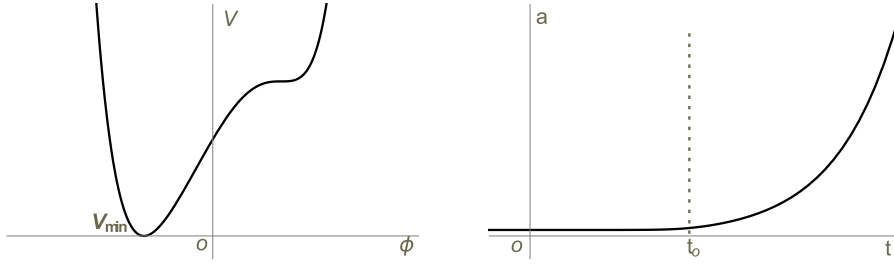


Figura 5.11: O perfil do fator de escala e do potencial para $\alpha = -\frac{\sigma^2\beta\omega}{3}$.

$$V(\phi) = 6e^{-2\phi} \left[\alpha - \frac{\omega\beta}{6} \left(3\sigma\phi - \frac{\phi^3}{\sigma} \right) \right]^2 - \omega\sigma^2\beta^2 e^{-2\phi} \left(1 - \frac{\phi^2}{\sigma^2} \right)^2. \quad (5.69)$$

Neste caso o fator de escala, expresso por

$$a(t) = a_0 \left\{ \tanh^2(\beta(t - t_0)) - 1 \right\}^{\frac{\sigma^2\omega}{6}} \exp\left\{ \beta(t - t_0) - \frac{\sigma^2\omega}{12} \tanh^2[\beta(t - t_0)] \right\}. \quad (5.70)$$

Este fator de escala é desenhado na figura seguinte e mostra um universo eterno, que em um instante $t = t_0$ inicia uma rápida expansão.

Podemos modificar o comportamento desse potencial, bem como o do sistema, ao escolhemos os fatores α, β, σ . Um caso particular, corresponde a $\alpha = \frac{-\sigma^2\omega}{3}$, onde $\omega < 0$. Na figura acima dispomos o potencial, observamos que ele ganha uma assimetria devido ao fator α .

É importante destacarmos que o modelo apresentado nessa seção, válido com um p qualquer, foi desenvolvido anteriormente no âmbito da Relatividade Geral, [87], onde foi salientado a possibilidade de aplicação na descrição da aceleração causada pela energia escura. Aqui desenvolvemos, apenas, uma variação estalecida no âmbito das teorias escalares tensoriais geométricas.

Verificamos um outro modelo similar ao nosso para $p = 0$, [88, 89]. Nele se utiliza *string-cosmology*, com o intuito descrever a aceleração devido a energia escura. Dessa maneira, isso indica que nosso modelo p está relacionado com a aceleração tardia do universo, e que portanto seja capaz de descrever uma transição de fase geométrica atual.

CAPÍTULO 6

Cosmologia II : Universos com dimensões extras

Devido à forte motivação das teorias de cordas, bem como das teorias de unificação, e também devido às perspectivas de que as dimensões extras possam fornecer novos cenários, onde muita física pode ser desenvolvida [90], espaços-tempo multidimensionais têm sido muito estudados em Gravitação.

Em cosmologia, as diferentes propostas de inclusão de dimensões extras no espaço-tempo têm sido usadas em busca de explicações para os problemas do universo observado [91,92]. Dentre os vários modelos, existe um em particular, o modelo de Chodos-Detweiler [93] que fornece uma possível explicação para a não observação das dimensões extras.

Neste capítulo desenvolvemos um modelo inspirado nestas ideias, para estudar um espaço-tempo n -dimensional anisotrópico. Com este objetivo, usamos as teorias escalares tensoriais estendidas para variedades com n dimensões espaciais. Assim, organizamos os capítulos da seguinte forma: na seção 1 revisamos o modelo de Chodos-Detweiler, na seção 2 estendemos a ação de Brans-Dicke geométrico; na seção 3 apresentamos modelo de universo estudado; na seção 4 mostramos os resultados obtidos.

6.1 Universo modelado segundo Chodos-Detweiler

O modelo de dimensões extras de nosso interesse foi proposto por Alan Chodos e Steven Detweiler no final da década de 70 [93]. Originalmente, este modelo assume um espaço-tempo penta-dimensional, onde a dimensão temporal possui a topologia dos reais onde as dimensões espaciais são compactas, circularmente simétricas, possuindo um tamanho finito, L .

Ao estudar um universo penta-dimensional no vazio a equação de Einstein é reduzida a

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (6.1)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$. A solução deste problema é dada pela seguinte métrica

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{t}{t_0}\right) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \left(\frac{t_0}{t}\right) dy^2. \quad (6.2)$$

Em verdade, esta métrica nada mais é do que a solução particular do modelo de Kasner [94] para um universo com uma dimensão extra. As soluções do tipo Kasner são para espaços-tempos anisotrópicos. No modelo que estamos apresentando a anisotropia está presente devido a presença da dimensão extra.

Observando a métrica (6.2), o tempo $t = t_0$ é o instante primordial em que o universo é plano. Para instantes de tempo muito maiores que t_0 , o universo é efetivamente quadri-dimensional, pois os efeitos da dimensão extra vão desaparecendo, a medida em que $t \rightarrow +\infty$.

Este fenômeno que ocorre com o espaço-tempo é chamado de compactação dinâmica das dimensões extras¹, e tem inspirado muitos trabalhos. Uma possibilidade interessante é que essa anisotropia nas dimensões extras pode produzir cenários de universo acelerado [95, 96].

6.2 Brans-Dicke geométrico em n dimensões

Para tratar de universos que possuem uma anisotropia na dimensão extra usando Brans-Dicke geométrico, precisamos estendê-las, uma vez que em sua formulação, o espaço-tempo é quadridimensional.

¹O termo em inglês para este fenômeno é *compactification*, aqui usamos a palavra compactação.

Partimos da ação de Brans-Dicke aplicada a uma variedade n-dimensional, dada por

$$S = \int dx^n \sqrt{-g} \left\{ \Phi R - \frac{\omega}{\Phi} g^{\mu\nu} \Phi_{|\mu} \Phi_{|\nu} - V(\Phi) \right\}. \quad (6.3)$$

De maneira semelhante aos capítulos anteriores, adotamos a prescrição $\Phi = e^{-\phi}$ e reescrevemos a ação

$$S = \int dx^n \sqrt{-g} e^{-\phi} \left(R + \omega g^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - e^{\phi} V(\phi) \right). \quad (6.4)$$

Ao fazermos a variação de Palatini seguindo o capítulo 3, chegamos na equação de compatibilidade de Weyl

$$\nabla_{\alpha} g_{\mu\nu} = \frac{2}{n-2} \phi_{|\alpha} g_{\mu\nu}. \quad (6.5)$$

Assim, esta variedade n-dimensional, que estamos a tratar, possui uma geometria de Weyl integrável onde campo de Weyl pode ser identificado por $\psi = \frac{2}{n-2} \phi$. Para cada dimensão o campo de Weyl possui um peso distinto relativo ao campo ϕ . Desta maneira o campo ψ só é exatamente o campo de Brans-Dicke quando $n = 4$. Para o caso em que $n = 2$, não podemos associar uma geometria de Weyl à variedade.

As transformações de Weyl são dadas utilizando o campo ψ , da forma

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (6.6)$$

$$\bar{\psi} = \psi + f. \quad (6.7)$$

Utilizando estas transformações reescrevemos a ação no *frame* riemanniano $(M, \bar{g}, 0)$ como

$$S = \int dx^n \sqrt{\bar{g}} \left(\bar{R} + \omega \phi_{|\mu} \phi^{|\mu} + e^{\frac{n\phi}{n-2}} V(\phi) \right), \quad (6.8)$$

As equações de campo relativas à esta ação são

$$G_{\mu\nu} = -\omega \left(\phi_{|\mu} \phi_{|\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \phi_{|\mu} \phi^{|\mu} \right) - \frac{e^{\frac{n\phi}{n-2}}}{2} g_{\mu\nu} V(\phi), \quad (6.9)$$

$$\bar{\square} \phi = -\frac{1}{2\omega} \frac{d\omega}{d\phi} \phi_{|\mu} \phi^{|\mu} - \frac{e^{\frac{n\phi}{n-2}}}{\omega} \left(\frac{dV}{d\phi} + \frac{n}{n-2} V \right). \quad (6.10)$$

Para a análise que segue usamos o Brans-Dicke geométrico, assim ω é constante, e trabalharemos no vazio, $V = 0$. Desta forma, as equações relativas à métrica são equivalentes à equação

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\omega \phi_{|\mu} \phi_{|\nu}. \quad (6.11)$$

ou ainda no *frame* de Weyl $R_{\mu\nu} = -\omega\phi_{|\mu}\phi_{|\nu}$. Isso é de certa forma uma generalização da situação de Chodos em que $R_{\mu\nu} = 0$. Aqui o campo escalar atua como uma matéria de origem geométrica.

6.3 Modelo cosmológico

Inspirados no modelo de Chodos-Detweiler, consideramos um espaço tempo com 3 dimensões espaciais usuais e $n-4$ dimensões extras compactas, descrito pela métrica

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - b(t)^2 \sum_{i=0}^{n-4} dy_i^2. \quad (6.12)$$

O termo $a(t)$ é o fator de escala relativo às dimensões espaciais usuais e $b(t)$ representa o fator de escala das dimensões extras, fornecendo assim uma anisotropia no espaço-tempo.

Calculando o tensor de Einstein, temos as equações

$$G_{00} = 3H_a^2 + \frac{(n-4)(n-5)}{2}H_b^2 + 3(n-4)H_aH_b = \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2} \quad (6.13)$$

$$G_{ii} = 2\dot{H}_a^2 - 3H_a^2 + (n-4)\dot{H}_b + \frac{(n-3)(n-4)}{2}H_b^2 - 2(n-4)H_aH_b = -\frac{\omega\dot{\phi}^2}{2}, \quad (6.14)$$

$$G_{jj} = 3\dot{H}_a + 6H_a^2 + (n-5)\dot{H}_b + \frac{(n-5)(n-4)}{2}H_b^2 + 3(n-5)H_aH_b = -\frac{\omega\dot{\phi}}{2}, \quad (6.15)$$

$$\ddot{\phi} + 3H_a\dot{\phi} + (n-4)H_b\dot{\phi} = 0. \quad (6.16)$$

Onde $H_a = \frac{\dot{a}}{a}$ e $H_b = \frac{\dot{b}}{b}$. Na seção seguinte mostramos o método usado para solucionar o sistema de equações não-lineares acima.

6.4 Soluções clássicas

Podemos combinar as equações anteriores, substituindo a equação de vínculo (6.13) em (6.14) e (6.15). Desta forma, encontramos o par de equações,

$$2\dot{H}_a + (n-4)\dot{H}_b + 6H_a^2 + 5(n-4)H_aH_b + (n-4)^2H_b^2 = 0, \quad (6.17)$$

$$3\dot{H}_a + (n-5)\dot{H}_b + 9H_a^2 + 3(2n-9)H_aH_b + (n-5)(n-4)H_b^2 = 0. \quad (6.18)$$

Manipulando as equações anteriores chegamos na expressão

$$H_b = -\frac{1}{n-4} \left\{ \frac{\dot{H}_a}{H_a} + 3H_a \right\}, \quad (6.19)$$

que mostra H_b em termos de H_a e $\dot{H}_a$. Derivando (6.19) em relação ao tempo, encontramos a expressão para $\dot{H}_b$ em função das combinações de H_a e de suas derivadas,

$$\dot{H}_b = \frac{-1}{n-4} \left\{ \frac{\ddot{H}_a}{H_a} - \left(\frac{\dot{H}_a}{H_a} \right)^2 + 3\dot{H}_a \right\}. \quad (6.20)$$

6.4.1 Soluções singulares I

Com as equações anteriores (6.19) e (6.20), reescrevemos a equação (6.17), da seguinte forma

$$\frac{\ddot{H}_a}{H_a} = 2 \frac{\dot{H}_a}{H_a}. \quad (6.21)$$

Com a solução da equação acima (6.21), encontramos $b(t)$ a partir de (6.17), e $\phi(t)$ a partir de (6.16). O conjunto particular destas soluções é dado por

$$a(t) = a_0 |C(t - t_0) - 1|^{1/6}, \quad b(t) = b_0 |C(t - t_0) - 1|^{1/2(n-4)}, \quad (6.22)$$

o campo escalar correspondente estes fatores de escala é

$$\phi(t) = \phi_0 \mp \sqrt{\frac{1}{\omega} \left(\frac{2}{3} + \frac{n-5}{4(n-4)} \right)} \ln |C(t - t_0) - 1|. \quad (6.23)$$

Onde a_0 , b_0 , ϕ_0 são respectivamente os valores de $a(t)$, $b(t)$ e $\phi(t)$ no instante $t = t_0$, e C é uma constante de integração. Essas soluções resolvem as equações originais (6.13), (6.14), (6.15), (6.16), e neste tomamos estas soluções para $t > t_0 + 1/C$.

A particularidade destas soluções reside no fato de que quando $n = 7$, caso em que o universo possui 3 dimensões extras, a dinâmica dos dois fatores de escala é idêntica. Estas soluções representam um universo singular, que sofre uma expansão anisotrópica e valem somente para $\omega > 0$.

Examinando as soluções percebemos que há um determinado instante de tempo, t_E , em que o universo é instantaneamente isotópico. Este instante de tempo pode ser facilmente calculado ao igualarmos os fatores de escala a e b . Assim, encontramos a seguinte expressão

$$t_E = t_0 + \frac{1}{C} \left[1 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^{\frac{6(n-4)}{7-n}} \right]. \quad (6.24)$$

Por (6.24) notamos que este instante t_E depende do número de dimensões extras do universo. Entretanto, para o caso particular em que $a_0 = b_0$, não há dependência de n .

O comportamento do universo, como ilustramos no gráfico abaixo, depende sensivelmente do número de dimensões extras. Se $n < 7$, por exemplo $n = 6$, o fator de escala $a(t)$ é maior que o fator de escala $b(t)$ para instantes de tempo $t < t_E$. Para instantes de tempo posteriores, $t > t_E$, o tamanho de $b(t)$ supera o tamanho de $a(t)$. Dessa forma, neste cenário os efeitos das dimensões extras se tornam mais evidentes a medida que o universo evolui.

Se $n = 7$, o universo é eternamente isotrópico. Se por outro lado, $n > 7$, como por exemplo $n = 11$, o fator de escala $a(t)$ é menor que o fator de escala $b(t)$, para $t < t_E$. Depois deste instante, $a(t)$ se torna maior que $b(t)$. Assim neste caso, as dimensões extras tem efeitos menos evidentes em instantes de tempo posteriores a t_E .

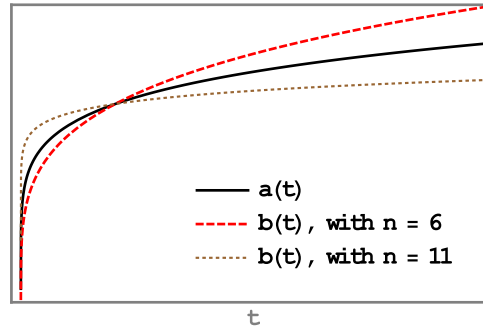


Figura 6.1: Fatores de escala (6.22)

6.4.2 Soluções singulares II

Podemos ainda obter outra classe de soluções, manipulando as equações (6.17), (6.18). Obtendo H_a , em função de H_b e $\dot{H}_b$:

$$H_a = -\frac{1}{3} \left\{ \frac{\dot{H}_b}{H_b} + (n-4)H_b \right\}. \quad (6.25)$$

Procedendo de maneira similar a seção anterior, encontramos $\dot{H}_a$ em função dos fatores $H_b, \dot{H}_b, \ddot{H}_b$, dada pela expressão

$$\frac{\ddot{H}_b}{H_b} = 2 \left(\frac{\dot{H}_b}{H_b} \right)^2. \quad (6.26)$$

Encontramos, então, o seguinte par de soluções

$$a(t) = a_0 |C(t - t_0) - 1|^{\frac{10-n}{18}}, \quad b(t) = b_0 |C(t - t_0) - 1|^{\frac{1}{6}}. \quad (6.27)$$

e a solução do campo escalar dada por:

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{20 + 17n - n^2}{2\omega}} \ln |C(t - t_0) - 1|. \quad (6.28)$$

Essas soluções também descrevem um universo singular. Contudo, a evolução deste universo é distinta da solução anterior (6.22),(6.23). Desenhemos o gráfico para as soluções (6.27), para n particulares.

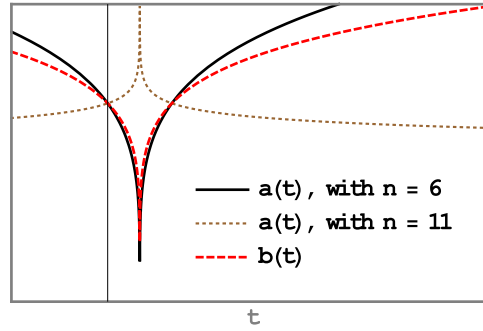


Figura 6.2: Fatores de escala (6.27)

Podemos inferir do gráfico (6.2) algumas informações. Se $n < 10$ as dimensões extras possuem um fator de escala $b(t)$ que é inicialmente maior que o fator de escala $a(t)$ das dimensões usuais, $b(t) > a(t)$. À medida que o universo evolui notamos que $a(t) > b(t)$. Se $n > 10$, então inicialmente $a(t) > b(t)$ e à medida que o tempo passa a situação tende a se inverter, ou seja, $b(t) > a(t)$. Para uma solução consistente do campo escalar devemos observar o domínio de ω , se $n < 19$ então $\omega > 0$ e se $n \geq 19$ então $\omega < 0$. Entretanto, notamos que o espaço-tempo apresenta uma singularidade no instante $t \rightarrow t_0 + 1/C$ independente do número de dimensões extras.

De acordo com as soluções (6.27), um caso peculiar ocorre quando $n = 10$. Nesta situação o fator de escala tridimensional é constante, porém à medida que o tempo t se aproxima do instante $t = t_0 + 1/C$, como podemos ver na figura abaixo, o fator de escala ligado às dimensões extras diminui. Isto mostra a ocorrência da compactação dinâmica das dimensões extras. Este fenômeno parece ocorrer num universo primitivo ou pre-inflacionário.

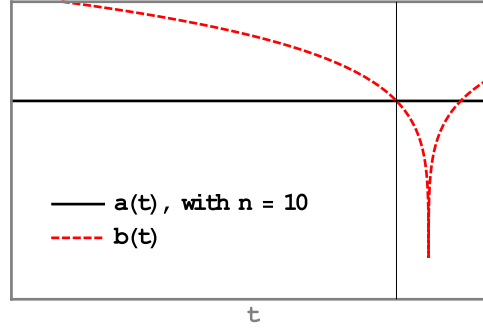


Figura 6.3: Fatores de escala para $n = 10$.

6.4.3 Soluções tipo de Sitter

Uma solução simples para o sistema de equações (6.13), (6.14), (6.15), (6.16) pode ser encontrada ao tomarmos H_a constante, $H_a = H_0$. Isso nos permite encontrar dois conjuntos de soluções, o primeiro deles é dado por

$$a(t) = a_0 \exp[\Lambda_a(t - t_0)], \quad b(t) = b_0 \exp[-\Lambda_b(t - t_0)], \quad (6.29)$$

$$\phi(t) = \phi_0 + D(t - t_0). \quad (6.30)$$

e o segundo deles é

$$a(t) = a_0 \exp[-\Lambda_a(t - t_0)], \quad b(t) = b_0 \exp[\Lambda_b(t - t_0)], \quad (6.31)$$

$$\phi(t) = \phi_0 + D(t - t_0). \quad (6.32)$$

Onde definimos

$$\Lambda_a = \sqrt{\frac{-(n-4)D^2\omega}{3(n-1)}}, \quad \Lambda_b = \sqrt{\frac{-3D^2\omega}{(n-4)(n-1)}}. \quad (6.33)$$

O parâmetro D é uma constante de integração. Estas soluções somente são válidas para $\omega < 0$. O primeiro par de soluções (6.29) representa um universo onde a parte tridimensional está em expansão, enquanto que as demais dimensões espaciais estão se contraindo. Isto corresponde ao fenômeno da compactação dimensões das dimensões extras. O segundo par de soluções (6.31) representa um cenário inverso, em que as dimensões extras expandem e as três dimensões espaciais usuais se contraem. Ambas as soluções estão representadas no gráfico seguinte e nenhuma delas é singular.

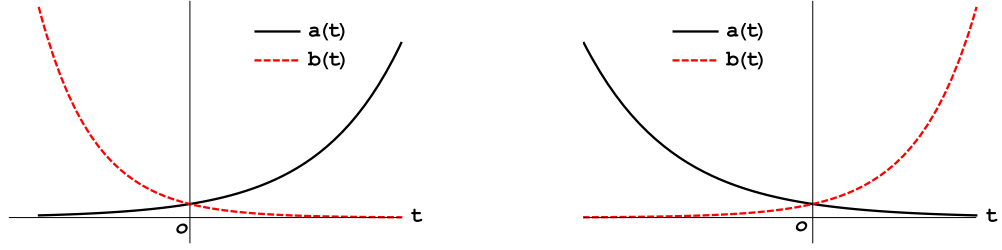


Figura 6.4: Da esquerda para direita, os fatores de escala (6.29) e (6.31) respectivamente

6.4.4 Análise do fator de expansão

De maneira a termos uma ideia do comportamento global deste universo anisotrópico, recorreremos a análise do fator de expansão para cada solução apresentada.

O fator de expansão para o elemento de linha em (6.12) é dado pela expressão

$$\theta_n = 6H_a + 2(n-4)H_b, \quad (6.34)$$

Para as soluções singulares (6.22) e (6.27) tem a forma

$$\theta_n = \frac{3}{C|t-t_0| - 1} \quad (6.35)$$

que nos indica um movimento de contração do universo com o tempo. As soluções do tipo de Sitter, nos levam a um fator de expansão

$$\theta_n = 0, \quad (6.36)$$

que nos indica que o universo tem sempre o mesmo volume.

CAPÍTULO 7

Cosmologia quântica

No capítulo anterior, estudamos o universo em n dimensões utilizando uma teoria escalar tensorial geométrica. Verificamos a existência de soluções singulares e de soluções ligadas ao fenômeno da compactação dinâmica das dimensões extras.

Neste capítulo, pretendemos estudar o mesmo sistema, considerando um regime quântico. O objetivo deste estudo é verificar se o fenômeno de compactação ocorre neste novo cenário.

Com este intuito, usamos a abordagem da Cosmologia Quântica. Nas primeiras seções deste capítulo apresentamos alguns pontos necessários para a utilização desta abordagem. Após isto, mostramos a aplicação da teoria ao nosso caso.

7.1 Aspectos gerais da Cosmologia Quântica

A Cosmologia Quântica é a aplicação da mecânica quântica aos modelos de universo da cosmologia, e serve para descrever situações como as singularidades no espaço-tempo ou mesmo auxiliar no entendimento de aspectos do começo do universo.

Esta linha de pesquisa se inicia na década de 60, marcada por três trabalhos independentes de Bryce DeWitt, de J. A. Wheeler e de C.W. Misner [99–101]. Vinte anos

depois, a cosmologia quântica ganha uma nova impulsão, com os trabalhos de J. Hartle, Hawking e Vilenkin [102, 103].

Para descrever um sistema quântico, em geral, precisamos utilizar um processo de quantização. O método de quantização usado neste trabalho é o canônico, em consonância com os trabalhos [104] e [105], por exemplo. A equação resultante do processo de quantização é chamada de equação de Wheeler-DeWitt. E a função Ψ solução desta equação é chamada de função de onda do universo. Ela é objeto fundamental na teoria, pois nos permite inferir sobre as propriedades do universo.

Dois problemas básicos surgem nesta abordagem. Um deles a nível conceitual, o problema da interpretação quântica, que está ligado à função de onda do universo. O outro de natureza mais técnica é o problema do tempo, que está relacionado com a equação de Wheeler-DeWitt. Discutimos mais estes problemas a seguir.

7.1.1 Interpretações da Cosmologia Quântica

Em cosmologia quântica a interpretação de Copenhagen não é adequada, pois necessita, entre outras coisas, de um observador externo ao universo. Então utiliza-se as interpretações alternativas da mecânica quântica. Neste trabalho são usadas a interpretação de muitos mundos [106] e a interpretação de de Broglie-Bohm [107, 108]¹

O principal problema com a interpretação de Copenhagen é a necessidade de incorporar um sistema clássico, que interage com o sistema quântico para realização de medidas. Esta interpretação leva a questões complicadas, por exemplo: Como algum estado deste sistema pode ser medido se não existe um aparato externo ao universo? Como podemos falar no colapso da função de onda do universo?.

A idéia de muitos mundos, sugerida por H. Everett [106] em seus estudos sob a orientação de J. Wheeler, tinha o intuito de propor uma nova interpretação para a cosmologia quântica. Esta abordagem tinha como objetivo definir uma mecânica quântica para estudar sistemas físicos fechados, que não interagem com um sistema clássico externo. Nesta abordagem as ferramentas matemáticas usadas são as mesmas da mecânica quântica usual, não existe uma parte clássica externa ao sistema, e consequentemente não há o colapso da função de onda [109].

¹Deixaremos a mecânica quântica de Bohm-de Broglie para discutir na seção 5.

O nome muitos mundos é dado a essa interpretação, pois cada auto-estado ocorre em um determinado universo. No contexto de cosmologia quântica, nos interessa saber que nesta interpretação os valores esperados continuam a descrever comportamento do universo na escala quântica.

7.1.2 O problema do tempo

O problema do tempo ocorre na equação de Wheeler-de Witt, uma vez que esta não possui um parâmetro para descrever a evolução do sistema. Para contornar essa situação, pode-se acrescentar matéria ao universo de maneira a termos outro grau de liberdade, identificado este como tempo. Outra forma de tentar resolver esta questão é pelo uso do campo escalar, presente em teorias escalares-tensoriais, como um parâmetro de evolução [110]. Dentro desta abordagem, podemos utilizar o modelo de Brans-Dicke geométrico em cosmologia quântica segundo os estudos [111] e mostrar uma saída equivalente.

7.2 Examinando o universo n dimensional anisotrópico

Nesta e nas seções seguintes abordamos a versão quântica do universo n dimensional anisotrópico. Para isso consideremos o elemento de linha

$$ds^2 = N(t)^2 dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2) - b(t)^2 \sum_{i=0}^{n-4} dy_i^2. \quad (7.1)$$

O fator $N(t)$ denota a função lapso,² $a(t)$ e $b(t)$ são os fatores de escala da dimensão usual e da dimensão extra respectivamente. Com essa métrica reescrevemos o escalar de Ricci, da forma

$$\bar{R} = \frac{a}{N^3 a^2 b^2} \left(6\ddot{a}ab^2N + 4\ddot{b}ba^2N - 6b^2a\dot{a}\dot{N} + 6b^2\dot{a}^2N - 4ba^2\dot{b}\dot{N} + 12\dot{a}\dot{b}abN + \dot{b}^2a^2N \right). \quad (7.2)$$

Reintroduzimos $\bar{R}$ na ação de Brans- Dicke geométrico no referencial de Riemann $(M, \gamma, 0)$,

$$S = \int dx^n \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{R} + \omega \bar{g}^{\mu\nu} \phi_{|\mu} \phi_{|\nu} \right), \quad (7.3)$$

²A função lapso atribui um caráter geral ao processo de folheação. Numa métrica do tipo Fridemann-Robertson-Walker, ao escolhermos $N = 1$, estamos fazendo a folheação utilizada em modelos usuais de cosmologia, essa escolha é o chamado *gauge* cósmico. Ao escolher $N = a(t)$, estamos tomando outra parametrização. Este é o *gauge* conforme.

e após retirarmos os termos divergentes, chegamos na ação reduzida

$$S_{reduzida} = V_0 \int dt \left[-\frac{6}{N} \dot{a}^2 a b^{n-4} - \frac{6(n-4)}{N} \dot{b} \dot{a} a^2 b^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)}{N} a^3 b^{n-6} \dot{b}^2 + \frac{\omega}{N} a^3 b^{n-4} \dot{\phi}^2 \right], \quad (7.4)$$

onde $V_0 = \int dx^3 a^3 b^{n-4}$. Com esse procedimento identificamos o lagrangiano do modelo

$$L = \frac{-6a\dot{a}b^{n-4}}{N} - 6(n-4) \frac{\dot{a}a^2\dot{b}b^{n-5}}{N} - 2(n-4)(n-5) \frac{a^3b^{n-6}\dot{b}^2}{N} + \omega \frac{a^3b^{n-4}\dot{\phi}^2}{N}. \quad (7.5)$$

7.2.1 O hamiltoniano clássico

Para fazer quantização do modelo precisamos do Hamiltoniano associado, com esse intuito calculamos os momentos canonicamente conjugados

$$P_a = \frac{12}{N} a b^{n-4} \dot{a} - \frac{6(n-4)}{N} a^2 b^{n-5} \dot{b}, \quad (7.6)$$

$$P_b = -\frac{2(n-4)(n-5)}{N} b^{n-6} a^3 \dot{b} - \frac{6(n-4)}{N} a^2 b^{n-5} \dot{a}, \quad (7.7)$$

$$P_\phi = \frac{2\omega}{N} a^3 b^{n-4} \dot{\phi}. \quad (7.8)$$

Fazendo então a transformação de Legendre,

$$H = P_a \dot{a} + P_b \dot{b} + P_\phi \dot{\phi} - L, \quad (7.9)$$

obtemos o seguinte hamiltoniano:

$$H = \frac{N}{(n-2)ab^{n-6}} \left[\frac{(n-5)}{12} \frac{P_a^2}{b^2} + \frac{1}{(n-4)} \frac{P_b^2}{a^2} - \frac{P_a P_b}{2ab} + \frac{(n-2)P_\phi^2}{4\omega a^2 b^2} \right]. \quad (7.10)$$

Para chegar a uma equação do tipo Schödinger, realizamos as seguintes transformações canônicas $(a, b, \phi, P_a, P_b, P_\phi) \rightarrow (A, B, T, P_A, P_B, P_T)$, onde

$$T = \frac{\phi}{P_\phi}, \quad P_T = \frac{P_\phi^2}{2}; \quad (7.11)$$

$$A = \ln a, \quad P_A = a P_a; \quad (7.12)$$

$$B = \ln b, \quad P_B = b P_b. \quad (7.13)$$

A transformação (7.11) é motivada em [110], e a transformação nos fatores de escala é conhecida na literatura [98]. Desta maneira, escrevemos o hamiltoniano transformado,

$$\bar{H} = \bar{N} \left[-\frac{\omega(n-5)}{6(n-2)} P_A^2 - \frac{\omega}{n-2} P_A P_B + \frac{\omega}{(n-2)(n-4)} P_B^2 + P_T \right], \quad (7.14)$$

onde o fator $\bar{N} = \frac{N}{2\omega a^3 b^{n-4}}$. As equações de movimento na forma Hamiltoniana ficam

$$\{A, H\} = \dot{A} = \bar{N} \frac{\omega}{n-2} \left(\frac{(n-5)}{3} P_A - P_B \right), \quad (7.15)$$

$$\{B, H\} = \dot{B} = \bar{N} \frac{\omega}{n-2} \left(\frac{2}{n-4} P_B - \frac{1}{n-2} P_A \right), \quad (7.16)$$

$$\{P_A, H\} = \{P_B, H\} = \{P_T, H\} = 0, \quad (7.17)$$

onde $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ e $\dot{B} = \frac{dB}{dt}$. Reescrevendo essas equações em termos de T , temos

$$\frac{dA}{dT} = \frac{\omega}{n-2} \left(\frac{n-5}{3} P_A - P_B \right), \quad (7.18)$$

$$\frac{dB}{dT} = \frac{\omega}{n-2} \left(\frac{2}{n-4} P_B - \frac{P_A}{n-2} \right). \quad (7.19)$$

A solução do sistema de equações acima, (7.18) e (7.19), é

$$a(T) = a_0 \exp \left[\frac{\omega}{n-2} \left(\frac{(n-3)}{3} P_A - P_B \right) T \right], \quad (7.20)$$

$$b(T) = b_0 \exp \left[\frac{\omega}{n-2} \left(\frac{2}{n-4} P_B - P_A \right) T \right], \quad (7.21)$$

$$\phi(T) = \pm \sqrt{2P_T} T. \quad (7.22)$$

Ao escolhermos o *Gauge* $\bar{N} = 1$, vemos que $T = t$ e as soluções tem a forma das soluções exponenciais obtidas o capítulo anterior. As outras soluções obtidas no capítulo anterior, as soluções singulares, podem ser reobtidas ao escolhermos o *Gauge* $\bar{N} = \frac{1}{2\omega a^3 b^{n-4}}$.

7.3 Quantizando o modelo

Uma vez que obtemos o hamiltoniano podemos realizar a quantização canônica, assim promovemos os momentos canônicos à operadores, da seguinte forma:

$$P_A \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial A}, \quad P_B \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial B}, \quad P_T \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial T}. \quad (7.23)$$

A equação de Wheeler-DeWitt é obtida pela aniquilação da função de onda do universo [112], $\hat{H}\Psi = 0$, que resulta na seguinte expressão ³

³Esta condição, $\hat{H}\Psi = 0$, decorre do fato de que $\bar{H}$, segundo o formalismo Hamiltoniano é uma equação de vínculo, ou seja, $\bar{H} = 0$.

$$\left\{ -\frac{\omega(n-5)}{6(n-2)} \frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{\omega}{(n-2)} \frac{\partial^2}{\partial A \partial B} - \frac{\omega}{(n-2)(n-4)} \frac{\partial^2}{\partial B^2} \right\} \Psi(A, B, T) = i \frac{\partial}{\partial T} \Psi(A, B, T). \quad (7.24)$$

Identificamos que esta é uma equação do tipo Schödinger, $\hat{H}\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial T}$, e notamos claramente o papel da variável T simbolizando o tempo. É interessante notar, que uma vez que o parâmetro T está ligado ao campo escalar ϕ , o campo de Weyl, podemos, então, destacar a relação entre tempo e a geometria.

Como o operador $\hat{H}$ é um operador hermitiano, o produto interno usual da mecânica quântica é usado⁴:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dA \int_{-\infty}^{\infty} dB \Psi_1^* \Psi_2, \quad (7.25)$$

junto com as condições de contorno usuais

$$\Psi(A \rightarrow \pm\infty, B, T) = 0, \quad \Psi(A, B \rightarrow \pm\infty, T) = 0, \quad (7.26)$$

ou ainda condições sobre as derivadas da função de onda

$$\frac{\partial}{\partial A} \Psi(A \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial A} \Psi(B \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad (7.27)$$

$$, \quad \frac{\partial}{\partial B} \Psi(A \rightarrow \pm\infty) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial B} \Psi(B \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (7.28)$$

Para um número de dimensões $n = 5$, a equação de Schödinger é modificada, significativamente, ficando

$$\frac{\omega}{3} \left(\frac{\partial^2}{\partial B^2} - \frac{\partial^2}{\partial A \partial B} \right) \Psi(A, B, T) = -i \frac{\partial}{\partial T} \Psi. \quad (7.29)$$

Por esse motivo tratamos da solução deste caso de maneira isolada.

7.4 Soluções e valores esperados

Para resolver esta equação procedemos adotando a separação de funções

$$\Psi(A, B, t) = \Phi(A, B) e^{-iET}. \quad (7.30)$$

⁴Algumas vezes a equação de Schödinger que vem da quantização da Hamiltoniana não é tão simples como a nossa, e se torna necessário redefinir o produto interno garantindo que $\hat{H}$ seja hermitiano.

onde E é o parâmetro de separação das variáveis. Desta forma recaímos em uma equação de Schödinger estacionária,

$$\left\{ -\frac{\omega(n-5)}{6(n-2)} \frac{\partial^2}{\partial A^2} + \frac{\omega}{(n-2)} \frac{\partial^2}{\partial A \partial B} - \frac{\omega}{(n-2)(n-4)} \frac{\partial^2}{\partial B^2} \right\} \Phi(A, B, T) = E\Phi(A, B, T). \quad (7.31)$$

Por questões de simplicidade, tomamos o caso em que $\omega > 0$. No intuito de simplificar a resolução da equação, fazemos a seguinte mudança de coordenadas

$$u = \sqrt{6 \frac{(n-2)}{|\omega|(n-5)}} A + \sqrt{\frac{(n-2)(n-4)}{|\omega|}} B, \quad (7.32)$$

$$v = \sqrt{\frac{6(n-2)}{|\omega|(n-5)}} A - \sqrt{\frac{(n-2)(n-4)}{|\omega|}} B. \quad (7.33)$$

Com esta mudança chegamos na expressão simplificada

$$\left[\eta_- \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \eta_+ \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] \Phi = E\Phi, \quad (7.34)$$

com $\eta_{\pm} = 2 \pm \sqrt{\frac{6(n-4)}{n-5}}$. Esta equação corresponde ao caso de uma partícula livre se movendo em um plano, com uma massa efetiva, $\frac{1}{2\eta_-}$, associada ao eixo u , e uma outra massa efetiva, $\frac{1}{2\eta_+}$, associada ao eixo v . Podemos retirar esta anisotropia nos eixos u e v ao fazer a mudança, $\bar{u} = \frac{u}{\sqrt{\eta_+}}$ e $\bar{v} = \frac{v}{\sqrt{\eta_-}}$, que leva na equação

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{v}^2} \right] \Phi(\bar{u}, \bar{v}) = E\Phi(\bar{u}, \bar{v}). \quad (7.35)$$

Sabemos dos cursos de mecânica quântica que esta é exatamente a equação de uma partícula livre, cuja solução é do tipo onda plana se propagando em duas dimensões. Podemos verificar de maneira rigorosa este fato utilizando o método de separação de variáveis, tomando $\Phi = U(\bar{u})V(\bar{v})$, e aplicando em (7.35), chegamos em duas equações diferenciais

$$\frac{d^2 U}{d\bar{u}^2} + E_1 U = 0, \quad (7.36)$$

$$\frac{d^2 V}{d\bar{v}^2} + E_2 V = 0, \quad (7.37)$$

que estão relacionadas pela equação de autovalores $E_2 - E_1 = E$. Para $E_1 > 0$ e $E_2 > 0$, a função

$$\Phi_{E_1, E_2} = K \text{sen}(\bar{u}\sqrt{E_1}) \text{sen}(\bar{v}\sqrt{E_2}) \quad (7.38)$$

é uma solução particular, tipo onda plana, da equação de Schödinger (7.35). O termo K presente na solução é apenas uma constante arbitrária.

Para construirmos a solução geral da equação original (7.24), que designamos por $\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T)$, fazemos a superposição dos termos $\Phi_{E_1, E_2}(\bar{u}, \bar{v})$, da seguinte forma

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \int_0^\infty dE_1 \int_0^\infty dE_2 A(E_1, E_2) e^{-i(E_2 - E_1)T} \text{sen}(\bar{u}\sqrt{E_1}) \text{sen}(\bar{v}\sqrt{E_2}), \quad (7.39)$$

onde o fator $A(E_1, E_2)$ presente na expressão é um coeficiente da superposição, sua escolha adequada permite integração da equação (7.39) e confere à $\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T)$ o formato de pacote de onda. O termo $\sqrt{\mathcal{N}}$ presente em (7.39) é responsável pela normalização, ou seja,

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{v} |\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T)|^2. \quad (7.40)$$

Utilizando o fator $A(E_1, E_2) = \exp[-\xi(E_1 + E_2)]$, e com auxílio da identidade

$$\int_0^{+\infty} e^{-\gamma x} \text{sen}(\sqrt{m}x) dx = \frac{\sqrt{m\pi}}{2\gamma^{3/2}} e^{-m/4\gamma}, \quad (7.41)$$

podemos resolver as integrais presentes na equação (7.39), que são as seguintes

$$\int_0^{+\infty} \exp[-E_1(\xi - iT)] \text{sen}(\sqrt{E_1}\bar{u}) dE_1 = \frac{\sqrt{\pi}\bar{u}}{2(\xi - iT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\bar{u}^2}{4(\xi - iT)}\right], \quad (7.42)$$

$$\int_0^{+\infty} \exp[-E_2(\xi + iT)] \text{sen}(\sqrt{E_2}\bar{v}) dE_2 = \frac{\sqrt{\pi}\bar{v}}{2(\xi + iT)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\bar{v}^2}{4(\xi + iT)}\right]. \quad (7.43)$$

A função de onda já normalizada é expressa como

$$\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T) = \sqrt{\frac{\sqrt{3(n-2)(n-4)}}{\omega\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + T^2}\right)^{3/2} \bar{u} \bar{v} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{u}^2}{\xi - iT} + \frac{\bar{v}^2}{\xi + iT}\right)\right]. \quad (7.44)$$

É interessante notar que seguindo o mesmo procedimento podemos encontrar a função de onda do universo para o caso em que $\omega < 0$, que é

$$\tilde{\Psi}(\bar{u}, \bar{v}, T) = \sqrt{\frac{\sqrt{3(n-2)(n-4)}}{|\omega|\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + T^2}\right)^{3/2} \bar{u} \bar{v} \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{u}^2}{\xi + iT} + \frac{\bar{v}^2}{\xi - iT}\right)\right]. \quad (7.45)$$

Observamos que a função de onda para $\omega < 0$, (7.45), é simplesmente o complexo conjugado da função de onda para $\omega > 0$, (7.44). Ou ainda, a função de onda para $\omega < 0$ é a reversão temporal da função de onda para $\omega > 0$. Fisicamente $\omega > 0$ significa que o campo escalar representa matéria usual, enquanto que $\omega < 0$ está relacionado ao campo fantasma.

7.4.1 Valores esperados

Para calcular os valores esperados usamos a interpretação de muitos mundos. Com este objetivo transformamos a função de onda em termos dos fatores de escala a e b e integramos sobre eles. Lembramos, que o valor esperado de um operado $\bar{x}$ é dado por

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \bar{x} |\Psi|^2 da db. \quad (7.46)$$

Dessa forma calculamos o valor esperado de a , que nos leva a expressão

$$\langle a \rangle = \frac{|\omega|}{2} \sqrt{\frac{1}{3(n-2)(n-4)}} \int_{-\infty}^\infty d\bar{u} \int_{-\infty}^\infty d\bar{v} \exp \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{|\omega|(n-5)}{6(n-2)}} \left(\sqrt{|\eta_-|} \bar{u} + \sqrt{\eta_+} \bar{v} \right) \right] |\Psi(\bar{u}, \bar{v}, T)|^2 \quad (7.47)$$

onde definimos a função $\Sigma(\xi, T^2) = \frac{\xi^2 + T^2}{\xi}$. De maneira análoga, calculamos o valor esperado relativo ao fator de escala b , que nos dá

$$\langle b \rangle = G(T, n) \frac{1}{8} \exp \left[\frac{|\omega|}{4(n-2)} \sqrt{\frac{6}{(n-4)(n-5)}} \Sigma(\xi, T^2) \right]. \quad (7.48)$$

Onde $G(T, n) = \left[\frac{\omega^2}{(n-2)(n-4)^2(n-5)} \Sigma^2(\xi, T^2) + \frac{4|\omega|}{n-2} \sqrt{\frac{6}{(n-4)(n-5)}} \Sigma(\xi, T^2) + 8 \right]$.

Para termos uma melhor ideia destes valores esperados, ilustramos os casos de $n = 6$ e $n = 8$ nas figuras que seguem.

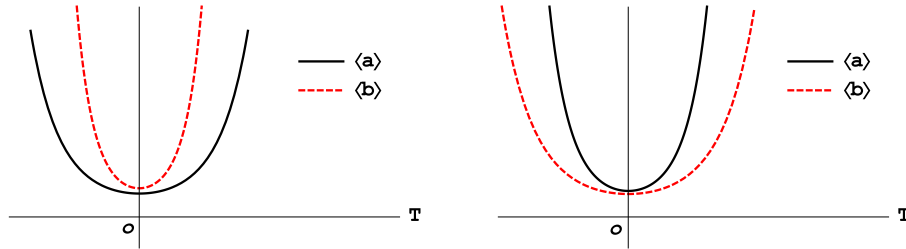


Figura 7.1: As figuras ilustram os valores esperados para os fatores de escala. À esquerda temos o gráfico para $n = 6$, e à direita o gráfico para $n = 8$.

De maneira geral as figuras nos indicam um cenário de universo tipo *bouncing*, típico de cosmologia quântica. Em particular, o comportamento obtido aqui é semelhante ao resultado obtido em [113], onde o universo possui quatro dimensões e o campo escalar também exerce o papel de tempo.

Pelas figuras (7.4.1) e (7.4.1), ainda podemos ver que se $n = 6$, ou seja um universo com duas dimensões extras, o fator de escala relativo as dimensões extras $\langle b \rangle$

é maior do que o fator de escala das dimensões usuais⁵ $\langle a \rangle$. Para o caso onde $n = 8$, universo com quatro dimensões extras, a situação se inverte o fator de escala relativo as dimensões espaciais usuais, $\langle a \rangle$, é maior do que o fator de escala das dimensões extras, $\langle b \rangle$.

É de se esperar, portanto, que os efeitos métricos devido a dimensão extra sejam mais expressivos quando o número de dimensões extras é menor do que o número de dimensões usuais. Se por outro lado, o número de dimensões extras for igual ao número de dimensões usuais, podemos ver que os fatores de escala $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$ são idênticos.

Para ter uma ideia do que ocorre com o universo como um todo calculamos o fator de expansão do universo com $\langle a \rangle$ e $\langle b \rangle$, que é expresso por

$$\Theta_n = \frac{6}{\langle a \rangle} \frac{d\langle a \rangle}{dT} + \frac{2(n-4)}{\langle b \rangle} \frac{d\langle b \rangle}{dT}. \quad (7.49)$$

O fator de expansão calculado desta forma possui qualitativamente o mesmo comportamento para qualquer n , desde que $n > 5$. Classicamente o fator de expansão Θ_5 pode ser nulo, ou decrescente com o tempo, como visto no capítulo anterior. O fator de expansão calculado usando as valores esperados dos fatores de escala nos dão um universo crescente com o tempo, como ilustramos na figura abaixo.

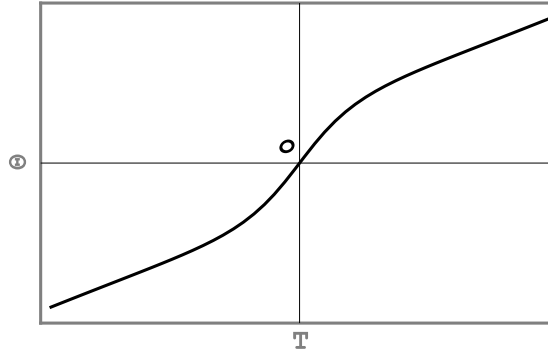


Figura 7.2: Fator de expansão para o universo n dimensional anisotrópico.

7.4.2 Caso $n = 5$, o universo com uma dimensão extra

Caso $n = 5$, ou seja um universo com uma dimensão extra a equação diferencial de Schödinger estacionária (7.31) possui a seguinte forma

$$\frac{\omega}{3} \left[\frac{\partial^2}{\partial B^2} - \frac{\partial^2}{\partial A \partial B} \right] \Phi = E\Phi. \quad (7.50)$$

⁵Aqui nos referimos as dimensões usuais que correspondem ao comprimento, largura e altura.

As transformações de coordenadas que simplificam a equação acima são

$$x = 4A + 2B, \quad (7.51)$$

$$y = B. \quad (7.52)$$

Somos assim levados a seguinte equação de Schödinger:

$$\left[4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \Phi = \frac{3E}{\omega} \Phi. \quad (7.53)$$

Utilizando o método de separação de variáveis usando $\Phi = X(x)Y(y)$ chegamos ao par de equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - E_1 X = 0, \quad (7.54)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - E_2 Y = 0. \quad (7.55)$$

Onde E_1 e E_2 satisfazem a relação $4E_1 - E_2 = \frac{3E}{\omega}$. Dessa maneira encontramos o perfil da auto-função para $E_1 > 0$ e $E_2 > 0$ da equação de Schödinger estacionária, dada por

$$\Phi_{E_1, E_2} = \text{sen}(\sqrt{E_1}x) \text{sen}(\sqrt{E_2}y). \quad (7.56)$$

A solução geral da equação da equação de Schödinger depende do tempo, se faz pela superposição

$$\Psi(x, y, T) = \int_0^\infty dE_1 \int_0^\infty dE_2 e^{-iET} \Phi_{E_1, E_2} \quad (7.57)$$

Procedendo de maneira similar ao caso $n > 5$, chegamos na seguinte forma normalizada da função de onda do universo

$$\Psi(x, y, T) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \frac{\omega^2 T^2}{9}} \right)^{3/2} xy \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{4(\xi - i\frac{\omega T}{3})} + \frac{y^2}{\xi + i\frac{\omega T}{3}} \right) \right\}, \quad (7.58)$$

para o caso $\omega > 0$. Para o caso em que $\omega < 0$ a função de onda do universo tem a seguinte forma

$$\Psi(x, y, T) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \frac{|\omega|^2 T^2}{9}} \right)^{3/2} xy \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{4(\xi + i\frac{|\omega|T}{3})} + \frac{y^2}{\xi - i\frac{|\omega|T}{3}} \right) \right\}, \quad (7.59)$$

Os valores esperados dos fatores de escala a e b para este caso tem seguinte expressão

$$\langle a \rangle = \frac{1}{16} [\Sigma(T^2) + 4]^2 \exp \left[\frac{\Sigma(T^2)}{4} \right], \quad (7.60)$$

$$\langle b \rangle = [\Sigma(T^2) + 1] \exp \left[\frac{\Sigma(T^2)}{2} \right]. \quad (7.61)$$

Onde o termo $\Sigma(T^2) = \frac{\xi^2 + \omega^2 T^2}{\xi}$.

7.5 A interpretação de de Broglie-Bohm

Como já expomos no início do capítulo, citamos duas das interpretações da mecânica quântica que são utilizadas em cosmologia quântica, descrevemos o nosso problema usando uma dessas interpretações, a de muitos mundos. Agora, passaremos a descrever o nosso sistema utilizando a interpretação de de Broglie-Bohm. Boas referencias para este estudo são [114] e [115].

Esta interpretação é devido a David Bohm que retomou os estudos de Louis de Broglie sobre ondas piloto. Para entendermos alguns pontos desta abordagem é conveniente retomar à mecânica quântica não relativística.

7.5.1 Mecânica quântica Bohmiana

Sabemos que a equação de Schödinger para uma partícula em um espaço tridimensional é dada por

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[-\frac{\nabla^2}{2m} + V(x, y, z) \right] \psi. \quad (7.62)$$

A ideia básica desta abordagem é supor que a função de onda associada a partícula pode ser reescrita em termos de uma onda piloto da seguinte forma

$$\psi = \Omega(\vec{x}, t) \exp(iS(\vec{x}, t)). \quad (7.63)$$

Isso nos leva ao sistema de equações diferenciais equivalentes ao de Schödinger

$$\frac{\partial \Omega^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\Omega^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0, \quad (7.64)$$

$$\frac{-1}{2m} \frac{\nabla^2 \Omega}{\Omega} + V + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.65)$$

A primeira equação do sistema acima é a equação da continuidade, expressa de outra maneira. A segunda equação pertence a classe de equações de Hamilton-Jacobi, que é estudada em Mecânica Clássica [116]. Somente para lembrar, das equações de Hamilton-Jacobi citamos dois exemplo: o partícula livre , cujo a equação é

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (7.66)$$

e o oscilador harmônico, cuja equação é

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (7.67)$$

Percebemos que a equação (7.65) possui o termo extra, $Q = \frac{-1}{2m} \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$, que não está presente nas equações clássicas da mecânica. Este termo Q é chamado potencial quântico. Os efeitos quânticos são enfraquecidos na medida em que $Q \rightarrow 0$.

Segundo esta interpretação a partícula quântica possui uma trajetória real, que não é observada. A equação desta trajetória é dada por

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial x_i}. \quad (7.68)$$

Entretanto, a solução da equação diferencial anterior, enfrenta o problema da indeterminação da condição inicial, pois não se sabe a posição inicial da partícula.

7.5.2 Cosmologia quântica segundo de Broglie-Bohm

Aplicando esta abordagem para o problema de cosmologia quântica, podemos verificar se nosso resultado se mantêm como nos trabalhos [105], [104] que exemplificam casos em que interpretações distintas da mecânica quântica levam a resultados qualitativamente equivalentes.

Vamos reescrever a função de onda do universo no formato de uma onda-piloto

$$\Psi = \Omega \exp(iS). \quad (7.69)$$

Vamos utilizar a função de onda em que $\omega > 0$. Então inferimos facilmente que

$$\Omega(\bar{u}, \bar{v}, T) = \sqrt{\frac{\sqrt{3(n-2)(n-4)}}{\omega\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + T^2} \right)^{3/2} \bar{u} \bar{v} \exp \left[-\frac{\xi}{4(\xi^2 + T^2)} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \right], \quad (7.70)$$

$$S(\bar{u}, \bar{v}, T) = -\frac{T}{4(\xi^2 + T^2)} (\bar{u}^2 - \bar{v}^2). \quad (7.71)$$

Para o caso em que a função de onda do universo possui $\omega < 0$, podemos também estabelecer um Ω' e um fase S' . Como as funções de onda para os casos $\omega < 0$ e $\omega > 0$ são as complexas conjugadas uma da outra, então concluímos que $\Omega' = \Omega$, porém há uma diferença na fase, ou seja,

$$S'(\bar{u}, \bar{v}, T) = -\frac{T}{4(\xi^2 + T^2)} (\bar{v}^2 - \bar{u}^2). \quad (7.72)$$

Os fatores de escala Bohmianos são calculados por

$$P_a = \frac{\partial S}{\partial a}, \quad P_b = \frac{\partial S}{\partial b}, \quad (7.73)$$

onde P_a e P_b são dados pelas equações

$$P_a = \frac{12}{N} ab^{n-4} \dot{a} - \frac{6(n-4)}{N} a^2 b^{n-5} \dot{b}, \quad (7.74)$$

$$P_b = -\frac{2(n-4)(n-5)}{N} b^{n-6} a^3 \dot{b} - \frac{6(n-4)}{N} a^2 b^{n-5} \dot{a}, \quad (7.75)$$

$$P_\phi = \frac{2\omega}{N} a^3 b^{n-4} \dot{\phi}. \quad (7.76)$$

Montamos o seguinte sistema para o cálculo em termos das variáveis A e B , temos que

$$2 \frac{dA}{dT} + (n-4) \frac{dB}{dT} = \frac{T}{\xi^2 + T^2} [2A + (n-4)B], \quad (7.77)$$

$$3 \frac{dA}{dT} + (n-5) \frac{dB}{dT} = \frac{T}{\xi^2 + T^2} [3A + (n-5)B], \quad (7.78)$$

para qualquer valor de ω . O sistema é facilmente resolvido, suas soluções são

$$a = a_0 \exp \left[\sqrt{\xi^2 + T^2} \right], \quad b = b_0 \exp \left[\sqrt{\xi^2 + T^2} \right], \quad (7.79)$$

Vemos que as soluções independem do número de dimensões. Porém pelo menos qualitativamente podemos afirmar que este comportamento para os fatores de escala concorda com que é previsto pela interpretação de muitos mundos.

O fator de expansão do universo em termos dos fatores de escala Bohmianos é dado pela expressão

$$\Theta_n = 2(n-1)T, \quad (7.80)$$

prevê um universo linearmente crescente com o parâmetro T , como podemos observar.

7.5.3 Universo em cinco dimensões

Aplicando a interpretação de de Broglie-Bohm no caso em que o universo possui uma dimensão extra, $n = 5$, as funções Ω e S que reescrevem a função de onda (7.70) são

$$\Omega(x, y, T) = \frac{x y}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{\xi}{\xi^2 + \frac{\omega^2 T^2}{9}} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\xi}{4(\xi^2 + \frac{\omega^2 T^2}{9})} \left(\frac{x^2}{4} + y^2 \right) \right], \quad (7.81)$$

e

$$S(x, y, T) = -\frac{\omega T}{12 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)} \left(\frac{x^2}{4} - y^2 \right), \quad (7.82)$$

para $\omega > 0$ e

$$S(x, y, T) = -\frac{|\omega| T}{12 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)} \left(y^2 - \frac{x^2}{4} \right), \quad (7.83)$$

se $\omega < 0$.

Utilizando as definições (7.73), e procedendo de maneira análoga ao caso n dimensional, encontramos as seguintes fatores de escalas bohmianos:

$$a = \exp \left[-\frac{3}{4} K_1 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)^{\lambda_1/4} - \frac{3}{4} K_2 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)^{\lambda_2/4} \right], \quad (7.84)$$

$$b = \exp \left[(\lambda_1 - 1) K_1 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)^{\lambda_1/4} + (\lambda_2 - 1) K_2 \left(\xi^2 + \frac{\omega^2}{9} T^2 \right)^{\lambda_2/4} \right], \quad (7.85)$$

onde K_1 e K_2 denotam as constantes de integração e

$$\lambda_{1,2} = \frac{17}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}, \quad (7.86)$$

As soluções para este caso possuem um comportamento diferente das soluções (7.79), pois neste caso enquanto o fator de escala a cresce exponencialmente, o fator de escala b decresce exponencialmente. Esta situação, corresponde portanto, ao cenário de compactação dinâmica das dimensões extras, de acordo com as soluções clássicas desenvolvidas no capítulo anterior. Desta forma, a ocorrência da compactação das dimensões extras parece depender da interpretação utilizada, o que é um resultado curioso.

CAPÍTULO 8

Considerações finais

Neste trabalho examinamos alguns aspectos cosmológicos utilizando uma classe de teorias escalares tensoriais construídas em um espaço-tempo de Weyl integrável, nos regimes clássicos e quânticos.

Sobre a cosmologia clássica

Observando primeiramente os aspectos clássicos, as teorias escalares tensoriais geométricas propiciam novos significados tanto ao campo escalar presente em modelos inflação, quanto ao campo escalar presente em modelos de energia escura. Ambos são reinterpretados como campos de Weyl integrável, fazendo assim com que a aceleração do universo seja entendida como um efeito puramente geométrico.

Como consequência da utilização do modelo de Brans-Dicke geométrico mostramos a possibilidade do universo experimentar uma mudança no seu caráter geométrico na medida em que evolui. Denominamos esse fenômeno de transição de fase geométrica. Na tabela abaixo fazemos um resumo dos tipos de transições estudadas.

Modelo	transição geométrica
$V = \Lambda e^{-2\phi} > 0, \phi = \phi_0$	Eternamente Riemann
$V = \Lambda e^{-2\phi} > 0, \omega < 0$	$R \rightarrow W$
$V = \Lambda e^{-2\phi} < 0, \omega > 0$	Eternamente Weyl
$V = \Lambda e^{-2\phi} > 0, \omega > 0$	$W \rightarrow R$ ou $R \rightarrow W$
$V = 0, \omega > 0$	$W \rightarrow R \rightarrow W$
$V = (m^2 \frac{\phi^2}{2} + \Lambda) e^{-2\phi}$	Eternamente Weyl
$V = 2\lambda(\phi^2 - \beta)^2 e^{-2\phi}$	dois perfis $W \rightarrow R$ ou dois perfis $R \rightarrow W$
$V(\phi) = V_0 \exp(-(\lambda + 2)\phi)$	dois perfis $W \rightarrow R$ ou dois perfis $R \rightarrow W$
$\phi = \sigma \tanh(\beta(t - t_0))$	$R \rightarrow W \rightarrow R$
$\phi = \sigma \tanh^p(\beta(t - t_0))$	$R \rightarrow W \rightarrow R \rightarrow W \rightarrow R$

Tabela 8.1: Resumo dos modelos com suas respectivas transições geométricas.

Nesta tabela apresentamos à esquerda os modelos e à direita o tipo de transição geométrica. Percebemos a existência de modelos que não sofrem transições de fase, são universos eternamente de Riemann ou universos eternamente de Weyl, portanto. Há também universos que sofrem apenas uma transição de fase, de Weyl para Riemann ($W \rightarrow R$), ou de Riemann para Weyl ($R \rightarrow W$). Há ainda modelos em que temos duas transições de fase, de Weyl para Riemann e deste para Weyl ($W \rightarrow R \rightarrow W$), ou ainda no sentido inverso ($R \rightarrow W \rightarrow R$). O caso mais interessante é quando o universo pode experimentar quatro transições de fase, no modelo $\phi = \tanh^p(t - t_0)$.

Do ponto de vista observacional, talvez seja difícil detectar essa transição. Uma vez que os referenciais de Riemann e de Weyl são fisicamente equivalentes. Este fato coloca a transição geométrica como um fenômeno puramente teórico.

Sobre a cosmologia em n dimensões

Ainda em nível clássico analisamos o problema da compactação dinâmica das dimensões extras. As soluções do modelo de Brans-Dicke geométrico mostram quatro possíveis comportamentos distintos para as dimensões extras. Encontramos dois pares de soluções que levam em um universo singular anisotrópico, encontramos também um par de soluções não singulares do tipo de Sitter, que exibem a compactação das dimensões

extras, e outro par que exhibe a compactação das dimensões espaciais usuais.

Com relação parte quântica, as teorias escalares tensoriais geométricas oferecem um "relógio" natural, ligado à geometria. Por isso parecem ser importantes na construção de modelos em Cosmologia Quântica.

Utilizando abordagem de Wheeler-deWitt para uma teoria escalar-tensorial geométrica, estudamos a compactação dinâmica das dimensões extras. O principal resultado é que não há uma ocorrência desta situação em nível quântico, a não ser no caso particular em que $n = 5$ e usamos a abordagem de de Broglie-Bohm.

Com o auxílio da interpretação de muitos mundos, chegamos a um universo com *bouncing* não singular. Os valores esperados para dimensões extras apenas indicam que para $n < 7$, $\langle b \rangle > \langle a \rangle$, e se $n > 7$, $\langle a \rangle > \langle b \rangle$. Neste caso, as contribuições métricas do fator de escala $\langle b \rangle$ são menores que as de $\langle a \rangle$, e isso explicaria a dificuldade de observação das dimensões extras. Por outro lado, utilizando a interpretação de Bohm-de Broglie, encontramos um universo não singular com *bouncing*, que parece qualitativamente igual ao resultado anterior. Contudo nesta abordagem, os fatores de escala bohmianos não possuem nenhum efeito com relação ao número de dimensões extras. A anisotropia do universo, neste caso, esta ligada somente as condições iniciais a_0 e b_0 .

Uma situação que nos pareceu interessante, mas que não registramos nesta tese, foi a análise do universo anisotrópico com dimensões extras formam uma subvariedade com uma topologia esférica. Contudo, não é possível resolver as integrais necessárias para construir o pacote de onda. Assim não conseguimos prosseguir com o estudo deste caso.

Sobre as perspectivas

Desejamos desenvolver aplicações das teorias escalares-tensoriais geométricas estudadas nesta tese em outras situações que envolvam dimensão extra, como por exemplo o cenário de cosmologia com branas. No que se refere estritamente a versão clássica da teoria escalar tensorial geométrica, é interessante estudar sua contribuição na gravitação construída em um espaço-tempo tipo do 2+1 ou em um espaço-tempo 1+1. Assim, podemos ter o entendimento do Brans-Dicke geométrico em altas e baixas dimensões.

Referências Bibliográficas

- [1] Bernard F. Schutz, *A first course in General Relativity* (Cambridge University Press, 2009).
- [2] M. Novello, S. E. Perez Bergliaffa, Phys. Rep. Vol. 463, 4, 127–213 (2008) *Bouncing Cosmologies*.
- [3] M. Novello, *Do Big Bang ao universo eterno* (Zahar, 2010).
- [4] S. Perlmutter et al., Astrophys. J., 517, 565-586 (1999), *Measurement of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*.
- [5] G. Riess et al., Astron. J., 116, 1009-1038 (1998), *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*.
- [6] Thomas P. Sotiriou, arXiv:1404.2955 (2014), *Gravity and Scalar fields*.
- [7] C Romero, J B Fonseca-Neto and M L Pucheu; Class. Quantum Grav. 29 155015 (2012), *General relativity and Weyl geometry*
- [8] Alan H. Guth Phys. Rev. D 23, 347 (1981), *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*.
- [9] D. La and P.J. Steinhardt; Phys. Rev. Letters 62, 376 (1989), *Extended Inflationary Cosmology*.

- [10] C.W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler; *Gravitation*, (W.H. Freeman and Company).
- [11] Gonzalo J. Olmo, arXiv:1212.6393v1 (2012), *Introduction to Palatini theories of gravity and nonsingular cosmologies*.
- [12] T.S.Almeida, M.L.Pucheu, C. Romero and J.B.Formiga, Phys. Rev. D 89, 064047 (2014) *From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory*.
- [13] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, Introduction to General Relativity (McGraw-Hill, 1975).
- [14] Erhard Scholz, arXiv:1111.3220 (2011), *Weyl Geometry in late 20th century physics*.
- [15] F.T. Falciano, M. Novello, J.M. Salim, Found.Phys. 40 1885-1901 (2010), *Geometrizing Quantum Relativistic Mechanics*.
- [16] M. Novello, H.Heintzmann, Phys. Lett., 98A, 12 (1983), *Weyl integrable space-time: A model for our cosmos?*.
- [17] J. C. Fabris, J. M. Salim and S. L. Sautu ;Mod. Phys. Lett. A, 13: 953-959 (1998), *Inflationary Cosmological solutions in Weyl integrable geometry*.
- [18] Santiago E. Perez Bergliaffa, K.E. Hibberd, Int.J.Mod.Phys. D8 (1999) 705-718, *Inhomogeneous scalar field solutions and inflation*.
- [19] R. Aguilá, J. E. Aguilar, C. Moreno and M. Bellini, *Present accelerated expansion of the universe from new Weyl-Integrable gravity approach*.
- [20] J. Miritzs ,Int. Jour. of Mod. Phys. D Vol. 22, No. 5 (2013), *Acceleration in Weyl integrable spacetime*.
- [21] M.L. Pucheu, F.A.P. Alves Junior, A.B. Barreto, and C. Romero; Phys. Rev. D 94, 06401 (2016), *Cosmological models in Weyl geometrical scalar-tensor theory*.
- [22] F. A. P. Alves-Júnior, M. L. Pucheu, A. B. Barreto, C. Romero; arXiv:1611.03812v1 (2016), *Quantum cosmology in an anisotropic n-dimensional universe*.
- [23] Bernard F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics* (Cambridge University Press, 1980).

-
- [24] E. Butkov, *Física Matemática* (LTC, 1988).
- [25] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, (Springer, 1997).
- [26] G.L. Naber, *Space-time and Singularities an Introduction*, (Cambridge University Press, 1988).
- [27] M.P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, (5ª edição IMPA, 2015).
- [28] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, (Spring-Verlag, 1989).
- [29] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (Graduated Student Series in Physics, 1990).
- [30] S.M. Carroll, *Space-time and Geometry: An introduction to General Relativity*, (Addison Wesley, 2004)
- [31] W. Pauli, *Theory of Relativity*, (Pergamon Press, 1958).
- [32] F. Dahia, G. A. T. Gomez and C. Romero, J. Math. Phys. 49, 102501 (2008), *On the embedding of spacetime in five-dimensional Weyl spaces*
- [33] V. Perlick, Class. Quantum Grav. 8 (1991) 1369-1385, *Observer fields in Weylian spacetime*.
- [34] Alexander Afriat, Studies in History and Philosophy of Modern Physics 40.1 20-25 (2009); *How Weyl stumbled across electricity while pursuing mathematical justice*.
- [35] R. Gomes Lima, Dissertação de Mestrado, UFPB, (2016) ; *Teoria da Gravitação em um espaço-tempo de Weyl não integrável*
- [36] H. Weyl, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften (1918), *Gravitation und Elektrizität*
- [37] C. Romero, arXiv:1508.03766v2 (2015) *Is Weyl unified theory wrong or incomplete?*
- [38] J. T. Wheeler, Phys. Rev. D 41, 431 (1990) , *Quantum measurement and geometry*.
- [39] J. Audretsch, Phys. Rev. D 27, 2872 (1983), *Matter wave interferometry and why quantum objects are fundamental for establishing a gravitational theory*.
- [40] L. O’Raifeartaigh, N. Straumann, Rev. Mod. Phys., Vol. 72, No. 1 (1983), *Gauge theory: Historical and some modern developments*.

- [41] H. Goenner, Gen Relativ Gravit (2012) 44:2077–2097, *Some remarks on genesis of scalar field theories*.
- [42] C. Brans and R. H. Dicke, Phys. Rev. 124, 925 (1961), *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*.
- [43] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, (Oxford University Press).
- [44] P. M. A. Dirac, Nature 139, 323 (1937), *The Cosmological Constant*.
- [45] V. Canuto and J. Lodenquai, Astrophys. Jour., vol. 211, 342-356 (1977), *Dirac Cosmology*.
- [46] Y. Fujii and K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation* (Cambridge University Press, 2003).
- [47] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General of Relativity*, (John Wiley, 1972).
- [48] C. M. Will, *Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test*, (Basic Books, 1986).
- [49] V. Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity* (Kluwer Academic Publishers, 2004).
- [50] Zee, A., Phys. Rev. Lett. 42, 417 (1979), *Broken-Symmetric Theory of Gravity*.
- [51] Dehnen, H. ; Frommert, H.; Ghaboussi, F; Int. J. Phys. (1992), *Higgs field and a new scalar-tensor theory of gravity*
- [52] C. Romero, A. Barros; Astrophysics and Space Science 202: 349-354 (1993), *The equivalence between General Relativity and Scalar-Tensor Theories of Gravity*.
- [53] R. Wald, *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984).
- [54] D. Lorenz-Petzold, Astrophysics and Space Science, vol. 98, no. 1, p. 197-200 (1984), *The general dust solutions in the Brans-Dicke theory*.
- [55] H. Nariai, Prog. Theor. Phys. 40 (1968) 49 *On the Green's Function in an Expanding Universe and It's Role in the Problem of Mach's Principle*.
- [56] C. Romero, A. Barros; Astrophysics and Space Science 192:263-274, 1992 *Brans-Dicke Cosmology and the Cosmological Constant: The Spectrum of Vacuum Solutions*.

- [57] J. O'Hanlon, B. O. J. Tupper; Nuovo Cimento 7,305.
- [58] H. Dehnen and O. Obregón , Astrophys Space Sci , Vol. 17, 338-342 (1972) *Cosmological vacuum solutions in Brans-Dicke and Scalar-Tensor Theory*.
- [59] V. Faraoni Phys. Rev. D 59, 084021 (1999), *Ilusion of General relativity*.
- [60] C. Romero, A. Barros, Phys. Lett. A 173, 243 (1993), *Does the Brans-Dicke theory of gravity go over to general relativity when $\omega \rightarrow \infty$?*
- [61] J.Ehlers, F.A.E.Pirani, A.Schild. Clarendon. *The Geometry of Free Fall and Light Propagation*, (General Relativity, ed L.O'Raiheartaig, 1972).
- [62] C. Romero, J. B. Fonseca-Neto, and M. L. Pucheu, Class. Quantum Grav. 29, 155015 (2012), *General Relativity and Weyl Geometry*.
- [63] Tony Almeida, Tese de doutorado, UFPB, (2014), *Teoria escalar-tensorial: Uma abordagem geométrica*.
- [64] J. M. Salim and S. L. Sautu, Class. Quantum Grav. 16 3281–3295 (1999), *Gravitational collapse in Weyl integrable spacetimes*.
- [65] J.M. Salim, J. L. Sautu Class. Quant. Grav.15 203 (1998), *Spherically symmetric static solutions in Weyl integrable spacetime*.
- [66] M. Novello, *VII Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, (Frontieres, 1994).
- [67] I. Z. Fisher, Zhurnal Experimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki 18 636-640 (1948) ,*Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects*.
- [68] M. Wymann, Phys. Rev. D 24, 4 (1981) ,*Static spherically symmetric scalar fields in general relativity*.
- [69] F.P. Poulis, Tese de doutorado, CBPF (2011),*Geometria de Weyl como representação do espaço-tempo*.
- [70] M. Novello, L.A.R. Oliveira, J.M. Salim, and E. Elbaz International Journal of Modern Physics D 1992 01:03n04, 641-677 *Geometrizing Instantons and the creation of the universe*.
- [71] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, A. Karch, Phys. Rev. D 62 046008 (2000), *Modeling the fifth dimension with scalars and gravity*.

- [72] A. V. Yurov, V. A. Yurov, S. V. Chervon, and M. Sami, Theor. and Math. Phys., 166(2): 259–269 (2011), *Total energy potential as a superpotential in integrables cosmological models*.
- [73] John A. Peacock, *Cosmological Physics*, Cambridge University Press (2003).
- [74] F. T. Falciano, N. Pinto-Neto, and E. Sergio Santini, Phys. Rev. D 76, 083521 (2007), *An inflationary non-singular quantum cosmological model*.
- [75] Y. Aref'eva¹, L. V. Joukovskaya and S. Y. Vernov, J. Phys. A: Math. Theor. 41 304003 (2008), *Dynamics in nonlocal linear models in the Friedmann–Robertson–Walker metric*.
- [76] V. B. Bezerra; C. Romero; G. Grebot; M. E. X. Guimarães; L. P. Colatto III, IV, Braz. J. Phys. vol.34 no.2a (2004), *Remarks on some vacuum solutions of scalar-tensor cosmological models*.
- [77] V. Mukhanov, *Physical foundations of cosmology*, (Cambridge,2005).
- [78] J. N. Islam, *An introduction to mathematical cosmology*, (Cambridge, 2004).
- [79] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 659, 703 (2008), *The Standard Model Higgs boson as the inflaton*.
- [80] A.R. Liddle, Phys. Lett. B. 220 502 (1989), *Power-Law Inflation with exponential potentials*.
- [81] A. A. Andronov, F. Cannata, A. Yu. Kamenshchik , JCAP 1110 004 (2011), *General solution of scalar field cosmology with a (piecewise) exponential potential*.
- [82] E. J. Copeland, A. R. Liddle, D. Wands, Phys. Rev. D 57, 4686 (1998) *Exponential potentials and cosmological scaling solutions*
- [83] G. F. R. Ellis, M. S. Madsen, Class. Quantum Grav. 8 667-676 (1991), *Exact scalar field cosmologies*.
- [84] J. Yokoyama, K. Maeda, Phys. Let. B 207 31 (1988), *On the dynamics of the power law inflation due to an exponential Potential*.
- [85] D. Bazeia, J. Menezes and R. Menezes, Phys. Rev. Lett. 91 241601 (2003), *New Global Defect Structures*

- [86] D. Bazeia and L. Losano, Phys. Rev. D 73 025016 (2005), *Deformed defects with applications to braneworlds*.
- [87] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, and R. Menezes, Phys.Lett.B 633 415 (2006), *First-order formalism and dark energy*
- [88] I.Y.Arefeva, S.Y Vernov, A. S. Koshelev Theor.Math Phys 148 (2006), *Exact Solution in a String Cosmological model*.
- [89] I.Ya. Aref'eva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, Phys.Lett. B 628 1 (2005), *Stringy dark energy model with cold dark matter*.
- [90] Thomas Rizzo, arXiv:hep-ph/0409309 (2004), *Pedagogical Introduction to extra dimensions*.
- [91] P. Wesson, *Five-dimensional physics: Classical and Quantum Consequences of Kaluza-Klein Cosmology*, (World Scientific Publishing, 2006).
- [92] P.D. Mannheim, *Brane World Localized Gravity*, (World Scientific Publishing, 2005).
- [93] A. Chodos and S. Detweiler, Phys. Rev. D 21, 2167 (1980), *Where has the fifth dimension gone?*.
- [94] E. Kasner, Am. J. Math. 43 4 (1921), *Geometrical Theorems on Einstein's cosmological equations*
- [95] N. Mohammadi, Phys. Rev. D 65, 104018 (2002), *Dynamical Compactification, Standard Cosmology and the accelerating universe*
- [96] Chad A. Middleton, Ethan Stanley; Phys. Rev. D 84, 085013 (2011) *Anisotropic evolution of 5D Friedmann-Robertson-Walker spacetime*.
- [97] David Atkatz, Am. J. Phys. 62 (1994), *Quantum Cosmology for pedestrians*.
- [98] C. Kiefer and B. Sandhofer, arXiv:0804.0672v2 (2008), *Quantum Cosmology*.
- [99] B.S. Dewitt, Phys. Rev. 160,1113-1148 (1987), *Quantum theory of gravity. The canonical theory*.
- [100] J.A.Wheeler, Battelle Rencontres (1988), *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*.

- [101] C. W. Misner, Phys. Rev. 186 1319-1327 (1969), *Quantum cosmology I*.
- [102] J. B. Hartle, S. W. Hawking, Phys. Rev. D28 2960 (1983), *Wave function of the universe*.
- [103] A. Vilenkin, Phys. Rev. D30 509 (1984), *Quantum creation of the universe*.
- [104] E. M. Barboza Jr. and N. A. Lemos, Gen. Rel. Grav. 38:1609–1622 (2006), *Does the Big Rip survive quantization?*.
- [105] F. G. Alvarenga, J. C. Fabris, N. A. Lemos, and G. A. Monerat, General Relativity and Gravitation, 34, 5 (2002), *Quantum Cosmological Perfect Fluid Models*.
- [106] H. Everet, Rev. Mod. Phys. 29, 454 (1957), *Relative state formulation of quantum mechanics*.
- [107] D. Bohm, Phys. Rev. 85, 166 (1952), *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I*.
- [108] D. Bohm, Phys. Rev. 85, 180 (1952), *A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables II*.
- [109] Bryce DeWitt, Physics Today, Vol. 23, n 29 (1970), *Quantum mechanics and reality*.
- [110] H. Farajollahi, M. Farhoudi, H. Shojaie, Int. J. Theor. Phys. 49 2558-2568 (2010), *On Dynamics of Brans-Dicke Theory of Gravitation*.
- [111] A. Barreto, Tese de doutorado (2016), *Singularidades cosmológicas no espaço-tempo de Weyl integrável: aspectos clássicos e quânticos*.
- [112] Julio C. Fabris, Nelson Pinto-Neto, A. F. Velasco, Class. Quant. Grav. 16 3807-3822 (1999), *Quantum Cosmology in Scalar-Tensor Theories With Non Minimal Coupling*.
- [113] Babak Vakili, Physics Letters B 718, 34-42 (2012) *Scalar field quantum cosmology: A schrödinger picture*.
- [114] M. Novello, N. P. Pinto-Neto, S. E. P. Bergliaffa, *Programa mínimo de Cosmologia*, (Ed. Jauá).
- [115] N. Pinto-Neto, Braz. J. Phys. vol. 30 n2 (2000), *Quantum cosmology: how to interpret and obtain results*

-
- [116] N. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2007, (Ed. Livraria de Física)
- [117] N. Pinto-Neto, *Teorias e interpretações da mecânica quântica*, (Editora Livraria da Física, 2010).