



Universidade Federal da Paraíba-UFPB  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza-CCEN  
Programa de Pós-graduação em Física

ANTÔNIO JOSÉ GOMES CARVALHO SILVA

## Aspectos perturbativos das Teorias com a quebra da simetria de Lorentz

João Pessoa-PB  
2017

ANTÔNIO JOSÉ GOMES CARVALHO SILVA

## Aspectos perturbativos das Teorias com a quebra da simetria de Lorentz

Dissertação apresentada no departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Física.  
Orientador: Prof. Dr. Albert Petrov

João Pessoa-PB  
2017

S586a Silva, Antônio José Gomes Carvalho.  
Aspectos perturbativos das Teorias com a quebra da  
simetria de Lorentz / Antônio José Gomes Carvalho Silva. -  
João Pessoa, 2017.  
57 f. : il. -

Orientador: Albert Petrov.  
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Física. 2. Violação da Invariância de Lorentz.  
3. Acoplamento não-mínimo. 4. Eletrodinâmica Quântica  
Estendida. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

## DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO

Mestrado

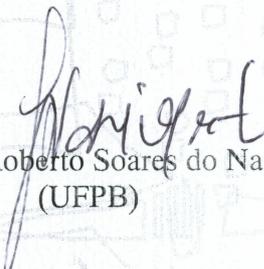
A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 27 de julho de 2017, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Antônio José Gomes Carvalho** na defesa de sua dissertação intitulada “*Aspectos perturbativos das teorias com a quebra da simetria de Lorentz*”.

João Pessoa, 27 de julho de 2017.

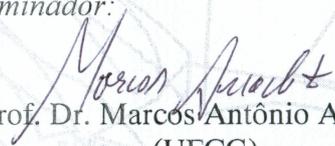
*Orientador:*

  
Prof. Dr. Albert Petrov  
(UFPB)

*1º Examinador:*

  
Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento  
(UFPB)

*2º Examinador:*

  
Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto  
(UFCG)

## DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho aos meus pais, Joeta e Manoel, pois é na educação dos filhos que descobrimos os valores dos pais. Dedico também a minha esposa Raimunda Nonata, que está ao meu lado sempre, mesmo nos momentos mais difíceis da minha vida. “ Por isso não sei se existe felicidade perfeita, mas ao seu lado sou perfeitamente feliz!”

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido dom e sabedoria, e por ter me dado à força para suportar as dificuldades imposta no decorrer do curso. Aos meus pais Joeta Pinto Cerqueira e Manoel Gomes Carvalho e aos meus irmãos e sobrinhos Neusano Pinto Cerqueira, Manelma Gomes Carvalho, Joene Gomes Carvalho, Maria José Gomes Carvalho, Manelson Gomes Carvalho, Ana Ires Gomes Carvalho, Osvaldo Martins Carvalho, Willane Queiroz Carvalho, Raynara Martins Nogueira, Hanry Gomes Costa, Nádia Rodrigues Cerqueira, Nailde Rodrigues Cerqueira, Francilene Rodrigues Cerqueira, Léia Gomes da Silva, Ana Júlia Gomes da Silva e Luiz Gustavo Timóteo Carvalho, por todo esforço e colaboração em todos os possíveis aspectos da minha vida acadêmica.

A minha esposa Raimunda Nonata por todo apoio e compreensão. Por ser a pessoa que pude compartilhar meus momentos de alegria e tristeza me garantindo a força que eu precisava.

Quero aqui fazer um agradecimento especial ao um grande amigo André Manzoni que conheci no decorrer do curso e que foi essencial para que essa dissertação fosse concluída. Desejo tudo de bom para ele que possa conseguir conquistar todos seus objetivos, pois sua humildade e força de vontade em ajudar ao próximo impressiona.

Por fim, agradeço em especial ao meu orientador Albert Petrov, por ter me recebido como seu orientando e acreditado que eu poderia desenvolver um bom trabalho ,além de, ter despertar o interesse científico, a busca pela criticidade , e por ter dado todo o apoio que pudesse desenvolver esse trabalho.

Gostaria de agradecer meus amigos e amigas que conheci mais precisamente no decorrer do curso e alguns amigos de muitos anos como: Anderson, Deigivan, Bugley, Douglas Alves, Thiago Conrado, Fabiano, Juliana, Cicero Junior, Magno Acácio, Márcio Guimarães, Cleone, Fátima, Felipe, Bruno, Gessileide, Ilda, Ioleth, Patrick, Graça, Maria Paulina, Paulo, Michel, Raimunda Alves, Romário, Rogério, Paula, Pâmela, Maria, Luciano, Francisco, Medson, Nicolau, Osmarina, Rafaela, Ramon, Tiago, Ricardo Andrade, Walisson, Maury, Hugo, Thais, Valdimir e Valculey .

Agradeço também ao CNPq pelo apoio financeiro. E por fim agradecer todos que contribuíram de forma direta ou indireta para minha formação.

## RESUMO

Nesta dissertação, estudamos a possibilidade de violação da invariância de Lorentz levando em conta alguns termos do modelo padrão estendido, mais especificamente da parte do modelo que trata da eletrodinâmica quântica estendida. Realizamos correções quânticas no setor fermiônico da eletrodinâmica quântica usual adicionada de termos que violam as simetrias de Lorentz e em duas configurações diferentes. Primeiramente, o coeficiente adicionado e que ocasiona a quebra de simetria de Lorentz é introduzida através do pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$  e tratamos os campos elétricos e magnéticos constantes, ou seja, não avaliamos como perna externas entre o acoplamento do fóton e férmions, avaliando o campo  $F_{\lambda\rho}$  sem abrir em termo do campo de gauge. No segundo caso, investigamos a contribuição mista do acoplamento mínimo e não-mínimo. De imediato sabemos que para cada acoplamento avaliado terá seus respectivo vértices. Para os dois casos, calculamos as correções quânticas em um laço. No primeiro caso, a teoria com o coeficiente  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$  e campo  $F_{\lambda\rho}$  sem ser aberto em termo do campo de gauge  $A_\rho$ , a contribuição de um laço e calculamos a peça de pólo, tendo uma característica CPT-par, que será útil para ser introduzida na ação para eliminar as divergências. No segundo caso, nós examinamos a contribuição de um laço, considerando a mistura dos acoplamento mínimo e não-minimo, ou seja, um  $F_{\mu\nu}$  e um externo  $A_\rho$ , tendo como característica CPT-ímpar um relacionado ao acoplamento não-minimo e outro ao mínimo, respectivamente e verificando a correção de vértice tendo também a contribuição do seu contra termo.

**Palavras-chave:** Violação da invariância de Lorentz. Acoplamento não-mínimo.

## ABSTRACT

In this dissertation, we study the possibility of violation of the Lorentz invariance taking into account some terms of the standard extended model, more specifically, the part of this model that deals with the extended quantum electrodynamics. We perform quantum corrections in the fermionic sector of the usual quantum electrodynamics added with terms that violate the Lorentz symmetries and in two different configurations. First, the coefficient added and that causes the Lorentz symmetry breaking is introduced through the constant pseudo-tensor  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ . And we treat the constant electric and magnetic fields, that is, we do not evaluate as external leg between the coupling of the photon and fermions, evaluating the field  $F_{\lambda\rho}$  without opening in term of the gauge field. In the second case, we investigated the operators governed by the coefficient of interaction  $F_{\lambda\rho}$  open in term of the gauge field. In the second case, we investigated the mixed contribution of the minimum and non-minimum coupling. We immediately know that for each coupling evaluated will have their respective vertices. For both cases, we calculate the quantum corrections in a loop. In the first case, the theory with the coefficient  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$  and field  $F_{\lambda\rho}$  without being opened at the end of the gauge field  $A_\rho$ , The contribution of a loop and we calculate the counter-term, having a CPT-par characteristic, which will be useful to be introduced in action to eliminate divergences. In the second case, we examined the contribution of a loop, considering the mixture of minimum and non-minimum coupling, that is, and  $F_{\mu\nu}$  and an external one  $A_\rho$ , having a CPT-par characteristic, One related to the non-minimum coupling and another to the minimum, respectively and verifying the vertex correction also having the contribution of its counter-term.

**Keywords:** Violation of Lorentz invariance, Non-Minimal Coupling.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	como se chegar à matriz de rotação passiva . . . . .	20
2.2	como se chegar à matriz de rotação ativa . . . . .	21
2.3	Referencial $S_0$ (a) e Referencial $S$ (b) . . . . .	22
2.4	Tl de observador: rotação em um campo de fundo constante . . . . .	25
2.5	Tl de partícula: rotação em um campo de fundo constante . . . . .	26
2.6	$S'$ se movendo com velocidade $\vec{v}$ em relação ao capacitor ( $S$ ) . . . . .	26
2.7	Trajetórias: (1) velocidade inicial $\vec{u}$ (2) velocidade inicial $\vec{u} - \vec{v}$ . . . . .	28
4.1	Contribuição com dois vértices não-mínimos . . . . .	41
4.2	Contribuição com dois vértices não-mínimos . . . . .	45
4.3	Contribuição mista para a função de dois pontos. . . . .	49

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>A Violação da Invariância de Lorentz</b>	<b>16</b>
2.1	As transformações de Lorentz . . . . .	16
2.1.1	Dedução das transformações de Lorentz . . . . .	17
2.2	As Transformações passivas e ativas . . . . .	19
2.2.1	Rotação passiva . . . . .	19
2.2.2	Rotação ativa . . . . .	20
2.3	Transformações de observador e de partícula . . . . .	21
2.3.1	Como os campos se transformam sob transformação de observador . . . . .	22
2.4	A Violação da Invariância de Lorentz e Exemplos . . . . .	24
2.4.1	Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Eletrodinâmica Quântica Estendida com a Quebra da Simetria de Lorentz</b>	<b>30</b>
3.1	Introdução . . . . .	30
3.2	Eletrodinâmica Quântica . . . . .	31
3.3	modelo que incorpora violação de Lorentz para Férmions . . . . .	33
3.4	A violação de Lorentz . . . . .	34
3.5	Simetrias CPT . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Quebra da simetria de Lorentz com pseudo-tensores constantes</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>51</b>
<b>A</b>	<b>Integração em D dimensões</b>	<b>56</b>

# 1

## Introdução

Desde dos primórdios o homem busca explicações quanto sua origem e o comportamento do meio em que vive. No decorrer dos séculos, filósofos e outros pensadores procuram arduamente respostas para entender os processos existente na natureza.

No entanto, nos últimos anos, a física tem ocupado um papel fundamental para as respostas das indagações da humanidade. Leis e experimentos têm sido postos à prova, para dar-nos respostas satisfatórias.

No estudo da teoria quântica de campos ouvimos falar constantemente em quebra de simetria de Lorentz, quebra espontânea de simetria e quebra de simetrias discretas. De fato, já parou para pensar o que é simetria e como acontece quebra das simetrias? Essas perguntas são algumas da questões posta em prova, que os pesquisadores tentam explicar com respostas satisfatórias para a humanidade. Imaginamos uma bola de sinuca branca girando sobre uma superfície plana, este possui uma simetria de rotação, ou seja, se olharmos a bola à qualquer momento iremos observar uma superfície esférica branca. Mas, se você adiciona um nome qualquer à bola perderemos a simetria de rotação. Segundo exemplo, considere uma barra circular na posição vertical, sobre um plano, neste caso possui uma simetria cilíndrica.

Logo, se aplicarmos uma força vertical sobre a barra no sentido descendente, a simetria será perdida, uma vez que a força dobra a barra em sentido arbitrário. Um terceiro exemplo pode ser o ferromagnetismo: Um sistema de spin desordenado e aleatório que apresenta isotropia espacial. A medida que o material é resfriado, os spins adquirem uma determinada direção preferencial, ocorrendo uma quebra espontânea de isotropia espacial.

Uma outra resposta que a física estabelece advém do modelo padrão, desenvolvido entre 1970 e 1973. Este modelo, que não é apropriadamente um modelo e sim uma teoria, traz uma ideia sofisticada sobre as partículas elementares constituintes da natureza, bem como suas interações. O modelo padrão classifica as partículas em dois grupos: partículas que não possuem estrutura interna e partículas que possuem estrutura interna.

A natureza exibe quatro tipos de interações fundamentais: eletromagnética, gravitacional, fraca e forte. Cada uma dessas interações ocorre devido a uma propriedade da matéria: carga elétrica (eletromagnética), massa (gravitacional), carga fraca (fraca) e cor (forte). Todas essas interações possuem uma partícula mediadora que é responsável por carregar as informações entre as partículas interagentes. Essas partículas mediadoras são os fótons para a interação eletromagnética, os grávitons para a interação gravitacional, as partículas W e Z para a interação fraca e os glúons para a interação forte.

O modelo padrão, embora descreva com sucesso a maioria das interações, possui limitações. A interação gravitacional não é descrita com sucesso neste modelo, sendo assim, tratada separadamente pela relatividade geral. Além disso, outros problemas surgiram, pois até o momento, não foi detectado nenhum gráviton.

Já o Bóson de Higgs descoberto recentemente é uma peça fundamental do modelo padrão, visto que com ela pode-se explicar a origem da massa de todas as outras partículas. Os bósons de Higgs são partículas previstas teoricamente, em 1964, pelo físico escocês Peter Higgs e utilizadas por Steven Weinberg (1967) e Abdus Salam (1968) para explicar o motivo de outras partículas, os bósons vetoriais existirem com massa. Além dessa teoria, o modelo padrão apresenta outras teorias tais como: a Eletrodinâmica quântica (EDQ), formulada na década de 1950 por Richard Feynman e Julian Schwinger, para explicar as interações eletromagnéticas no nível quântico, e a Cromodinâmica quântica (CDQ), proposta na década de 1970 por David Politzer, Frank Wilczek e David Gross, responsável por explicar as interações fortes entre os quarks. A teoria gravitacional, até o momento, como já mencionado, ainda não foi adequadamente incluída na estrutura do modelo padrão, devido à dificuldade de ser tratada satisfatoriamente como uma teoria de campo quantizável e renormalizável. Sendo a mesma descrita pela teoria da relatividade geral (TRG) de Einstein, formulada em 1915 e 1916, cujo objetivo é descrever a física para referenciais inerciais em movimento acelerado. O postulado é a base da Teoria da relatividade geral, chamado de Princípio da equivalência, especifica que sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais, são fisicamente equivalentes, e a gravitação é considerada como um efeito da geometria do espaço-tempo. Devido ao fracasso da inclusão da interação gravitacional no modelo padrão, apareceram novas teorias para tratar a física na escala de Planck ( $\approx 10^{19} GeV$ ). Um fato marcante nesta escala de energia é a possibilidade de quebra espontânea de simetria, no caso as simetrias de Lorentz e CPT. As simetrias na física desempenham um papel importante no entendimento dos sistemas físicos. Isso é devido ao fato de que a cada simetria contínua está associada uma quantidade conservada como: energia, momento, carga etc. Por um lado, a debilidade das interações fracas requereria que tais partículas tivessem massas relativamente elevadas. Por outro, a simetria da teoria que leva conta dessas interações exigia que suas massas fossem nulas. Tal contradição desapareceria se as massas dos bósons W e Z fossem aparentes. Quer dizer, se suas massas fossem "dadas" por outras partículas: os bósons de

Higgs.

A natureza, costuma se expressar por meio de simetrias, está diretamente vinculado a ideia de isometria, ou seja, preservação da distância. Simetrias podem ter diferentes conceitos para diferentes análises, matematicamente é propriedade de uma função que não se altera em uma determinada transformação de suas variáveis. Em física o conceito de simetria está relacionado às quantidades conservadas que é estabelecida por um importante teorema devido a uma matemática alemã Emmy Noether em 1918 [13], que diz que cada simetria existente na natureza está relacionada a uma quantidade conservada. Por tal motivo, é importante saber identificar e entender os processos físicos do universo e em virtude disto, por muito tempo, manter uma simetria era algo extremamente necessário em um modelo físico para que possa satisfazer os resultados esperados. Este teorema estipula que caso um sistema seja invariante sob uma transformação contínua infinitesimal, há uma “corrente” associada, que satisfaz necessariamente uma equação de continuidade, implicando na existência de uma “carga” conservada. Dentre as simetrias existentes, as simetrias de Lorentz e CPT torna um papel importante para o MP.

A simetria de Lorentz surgiu no final do século XIX em um momento elegante para a física contemporânea. Nesta época, os físicos vivenciavam um impasse com relação à mecânica newtoniana e o eletromagnetismo de Maxwell, isso porque as leis clássicas dadas pela mecânica de Newton mantinham sua estrutura perante as famosas transformações de Galileu, exaltando assim, o princípio da relatividade de Galileu. Por outro lado, aplicando a transformação de Galileu sob o eletromagnetismo de Maxwell, observava-se que as equações de Maxwell não preservavam sua forma padrão, evidenciando que o princípio da relatividade de Galileu não valia para o eletromagnetismo de Maxwell valendo somente para a mecânica de Newton. Este impasse só foi resolvido pelos trabalhos de Lorentz, Poincaré e Einstein, que propuseram um novo conjunto de transformações perante as quais o Eletromagnetismo permanecia inalterado, surgindo, assim, a simetria de Lorentz.

Contudo, para manter o eletromagnetismo de Maxwell invariante, tinha de se pagar um preço alto, que a Mecânica Clássica teria de incorporar idéias inovadoras no que diz respeito a espaço e tempo. Surgia, então a Teoria da Relatividade Restrita (TRR), lançada por Albert Einstein em 1905. O princípio da relatividade de Einstein assegura que as leis físicas são invariantes perante as transformações de Lorentz, ou seja, que as leis físicas não devem depender da perspectiva de um observador e que tais leis são equivalentes para todos os observadores postados nos mais variados referenciais inerciais. Este equivale ao primeiro postulado da TRR que também traz um segundo no qual estabelece a velocidade da luz como uma constante universal que independe do movimento relativo entre a fonte e o observador. Inúmeros experimentos foram feitos no mundo todo e a simetria de Lorentz foi estabelecida como uma simetria fundamental, que se aproxima da simetria de Galileu para velocidades muito inferiores a da luz.

A simetria CPT foi originalmente sugerida por Julian Schwinger em 1951, e uma derivação mais robusta foi proposta por Gerhard Luders e Wolfgang Pauli, em 1954. A sigla CPT significa: conjugação de carga (C), inversão espacial ou paridade (P) e inversão temporal (T). A operação de conjugação da carga supõe que para cada partícula existe uma anti - partícula com a mesma massa, porém com carga oposta. Já a operação de paridade está relacionada à reflexão espacial, isto é, a inversão dos eixos espaciais de um determinado sistema físico. A inversão temporal, por outro lado, consiste em inverter o sentido do eixo de evolução temporal do sistema, ou seja, trocar o tempo  $t$  por  $-t$ . Na natureza já foram identificadas a violação de modo individual das simetrias C, P, T e também da dupla CP mas até o momento não foi observado a violação da simetria CPT.

A simetria CP foi proposta por Lev Landau em 1957 e descoberta em 1964 por James Cronin e Val Fitch, os quais foram laureados com o prêmio Nobel de física em 1980. O mecanismo da quebra espontânea da simetria CP foi proposto por Yiochiro Nambu quando estudava decaimento de káons, levando-o a dividir o prêmio Nobel de física em 2008. A importância no estudo da quebra espontânea da simetria CP está relacionada ao fato de explicar a existência de mais matéria do que anti-matéria no Universo. Em 2002, Oscar Greenberg provou que a violação CPT implica na quebra de simetria de Lorentz. Isto implica que qualquer estudo de violação CPT inclui também violação de Lorentz. Outra simetria fundamental da natureza é a simetria de gauge, que está diretamente ligada ao eletromagnetismo e também às “teorias de gauge”. Esta simetria está relacionada às transformações que mantêm os campos elétrico e magnético invariantes perante uma mudança nos potenciais vetorial e escalar. A eletrodinâmica de Maxwell foi a primeira teoria física a exibir a simetria de gauge em sua estrutura. Um dos primeiros trabalhos sobre as consequências da violação das simetrias de Lorentz foi proposto por Carroll-Field-Jackiw (CFJ) no início dos anos 90, modificando a eletrodinâmica de Maxwell adicionando na densidade de lagrangeana um termo do tipo Chern-Simons, com isso houve um acoplamento do campo de gauge com um campo que viola a simetria de Lorentz.

Posteriormente, por volta de 1996 Colladay e Kostelecky [1], influenciados pelos trabalhos de Carroll-Field-Jackiw, elaboraram um modelo teórico que corresponderia a uma extensão do conhecido modelo padrão (MP) das interações fundamentais, denominado de modelo padrão Estendido (MPE). Este novo modelo, o MPE, incorpora termos violadores da simetria de Lorentz e CPT em todos os setores de interação do modelo padrão. Os termos de violação de Lorentz são obtidos através da quebra espontânea de simetria no contexto da teoria de cordas em uma teoria mais fundamental (definida na escala de energia de Planck), e os coeficientes responsáveis pela violação são quantidades tensoriais que fazem o papel de valores esperados no vácuo.

O trabalho [19] foi um dos precursores no que diz respeito aos estudos acerca dos modelos que englobam violação de simetria de Lorentz. No entanto o MPE é atualmente uma das teorias mais bem sucedidas no que se trata de violação da invariância de Lorentz.

É importante notar que, apesar de o MPE conter coeficientes responsáveis pela violação de simetria de Lorentz e de C,P, T,CP e Pt. A simetria  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  e CPT é mantida, conservando várias propriedades importantes, assim como a renormalização da teoria [20].

O MPE preserva a estrutura de gauge  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , a renormalizabilidade do modelo padrão. A violação de Lorentz, no contexto do MPE, ocorre apenas no referencial da partícula, sendo preservada no referencial do observador. Isto significa que do ponto de vista do observador, a simetria de Lorentz permanece válida e todas as transformações (rotações e translações) permanecem invariantes. O setor de gauge é formado por um termo CPT-ímpar e um termo CPT-par. O termo CPT-ímpar, que possui paridade ímpar e birrefringência, é o termo de Carroll-Field-Jackiw, tal termo gera uma eletrodinâmica de Maxwell modificada denominada de Maxwell-Carroll-Field-Jackiw.

Assim, nesta dissertação apresentaremos uma teoria onde já foi estudada anteriormente em [11] e nós daremos continuidade na teoria calculando as contribuições de ordem inferior para função de dois pontos do campo, vale destacar que esses cálculos nunca foram desenvolvidos anteriormente. Os aspectos perturbativos do acoplamento pseudo-tensorial, onde a quebra de simetria de Lorentz é introduzida através do pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ , ou seja, em um método perturbativo no coeficiente  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$  é um passo da teoria que está sendo desenvolvida pela primeira vez e estaremos apresentando os cálculos detalhadamente no capítulo 4.

A contribuição do setor puramente mínimo é bem descrita em muitos livros didáticos sobre a teoria quântica de campos. Assim, o nosso objetivo consistirá no estudo das contribuições que envolvem essencialmente os acoplamentos não-mínimos.

O capítulo seguinte tratará de apresentar algumas ferramentas matemáticas e conceitos físicos da Teoria da Relatividade que iremos usar no decorrer do trabalho. logo em seguida apresentaremos as transformações de Lorentz, assim como as suas formas equivalentes, isto é, as transformações de Lorentz de observador e de partícula. Mostraremos as regras de transformações de campos sob transformação de observador, e por fim mostraremos, através de um exemplo, como a equivalência entre as transformações de Lorentz de observador e de partícula é quebrada na presença de um campo de fundo.

No capítulo 3, apresentaremos o modelo padrão estendido, mais especificamente a eletrodinâmica quântica estendida. Sendo que inicialmente é apresentado brevemente o modelo padrão, no que diz respeito a eletrodinâmica quântica, para que então seja apresentada a EDQ estendida, assim como suas motivações e possíveis indícios experimentais e observacionais, que indiquem violação de Lorentz. Além disso, discutiremos um pouco sobre o teorema CPT.

No capítulo 4 entramos diretamente no objetivo principal deste trabalho, calcular as contribuições de ordem inferior para função de dois pontos do campo de gauge. vale destacar que esses cálculos nunca foram desenvolvidos e estaremos mostrando deta-

lhadamente as contribuições para funções de dois pontos. Os aspectos perturbativos do acoplamento pseudo-tensorial, onde a quebra de simetria de Lorentz é introduzida através do pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ , ou seja, em um método perturbativo no coeficiente  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ .

Finalmente, apresentaremos nossas principais conclusões físicas acerca do estudo realizado.

Durante toda esta dissertação, utilizaremos as unidades naturais, ou seja, consideraremos  $\hbar = c = 1$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ ,  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Além disso, a métrica adotada apresenta os seguintes elementos diagonais  $(+1, -1, -1, -1)$ .

## 2

# A Violação da Invariância de Lorentz

## 2.1 As transformações de Lorentz

As transformações de Lorentz relacionam sistemas físicos a partir de perspectivas de diferentes observadores inerciais. Tais transformações deixam as soluções das equações de Maxwell, ou seja, equações de onda, invariantes. Portanto, considere as seguintes situações: Partindo, que a teoria da Relatividade Restrita estão fundamentadas em dois postulados e a partir desses postulados são deduzidas muitas consequências, que são intuitivas e que não concordam com a física clássica. Algumas dessas consequências são cinemáticas, isto é, envolvem conceitos de espaço e tempo e outros que dependem diretamente deles, como velocidade e aceleração. Dentre as consequências tratadas no estudo da cinemática, podemos citar a relatividade da simultaneidade, a dilatação do tempo e a contração do espaço.

Entre o final do século XIX e o início do século XX, após a eletrodinâmica de Maxwell estava praticamente consolidada, havia algumas questões que encontravam-se sem solução. Por exemplo, considere uma carga elétrica movendo-se com velocidade constante. Um observador que não esteja em repouso em relação à carga perceberá um campo elétrico e um campo magnético, enquanto que um observador em repouso em relação à carga perceberá apenas o campo elétrico gerado por esta carga, ou seja, duas observações diferentes são feitas a partir de referenciais equivalentes. Com base neste fato, duas conclusões podem ser consideradas, ou a eletrodinâmica de Maxwell requer alterações ou o princípio da relatividade (proposto por Galileu) não se aplica aos fenômenos eletromagnéticos. Várias teorias modificando a eletrodinâmica foram propostas, não obstante, experimentos posteriores vieram à refutar tais teorias, uma a uma. Houve também a proposta do éter, mas foi prontamente desconsiderada após o famoso experimento de Michelson-Morley. Desse modo, são as transformações de Galileu que deveriam sofrer alterações, com base nos seguintes postulados: (i) as leis físicas são as mesmas em todos

os referenciais inerciais e a velocidade da luz no vácuo vale  $c$  para todos os referenciais inerciais, independente do movimento da fonte.

Com base nestes postulados, Einstein encontrou novas transformações (tais transformações já haviam sido encontradas por Lorentz) que mantinham a equivalência entre referenciais que se moviam próximos à velocidade da luz, além de recuperar as transformadas de Galileu no limite de baixas velocidades. Estas transformações são escritas como:

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - vt), \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right).\end{aligned}$$

Elas podem ser encontradas através da equação de onda, fazendo com que esta mantenha-se invariante mediante uma transformação linear em  $x$  e em  $t$ .

A teoria da relatividade restrita vem passando por uma série de teste, sem jamais ter sido refutada. No entanto, mais recentemente, teorias têm mostrado que a invariância de Lorentz pode ser quebrada em um limite de altas energias. No final da década de 80, foi mostrado por Kostelecký e Samuel [14, 15] que há interações presentes em teoria de cordas que podem levar à quebra espontânea da simetria de Lorentz. Foi devido a impossibilidade tecnológica de se testar modelos em teoria de cordas que emergiu o grande interesse em modelos de teoria de campos com violação da invariância de Lorentz, visto que tais modelos podem ser vistos como o limite de baixas energias dessas teorias fundamentais. Na próxima seção elucidaremos de que maneira ocorre esta violação de simetria de Lorentz, explanando as chamadas transformações de observador e de partícula, além de apresentar um exemplo de um elétron se movendo em um campo elétrico de fundo gerado por um capacitor de placas paralelas.

### 2.1.1 Dedução das transformações de Lorentz

Como já foi mencionado essas transformações de Lorentz [12] relacionam sistemas físicos a partir de perspectivas de diferentes observadores inerciais. Portanto, considere a seguinte equação de onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

que representa uma equação de onda no vácuo propagando-se na direção  $x$  com velocidade  $c$ . Buscamos transformações lineares que relacionem o sistema de coordenadas  $(x, t)$  à um novo  $(x', t')$  movendo-se com velocidade  $v$  em relação ao primeiro. Tais transformações

são da forma,

$$x' = \alpha x + \beta t \quad (2.2)$$

$$t' = \lambda x + \delta t. \quad (2.3)$$

Agora basta encontrar  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\delta$ . Para tal, substituímos as transformações lineares acima na equação de onda e encontramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \frac{\beta^2}{c^2} &= 1, \\ \alpha &= \delta, \\ \frac{c^2 \lambda}{\beta} &= 1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Quando as expressões acima são substituídas em (2.2) e (2.3), encontramos

$$x' = \alpha \left( x + \frac{\beta}{\alpha} t \right), \quad (2.5)$$

$$t' = \alpha \left( \frac{\beta}{\alpha c^2} x + t \right), \quad (2.6)$$

tal que ao serem comparadas com as transformações de Galileu, obtemos

$$\frac{\beta}{\alpha} = -v \quad (2.7)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma. \quad (2.8)$$

Por fim, observamos que as transformações passam a ser,

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.9)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (2.10)$$

sendo  $\gamma$  o fator de Lorentz. Veja que fizemos uma transformação (boost) na direção do eixo  $x$ , contudo, nada nos impede de realizar a mesma transformação nas direções dos eixo  $y$  e do eixo  $z$ . De maneira geral elas podem ser explícita da seguinte forma:

$$r' = \gamma(r - vt) \quad (2.11)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} r \right), \quad (2.12)$$

Há ainda rotações nas coordenadas espaciais que são invariantes de Lorentz. A seguir exemplificaremos melhor como são classificadas as transformações de Lorentz.

## 2.2 As Transformações passivas e ativas

As transformações de Lorentz passivas são aquelas que relacionam, por meio de rotações ou boost, de forma que os pontos do espaço-tempo permaneça inalterados. De maneira mais geral esse tipo de transformação é o primeiro a ser estudado sobre relatividade geral. Já as transformações ativas são praticamente as inversas das transformações passivas. Neste caso, ao invés de manter os pontos estáticos e relacionar os dois sistemas físico, fazemos ao contrário, mantemos o sistema parado e aplicamos a transformação diretamente na partícula ou no campo de interesse (ou seja nos pontos do espaço-tempo) e avaliamos as mudanças ocorridas sem alterar o referencial.

Elucidaremos as diferenças desses dois pontos de vista de transformação de Lorentz que envolve somente dimensões espaciais: as rotações.

### 2.2.1 Rotação passiva

Neste seção, descreveremos as transformações de Lorentz do ponto de vista passivo. Usando uma rotação no plano  $xy$  como exemplo, vamos descrever um mesmo ponto  $p$  em dois sistemas de referência. Conforme vemos na figura, temos a coordenada de um ponto  $p$ , relacionando a descrição das coordenadas no referencial  $0(x, y)$ , com as coordenadas  $0'(x, y)$  rodado de um ângulo  $\phi$ .

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

onde definimos a matriz de transformação passiva por:

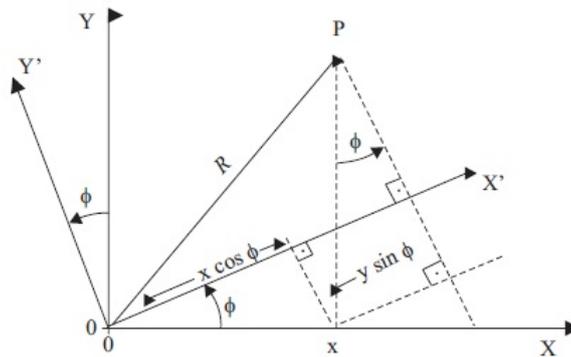
$$p = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

fazendo uma expansão e considerando até primeira ordem, temos:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

Fazendo produto das matrizes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & \delta\phi y \\ -\delta\phi x & y \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$



**Figura 2.1: como se chegar à matriz de rotação passiva**

Fonte: Belich *et al.*, 2007

e assim chegamos

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Nesse trabalho estamos trabalhando com um dos casos mais simples do grupo de Lorentz, mais a maioria das transformações de Lorentz é composto de "boost" (empurrões) em três direção e rotação sobre três eixos. As matrizes de rotações são geradas a partir de pequenas expansões no operador (momento angular). Além disso, elas são composta por diversas propriedades, entre elas, vale destacar do grupo  $O(3)$  é uma matriz ortogonal, seu determinante  $+1, -1$  e grupo não-abeliano. Além dessa, temos o grupo  $SU(2)$  (matrizes de Dirac), pois é unitário e por que somente preserva a transição de probabilidade entre dois estados, como medida em diferente em referencial.

### 2.2.2 Rotação ativa

Em uma descrição ativa das rotação, o espaço como um todo, gira em relação a base de coordenadas de um único sistema de referencial  $O$ . Então, tomando como referência o ponto  $P(x, y)$  na figura abaixo, observamos um giro até o ponto  $P'$ , transladado de  $\phi R$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

onde definimos a matriz de rotação ativa por

$$A = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

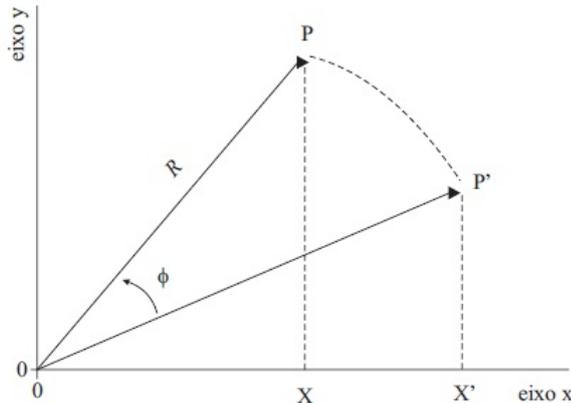


Figura 2.2: como se chegar à matriz de rotação ativa

Fonte: Belich *et al.*, 2007

expandindo infinitesimal e considerando até primeira ordem

$$\begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \delta\phi \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Observe que dois tipos de transformação descrevem a rotação de maneira equivalente: No caso passivo temos dois referenciais diferindo de um ângulo  $\phi$  descrevendo um mesmo ponto  $P$ . No caso ativo, temos único referencial descrevendo a rotação por meio do deslocamento de um ponto  $P$ . Logo, se colocamos um elétron no ponto  $P$  podemos descrever a rotação dessa partícula de duas maneira equivalentes, ou seja, se realizarmos uma rotação passiva de um ângulo  $\phi$ , ou ativa de um ângulo  $-\phi$  obtemos a mesma matriz de rotação.

## 2.3 Transformações de observador e de partícula

Sabemos que tem duas transformações a ser considerada passiva e ativa. Tais transformações são equivalentes, visto que, enquanto uma (passiva) mantém os pontos do espaço-tempo fixos relacionando os dois sistemas de coordenadas, a outra (ativa) mantém as bases fixas, movendo os pontos do espaço-tempo. Logo vemos que estas duas transformações estão relacionadas por uma função inversa, como pode ser visto em [23], e

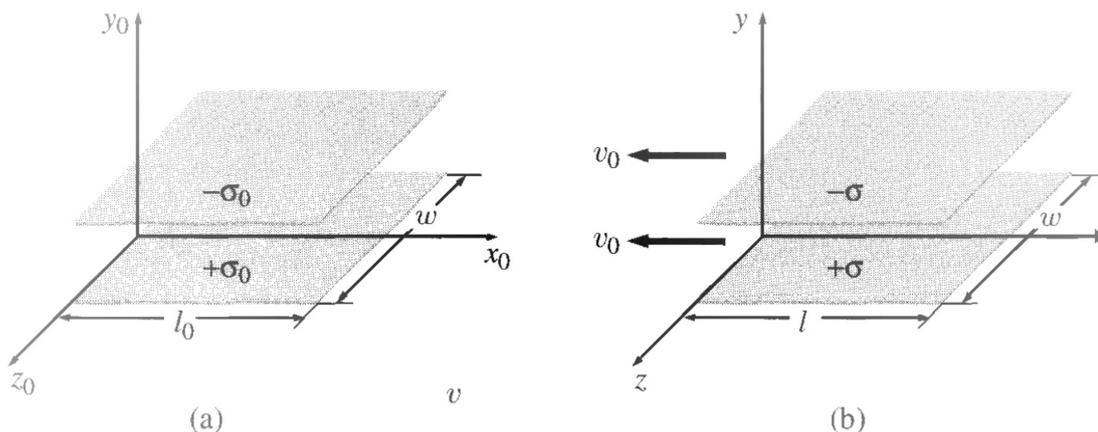
representam a mesma física. contudo, inserindo ao sistema um campo vetorial de fundo que seleciona uma direção preferencial no universo, quebrando assim a isotropia, a equivalência entre estas duas transformações é quebrada, e tais transformações passam a ser chamadas de transformações de observador (passiva, na presença de campo de fundo) e de partícula (ativa, na presença de campo de fundo). Primeiro elucidaremos como a invariância de Lorentz é quebrada através da TL de partícula e mostraremos como os campos elétricos e magnéticos se transformam mediante uma transformação de observador [24].

### 2.3.1 Como os campos se transformam sob transformação de observador

Nesta seção trataremos das regras gerais de transformação para os campos eletromagnéticos. Para elucidar tal transformação partiremos do fato de que a carga é invariante e, diferentemente da massa, é um número fixo que independe da velocidade a qual ela está se movendo. Suporemos também que as regras de transformação são as mesmas, independentemente de como os campos são produzidos.

Considere então o campo elétrico em uma região entre placas paralelas de um grande capacitor. Suponha que o capacitor está em repouso em  $S_0$  e tenha uma carga superficial  $\pm\sigma_0$  (veja Fig. 2.3). Assim, o campo elétrico nesta região é,

Figura 2.3: Referencial  $S_0$  (a) e Referencial  $S$  (b)



Fonte: Griffiths, 2007

$$\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{y}. \quad (2.21)$$

Podemos ainda considerar este sistema movendo-se para a direita com velocidade  $v_0$ , que é o mesmo que considerar as placas movendo-se para a esquerda. Chamaremos tal sistema de sistema  $S$ . Neste caso o campo assume a forma

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{y}, \quad (2.22)$$

sendo o valor da carga superficial diferente, visto que tal movimento altera o comprimento da placa por um fator de Lorentz, fazendo com que a carga por unidade de área também seja modificada por um fator de Lorentz, tal que:

$$\sigma = \gamma_0 \sigma_0; \quad \gamma_0^{-1} = \sqrt{1 - v_0^2/c^2} \quad (2.23)$$

Dessa forma temos que  $\vec{E}^{per} = \gamma_0 \vec{E}_0^{per}$ , onde o subscrito “per” indica as componentes perpendiculares ao movimento. Para o caso relativo as componentes paralelas ao movimento, temos que  $\vec{E}^{par} = \vec{E}_0^{par}$ , via raciocínio análogo.

As equações de transformação para os campos obtidas anteriormente não são as leis de transformação mais gerais, visto que partimos do repouso, e portanto não havia cargas em movimento, e conseqüentemente não havia campo magnético. Para encontrarmos as transformações mais gerais partiremos do sistema  $S$ , que além do campo elétrico gerado na direção  $y$ ,  $\vec{E}_y = \sigma/\epsilon_0$ , há um campo magnético devido as densidades de correntes superficiais  $\vec{J}_\pm = \mp \sigma v_0 \hat{x}$ . Devido a regra da mão direita, este campo aponta na direção negativa do eixo  $z$  e sua magnitude é dada pela lei de Ampère,

$$B_z = -\mu_0 \sigma v_0. \quad (2.24)$$

Inserindo agora um terceiro sistema  $S'$ , movendo-se para a direita com velocidade  $v$  em relação a  $S$ , obviamente os campos associados a  $S'$ , são:

$$E'_y = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}, \quad B'_z = -\mu_0 \sigma' v', \quad (2.25)$$

onde  $v'$  é a velocidade de  $S'$  em relação ao referencial em repouso  $S_0$ , dado por

$$v' = \frac{v + v_0}{1 + vv_0/c^2}, \quad \gamma' = \frac{1}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}, \quad (2.26)$$

e como já foi visto,

$$\sigma' = \gamma' \sigma_0. \quad (2.27)$$

Temos como objetivo desta seção encontrar  $E'$  e  $B'$  em função de  $E$  e  $B$ . Para tal,

usaremos as equações 2.25, de modo que

$$E'_y = \left( \frac{\gamma'}{\gamma_0} \right) \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad B'_z = - \left( \frac{\gamma'}{\gamma_0} \right) \mu_0 \sigma v'. \quad (2.28)$$

É fácil verificar também que

$$\frac{\gamma'}{\gamma_0} = \gamma \left( 1 + \frac{vv_0}{c^2} \right), \quad (2.29)$$

De modo que ao substituirmos nas equações acima, obtemos

$$E'_y = \gamma \left( E_y - \frac{v}{c^2 \epsilon_0 \mu_0} B_z \right), \quad (2.30)$$

e

$$B'_z = \gamma (B_z - \mu_0 \epsilon_0 v E_y). \quad (2.31)$$

Ao usar a relação  $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ , também podemos escrevê-las como

$$E'_y = \gamma (E_y - v B_z) \quad (2.32)$$

$$B'_z = \gamma \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right). \quad (2.33)$$

Analogamente podemos verificar as demais relações,

$$E'_x = E_x, \quad B'_x = B_x, \quad (2.34)$$

$$E'_z = \gamma (E_z + v B_y), \quad B'_y = \gamma \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right). \quad (2.35)$$

Estas são as transformações mais gerais quando temos dois referenciais em movimento, as quais serão utilizadas a seguir ao tratar do exemplo de um elétron propagando-se em uma região de campo elétrico entre placas paralelas.

## 2.4 A Violação da Invariância de Lorentz e Exemplos

Anteriormente fizemos uma breve elucidação acerca das transformações de observador e de partícula, ressaltando suas diferenças e suas relações com as transformações ativas e passivas.

É bom observar que, ao realizarmos uma transformação de observador (por observador entendemos transformação passiva na presença de um campo de fundo), o campo de fundo transforma-se como um campo vetorial. Não obstante, ao realizarmos uma transformação de partícula, o campo de fundo transforma-se como um campo escalar, que pode ser visto também através de análise de rotação, veja [23, 25]. Assim vemos

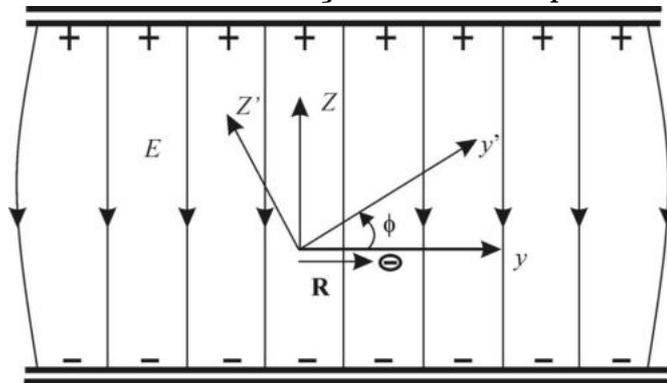
que a física descrita em cada uma das transformações é diferente, logo as transformações não são mais invariantes. Neste trabalho estamos interessados na quebra de simetria de Lorentz via transformação de partícula, e deixamos claro que mantemos a invariância das transformações de observador, para garantir de que a física descrita seja independente do sistema de referência escolhido.

Agora, estamos aptos a tratar do exemplo de um elétron imerso em um campo elétrico constante de fundo e avaliar a quebra da invariância de Lorentz através de um boost.

### 2.4.1 Quebra da invariância de Lorentz através de uma rotação e de um boost

Vamos observar inicialmente uma rotação por um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  em meio a um campo elétrico de fundo constante (gerado por um capacitor de placas paralelas) na direção  $z$ , de modo que o vetor posição de um elétron imerso neste campo seja  $\vec{R} = (0, a, 0)$ . Uma representação esquemática é apresentada na Fig. 2.4.

Figura 2.4: TI de observador: rotação em um campo de fundo constante

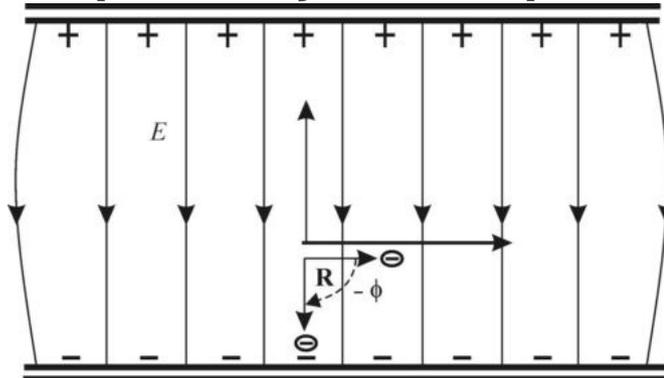


Fonte: Belich *et al.*, 2007

Veja que, usando uma transformação de observador como está sendo representado na figura acima, o vetor posição segue perpendicular ao campo elétrico de fundo, ou seja, após a rotação ( $\vec{R} \perp \vec{E}$ ).

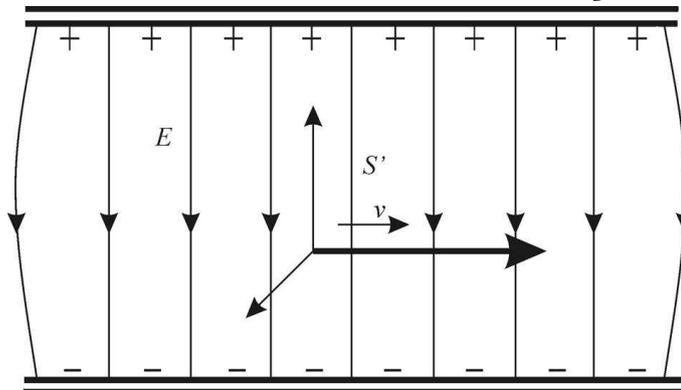
No entanto, ao realizarmos uma transformação de partícula, isto é, uma rotação de  $-\frac{\pi}{2}$  radianos na partícula, como mostrado na Fig 2.5, vemos agora que o vetor posição do elétron é paralelo ao campo de fundo, diferentemente do caso em que foi feita uma transformação de observador.

Figura 2.5: Tl de partícula: rotação em um campo de fundo constante

Fonte: Belich *et al.*, 2007

Note que, a presença de um campo de fundo quebra a invariância entre as transformações passiva e ativa, que pode ser vista devido ao fato de que na primeira o vetor posição segue perpendicular ao campo enquanto que na segunda o vetor posição segue paralelo ao campo. É fácil ver que na ausência de um campo de fundo a equivalência é mantida, observando-se que em ambas as transformações o vetor posição permanece antiparalelo ao eixo  $Z$  após a transformação.

Agora considere o mesmo capacitor de placas paralelas que possui um campo elétrico constante, o qual será considerado o nosso campo elétrico de fundo. Na região entre as placas, imerso neste campo de fundo, temos dois sistemas de referências  $S$  e  $S'$ , onde o primeiro encontra-se em repouso em relação as placas do capacitor e o segundo movimenta-se com velocidade  $\vec{v}$  em relação ao primeiro, paralelamente às placas capacitores. Uma representação esquemática é mostrada na Fig. 2.6.

Figura 2.6:  $S'$  se movendo com velocidade  $\vec{v}$  em relação ao capacitor ( $S$ )Fonte: Belich *et al.*, 2007

Mostramos anteriormente como se transformam, de forma geral, os campos elétricos e magnéticos sob uma transformação de observador, equações (2.22) a (2.25). Estas

equações podem ser simplificadas na forma vetorial da seguinte forma

$$E'_{\perp} = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp} \quad (2.36)$$

$$B'_{\perp} = \gamma \left( \vec{B} - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2} \right)_{\perp}. \quad (2.37)$$

Se considerarmos o estado inicial no qual  $S$  está em repouso, o campo magnético inicial é nulo, o que simplifica as equações.

Quando realizamos uma transformação de partícula sobre o elétron, não estamos movendo as placas do capacitor, portanto o campo elétrico assume características de um campo de fundo que não está variando. Vemos assim que, como a transformação de partícula atua somente nos pontos do espaço-tempo, somente o elétron se desloca com velocidade  $-\vec{v}$  em relação as placas do capacitor, portanto o campo elétrico de fundo não se modifica, diferentemente da transformação de observador, em que o campo elétrico é reduzido e surge uma contribuição de campo magnético.

Suponha agora um elétron movendo-se com velocidade  $\vec{u}$  paralelamente as placas do capacitor. Olhando apenas para a componente  $y$  do movimento vemos que o observador  $S$  verá o elétron em queda, sendo acelerado apenas pelo campo elétrico, visto que, como  $S$  encontra-se em repouso  $\vec{B} = 0$ . Sendo assim, a força que o elétron sente é a força de Lorentz, dada por  $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ . Sendo  $\vec{F} = dp/dt$ , extraímos que

$$p = \frac{mu_y}{\sqrt{1 - \left(\frac{u_y}{c}\right)^2}} = Ft. \quad (2.38)$$

Visto que  $p = 0$  quando  $t = 0$ . Isolando  $u_y$  a partir da equação anterior temos,

$$u_y = \frac{\left(\frac{F}{m}\right)t}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \quad (2.39)$$

Com o intuito de encontrar a posição na vertical, integramos a expressão anterior (2.39) de 0 a  $t$ , cuja solução é,

$$y(t) = \frac{mc^2}{F} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} - 1 \right). \quad (2.40)$$

Note que a equação acima representa uma hipérbole, diferentemente da parábola que é encontrada no caso não relativístico. Tomando uma expansão em série de Taylor da quantidade  $\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{mc}\right)^2$ , que nos dá

$$y(t) = \frac{F}{2m} t^2. \quad (2.41)$$

Já o observador em  $S'$  verá o elétron submetido a uma força

$$\vec{F}' = eE'_{per} = e\gamma\vec{E} \quad (2.42)$$

Da mesma forma que fizemos para encontrar  $y(t)$  para o caso anterior faremos agora, e encontramos

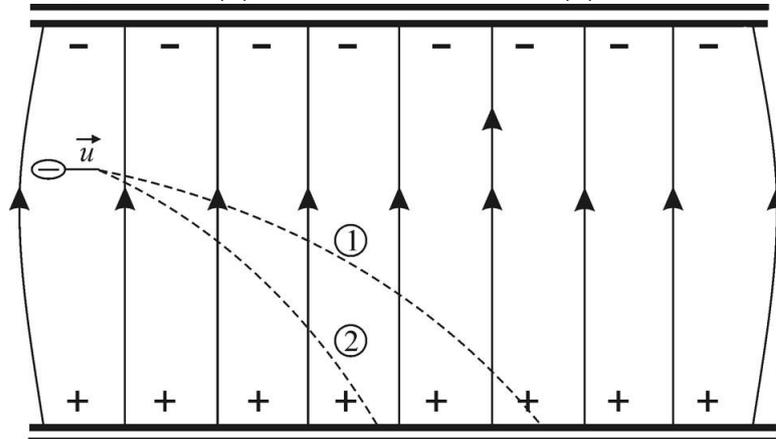
$$y'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}y(t). \quad (2.43)$$

Analogamente para o alcance do elétron ( $x(t)$ ),

$$x'(t) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}x(t). \quad (2.44)$$

Podemos ver que no limite de baixas velocidades  $S$  e  $S'$  coincidem, ou seja, o alcance do elétron é  $A = x'(t) = x(t)$ . No caso da transformação de partícula, o elétron sofre um boost que lhe imprime uma velocidade  $-\vec{v}$ , e desta forma o observador  $S$  o verá caindo de modo a obter o alcance de  $A = (\vec{u} - \vec{v})t_q$ , sendo  $t_q$  o tempo de queda. No caso anterior, como a velocidade do elétron era  $\vec{u}$  este registrava um alcance maior, como podemos ver na Fig. 2.7

**Figura 2.7: Trajetórias: (1) velocidade inicial  $\vec{u}$  (2) velocidade inicial  $\vec{u} - \vec{v}$**



Fonte: Belich *et al.*, 2007

Observamos através deste exemplo que, em relatividade especial na presença de campo de fundo, as transformações de lorentz relacionam dois referenciais inerciais por meio de coordenadas (observador). Se considerarmos transformações que relacionam duas partículas com diferentes velocidade sem mudar referencial(particula). vimos que a presença do campo de fundo torna as duas transformações não mais equivalentes, ou seja, elas passam a descrever uma física diferente. Sob transformação de partícula o campo de fundo fica inalterado e o elétron sofre um boost instantâneo e seu alcance é reduzido.

Portanto, nesse sentido a simetria de Lorentz é quebrada pela presença de um campo de fundo. Na natureza espera-se que hajam quadrivetores que quebrem espontaneamente a simetria, como sugerido em [17].

# 3

## Eletrodinâmica Quântica Estendida com a Quebra da Simetria de Lorentz

Neste capítulo inicialmente faremos uma breve introdução acerca do chamado modelo padrão das partículas elementares e campos, no qual a eletrodinâmica está incluída. Em seguida falaremos do modelo padrão estendido (MPE), apresentando algumas motivações para o seu estudo assim como possíveis sinais observacionais de detecção de modelos com violação. Ao final do capítulo será feita uma breve revisão sobre lagrangiana da eletrodinâmica Quântica. Em seguida, mostraremos a lagrangiana que descreve a extensão da eletrodinâmica usual, onde comentaremos acerca de seus operadores e suas invariâncias. Além de apresentar um rápido comentário sobre violação de CPT.

### 3.1 Introdução

Com o propósito de avaliar e obter alguns resultados sobre as teorias fundamentais, alguns modelos foram construído em uma escala de energia definida, ou seja, a escala de energia do modelo padrão, também conhecida como escala eletrofraca, onde a massa de referência é  $m_W \approx 10^2$  GeV. O modelo padrão apresenta resultados eficazes numa escala de energia muito menor que a escala eletrofraca. Isto é sugere que os sinais experimentais observáveis a partir de uma teoria fundamental são possivelmente suprimidos por alguma potencia da razão  $r \frac{m_W}{m_P} \approx 10^{17}$  [6]. Logo, ao considerarmos que a violação da invariância de Lorentz surgem a partir de teorias mais fundamentais, como em teorias de cordas, é natural esperarmos que os efeitos físicos desta violação sejam bastante pequenos e então, a possibilidade de observarmos indícios desta violação só existiria através de experimentos que apresentem altíssima sensibilidade. Estes modelos são capazes de

prover a possibilidade de se testar experimentalmente tais teorias. Um desses modelos, que consolidou-se ao longo dos anos, é o modelo padrão estendido, proposto por Kostelecky e Colladay [1, 2]. Tal modelo tem sua origem no fenômeno de quebra espontânea de simetria em teorias fundamentais [3, 4]. Neste modelo é inserido na lagrangiana todos os possíveis termos que violam as simetrias de Lorentz e de CPT, no entanto, preservando a renormalizabilidade, a invariância de gauge e a simetria SU(3), SU(2), U(1) do modelo padrão usual. Dentro das observações experimentais, há um grande impasse ao passo de conseguir indícios de violação da Invariância de Lorentz. Tal dificuldade se dar devido as correções esperadas devido a quebra da invariância de Lorentz devem ser muito pequenas, logo, contém um grande número de experimentos dos quais podemos ter indícios acerca da violação da invariância de Lorentz [7]. O modelo padrão usual juntamente com a teoria da relatividade geral, ao que tudo indica, formam o que consideramos como o limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Desta forma, esperamos que ao encontrarmos esta teoria mais fundamental, ela nos ajude a solucionar vários questões ainda em aberto como, por exemplo, prover uma descrição consistente para a gravitação quântica. Como é esperado atualmente, a gravitação quântica deve apresentar efeitos relevantes numa escala de altas energias, conhecida como escala de Planck. Nesta escala a massa de referência é conhecida como massa de Planck. Alguns dos indícios para a comprovação da violação da Invariância de Lorentz na natureza, podem ser obtidos oscilações de neutrinos [8, 9, 10]. No MPE todos os efeitos de violação de Lorentz e CPT são controlados por coeficientes associados a teoria mais fundamental na escala de Planck. Tais efeitos, podem, por exemplo, estar associados a valores esperados em teoria de cordas [14] [15], ou coeficientes emergente de teorias de campos não comutativas [27]. No entanto, muitos desses coeficientes, em outros setores do MPE, são associados a dados experimentais envolvendo, prótons e nêutrons [29], elétrons [30] [31] [32] [33], muons [34] [35] e fótons [36] e [37].

## 3.2 Eletrodinâmica Quântica

A EDQ é a teoria quântica de campos relativística da eletrodinâmica. Ela descreve como luz interagem com a matéria e foi primeira teoria a entrar em completo acordo com a mecânica e a relatividade especial. A fundamentação teorica da é baseada na mecânica quântica relativística e invariância de gauge. A origem da invariância de gauge observaram a partir de vários potenciais diferentes podem descrever os mesmos campos eletromagnéticos. Em teoria de campos, o conceito de invariância de gauge foi inicialmente estudado por Weyl em 1918 e constitui um dos pontos mais importantes da física de partículas. A invariância sobre transformações de gauge locais de extrema importância no que diz respeito as interações fundamentais e a interpretação atual de tal conceito foi dada por Fock em 1926.

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi, \quad (3.1)$$

Fazendo uma transformação nós campos da seguinte forma:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad (3.2)$$

Esta lagrangiana 3.1 é invariante sob a transformação de gauge, isto é, o fator da fase  $\alpha$  é constante. se a fase for inserida uma localidade, ou seja, tomando  $\alpha=\alpha(x)$  a lagrangiana de Dirac 3.1 não se mantém invariante, pois, logo depois que realizar essa transformação no campo, temos uma nova lagrangiana. Este é o grande paradigma da está nas consequências de se impor invariância rotacional por fase local.

$$\mathcal{L}_D \rightarrow \mathcal{L}_D + \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha, \quad (3.3)$$

observe que 3.3 não é mais invariante, pois, aparece esse termo a mais  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha$  Para que possa balancear é necessário inserir um termo na lagrangiana,

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x),$$

Assim a lagrangiana escrita como

$$\mathcal{L}_{Mat} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (3.4)$$

onde introduzimos a derivada covariante  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Mantém os campos espinoriais e gauge invariantes.

A lagrangiana de Maxwell descreve a dinâmica dos campos de gauge é dada por:

$$\mathcal{L}_{maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

A lagrangiana de Maxwell 3.5 claramente é invariante sob transformação de gauge. Finalmente podemos escrever a lagrangiana que compõe a eletrodinâmica quântica, sendo esta composta unicamente pelas lagrangianas de Maxwell e de Dirac:

$$\mathcal{L}_{EDQ} = \mathcal{L}_{maxwell} + \mathcal{L}_{mat}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{L}_{EDQ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (3.7)$$

A lagrangiana 3.6 como pode ser vista acima, é invariante sob transformação de gauge e detém simetria U(1) e descreve a dinâmica e interação dos campos de gauge com os campos espinoriais. O modelo padrão foi construído sobre dois pilares principais: a teoria quântica de campos e as simetrias de gauge. Obviamente inclui a quebra espontânea de

simetria. Ao focarmos na eletrodinâmica quântica, temos que a origem a invariância de gauge se dá a partir da observação de que vários potenciais diferentes podem descrever os mesmo campos eletromagnéticos. Estes vários potenciais estão conectados por um grupo de transformações contínuas, gerando uma simetria contínua  $U(1)$  na lagrangiana.

### 3.3 modelo que incorpora violação de Lorentz para Férmions

A eletrodinâmica estendida é composta basicamente da eletrodinâmica usual, no entanto, sendo também adicionado à lagrangiana todos os possíveis termos que incorporam a violação de simetria de Lorentz e CPT. O objetivo desta seção é apresentar um modelo com possíveis termos que incorporam a quebra da simetria de lorentz e CPT. Os termos acrescidos são pequenos a ponto de serem desprezados no regime de energia do setor eletrofraco, desta forma o presente modelo recupera o modelo padrão convencional. Uma outra consequência da pequena magnitude dos coeficientes de violação é a possibilidade de se trabalhar em um regime perturbativo. É importante lembrar que a EDQ estendida preserva a simetria de gauge local,  $SU(3)$ ,  $SU(2)$ ,  $U(1)$  do modelo padrão convencional assim como a renormalização. A principal técnica para o estudo de tais modelos surgiu da observação do fenômeno de quebra espontânea de simetria em teorias mais fundamentais. No caso de um campo escalar, o processo de quebra espontânea de simetria dá origem a um valor esperado no vácuo não nulo para o campo de Higgs, originando assim a massa das partículas do modelo padrão. Tal processo ficou conhecido como mecanismo de Higgs. Já no caso de um campo tensorial, obtemos, após o processo de quebra espontânea de simetria, surge um tensor de fundo constante que aponta para a existência de uma direção preferencial no espaço-tempo, quebrando assim a sua isotropia, que é um conceito bem definido na relatividade restrita. No contexto da Mecânica Quântica Relativística é acoplar os termos que viola Lorentz aos campos. Se temos a lagrangiana da EDQ usual dada por:

$$\mathcal{L}_{EDQ} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (3.8)$$

devemos adicionar as lagrangianas

$$\mathcal{L}_{f\acute{e}rmions} = -\bar{\psi}\not{a}\psi - \bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi - \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi + ic_{\mu\nu}\psi\gamma^\mu D^\nu\psi + id_{\mu\nu}\psi\gamma^\mu\gamma_5 D^\nu\psi, \quad (3.9)$$

e

$$\mathcal{L}_{f\acute{o}tons} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\eta_\mu A_\nu\partial_\lambda A_\rho + \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}, \quad (3.10)$$

onde  $iD_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$

A lagrangiana da EDQ estendida fica da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overbrace{(k_{AF})^\mu}^M \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{A^\nu F^{\lambda\rho}}^{M^3} - \frac{1}{4}(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho} \overbrace{F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}}^{M^4} + \frac{1}{2}i\bar{\psi}\Gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}M\psi, \quad (3.11)$$

A equa o de Dirac   modificada pela introdu o desses termos na lagrangiana. Surge as corre es na massa do férmion e nas matrizes de Dirac.

$$(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\psi = 0 \quad (3.12)$$

além disso, como podemos verificar a lagrangiana 3.11, ela pode ser expressa da seguinte forma: onde  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \Gamma_1^\mu$  e  $M = m + M_1$ , sendo

$$\begin{aligned} \Gamma_1^\mu &= c^{\mu\nu}\gamma_\nu + d^{\mu\nu}\gamma_5\gamma_\nu + e^\mu + if^\mu\gamma_5 + \frac{1}{2}g^{\lambda\nu\mu}\sigma_{\lambda\nu} \\ M_1 &= a_\mu\gamma^\mu + b_\mu\gamma_5\gamma^\mu + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

O primeiro termo   a lagrangiana de Maxwell usual, e os outros dois termos são os que violam a simetria de Lorentz, lembrando que  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ .

Todos os coeficientes da EDQ estendida acima violam as transforma es de Lorentz de part ua, no entanto, somente os coeficientes  $a_\mu$ ,  $b_\mu$  e  $g_{\lambda\mu\nu}$  no setor fermiônico e  $(k_{AF})^\mu$  no setor bos nico são responsáveis pela viola o CPT. Note que todos esses coeficientes são valores esperados do vácuo dos campos tensoriais das teorias fundamentais.

Na lagrangiana de fóton, ou seja, caso bos nico   governada pelo termo de Chern-Simons quadrimensional (4D) CPT-ímpar, que   governado pelo coeficiente  $(k_{AF})^\mu$  e pelo termo CPT-par, governado pelo coeficiente  $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$ . O termo CS responsável por uma viola o nas simetrias de Lorentz e CPT, e perceba que o coeficiente  $k_{AF}^\mu$  possui dimensão de massa ( $d = 1$ ), visto que a lagrangiana possui dimensão de massa ( $d = 4$ ) e o operador  $A^\nu F^{\lambda\rho}$  possui dimensão de massa ( $d = 3$ ). O último termo do setor bos nico possui um operador  $F^{\mu\nu}F^{\lambda\rho}$  com dimensão de massa ( $d = 4$ ) e portanto o coeficiente  $(k_F)_{\mu\nu\lambda\rho}$    adimensional e justamente esse acoplamento   que iremos detalhar no próximo capítulo. Além disso, tal coeficiente   CPT-par, isto  , viola apenas a simetria de Lorentz. No setor fermiônico, os operadores contraídos com os coeficientes  $a_\mu$ ,  $b_\mu$ ,  $e_\mu$ ,  $f_\mu$  e  $g_{\mu\nu\rho}$  são CPT-ímpar, enquanto que os operadores associados aos coeficientes  $c_\mu$ ,  $b_\mu$  e  $H_{\mu\nu}$  são CPT-par.

### 3.4 A viola o de Lorentz

Na se o anterior, discutimos sobre quebra de simetria de Lorentz e eletrodinâmica quântica estendida. Agora, iremos mostrar como se d  a quebra da simetria de lorentz,

por meio, de um exemplo da teoria Carrol, Field e Jackiw (CFJ) [22].

$$\mathcal{L}_{\mathcal{MCS}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(k_{AF})_{\mu}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}A_{\nu}F_{\lambda\rho}. \quad (3.14)$$

A lagrangiana acima mencionada é conhecida como o modelo de Chern - Simons 4D e foi inicialmente estudada no trabalho de Carrol, Field e Jackiw (CFJ) [22]. Notamos, que no caso onde  $(k_{AF})^{\mu} = (0, \vec{k}_{AF})$  encontramos uma estrutura muito similar ao termo de Chern-Simons tridimensional 3D. No trabalho [22] mostra que os termos viola as simetrias de Lorentz (e de reversão temporal (T) para  $(k_{AF})^0$ , enquanto que de paridade (P) para  $(k_{AF})^i$  ao passo que preserva a invariância de gauge). A ideia de quebra de simetria de Lorentz por meio de um quadrivetor constante de fundo consolidou, em especial, através do modelo padrão estendido proposto por Kosteletsky.

Os campos de fundo inclusos no modelo padrão estendido violam as transformações de Lorentz de partícula como mencionamos no capítulo 2, enquanto que as transformações de Lorentz de observador permanecem preservadas. Uma transformação de observador consiste basicamente de uma transformação de Lorentz passiva na presença de um campo de fundo, a medida que uma transformação de partícula consiste em uma transformação de Lorentz ativa na presença de um campo de fundo. Para perceber como se dá a violação de fato na presença de um campo de fundo, basta lembrar que as transformações passivas (espaço-tempo fixo) e ativas (referencial fixo) são equivalentes entre si. Não obstante, a presença de um campo de fundo quebra a equivalência entre essas transformações, e é desta forma que os campos de fundo presentes no MPE violam a simetria de Lorentz, isto é, violando as transformações de Lorentz de partícula. Na próxima seção, apresentaremos os aspectos gerais relativos há violação de simetria de CPT e mostraremos, como o coeficiente de violação  $b_{\mu}$  do setor fermiônico do modelo padrão estendido viola a simetria CPT.

### 3.5 Simetrias CPT

A teoria de Dirac apresenta, além das transformações de Lorentz, outras duas importantes simetrias tipo espaço-tempo, a transformação por paridade e a inversão temporal. A primeira, de caráter espacial, troca o sinal da parte espacial de um quadrivetor qualquer:  $x^{\mu} = (x^0, x) \rightarrow x_{\mu} = (-x_0, x)$  e o mesmo vale para o momento  $p^{\mu} = (p^0, p) \rightarrow p_{\mu} = (-p_0, p)$ . A teoria quântica tem uma grande virtude de explicar a existência de partículas e antipartículas na natureza. Essa transformação é chamada conjugação de carga (C). Acredita-se que a Natureza procura preservar estas três simetrias combinadas, denominada simetria CPT. No entanto, existem alguns processos que podem violar esta simetria. O objetivo desta seção é mostrar como acontece esses três tipos de simetrias, também conhecida como CPT. Essa Simetria CPT, é uma simetria das leis da física para as transformações que envolvem simultaneamente carga (C), inversão espacial (paridade)

(P) e reversão temporal (T). Por muito tempo acreditou-se que as simetrias C, P e T eram separadamente simetrias da física, pois tanto a gravitação quanto o eletromagnetismo e depois as interações fortes respeitavam essa simetria. As primeiras medidas indicavam que a teoria era invariante sob transformações de CP, mas não C e P separadamente. A quebra da simetria de paridade foi bastante surpreendente. Sabemos, que há também uma pequena violação de CP gerada pelas interações fracas. A ideia da simetria CP surgiu quando a descoberta da violação da paridade em certas relações radioativas nos anos 1950, logo, só foi realmente explorada em 1964, quando a interação fraca violava tal simetria, com isto, se denominava violação de simetria CP, a descoberta do decaimento do méson neutron K. Os méritos do grande feito foram atribuídos Janmes Cronin e a Val Fitch que receberam o prêmio Nobel de Física em 1980.

As relações de inversão de paridade que usaremos aqui são as seguintes:

$$P\psi(x)P^{-1} = \psi^p(x) = \alpha_p\gamma^0\psi(t, -x) \quad (3.15)$$

$$P\bar{\psi}(x)P^{-1} = \bar{\psi}^p(x) = \alpha_p^*\bar{\psi}(t, -x)\gamma^0 \quad (3.16)$$

as relação de inversão temporal,

$$T\psi(x)T^{-1} = \psi^t(x) = \alpha_t\gamma^1\gamma^3\psi(-t, x) \quad (3.17)$$

$$T\bar{\psi}(x)T^{-1} = \bar{\psi}^t(x) = -\alpha_t^*\bar{\psi}(-t, x)\gamma^1\gamma^3 \quad (3.18)$$

finalizando, as relações de conjugação de Carga são dadas por:

$$C\psi(x)C^{-1} = \psi^c(x) = \alpha_c i\gamma^2\gamma^0\bar{\psi}^t(x) \quad (3.19)$$

$$C\bar{\psi}(x)C^{-1} = \bar{\psi}^c(x) = \alpha_c^*\psi^t(x)i\gamma^2\gamma^0 \quad (3.20)$$

$$CA_\mu(x)C^{-1} = -A_\mu(x) \quad (3.21)$$

Veja mais detalhes em [5]. Antes de dar procedimento ao nosso estudo, iremos detalhar cada uma desses três tipo de simetrias:

Nosso próximo passo é mostrar que únicos que viola CPT são os covariantes bilineares de Dirac que não preservam a simetria CPT são o vetor e o vetor axial (Pseudo vetor). Na CPT diz que se trabalhamos com teorias relativística deve existir a invariância de transformação por paridade (inversão espacial) e inversão temporal (time reversal) seguida por uma transformação por conjugação de carga. Vale destacar, que mais adiante iremos apresentar os cálculos de correções para um acoplamento tipo tensor axial (pseudo tensor), onde está incluído a quebra da simetria de Lorentz.

Partindo do termo  $\not{b}\gamma_5$ , vamos considerar agora um quadrivetor  $B = B_\mu(x)$ , que transforma-se sob uma transformação de carga (tal como o campo de gauge), ao invés de considerarmos um quadrivetor contante  $b_\mu$ . Vamos atuar os três operadores C,P,T e avaliar como cada um modifica o termo  $\not{b}\gamma_5$ . Avliando primeiro o operador de Paridade (P).

$$\begin{aligned} PB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi P^{-1} &= PB_\mu P^{-1}P\bar{\psi}P^{-1}\gamma^\mu\gamma_5P\psi P^{-1} \\ &= |\alpha_p|^2 B_\mu(t, -x)\bar{\psi}(t, -x)\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi(t, -x) \end{aligned} \quad (3.22)$$

usando as relações 3.15 e 3.18 e inserindo identidade, temos:

$$PB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi P^{-1} = \begin{cases} -B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{se } \mu = 0 \\ B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{se } \mu = 1,2,3 \end{cases}$$

fazendo análogo para temporal, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} TB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} &= TB_\mu T^{-1}T\bar{\psi}T^{-1}\gamma^\mu\gamma_5T\psi T^{-1} \\ &= -|\alpha_t|^2 B_\mu(-t, x)\bar{\psi}(-t, x)\gamma^1\gamma^3\gamma^\mu\gamma_5\gamma^1\gamma^3\psi(-t, x) \end{aligned} \quad (3.23)$$

considerando  $|\alpha_t|^2=1$ , podemos escrever o resultado reversão temporal na seguinte forma:

$$TB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi T^{-1} \begin{cases} B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{se } \mu=0 \\ -B_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi & \text{se } \mu=1,2,3 \end{cases}$$

finalizando com o conjugação de carga que encontramos:

$$\begin{aligned} CB_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi C^{-1} &= TB_\mu C^{-1}C\bar{\psi}C^{-1}\gamma^\mu\gamma_5C\psi C^{-1} \\ &= -|\alpha_c|^2 B_\mu(t, x)\bar{\psi}(t, x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(t, x) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Desta forma podemos ver, através da tabela mostrada abaixo, que as estruturas tensoriais associadas as quantidades  $b_0$  e  $b_i$  violam as seguintes simetrias,

Tabela 3.1: Coeficientes de simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$B_0\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi$	-	-	+	+	-	-	+
$B_i\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi$	-	+	-	-	+	-	+

se o quadrivetor  $B_\mu = B_\mu(x)$  for promovido a um quadrivetor constante  $b_\mu$ , que

obviamente não transforma sob conjugação de carga, há uma mudança de sinal na conjugação de carga e conseqüentemente na transformação de CPT, como podemos ver na tabela 3.5.

Tabela 3.2: Coeficientes de simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$B_0 \bar{\psi} \gamma^0 \gamma_5 \psi$	+	-	+	-	+	-	-
$B_i \bar{\psi} \gamma^i \gamma_5 \psi$	+	+	-	+	-	-	-

mostramos que a estrutura  $\not{b} \gamma_5$  do setor fermiônico do MPE viola de fato a simetria de CPT, como queríamos demonstrar. Um outro ponto importante, ainda no contexto de violação de CPT, é o resultado encontrado por [16], que nos diz que violação de CPT implica em violação de Lorentz, mas que a recíproca nem sempre é verdadeira, pois a invariância de simetria de CPT é uma condição necessária, mas não suficiente para garantir a invariância de Lorentz.

Abaixo mostramos a tabela completa 3.5 de violação CPT para todos os coeficientes do MPE. Observe que, por simplicidade omitimos os campos e suas respectivas derivadas contraída com os coeficientes.

Tabela 3.3: Coeficientes de simetrias discretas

	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$c_{00}, (k_F)_{0j0k}, c_{jk}, (k_F)_{jklm}$	+	+	+	+	+	+	+
$b_j, g_{j0l}, g_{jk0}, (k_{AF})_j$	+	+	-	+	-	-	-
$b_0, g_{j00}, g_{jkl}, (k_{AF})_0$	+	-	+	-	+	-	-
$c_{0j}, c_{j0}, (k_F)_{0jkl}$	+	-	-	-	-	+	+
$a_0, e_0, f_j$	-	+	+	-	-	+	-
$H_{jk}, d_{0j}, d_{j0}$	-	+	-	-	+	-	+
$H_{0j}, d_{00}, d_{jk}$	-	-	+	+	-	-	+
$a_j, e_j, f_0$	-	-	-	+	+	+	-

# 4

## Quebra da simetria de Lorentz com pseudo-tensores constantes

Os estudos relacionados a violação de simetria de Lorentz [17] [18] têm sido muito discutidos nos últimos anos. Neste capítulo nos estudaremos acoplamentos mínimos e não-mínimos e avaliaremos correção da função de dois pontos para dois diferentes tipos de casos avaliados. No contexto de violação de simetria de Lorentz, é realizado devido ao pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$  do modelo padrão estendido. Para tal, nós consideraremos um cálculo perturbativo no coeficiente de um pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ .

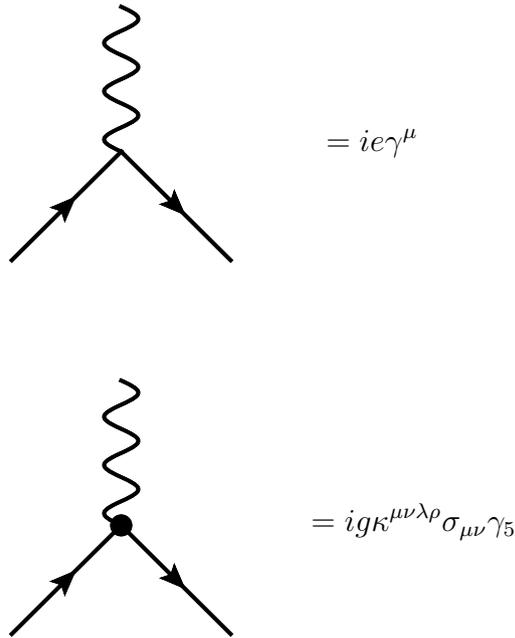
Nosso ponto de partida é o seguinte EDQ da Lagrangiana estendida:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{A} - g\kappa^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\gamma_5)\psi, \quad (4.1)$$

Em princípio, pode ser definido na base da derivada covariante:  $D_\mu = \partial_\mu + i(A_\mu + g\kappa^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\gamma_5)$ . Aqui, a quebra de simetria de Lorentz é introduzida através do pseudo-tensor constante  $\kappa_{\mu\nu\lambda\rho}$ . Anteriormente, este acoplamento foi estudado em [11] onde alguns de seus impactos em nível de árvore foram considerados. Nessa dissertação, fazemos o próximo passo, ou seja, estudamos as correções perturbativas.

Nesta teoria, temos as seguintes regras de Feynman:

$$\longrightarrow = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$



Nosso objetivo consiste em calcular as contribuições de ordem inferior para a função de dois pontos do campo de gauge. A contribuição do setor puramente mínimo é bem descrita em muitos livros didáticos sobre a teoria quântica de campos. Assim, o nosso objetivo consistirá no estudo das contribuições que envolvem essencialmente os acoplamentos não-mínimos.

Primeiro, consideramos o diagrama de Feynman envolvendo o acoplamento não-mínimo e avaliamos as correções de vértice não-mínima. Nesta etapa, colocamos os impulsos externos a zero, ou seja, tratando o campo  $F_{\mu\nu}$  do tensor como constante, isto é, efetivamente, sugerir que os campos elétrico e magnético sejam constantes e homogêneos. Então, estamos considerando o campo  $F_{\lambda\rho}$  acoplado com os férmions  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  e usaremos as regras de Feynman da eletrodinâmica quântica para calcular a contribuição de um laço, não serão realizadas necessariamente sem precisar abrir ele em termos de gauge. Esse acoplamento é característica CPT-par, um caminho fácil para observar a natureza do acoplamento, é verificar que o mesmo, acopla objetos com a mesma ou diferente quantidade de índices de Lorentz. Vejamos alguns exemplos, os índices de Lorentz  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$  e  $F^{\lambda\rho}$ , ambos são CPT-par por conter o mesmo número de índice. Outros acoplamentos não mínimo, encontrados na literatura, acoplam objetos com quantidade de índices de Lorentz diferentes, como  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  e  $F_{\lambda\rho}$  ou  $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$  e  $F_{\lambda\rho}$ . Então, é fácil verificar que estamos trabalhando nesse primeiro caso com acoplamento de característica CPT-par.

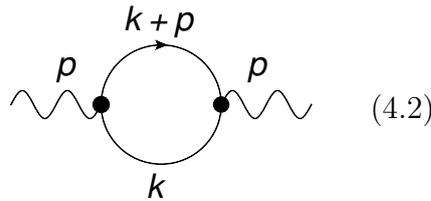


Figura 4.1: Contribuição com dois vértices não-mínimos

Os estudos voltados a teoria quântica de campos é baseado em cálculos perturbativo, ou seja, não conseguimos encontrar resultados exatos. Mas, os resultados teóricos chegam com precisão muito boa quando são realizados os experimentos. No entanto, sabemos que estudo voltado para cálculos perturbativos precisamos utilizar o cálculo de séries e na década de 1970, onde a teoria da EDQ estava no auge do seu momento, as pessoas tiveram um impecilho. Pois, eles descobriram que algumas gráficos da EDQ divergiam. Aquilo gerou uma polêmica e que demorou vários anos para ser resolvida. Então, depois de vários anos de estudos conseguiram a técnica de renormalização que é um conjunto de procedimentos utilizados para eliminar os infinitos que aparecem em alguns cálculos em teoria quântica de campos. A renormalização é usada para lidar com os infinitos que surgem nas quantidades calculadas, alterando valores dessas quantidades para compensar os efeitos das suas auto-interações. Nesse dissertação, iremos trabalhar com gráficos divergentes da EDQ estendida e com procedimento bem interessante para corrigir essas divergências. Daremos início, com correção do gráfico 4. Utilizando as regras de Feynman vimos que esse diagrama produz a seguinte contribuição para um laço:

$$S_1(p) = -\frac{g^2}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu'\nu'} \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} [\gamma_5 \sigma^{\mu\nu} (\not{k} - m) \gamma_5 \sigma^{\mu'\nu'} (\not{k} - m)] \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \quad (4.3)$$

Aqui denotamos que  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \kappa_{\mu\nu\lambda\rho} F^{\lambda\rho}$  e observamos uma divergência quadrática. Primeiro, calculamos o rastreamento. Para isso, empregamos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= d(\eta^{\mu\nu}), \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= d(\eta^{\rho\sigma} \eta^{\mu\nu} - \eta^{\nu\sigma} \eta^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

Aqui,  $d$  é a dimensão das matrizes de Dirac correspondentes (no nosso caso,  $d = 4$ ). Realização da comutação do  $\gamma_5$  matrizes (lembre-se que  $(\gamma_5)^2 = 1$ ) e ignorando os termos irrelevantes envolvendo ordens ímpares nos momentos, chegamos ao seguinte resultado:

$$S_1(p) = -\frac{g^2}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu'\nu'} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} [-\sigma^{\mu\nu} \not{k} \sigma^{\mu'\nu'} \not{k} + m^2 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\mu'\nu'}] \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \quad (4.5)$$

apresentando esta contribuição como uma soma de dois termos

$$S_1(p) = S_1^{(1)}(p) + S_1^{(2)}(p), \quad (4.6)$$

de modo a

$$S_1^{(1)}(p) = -\frac{g^2}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu'\nu'} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}[-\sigma^{\mu\nu} \not{k} \sigma^{\mu'\nu'} \not{k}] \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \quad (4.7)$$

e

$$S_1^{(2)}(p) = -\frac{g^2}{2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}[m^2 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\mu'\nu'}] \frac{1}{[k^2 - m^2]^2}, \quad (4.8)$$

Para calcularmos o traço do numerador, vamos usar o fato de que o traço de um número ímpar de matrizes de Dirac sempre é nulo. Vamos dividir o cálculo do traço em duas partes e calcular as contribuições de  $S_1^{(1)}(p)$  e  $S_1^{(2)}(p)$ , respectivamente. onde, temos:

$$\begin{aligned} t_1 &= \not{k} \sigma^{\mu\nu} \not{k}, \\ t_2 &= \omega^2 \sigma^{\mu\nu} \sigma^{\mu'\nu'}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

Primeiro, iremos realizar as contas detalhadamente do traço de  $t_1$

$$t_1 = [\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu} \gamma^\beta k_\alpha k_\beta], \quad (4.10)$$

por definição temos que:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (4.11)$$

substituindo a equação (6) em (5), temos:

$$t_1 = \frac{i}{2} (\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta - \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\beta) k_\alpha k_\beta, \quad (4.12)$$

Da álgebra de D

substituindo a propriedade escrita acima na equação (7), temos:

$$t_1 = \frac{i}{2} (2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\nu \gamma^\beta - \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta - 2\eta^{\alpha\nu} \gamma^\mu \gamma^\beta + \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) k_\alpha k_\beta, \quad (4.13)$$

$$t_1 = \frac{i}{2} (2\eta^{\alpha\mu} \gamma^\nu \gamma^\beta - 2\gamma^\mu \gamma^\beta \eta^{\alpha\mu} + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta - 2\eta^{\alpha\nu} \gamma^\mu \gamma^\beta + 2\gamma^\nu \gamma^\beta \eta^{\alpha\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta) k_\alpha k_\beta, \quad (4.14)$$

o objetivo é encontrar  $\gamma^\alpha \gamma^\beta k_\alpha k_\beta$  e mais o termo de contribuição das matrizes gama chegamos a seguinte expressão.

$$k_\alpha k_\beta = \eta_{\alpha\beta} \frac{k^2}{4}, \quad (4.15)$$

Assim fica da seguinte forma, depois de realizadas vários cálculos.

$$t_1 = \frac{ik^2}{8}(2\eta^{\alpha\mu}\gamma^\nu\gamma^\beta - 2\gamma^\mu\gamma^\beta\eta^{\alpha\nu} + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta - 2\eta^{\alpha\nu}\gamma^\mu\gamma^\beta + 2\gamma^\nu\gamma^\beta\eta^{\alpha\mu} - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta)\eta_{\alpha\beta}, \quad (4.16)$$

Fazendo contração de índices e algumas manipulações

$$t_1 = \frac{ik^2}{8}(2\gamma^\nu\gamma^\mu - 2\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta} - 2\gamma^\mu\gamma^\nu + 2\gamma^\nu\gamma^\mu - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta}), \quad (4.17)$$

Utilizando essas propriedades:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta} \\ \gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}2\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} \\ \gamma^\alpha\gamma^\beta\eta_{\alpha\beta} &= 4, \end{aligned} \quad (4.18)$$

a primeira parte do traço fica da seguinte maneira:

$$t_1 = \frac{ik^2}{8}(4\gamma^\nu\gamma^\mu - 4\gamma^\mu\gamma^\nu + 4\gamma^\mu\gamma^\nu - 4\gamma^\nu\gamma^\mu) = 0, \quad (4.19)$$

Verificamos que essa parte não contribue, pois o traço  $t_1$  deu zero. Ainda avaliando a contribuição de  $S_1^{(1)}(p)$ , mais considerando o traço  $t_2$ , temos a seguinte álgebra.

$$t_2 = -m^2\text{tr}\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\mu'\nu'}, \quad (4.20)$$

abrindo a expressão acima

$$t_2 = -\frac{m^2}{4}\text{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'} - \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'} - \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu'} + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^{\nu'}\gamma^{\mu'}), \quad (4.21)$$

e usando a álgebra de Dirac

$$\begin{aligned} t_2 = -m^2(\eta^{\mu\nu}\eta^{\mu'\nu'} - 2\eta^{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'} + \eta^{\mu\nu'}\eta^{\nu\mu'} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\mu'\nu'} + \eta^{\nu\mu'}\eta^{\mu\nu'} - \eta^{\nu\nu'}\eta^{\mu\mu'} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\mu'\nu'} \\ + \eta^{\mu\nu'}\eta^{\nu\mu'} - \eta^{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'} + \eta^{\mu\nu}\eta^{\mu'\nu'} - \eta^{\nu\nu'}\eta^{\mu\mu'} + \eta^{\nu\mu'}\eta^{\mu\nu'}), \end{aligned} \quad (4.22)$$

desenvolvendo as contas chegamos ao seguinte resultado,

$$t_2 = -\frac{8}{2}\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu'\nu'}m^2(\eta^{\mu\mu'}\eta^{\nu\nu'}), \quad (4.23)$$

usando a identidade

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} - \tilde{F}_{\nu\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 2\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (4.24)$$

a contribuição para  $S_1^{(2)}(p)$  é única que contribui para cálculo do loop.

$$s_1^2(p) = -4m^2 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2}, \quad (4.25)$$

fazendo a mudança da coordenada de integração,

$$\begin{aligned} k^2 &= -k_E^2, \\ d^n k &= i d^n k_E, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$d^n k_E = \omega^{-\epsilon} \frac{d^{n+\epsilon} k}{(2\pi)^{n+\epsilon}}, \quad (4.27)$$

usando método de regularização dimensional

$$s_1(p) = -4im^2 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \int \frac{d^{n+\epsilon} k}{(2\pi)^{n+\epsilon}} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2}, \quad (4.28)$$

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + \omega^2)^2} = \frac{\Gamma(N - \frac{d}{2})}{\Gamma(N)(4\pi)^{\frac{d}{2}-N}} (\omega^2)^{\frac{d}{2}-N}, \quad (4.29)$$

fazendo com que a dimensão do espaço-tempo seja estendida a  $d$  dimensão. além disso, expandimos a função gama e contribuindo o termo  $N=2$ .  $d = n + \epsilon$

$$s_1(p) = -4im^2 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \mu^{-\epsilon} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)(4\pi)^{\frac{d}{2}-2}} (\omega^2)^{\frac{d}{2}-2}, \quad (4.30)$$

desenvolvendo o cálculo, temos:

$$s_1(p) = -\frac{4\omega^2}{16\pi^2} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \mu^{-\epsilon} \omega^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{\Gamma(\frac{-\epsilon}{2})}{(\omega^2)^{\frac{-\epsilon}{2}} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}}}, \quad (4.31)$$

utilizamos as identidades:

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon) &= \frac{1}{\epsilon} + \gamma \dots, \\ a^\epsilon &= e^{\epsilon \ln a} = 1 + \epsilon \ln a, \end{aligned} \quad (4.32)$$

assim, temos:

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{m^2}{4\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln\left(\frac{m^2}{4\pi^2}\right) \right] \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (4.33)$$

Depois de realizada todas as análise matemática, concluimos que a contribuição  $s_1^2(p)$  é igual a:

$$S_1^{(2)}(p) = \frac{m^2 g^2}{4\pi^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln \left( \frac{m^2}{4\pi^2 \mu^2} \right) \right] \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (4.34)$$

A divergência do gráfico pode ser cancelada pelo seguinte contra-termo:

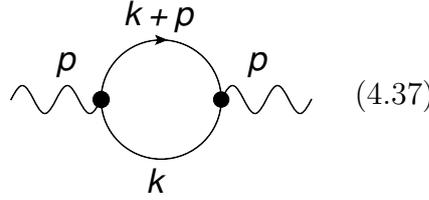
$$L_{CT}^{(1)} = -\frac{2m^2 g^2}{4\pi^2 \epsilon} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (4.35)$$

Esse termo dessa estrutura deve ser introduzido em uma ação clássica, ou seja, ao introduzirmos esse contra-termo, estamos eliminando a divergência para a contribuição de um laço de vértice não-minimo. Vamos realizar a mesma conta, considerando  $p \neq 0$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m - e\cancel{A} - g\kappa^{\mu\nu\lambda\rho}\sigma_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}\gamma_5)\psi, \quad (4.36)$$

usamos as regras de Feymann para eletrodinâmica quântica.

Portanto, a contribuição não-mínima de um laço para o propagador,



**Figura 4.2: Contribuição com dois vértices não-mínimos**

E dada por

$$S_1(p) = \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} (ig\kappa^{\rho\sigma\mu\nu}\sigma_{\rho\sigma}\gamma_5) i \frac{\cancel{k} + \cancel{p} + m}{(k+p)^2 - m^2} (ig\kappa^{\lambda\epsilon\alpha\beta}\sigma_{\lambda\epsilon}\gamma_5) i \frac{\cancel{k} + m}{k^2 - m^2} F_{\mu\nu}(p) F_{\alpha\beta}(p), \quad (4.38)$$

Para calcular o traço usamos as seguintes identidades,

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma_{\rho\sigma}\gamma_5\sigma_{\lambda\epsilon}\gamma_5) &= 4(\eta_{\rho\epsilon}\eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\rho\lambda}\eta_{\sigma\epsilon}) \\ \text{tr}(\sigma_{\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\mu\sigma_{\lambda\epsilon}\gamma_5\gamma_\nu) &= -4\eta_{\rho\mu}\eta_{\lambda\nu}\eta_{\sigma\epsilon} + 4\eta_{\rho\mu}\eta_{\epsilon\nu}\eta_{\sigma\lambda} + 4\eta_{\sigma\mu}\eta_{\lambda\nu}\eta_{\rho\epsilon} - 4\eta_{\sigma\mu}\eta_{\epsilon\nu}\eta_{\rho\lambda} - 4\epsilon_{\mu\rho\sigma}^\alpha \epsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

Definimos  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \kappa_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$  Temos que,

$$S_1(p) = g^2 \tilde{F}^{\rho\sigma}(p) \tilde{F}^{\lambda\epsilon}(p) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \times \\ \times \text{tr}(\sigma_{\rho\sigma} \gamma_5 \not{k} \sigma_{\lambda\epsilon} \gamma_5 \not{k} + \sigma_{\rho\sigma} \gamma_5 \not{p} \sigma_{\lambda\epsilon} \gamma_5 \not{k} + m^2 \sigma_{\rho\sigma} \gamma_5 \sigma_{\lambda\epsilon} \gamma_5), \quad (4.40)$$

Usando a identidade que  $k_\mu k_\nu = \frac{1}{4} k^2 \eta_{\mu\nu}$ , sob integração temos que primeiro termo na equação acima é nulo  $\gamma^\alpha \sigma^{\mu\nu} \gamma_\alpha = 0$ . Já a segundo contém uma contribuição e que nós passos seguintes estaremos mostrando os cálculos detalhadamente.

$$S_1^{(2)}(p) = g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{4p^\mu k^\mu}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \times \\ \times (-\eta_{\rho\mu} \eta_{\lambda\rho} \eta_{\sigma\epsilon} + \eta_{\rho\mu} \eta_{\epsilon\nu} \eta_{\sigma\lambda} + \eta_{\sigma\mu} \eta_{\lambda\nu} \eta_{\rho\epsilon} - \eta_{\sigma\mu} \eta_{\epsilon\nu} \eta_{\rho\lambda} - \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}) \\ = 4g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{k_\lambda (p_\sigma \eta_{\rho\epsilon} - p_\rho \eta_{\sigma\epsilon}) + k_\epsilon (p_\rho \eta_{\sigma\lambda} - p_\sigma \eta_{\rho\lambda}) - p^\mu k^\nu \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)}, \quad (4.41)$$

usando os parâmetros de Feymann, obtemos,

$$S_1^{(2)}(p) = 4g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{k_\lambda (p_\sigma \eta_{\rho\epsilon} - p_\rho \eta_{\sigma\epsilon})}{([k+xp]^2 + x[1-x]p^2 - m^2)^2} \quad (4.42)$$

$$(+k_\epsilon (p_\rho \eta_{\sigma\lambda} - p_\sigma \eta_{\rho\lambda}) - p^\mu k^\nu \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}), \quad (4.43)$$

Então, nós substituímos  $k \rightarrow k - xp$  conseguimos chegar

$$S_1^{(2)}(p) = -4g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{xp_\lambda (p_\sigma \eta_{\rho\epsilon} - p_\rho \eta_{\sigma\epsilon})}{(k^2 + x[1-x]p^2 - m^2)^2} \\ (+xp_\epsilon (p_\rho \eta_{\sigma\lambda} - p_\sigma \eta_{\rho\lambda}) - xp^\mu p^\nu \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}), \quad (4.44)$$

onde omitimos o termo nulo em  $k$ . Para o terceiro e último termo, temos:

$$\begin{aligned}
S_1^{(3)}(p) &= g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{m^2 \text{tr}(\sigma_{\rho\sigma} \sigma_{\lambda\epsilon})}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \\
&= m^2 g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{(\eta_{\rho\epsilon} \eta_{\sigma\lambda} - \eta_{\rho\lambda} \eta_{\sigma\epsilon})}{([k+xp]^2 + x[1-x]p^2 - m^2)^2} \\
&= m^2 g^2 \left( \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}_{\sigma\rho} - \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}_{\rho\sigma} \right) \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + x[1-x]p^2 - m^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Onde usamos parâmetros de Feynman. Observamos que as contribuições  $p \neq 0$  e precisamos calcular

$$I = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(k^2 + x[1-x]p^2 - m^2)^2}, \tag{4.46}$$

Usando regularização dimensional

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(-1)^2}{(4\pi)^{d/2}} i \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left( \frac{1}{x[x-1]p^2 + m^2} \right)^{2 - \frac{d}{2}} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln[x(x-1)p^2 + m^2] \right),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Para  $S_1^{(2)}(p)$  nós temos  $x$  a integral

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \ln[x(x-1)p^2 + m^2] &= \left[ \frac{(2x-1) \ln(m^2 + p^2[x-1]x) - 4x}{2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p[2x-1]}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\int_0^1 dx \ln[x(x-1)p^2 + m^2] = \left[ \ln(m^2) + \frac{2\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 2 \right], \tag{4.49}$$

chegamos ao resultado

$$I = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln(m^2) + \frac{2\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 2 \right], \quad (4.50)$$

Enquanto que para  $S_1^{(3)}(p)$

$$\int_0^1 dx x \ln [x(x-1)p^2 + m^2] = \left[ \frac{(2m^2 + p^2[2x^2 - 1]) \ln(m^2 + p^2[x-1]x)}{4p^2} + \frac{\sqrt{4m^2 - p^2}}{2p} \tan^{-1} \left( \frac{p[2x-1]}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 2p^2 x[x-1] \right], \quad (4.51)$$

$$\int_0^1 dx x \ln [x(x-1)p^2 + m^2] = \frac{\ln(m^2)}{2} + \frac{\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right), \quad (4.52)$$

Juntando tudo temos a contribuição de um laço para o propagador

$$S_1(p) = \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -4g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} [p_\lambda (p_\sigma \eta_{\rho\epsilon} - p_\rho \eta_{\sigma\epsilon}) + p_\epsilon (p_\rho \eta_{\sigma\lambda} - p_\sigma \eta_{\rho\lambda}) - p^\mu p^\nu \varepsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \varepsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha}] \times \right. \\ \times \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \frac{\ln(m^2)}{2} - \frac{\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 1 \right] \\ \left. + m^2 g^2 (\tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}_{\sigma\rho} - \tilde{F}^{\rho\sigma} \tilde{F}_{\rho\sigma}) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln(m^2) - \frac{2\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 2 \right] \right\}, \quad (4.53)$$

note que  $\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}$  é anti-simétrica por causa dos dois últimos índices (se for totalmente anti-simétrico é proporcional Ao símbolo Levi-Civita  $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ ), então  $\tilde{F}^{\mu\nu}$  o fato de ser é

anti-simétrica simplifica a equação acima

$$\begin{aligned}
S_1(p) = & \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ -4g^2 \left[ 4\tilde{F}^\sigma{}_\epsilon \tilde{F}^{\lambda\epsilon} p_\lambda p_\sigma - \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}^{\lambda\epsilon} p^\mu p^\nu \epsilon_{\mu\rho\sigma}{}^\alpha \epsilon_{\nu\lambda\epsilon\alpha} \right] \times \right. \\
& \times \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \frac{\ln(m^2)}{2} - \frac{\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 1 \right] \\
& \left. + 2m^2 g^2 \tilde{F}^{\sigma\rho} \tilde{F}_{\sigma\rho} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma - \ln(m^2) - \frac{2\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left( \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right) - 2 \right] \right\} . \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Observe que na equação 4.54, quando fazemos  $p = 0$  encontramos o resultado cedendo com esperado 4.35. Nessa segunda parte, vamos calcular a contribuição de um laço, considerando os vértice misto. Neste caso, temos um  $\bar{\psi} F_{\mu\nu} \psi$  e um externo  $A_\rho$ . Isso impõe, que estamos agora avaliando os dois acoplamento diferentes, tanto para o caso de vértice não-minimo como o vértice mínimo. Além disso, o acoplamento têm característica CPT-ímpar, pois contém diferentes índices de Lorentz. O Diagrama de Feynman correspondente: A contribuição do gráfico 4: Agora, calculamos a contribuição mista, Usando

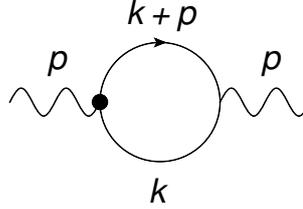


Figura 4.3: Contribuição mista para a função de dois pontos.

as regra da feymann da Eletrodinâmica Quântica. temos o seguinte resultado

$$\begin{aligned}
S(p) &= \text{tr} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} i g \kappa^{\mu\nu\lambda\rho} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 i \frac{\not{k} + \not{p} + m}{(k+p)^2 - m^2} i e \gamma^\alpha i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} F_{\lambda\rho} A_\alpha \\
&= e g \tilde{F}^{\mu\nu} A^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{m \text{tr}(\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\alpha \not{k}) + m \text{tr}(\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \not{k} \gamma_\alpha) + m \text{tr}(\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \not{p} \gamma_\alpha)}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)} \\
&= 4 i m e g \tilde{F}^{\mu\nu} A^\alpha \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \frac{\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p^\beta}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)}, \quad (4.55)
\end{aligned}$$

onde usamos que  $\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta) = -4i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ . reescrevendo a equação acima, observamos

que:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\alpha p^\beta &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\alpha p^\beta - \varepsilon_{\mu\nu\beta\alpha}A^\alpha p^\beta) \\
&= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\alpha p^\beta - \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}A^\beta p^\alpha) \\
&= \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{i}{2} F'_{\mu\nu},
\end{aligned}
\tag{4.56}$$

onde definimos  $\tilde{F}'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ . Desta forma

$$S(p) = -2meg\tilde{F}'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \frac{1}{([k+p]^2 - m^2)(k^2 - m^2)},
\tag{4.57}$$

temos o resultado para contribuição do vértice misto

$$S(p) = -\frac{2meg\tilde{F}'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \left( \frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \ln(m^2) + \frac{2\sqrt{4m^2 - p^2}}{p} \tan^{-1} \left[ \frac{p}{\sqrt{4m^2 - p^2}} \right] - 2 \right),
\tag{4.58}$$

Fazendo  $p = 0$ , temos o seguinte contra termo:

$$L_{CT}^{(2)} = -\frac{egm}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \tilde{F}'_{\mu\nu} F_{\lambda\rho}.
\tag{4.59}$$

Devemos introduzir na ação, usando o chamado método de renormalização para eliminar os infinitos da contribuição do laço corresponde.

# 5

## Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação é tratado um tema que vem recebendo muita atenção nos últimos anos, tanto devido ao fato de que modelos que incorporam violação na invariância de Lorentz serem o limite de baixas energias de teorias mais fundamentais, tais como teoria de cordas e teorias não comutativas, devido ao fato de trabalhos recentes mostrarem que estamos cada vez mais próximos de uma possível verificação experimental.

Primeiramente, tratamos de apresentar no capítulo 1 algumas motivações iniciais acerca do por que se estudar modelos com violação de simetria de Lorentz, além de apresentar brevemente o objetivo geral deste trabalho. No capítulo 2 apresentamos simploriamente, através de um exemplo, o plano de fundo do trabalho, ou seja, as transformações de Lorentz e como estas são violadas na presença de um campo de fundo. No capítulo 3 adentramos em algumas teorias, discutindo sobre o que este vem a ser e como introduzimos o modelo padrão estendido, restringindo-nos a eletrodinâmica quântica estendida, que é o foco desta pesquisa. O capítulo 4 apresenta os nossos cálculos sobre acoplamentos não-mínimos do modelo padrão estendendo e não perturbativamente. Nos apêndices há uma breve introdução a notação e as principais relações matemáticas utilizadas. Agora tratamos de revisar os resultados e discutir as conclusões.

Ao trabalharmos com a eletrodinâmica quântica estendida, selecionamos um dos termos extra para o qual focaríamos nossa atenção. Desta forma, tratamos de trabalhar com o coeficiente  $g\kappa^{\mu\nu\lambda\rho}$  que tem dimensões de massa elevado a potência negativa em quatro dimensão e encontra-se no setor fermiônico da EDQ estendida. Sabemos que um dos motivos para observar se a teoria é renormalizável é calcular a dimensão da constante de acoplamento e verificar se a constante é no sistema internacional de unidade naturais sua dimensão de massa seja elevado a potência positiva ou adimensional. Por esse motivo sabemos que a teoria é não renormalizável, assim como a teoria da gravitação.

Com a contribuição das regras de Feynmann observamos que os dois gráficos contém uma divergência quadrática. O Primeiro evento, trabalhamos com um acoplamento tipo CPT-par, pois contém os mesmos índices de Lorentz e no segundo um acoplamento tipo

CPT-ímpar. Além disso, obtivemos os seus respectivos contra termo que pode ser inserido na ação para eliminar a divergência do gráfico, mas não conseguimos eliminar a divergência da teoria, pois ela é uma teoria não renormalizável em quatro dimensão.

Uma possível continuação para este trabalho seria a consideração diferentemente do trabalho [21] e avaliar outros acoplamentos com  $d = 5$  ou maior.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997), hep-ph/ 9703464.
- [2] D. Colladay and V. A. Kostelecky, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998) [hep-ph/ 9809521].
- [3] [3] V. A. Kostelecky and S. Samuel, Phys. Rev. D 40, 1886 (1989).
- [4] [4] V. A. Kostelecky and R. Potting, Nucl. Phys. B 359, 545 (1991)
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Reading, USA: Addison-Wesley (1995) página: 842
- [6] V. A. Kostelecky, CPT and Lorentz symmetry. Proceedings: 3 nd Meeting, Bloomington, USA, 2004”.
- [7] V. A. Kostelecky and N. Russell, Rev. Mod. Phys. 83, 11 (2011) [ar- Xiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [8] P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], “Testing Lorentz Invariance and CPT Conservation with NuMI Neutrinos in the MINOS Near Detector,” Phys. Rev. Lett. 101, 151601 (2008) [arXiv:0806.4945 [hep-ex].
- [9] P. Adamson et al. [MINOS Collaboration], “A Search for Lorentz Invariance and CPT Violation with the MINOS Far Detector,” Phys. Rev. Lett. 105, 151601 (2010) [arXiv:1007.2791 [hep-ex]
- [10] A. A. Aguilar-Arevalo et al. [MiniBooNE Collaboration], “Test of Lorentz and CPT violation with Short Baseline Neutrino Oscillation Excesses,” arXiv:1109.3480 [hep-ex].
- [11] J. B. Araujo, R. Casana, M. M. Ferreira, Phys. Lett. B760, 302 (2016), arXiv: 1604.03577;
- [12] Robert Resnick, ”Introdução à relatividade especial; tradução de Shigeo Watanabe. S. Paulo, Ed. Universidade de São Paulo e Editora Poligono, 1971,167 páginas”;
- [13] S. T.Thornton, J. B. Marion, “Classical Dynamics of Particles and Systems,” 5 Ed. Belmont, EUA: Books/Cole Thomson Learning, Inc. (2004) 656 p.
- [14] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” Phys. Rev. D **39** (1989) 683.
- [15] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT and strings,” Nucl. Phys. B **359**, 545 (1991).
- [16] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. 89, 231602 (2002) [hep-ph/0201258]

- [17] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” Phys. Rev. D **55** (1997) 6760 [arXiv:hep-ph/9703464].
- [18] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz-violating extension of the standard model,” Phys. Rev. D **58** (1998) 116002 [arXiv:hep-ph/9809521].
- [19] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” Phys. Rev. D **41** (1990) 1231.
- [20] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics,” Phys. Rev. D **65** (2002) 056006 [hep-th/0111123].
- [21] V. A. Kostelecky and A. G. M. Pickering, “Vacuum photon splitting in Lorentz violating quantum electrodynamics,” Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 031801 [hep-ph/0212382].
- [22] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [23] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos e M. T. D. Orlando, ”Violação da Simetria de Lorentz,” Rev. Bras. de Ens. de Fis., v. 29, n. 1, p. 57-64 (2007).
- [24] D. J. Griffiths “Introduction to Electrodynamics,” 3 Ed. New Jersey, EUA: Prentice Hall, Inc. (1999) 576 p.  
J. D. Jackson ”Classical Electrodynamics” 3 Ed. Wiley
- [25] J. Leite, ”Violação da Invariância de Lorentz no Regime de Temperatura Finita”, dissertação de mestrado, UFAL (2012)  
S.R. Coleman and S.L. Glashow, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999)
- [26] V.A. Kostelecky, ed., CPT and Lorentz Symmetry, World Scientific, Singapore, 1999.
- [27] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” Phys. Lett. B **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].
- [28] D. Bailin, A. Love ”Introduction to gauge field theory” Ed. University of Sussex Press
- [29] V. A. Kostelecky, C. D. Lane, ”Constraints on Lorentz violation from clock-comparison experiments” Phys Rev. D **60** 116010 (1999)
- [30] H. Dehmelt et al. ”Past Electron-Positron g-2 Experiments Yielded Sharpest Bound on CPT Violation for Point Particles” Phys. Rev. Lett. **83**, 4694 (1999)
- [31] R. Mittleman et al. ”Bound on CPT and Lorentz Symmetry with a Trapped Electron” Phys. Rev. Lett. **83**, 2116 (1999)
- [32] G. Gabrielse et al. ”Precision Mass Spectroscopy of the Antiproton and Proton Using Simultaneously Trapped Particles” Phys. Rev. Lett. **82**, 3198 (1999)
- [33] R. Bluhm et al. ”CPT and Lorentz Tests in Hydrogen and Antihydrogen” Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999)
- [34] V.W. Hughes et al. ”Test of CPT and Lorentz Invariance from Muonium Spectroscopy” Phys. Rev. Lett. **87**, 111804 (2001)

- 
- [35] R. Bluhm et al. "CPT and Lorentz Tests with Muons" *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1098 (2000)
- [36] H. Muller, P. L. Stanwix, M. E. Tobar, E. Ivanov, P. Wolf, S. Herrmann, A. Senger and E. Kovalchuk *et al.*, "Relativity tests by complementary rotating Michelson-Morley experiments," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 050401 (2007) [arXiv:0706.2031 [physics.class-ph]].
- [37] F. Baynes, A. Luiten and M. Tobar, "Testing Lorentz Invariance Using an Odd-Parity Asymmetric Optical Resonator," *Phys. Rev. D* **84**, 081101 (2011) [arXiv:1108.5414 [gr-qc]].
- [38] G. V. Dunne, In \*Shifman, M. (ed.) et al.:  
From Field to Strings, vol. 1\* 445-522 [hep-th/0406216]

## APÊNDICE A

### Integração em D dimensões

Trabalhando em um espaço de Minkowski em D dimensões, sendo uma tipo-tempo e  $(D - 1)$  tipo-espaço, nós buscamos a solução para integrais do tipo

$$I_D(q) = \int \frac{d^D p}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha} \quad (\text{A.1})$$

onde  $p = (p_0, \mathbf{r})$ . Introduzindo então coordenadas polares em  $D$  dimensões temos que  $p = (p_0, r, \phi, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-3})$ , e então

$$\begin{aligned} d^D p &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \text{sen} \theta_1 d\theta_1 \text{sen}^2 \theta_2 d\theta_2 \dots \text{sen}^{D-3} \theta_{D-3} d\theta_{D-3} \\ &= dp_0 r^{D-2} dr d\phi \prod_{k=1}^{D-3} \text{sen}^k \theta_k d\theta_k. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Obviamente,  $p_0 \in [-\infty, \infty]$ ,  $r \in [0, \infty]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$  e  $\theta_i \in [0, \pi]$ . Então,

$$I_D(q) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} r^{D-2} dr \int_0^{\pi} \frac{\prod_{k=1}^{D-3} \text{sen}^k \theta_k d\theta_k}{(p^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Agora usando o seguinte fato:

$$\int_0^{\pi/2} (\text{sen} \theta)^{2n-1} (\text{cos} \theta)^{2m-1} d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \quad (\text{A.4})$$

pondo  $m = 1/2$

$$\int_0^{\pi} (\text{sen} \theta)^k d\theta = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} \quad (\text{A.5})$$

portanto [A.3](#) fica reescrita como

$$I_D(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{(p_0^2 - r^2 + 2pq - m^2)^\alpha}. \quad (\text{A.6})$$

Esta integral é invariante de Lorentz, então a calcularemos em um cenário onde  $q_\mu = (\mu, 0)$ , de modo que,  $p_0'^2 - q^2 = p_0^2 + 2\mu p_0$ . Assim temos:

$$I_D(q) = \frac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{D-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} dp'_0 \int_0^{\infty} \frac{r^{D-2} dr}{[p_0'^2 - r^2 - (q^2 + m^2)]^\alpha}. \quad (\text{A.7})$$

A função beta de Euler é definida como

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = 2 \int_0^{\infty} dt t^{2x-1} (1+t^2)^{-x-y}, \quad (\text{A.8})$$

que é válida se as partes reais de  $x$  e  $y$  forem positivas. Então se pormos

$$x = \frac{1+\beta}{2}, \quad y = \alpha - \frac{1+\beta}{2}, \quad t = \frac{s}{M} \quad (\text{A.9})$$

com  $\beta = D - 2$ ,  $M^2 = -p_0'^2 + q^2 + m^2$ , A.7 ficará,

$$I_D(q) = (-1)^{2\alpha+(D-1)/2} \pi^{(D-1)/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D-1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{[p_0'^2 - (q^2 + m^2)]^{\alpha-(D-1)/2}}, \quad (\text{A.10})$$

e a integração remanescente é solucionada fazendo uso da função beta de Euler acima definida em A.8, e finalmente obtemos a solução para  $I_D(q)$

$$I_D(q) = (-1)^\alpha i \pi^{D/2} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(q^2 + m^2)^{\alpha-D/2}}. \quad (\text{A.11})$$

Uma generalização por diferenciação direta sobre  $q^\mu$  em ambos os lados da equação pode ser facilmente obtida, e portanto poremos apenas os demais resultados das integrais que utilizamos ao longo deste trabalho.

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha-D/2} \quad (\text{A.12})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\alpha-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha-D/2-1} \quad (\text{A.13})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^{\alpha-1}}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha-D/2-1} \quad (\text{A.14})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha-D/2-2} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^\mu p^\nu p^\lambda p^\rho}{(p^2 - m^2)^\alpha} &= \frac{i(-1)^\alpha}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 2)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{\alpha-D/2-2} \times \\ &\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Em alguns casos é necessário reescrever o denominador de uma fração de modo que a integração seja possível, para tal, suporemos um caso geral simples e óbvio para começar. Considere

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \int_A^B dz \frac{1}{z^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[Ax + B(1-x)]^2}. \quad (\text{A.17})$$

Um generalização direta por diferenciação nos mostra que

$$\frac{1}{A^a B^b} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^1 dx \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{[Ax + B(1-x)]^{a+b}}. \quad (\text{A.18})$$

Analogamente, no entanto mais geral, com mais termos no denominador, temos

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \Gamma(n) \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1+\cdots+x_n)}{(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)^n}, \quad (\text{A.19})$$

que pode ser facilmente provada por indução. Diferenciando ambos os lados  $a_i$  vezes com relação a  $A_i$  nós encontramos

$$\frac{1}{A_1^{a_1} \cdots A_n^{a_n}} = \frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(1-x_1+\cdots+x_n) x_1^{a_1-1} \cdots x_n^{a_n-1}}{(x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n)^{a_1+\cdots+a_n}}, \quad (\text{A.20})$$

que pode ser escrito mais convenientemente como

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1^{a_1} \cdots A_n^{a_n}} &= \frac{\Gamma(a_1 + \cdots + a_n)}{\Gamma(a_1) \cdots \Gamma(a_n)} \int_0^1 dx_1 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \times \\ &\times \frac{x_1^{a_1-1} x_2^{a_2-1} \cdots x_{n-1}^{a_{n-1}-1} (1-x_1-\cdots-x_{n-1})^{a_n-1}}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + (1-x_1-\cdots-x_{n-1})]^{a_1+\cdots+a_n}} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$