

Erms Rodrigues Pereira

*Física dos Cristais Líquidos e Gravitação:
Pontos de Encontro*

João Pessoa - PB, Brasil

14 de Abril de 2011

Erms Rodrigues Pereira

*Física dos Cristais Líquidos e Gravitação:
Pontos de Encontro*

Tese apresentada para obtenção do Grau
de Doutor em Física pela Universidade
Federal da Paraíba.

Orientador:

Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes

DEPARTAMENTO DE FÍSICA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

João Pessoa - PB, Brasil

14 de Abril de 2011



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 14 de abril de 2011, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **aprova** o Sr. **Erms Rodrigues Pereira** na defesa de sua tese de doutoramento intitulada "*Física dos cristais líquidos e gravitação: pontos de encontro*".

João Pessoa, 14 de abril de 2011

Orientador:


Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
(DF/UFPB)

Co-Orientador:

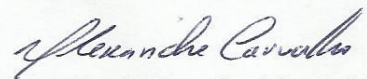
NÃO HÁ

(---)

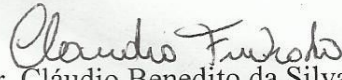
1º Examinador:


Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(DF/UFPB)

2º Examinador:


Prof. Dr. Alexandre Manoel de Moraes
Carvalho
(UEFS)

3º Examinador:


Prof. Dr. Cláudio Benedito da Silva
Furtado
(DF/UFPB)

4º Examinador:


Prof. Dr. Vitorio Alberto de Lorenci
(UNIFEI)

P436f Pereira, Erms Rodrigues.

*Física dos cristais líquidos e gravitação : pontos de encontro / Erms Rodrigues
Pereira. -- João Pessoa: UFPB, 2011.*

107f. : il.

Orientador: Fernando Jorge Sampaio Moraes.

Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN.

*1. Física. 2. Modelo análogo. 3. Defeitos topológicos. 4. Óptica
física e geométrica. 5. Ondas elásticas. 6. Condução térmica.*

Resumo

Aspectos da física dos cristais líquidos nemáticos são estudados nesta tese do ponto de vista da geometria riemanniana, por meio de modelos análogos de gravitação. Os tópicos escolhidos para estudo foram: óptica geométrica e ondulatória, ondas elásticas, hidrodinâmica e condução de calor. O principal modelo análogo empregado baseia-se na interpretação do princípio de Fermat como um processo de obtenção de geodésicas nulas, onde o material líquido-cristalino é visto como sendo uma variedade riemanniana. Esta abordagem prevê que a métrica efetivamente sentida pelo raio luminoso dependa da configuração das moléculas dentro do cristal líquido e dos índices de refração paralelo e perpendicular ao eixo de simetria da molécula líquido-cristalina. É sabido que, para o caso especial da existência de defeitos topológicos dentro do material, métricas efetivas semelhantes às de defeitos cosmológicos (como monopolos globais e cordas cósmicas) são obtidas. Esta tese desenrola-se sobre a situação onde existem defeitos topológicos do tipo ouriço e do tipo desclinação ($k = 1, c = 0$) na fase nemática do material líquido-cristalino. O primeiro problema estudado, em caráter de revisão, trata da óptica ondulatória, no que concerne a difração de luz pelos defeitos citados. Uma vez que ondas planas de comprimento de onda pequeno possuem trajetórias idênticas aos raios luminosos, o emprego do modelo análogo é justificado. Assim, mostramos que a luz espalhada por esses defeitos gera padrões de difração bem característicos, sendo a localização dada por expressão algébrica dependente dos índices de refração paralelo e perpendicular ao eixo de simetria da molécula líquido-cristalina. Também mostramos de que forma esses padrões dependem da temperatura do material. O segundo problema estudado trata da óptica geométrica e da hidrodinâmica dos cristais líquidos nemáticos. A partir de uma configuração de moléculas semelhantes à de uma desclinação ($k = 1, c = 0$), permitimos que o material flua radialmente na direção do eixo do defeito. Em seguida, fazendo uso do fato hidrodinâmico de que gradientes de velocidade no material modificam localmente os índices de refração da molécula, encontramos o perfil de velocidade que deve existir em torno do defeito para que a métrica efetivamente sentida pela luz, que viaja no plano perpendicular ao eixo do defeito, seja a de Schwarzschild no plano equatorial, com raio de Schwarzschild interior ao objeto. Encontramos que os valores absolutos da velocidade de fluido líquido-cristalino podem ser da ordem de alguns metros por segundo, diferindo enormemente dos valores obtidos pela métrica de Gordon para um fluido isotrópico em condições idênticas. O terceiro problema estudado aborda as oscilações elásticas na presença de defeitos. Semelhantemente ao primeiro problema, a trajetória do som é obtida por uma versão elástica do princípio de Fermat e, então, comparada com uma geodésica nula. Mostramos como defei-

tos topológicos influenciam nas trajetórias sonoras, assim como no som difratado por eles. O quarto problema trata da condução de calor na vizinhança de defeitos. Considerando que os defeitos são resultantes de uma adição ou remoção de porção de material, dando-se seguimento a uma relaxação elástica do meio, métricas efetivas do espaço perturbado pelo defeito são encontradas, com expressões semelhantes às obtidas pelo modelo análogo baseado no princípio de Fermat. Essas métricas geram um tensor condutividade térmica modificado, dando cabo ao estudo do campo de temperatura nessa situação. Mostramos que, dependendo dos valores da condutividade térmica perpendicular e paralela ao eixo de simetria da molécula líquido-cristalina e do defeito em questão, o gradiente de temperatura pode ser acentuado ou atenuado sobre o defeito, permitindo o controle da resposta térmica do material à temperatura, de acordo com a presença de defeitos. Suscitar um entendimento maior da física dos cristais líquidos e de seu emprego como background em modelos análogos de gravitação é o tema principal de cada um dos problemas analisados.

Palavras-chave: Modelo análogo de gravitação, cristal líquido, defeitos topológicos, óptica física e geométrica, ondas elásticas, condução térmica.

Abstract

Aspects of the physics of nematic liquid crystals are studied in this thesis from the viewpoint of riemannian geometry through analogue models of gravitation. The topics chosen for study were: geometric and wave optics, elastic waves, hydrodynamics and heat conduction. The main analogue model used is based on the interpretation of Fermat's principle as a process to obtain null geodesics, where the liquid crystalline material is seen as a riemannian manifold. This approach predicts that the metric effectively felt by the light ray depends on the configuration of molecules in the liquid crystal and on the parallel and perpendicular refractive indexes to the axis of symmetry of the liquid-crystal molecule. It is known that, for the particular case of the existence of topological defects within the material, effective metric similar to cosmological defects (like global monopoles and cosmic strings) are obtained. This thesis develops itself on the situation where there are topological defects of hedgehog type and $(k = 1, c = 0)$ disclination type in the nematic phase of the liquid crystalline material. The first problem studied, as a review, deals with the wave optics, with respect to the light diffracted by the cited defects. Since plane waves of small wavelength have identical trajectories to light rays, the use of analog model is therefore justified. Thus, we show that light scattered by these defects generates a characteristic diffraction pattern, being the location given by an algebraic expression dependent on the parallel and perpendicular refractive indexes to the axis of symmetry of the molecule. We also show how these patterns depend on the temperature of the material. The second studied problem deals with the geometrical optics and hydrodynamics of the nematic liquid crystals. From a molecular configuration similar to a $(k = 1, c = 0)$ disclination, we let the material flow radially towards the axis of the defect. Then, using the hydrodynamic fact that velocity gradients in the material locally change the refractive index of the molecule, we find the velocity profile that must exist around the defect so that the metric actually experienced by light traveling in the plane perpendicular to the axis the defect is the Schwarzschild one in the equatorial plane, with the Schwarzschild radius interior to the object. We found that the absolute values of the velocity of liquid crystalline fluid can be order of a few meters per second, differing greatly from the values obtained by Gordon metric for an isotropic fluid under identical conditions. The third studied problem deals with the elastic oscillations in the presence of topological defects. Similarly to the first problem, the trajectory of the sound is obtained by an elastic version of Fermat's principle and, then, compared with a null geodesic. We show how topological defects influence the sound trajectories and the sound diffracted by them. The fourth problem deals with the heat conduction in the vicinity of defects. Considering that

the defects come from an addition or removal of portion of the material, letting the medium relaxes elastically, effective metric of the space disturbed by the defect are found, with expressions similar to those obtained by the analogous model based on Fermat's principle. These metrics generate a modified thermal conductivity tensor, allowing the study of the temperature field in this situation. We show that, depending on the values of parallel and perpendicular thermal conductivity to the axis of symmetry of the molecule and on the defect in question, the temperature gradient can be accentuated or attenuated on the defect, allowing control of the response thermal temperature of the material, according to the presence of defects. Encouraging a greater understanding of the physics of liquid crystals and its use as a background in analogue models of gravity is the main theme of each analyzed problem.

Key-words: Analogue model of gravitation, liquid crystal, topological defects, physical and geometrical optics, elastic waves, heat conduction.

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha esposa, Monalize, e ao meu filho, Levi, que me compreenderam com paciência, ajudando-me a conluir esta tese.

Também dedico este trabalho aos meus pais, Fátima e Francisco, por terem me estimulado a inquirir a vida e dela extrair conhecimento.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela oportunidade de aprendizagem que a Vida estua em oferecer-me.

Agradeço a todos os companheiros, professores e servidores da pós-graduação da UFPB que me demonstraram estima (faço questão de lembrar de cada pequena boa ação de vocês), especialmente a Ferdinande da Conceição Souza, Marco Aurélio dos Santos Cruz, José Jamilton Rodrigues dos Santos e Liconanderson Oliveira Dantas.

Agradeço ao meu orientador de toda a pós-graduação, Fernando, discentemente conhecido como “Moraes”. Nunca vi alguém saber tanto sobre diversos assuntos como ele. Não é à toa: a sua humildade, como pessoa e como pesquisador, deve ser o que o faz melhorar sempre. Enquanto orientando dele, ainda no início do doutorado, dei-me conta que sou finalmente capaz de desenvolver uma linha de pesquisa própria. Devo muito a Fernando por este sentimento de independência acadêmica.

Agradeço ao professor Sébastien René Fumeron, da Université Henri Poincaré Nancy 1, França, *pour le traitement d'égal à égal en termes de chercheur. Ma femme et moi aussi je vous remercie d'avoir présenté la ville Nancy et les plaisirs de la cuisine française. Merci beaucoup, Sébastien et Florence.*

Agradeço à “Dona” Nazaré e, especialmente, a Danilo Menezes, pela dedicação em realizar um trabalho de qualidade.

Agradeço a todos os meus alunos enquanto professor assistente substituto da UFPB. Com eles, constatee o quanto de pesquisa acadêmica existe na docência. Não só pelo estudo do conteúdo e preparo das aulas, mas pelo entendimento da aprendizagem humana e pelo fraterno cuidado que devo a eles.

Agradeço aos amigos de Recife, especialmente aos do Núcleo Espírita Auta

de Souza. Eles são-me, entre muitas outras coisas, fontes de alívio enquanto nos embates da Vida.

Agradeço a Marize, Gilvan, Célia, Joana d’Arc e Gilvan Filho pela paciência por ter um físico escrevendo uma tese dentro da casa deles. Muito obrigado.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução	p. 17
1.1	Importância dos Modelos Análogos de Gravitação	p. 18
1.2	Objetivos e Estrutura da Tese	p. 19
I	Cristais Líquidos e Modelo Análogo	22
2	Cristais Líquidos Nemáticos (CLN)	p. 23
2.1	Cristais líquidos	p. 24
2.1.1	Defeitos na Fase Nemática	p. 27
2.2	Propriedades Ópticas	p. 28
2.2.1	Luz Ordinária e Extraordinária	p. 30
2.2.1.1	Velocidade de Grupo e Fluxo de Energia	p. 32
2.3	Propriedades Elásticas e Hidrodinâmicas dos CLN	p. 34
2.3.1	Ondas Sonoras	p. 35
2.3.2	A Equação de Beris-Edwards	p. 36
3	Modelo Análogo para Luz em CLN via Princípio de Fermat	p. 39
3.1	Introdução	p. 40

3.2	O Princípio de Fermat e a Geometria Riemanianna	p. 40
3.2.1	Análogos a Monopolos Globais	p. 41
3.2.2	Análogos a Cordas Cósmicas	p. 44

II Aplicações do Modelo Análogo em CLN 47

4	Difração de Luz por Defeitos Ouriço e Desclinação ($k = 1, c = 0$)	p. 48
4.1	Introdução	p. 49
4.2	Defeito Ouriço	p. 50
4.3	Desclinação ($k = 1, c = 0$)	p. 54
4.4	Influência da Temperatura	p. 57
5	Simulando a Atração Gravitacional de Planetas	p. 60
5.1	Introdução	p. 61
5.2	Fluxo radial de CLN	p. 61
5.2.1	Um Exemplo	p. 66
6	Descrição Métrica para Ondas Sonoras	p. 68
6.1	Introdução	p. 69
6.2	Métrica Efetiva para o Som	p. 69
6.2.1	Trajetórias Sonoras	p. 71
6.2.2	Difração do Som por Defeitos Topológicos	p. 72
7	Descrição Métrica do Fluxo de Calor através de Defeitos Topológicos	p. 73
7.1	Introdução	p. 74

7.2	Desclinação e Defeito Ouriço	p. 75
7.3	Resultados Numéricos da Condução Térmica	p. 77

III Conclusões e Perspectivas 84

8	Discussão sobre os Capítulos de Aplicações	p. 85
8.1	Introdução	p. 86
8.2	Difração de Luz por Defeitos Ouriço e Desclinação ($k = 1, c = 0$)	p. 86
8.3	Simulando a Atração Gravitacional de Planetas	p. 87
8.4	Descrição Métrica para Ondas Sonoras	p. 88
8.5	Descrição Métrica do Fluxo de Calor através de Defeitos Topológicos	p. 89
8.6	Perspectivas Além-Tese	p. 90

Anexo A – Um Pouco de Geometria Riemanniana	p. 92
--	-------

Anexo B – Detalhes Sobre o Método das Ondas Parciais	p. 95
---	-------

Referências	p. 99
--------------------	-------

Índice Remissivo	p. 106
-------------------------	--------

Lista de Figuras

1	Arranjo das moléculas na fase nemática: (a) por moléculas tipo bastão; (b) por moléculas tipo disco.	p. 24
2	A fase esmética.	p. 25
3	Representação do defeito tipo ouriço. As setas representam o diretor $\hat{n} = \hat{r}$	p. 27
4	Gota d'água criando defeito ouriço entre moléculas anfifílicas. Imagem retirada de [1].	p. 28
5	(a) Desclinação ($k = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4}$); (b) Plano $z = \text{cont.}$ para desclinação ($k = 1, c = 0$).	p. 28
6	Desclinação ($k = 1, c = 0$) apresentando escape na direção da linha do defeito. Imagem retirada de [2].	p. 29
7	Molécula de cristal líquido e seus índices de refração.	p. 29
8	Vetores de uma onda eletromagnética em meio anisotrópico. . .	p. 31
9	Deformações em CLN. (a) Deformação alargamento em 2D. (b) Deformação alargamento em 3D. (c) Deformação torção. (d) Deformação flexão. Imagem retirada de [2].	p. 34
10	Esquema de cilindro com buracos para a injeção ou drenagem do fluido líquido-cristalino.	p. 38
11	Esquema de um monopolo global. O cone representa a quantidade de ângulo sólido retirado dado por $\Delta = 4\pi(1-b)$, onde b é o déficit de ângulo sólido.	p. 42

12	Vista equatorial de um defeito ouriço em cristal líquido com $n_o = 1,65$ e $n_e = 1,95$ ($b > 1$). As linhas são as trajetórias da luz. Imagem retirada de [3].	p. 44
13	Seção transversal diferencial de choque, eq. (4.10), para um defeito ouriço com $b = 0.9$ usando a eq. (4.9) truncada em $l = 600$	p. 52
14	Seção transversal diferencial de choque, eq. (4.10), para uma desclinação do tipo $\{\kappa = 1, \gamma = 0\}$ com $b = 0.9$ usando eq. (4.24) truncada em $l = 600$	p. 57
15	Dependência na temperatura da posição do padrão de difração, $\phi_0 = \pi(1 - \frac{1}{b})$, para o 5CB. A linha foi calculada usando (4.27), enquanto que os pontos são resultados numéricos.	p. 58
16	Perfil de velocidade que simula a métrica de Schwarzschild entorno de uma configuração do tipo desclinação ($k = 1, c = 0$) com raio do cilindro $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ m.	p. 67
17	Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.1$	p. 79
18	Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$. A proximidade das cores no centro da figura, onde se encontra a desclinação, indica uma grande variação da temperatura nessa região.	p. 79
19	Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.1$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$	p. 80
20	Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$	p. 80
21	Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.9$	p. 81

- 22 Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$. Observe como a temperatura varia pouco sobre a desclinação. p. 81
- 23 Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.9$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$ p. 82
- 24 Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.6$. A variação de temperatura, indicada pelo módulo de $\vec{q}$, é mínima sobre o defeito. p. 82
- 25 Aspecto das linhas tangentes ao campo vetorial $\vec{q}$ na presença de um defeito ouriço com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$ p. 83
- 26 Aspecto das linhas tangentes ao campo vetorial $\vec{q}$ na presença de um defeito ouriço com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$ p. 83

Lista de Tabelas

1	Graus de ordem nas fases da matéria.	p. 26
---	--	-------

1 Introdução

*“Não há fé inabalável senão aquela que
pode encarar a razão face a face, em
todas as épocas da Humanidade.”*

Allan Kardec

1.1 Importância dos Modelos Análogos de Gravitação

O trabalho de um físico envolve múltiplas habilidades. Com a imparcialidade indicada pelo método científico [4], o cientista deve observar o fenômeno físico de interesse, retirar os dados do objeto de estudo, formular a teoria que o descreve, deduzir predições a partir da teoria formulada, e, desta, experimentar o seu potencial e limitações. Quando se fala em criar teorias, procurar por semelhanças entre o objeto de estudo e fatos já conhecidos é uma das ações mais comuns. E é nesta busca por semelhanças que os Modelos Análogos de Gravitação são formulados. Desta forma, aspectos da gravitação são simulados em sistemas de outras áreas da física: em líquidos isotrópicos [5], condensados de Bose-Einstein [6], cristais líquidos [3, 7], dentre outros [8].

Uma das primeiras pesquisas sobre analogia entre gravitação e física da matéria condensada foi a publicada por Gordon [5, 9] ao analisar a mudança na métrica do espaço plano por um fluido isotrópico em movimento, obtendo a seguinte equação em termos de componentes (faremos a velocidade da luz $c \equiv 1$ em toda tese):

$$g_{Gordon} = \eta_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v_\mu v_\nu, \quad (1.1)$$

onde g_{Gordon} é a métrica efetivamente sentida pela luz, $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo plano, n é o índice de refração do fluido, v_μ é a 4-velocidade do fluido dada por $v_\mu = (1 - v^2)^{-1/2} (1, v_x, v_y, v_z)$ de velocidade espacial $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (uma revisão desta notação de 4-vetores pode ser encontrada em [10–13] e sobre métricas em variedades riemannianas, além das referências anteriores, no Apêndice A). Provavelmente, Gordon conhecia as ideias de Fresnel de 1818 sobre o arrasto da luz por um fluido em movimento [14], assim como a comprovação experimental de sua hipótese por Fizeau em 1851 [15].

Após o trabalho de Gordon, pouco foi explorada a analogia entre matéria condensada e gravitação. Por exemplo, pode-se destacar o parágrafo §90 do livro de teoria clássica de campos de Landau e Lifschitz [16] através de um sucinto e denso estudo sobre a analogia entre um dielétrico e um campo gravitacional estático, assim como algumas contribuições de Quan para o assunto [17].

A pesquisa em modelos análogos voltou a ser enfaticamente desenvolvida a partir de 1981. Nesse ano, William Unruh publicou um trabalho [18, 19] onde um sistema hidrodinâmico era capaz de simular a radiação de Hawking para buracos negros. Daquele ano até o final da década de 90, modelos análogos baseados em sistemas de estado sólido [20–22] e em superfluidos [23, 24] foram apresentados, assim como melhores definições de horizonte de eventos, ergoregiões e gravidade de superfície em sistemas acústicos [25]. A partir de 2000, surgiram novos modelos para simular aspectos da gravitação usando sistemas quânticos, como condensados de Bose-Einstein [6, 26] e dielétricos de altíssimo índice de refração [27, 28].

Diante de todo este quadro, o que motiva a pesquisa em modelos análogos? As possibilidades experimentais de concretizar tais modelos, instigadas pelo fato curioso de, teoricamente, sistemas de matéria condensada simularem características da gravitação. Além disso, pesquisar em modelos análogos pode gerar previsões de novos comportamentos em sistemas gravitacionais [29]. Se a gravidade pode ser simulada por um sistema de matéria condensada, o estudo em modelos análogos levanta a ideia de que a própria gravidade seria resultado de interações mais fundamentais, um fenômeno coletivo [30, 31], como será visto nessa tese que a métrica efetiva resulta da interação entre moléculas e átomos (o campo de estudo que entende a gravidade desta forma é chamada de gravidade emergente [32–34]).

Não devemos esquecer as possíveis aplicações tecnológicas provenientes dos modelos análogos. Uma vez que essa abordagem oferece um entendimento mais simples do que o normalmente encontrado em livros de matéria condensada [2, 35–37], desenvolvimentos tecnológicos tornam-se mais fáceis de serem produzidos.

1.2 **Objetivos e Estrutura da Tese**

Esta tese objetiva ampliar o campo de pesquisa dos modelos análogos de gravitação, apresentando a física dos cristais líquidos, particularmente a dos nemáticos, como destacado patrocinador de novos entendimentos em ambas as áreas. Ao longo desta tese, serão apresentados os resultados obtidos durante o doutorado no Departamento de Física da Universidade da Paraíba, assim como o estágio de pesquisa internacional com o professor Dr. Sébastien Fumeron do Laboratoire

d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Université Henri Poincaré Nancy 1, França.

A tese está dividida da seguinte forma. Após esta Introdução, segue a primeira parte intitulada “Cristais Líquidos e Modelo Análogo”. Como revisão do assunto que será exposto, esta parte é composta por dois capítulos. Capítulo 2: “Cristais Líquidos Nemáticos” (CLN), onde a física desses materiais será discutida de acordo com a sua importância na tese; e o capítulo 3: “Modelo Análogo para Luz em CLN via Princípio de Fermat”, onde mostraremos como uma descrição métrica do comportamento da luz é obtida através de semelhança matemática.

A segunda parte da tese é auto-explicativa pelo seu título: “Aplicações do Modelo Análogo em CLN”. Ela encorpa as minhas contribuições para este assunto empreendidas durante o doutorado e, por um motivo de desenvolvimento lógico do assunto, o mestrado, enquanto na UFPB. O capítulo 4 intitulado de “Difração de Luz por Defeitos Ouriço e Desclinação ($k = 1, c = 0$)” é a minha pesquisa de mestrado, que mostra como o modelo análogo aborda a difração de luz por defeitos topológicos da fase nemática. Os capítulos de 5 a 8 são a minha pesquisa de doutorado. A possibilidade de mimetizar o trajeto de raios luminosos vizinhos a planetas, via um CLN com defeitos topológicos, é analisada no capítulo 5 sob o título “Simulando a Atração Gravitacional de Planetas”. Inspirada nos desenvolvimentos do capítulo 3 e 4, uma “Descrição Métrica para Ondas Sonoras” é apresentada no capítulo 6, estudando a influência de defeitos nas trajetórias e difrações sonoras. Enquanto em visita ao prof. Dr. Sébastien Fumeron, os resultados de uma “Descrição Métrica do Fluxo de Calor através de Defeitos Topológicos” foram obtidos e encontram-se relatados no capítulo 7.

A terceira parte trata das “Conclusões e Perspectivas”, através de único capítulo intitulado “Discussão sobre os Capítulos de Aplicação”. As ideias principais, as conclusões deduzidas e as perspectivas diretas de pesquisa de cada capítulo estão agrupadas em seções reservadas para cada capítulo. Fechando o capítulo de conclusões e perspectivas, está a seção “Perspectivas Além-Tese”, onde são listadas propostas para pesquisas futuras sobre assuntos mais relacionados à Gravitação do que da Matéria Condensada.

Após as “Referências”, que estão numeradas por ordem de aparição na tese,

encontra-se o apêndice, a título de *esclarecimento não-essencial ao entendimento* desta tese [38], composto por dois anexos. O “Anexo A” traz um resumo das principais ideias sobre geometria riemanianna usadas ao longo da tese, enquanto que o “Anexo B” mostra o detalhe dos cálculos do capítulo 4.

Parte I

Cristais Líquidos e Modelo Análogo

2 Cristais Líquidos Nemáticos (CLN)

“Navegar é preciso, viver não.”

Luís de Camões

2.1 Cristais líquidos

Cristais líquidos são materiais que possuem estados intermediários (metaestados) entre as fases líquida e a cristalina. Nesses metaestados, o material possui características próprias da fase líquida (isotropia de suas grandezas, incapacidade de suportar forças de cisalhamento¹, etc.) e da fase cristalina (graus de ordenamento espacial e/ou orientacional, anisotropia nas propriedades ópticas, elétricas, etc.). Um dos principais motivos dessas propriedades intermediárias [39, 40] (não sendo o motivo de todas elas [41]) é o fato de que as moléculas de cristal líquido são anisotrópicas, podendo ter o formato de disco ou de bastão, em geral sendo pequenas moléculas ou polímeros rígidos. Nos metaestados, as moléculas tendem a se orientar ao longo de uma determinada direção, representada pelo versor $\hat{n}(\vec{r})$, chamado de *diretor* (Fig. 1).

As fases líquido-cristalinas são classificadas de acordo com o seu grau de orientação:

- *Nemática*. Possui o menor grau de ordenamento pois não existe ordem posicional (as moléculas estão localizadas aleatoriamente no material), apresentando somente ordem orientacional (as moléculas estão aproximadamente alinhadas ao longo da mesma direção).

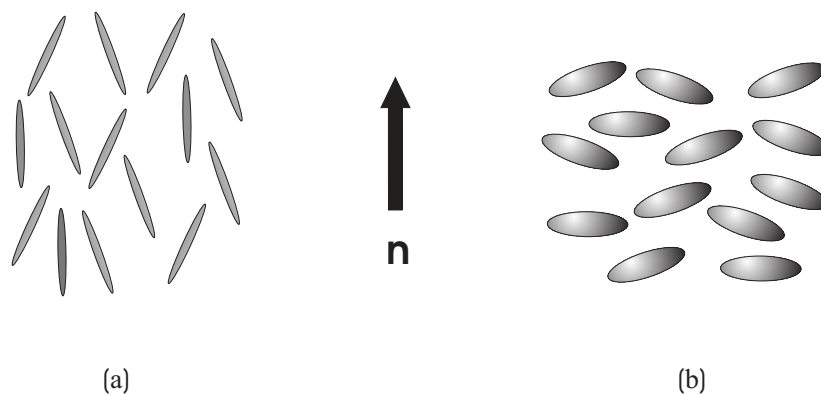


Figura 1: Arranjo das moléculas na fase nemática: (a) por moléculas tipo bastão; (b) por moléculas tipo disco.

¹Força de cisalhamento é aquela que possui módulo diferente para camadas infinitesimalmente diferentes do material.

- *Esmética*. As moléculas estão agrupadas em camadas e livres para se mover dentro delas, gerando uma ordem posicional dada pela localização de cada camada. Dentro das camadas, as moléculas estão orientadas: para alguns cristais líquidos, a orientação é normal às camadas (Fig. 2); para outros, o diretor $\hat{n}$ faz um ângulo com a normal delas.

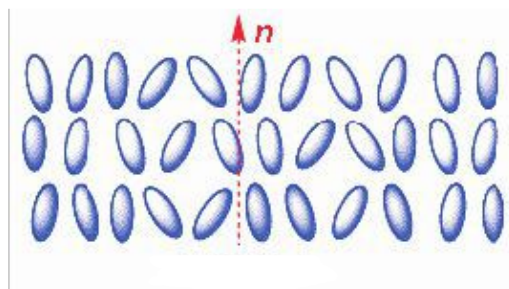


Figura 2: A fase esmética.

- *Colunar* Além de apresentarem ordem orientacional, as moléculas estão empilhadas em colunas, sendo livres para se moverem dentro destas. Assim, a fase colunar possui também ordem posicional de duas das dimensões (a localização bidimensional das colunas).

Nem todos os cristais líquidos apresentam as três fases anteriores. Por exemplo, o p-Pentil-p'-Cianobifenil ($C_{18}H_{19}N$), também conhecido com 5CB, possui apenas a fase nemática, enquanto que o p-Octil-p'-Cianobifenil ($C_{21}H_{25}N$), também conhecido como 8CB, possui as fases nemática e esmética. A transição entre metaestados pode ser dada pela mudança de temperatura (chamados de cristais líquidos *termotrópicos*) ou pela mudança de concentração do cristal líquido via adição de solvente (chamados de cristais líquidos *liotrópicos*). Nesta tese, trataremos exclusivamente de cristais líquidos nemáticos (que possuem apenas a fase nemática e chamados no restante desta tese de *CLN*), termotrópicos e com moléculas com formato de bastão.

As flutuações térmicas impedem as moléculas de se orientarem completamente ao longo de $\hat{n}$. O grau de orientação é dada pelo parâmetro de ordem escalar q , que varia de $q = 0$ (onde as moléculas estão totalmente desorientadas) até $q = 1$ (onde as moléculas estão totalmente orientadas ao longo de $\hat{n}$). O parâmetro q é definido como uma média da orientação das moléculas em torno de $\hat{n}$ sobre um

Fase	Ordem Posicional	Ordem Orientacional
Líquida	Não	Não
Nemática	Não	Sim
Esmética	1-D	Sim
Colunar	2-D	Sim
Cristalina	3-D	Sim

Tabela 1: Graus de ordem nas fases da matéria.

volume grande em relação às dimensões moleculares e pequeno em relação aos comprimentos típicos de deformação da fase nemática, a fim de $\hat{n}(\vec{r})$ seja uma função contínua da posição $\vec{r}$.

Alguns cristais líquidos apresentam seus metaestados em temperaturas da ordem da ambiente. Por exemplo, o cristal líquido 5CB encontra-se na fase nemática no intervalo de temperatura em torno de $T = [295, 65; 306, 6] \text{ K}$ [2]. É possível calcular o parâmetro de ordem neste intervalo pela expressão chamada *aproximação de Haller* [42]:

$$q = q(T) \approx \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\alpha, \quad (2.1)$$

onde T_c é a temperatura de transição entre as fases nemática e isotrópica e α é uma constante adimensional que depende do material. Para o 5CB, $\alpha = 0.1889$ [43] e q encontra-se no intervalo $q = [0; 0.53]$.

Enquanto o parâmetro de ordem escalar q nos dá uma medida da intensidade de ordenamento das moléculas, o tensor parâmetro de ordem $\mathbf{Q}$ expressa a anisotropia de grandezas físicas encontradas no cristal líquido e é definido em termos de suas componentes como [2, 37]:

$$Q_{ij} = q \left(n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right), \quad (2.2)$$

onde Q_{ij} são os elementos do tensor $\mathbf{Q}$, n_i é a componente do vetor $\hat{n}$. O tensor parâmetro de ordem é simétrico e traço-nulo. Apesar das formulações iniciais empregarem $\mathbf{Q}$ para grandezas macroscópicas, a sua definição algébrica é igualmente aplicável para dimensões intermediárias, por exemplo, no caso do volume usado na definição de q e nas situações onde q é uma função da posição [44, 45].

2.1.1 Defeitos na Fase Nemática

Quando o material líquido-cristalino transita entre as fases isotrópica e nemática, linhas e/ou pontos surgem deformando a uniformidade de $\hat{n}$. Essas linhas e pontos, chamados de *defeitos*, fazem com que $\hat{n}$ dependa da posição em sua vizinhança, tornado este local anisotrópico para muitas das propriedades dos CLN (ópticas, elásticas, etc.). Nesta subseção, iremos apresentar resumidamente dois defeitos que ocorrem na fase nemática: o defeito pontual tipo ouriço e o defeito linear desclinação tipo $(k = 1, c = 0)$.

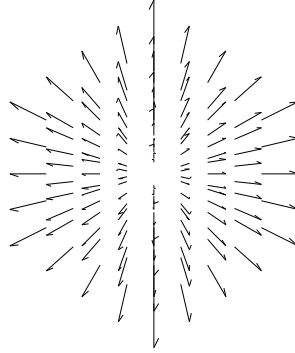


Figura 3: Representação do defeito tipo ouriço. As setas representam o diretor $\hat{n} = \hat{r}$.

O defeito pontual tipo ouriço é representado pela figura 3. Em torno dele, as moléculas estão orientadas radialmente de modo que o diretor é $\hat{n} = \hat{r}$. Esta configuração também pode ser produzida artificialmente pela adição de partículas ou presença de superfícies esféricas onde as moléculas se orientam perpendicularmente a estas. Recipientes esféricos e gotas de cristal líquido nemático podem apresentar esses defeitos dentro deles [46]. Um exemplo de impureza produzindo esta configuração é a da figura 4, onde as moléculas de um CLN anfifílico orientam-se perpendicularmente à superfície da gota de água no centro da imagem.

O defeito linear desclinação do tipo (k, c) é caracterizado por uma linha, cujos planos perpendiculares a ela confinam bidimensionalmente o diretor $\hat{n}$, que, quando descrito nas três dimensões cartesianas, é dado por:

$$\hat{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad (2.3)$$

onde $\varphi = k\phi + c$, sendo k e c constantes que tipificam o defeito e ϕ a coordenada



Figura 4: Gota d'água criando defeito ouriço entre moléculas anfifílicas. Imagem retirada de [1].

angular polar. A desclinação do tipo $(k = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4})$ e o plano perpendicular da desclinação do tipo $(k = 1, c = 0)$ estão representados na fig 5.

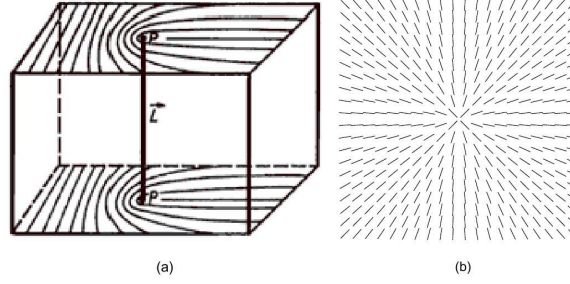


Figura 5: (a) Desclinação $(k = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4})$; (b) Plano $z = \text{cont.}$ para desclinação $(k = 1, c = 0)$.

Especificamente para a desclinação $(k = 1, c = 0)$, a configuração do diretor, que em coordenadas cilíndricas é dada por $\hat{n} = \hat{\rho}$, é instável para a maioria dos CLN compostos por pequenas moléculas rígidas, uma vez que $\hat{n}$ deixa de estar confinado no plano perpendicular ao se aproximar da linha de defeito, “escapando” para a terceira dimensão (figura 6) [2]. Contudo, CLN compostos por polímeros rígidos podem gerar desclinações $(k = 1, c = 0)$ sem escape. Assim, por apresentarem forte simetria espacial devido às suas simples configurações, os defeitos ouriço e desclinação $(k = 1, c = 0)$ serão amplamente usados nos próximos capítulos.

2.2 Propriedades Ópticas

O cristal líquido na fase nemática é opticamente uniaxial (birrefringente), de modo que o seu eixo óptico está ao longo de $\hat{n}$. A permissividade elétrica do cristal líquido, $\bar{\epsilon}$, pode ser representada pela permissividade ao longo da molécula, $\epsilon_{\parallel}$, e

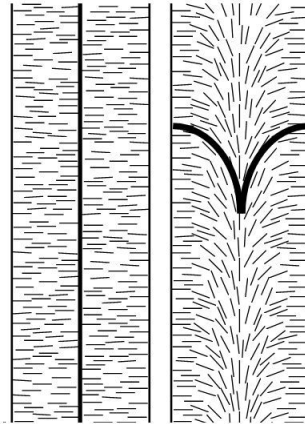


Figura 6: Desclinação ($k = 1, c = 0$) apresentando escape na direção da linha do defeito. Imagem retirada de [2].

perpendicular a ela, $\epsilon_{\perp}$, da seguinte forma para $\hat{n} = \hat{z}$ em coordenadas cartesianas:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

e considerando a permeabilidade magnética do material ser aproximadamente igual a do vácuo, $\mu \approx \mu_0$, teremos $\epsilon_{\parallel} = n_e^2$ e $\epsilon_{\perp} = n_o^2$, onde n_e e n_o são os índices de refração paralelo e perpendicular da molécula líquido-cristalina (Fig. 7). Como usaremos o princípio de Fermat o próximo capítulo para descrever o comportamento da luz em cristais líquidos, vamos agora deduzir o índice de refração sentido por ela.

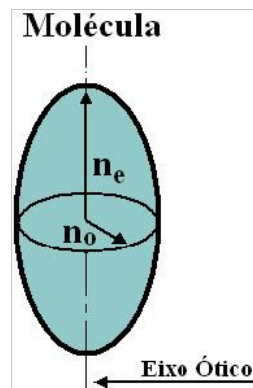


Figura 7: Molécula de cristal líquido e seus índices de refração.

2.2.1 Luz Ordinária e Extraordinária

A partir das equações de Maxwell na ausência de correntes e cargas,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0,$$

onde $\vec{B}$ é o campo indução magnética, $\vec{H}$ é o campo magnético, $\vec{D}$ é o campo deslocamento elétrico definido por $\vec{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \vec{E}$ (ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo e $\bar{\epsilon}$ é o tensor permissividade elétrica do meio). Usando $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, é possível aplicar o operador $\nabla \times$ em (2.5), eliminar $\vec{H}$ com o auxílio de (2.6) e obter o seguinte resultado:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{d^2 \vec{D}}{dt^2}.$$

Aplicando, nas cinco equações anteriores, as equações de uma onda eletromagnética monocromática plana com campos eletromagnéticos dados por $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$ e $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B}, \\ -\vec{k} \times \vec{H} &= \omega \vec{D}, \\ \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0, \quad (2.8)$$

$$k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{k}) = \omega^2 \mu_0 \vec{D}. \quad (2.9)$$

As equações (2.7) e (2.8) dizem que $\vec{B}$, $\vec{D}$ e $\vec{k}$ são mutuamente perpendiculares. Lembrando que o vetor de Poynting $\vec{S}$ é dado por $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ e que $\vec{E}$ não é colinear a $\vec{D}$, então $\vec{S}$ também não é colinear a $\vec{k}$. Assim, os vetores $\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{S}$ e $\vec{k}$ formam um plano perpendicular aos vetores colineares $\vec{H}$ e $\vec{B}$ (Fig. 8).

Definindo o vetor índice de refração $\vec{N} = \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{k\hat{k}}{\omega} = \frac{\hat{k}}{v_k}$ (onde N é o índice de refração da velocidade de fase v_k) e lembrando que fizemos a velocidade da luz no

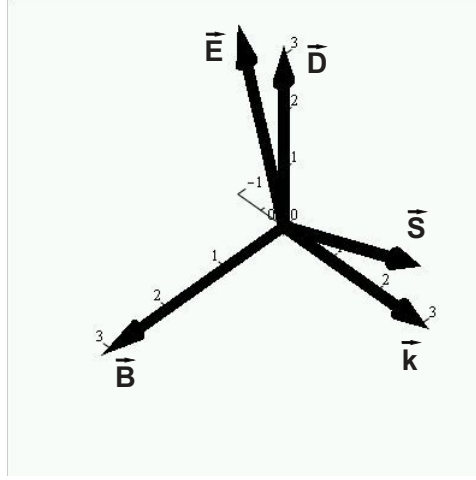


Figura 8: Vetores de uma onda eletromagnética em meio anisotrópico.

meio $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon_0}} \equiv 1$, a equação (2.9) modifica-se para:

$$\begin{aligned} N^2 \omega^2 \vec{E} - \omega \vec{N} \sum_i E_i k_i &= \omega^2 \mu \epsilon_0 \bar{\epsilon} \vec{E}, \\ N^2 \omega^2 \vec{E} - \omega^2 \vec{N} \sum_i E_i N_i &= \omega^2 \bar{\epsilon} \vec{E}, \\ N^2 \vec{E} - \vec{N} \sum_i E_i N_i - \bar{\epsilon} \vec{E} &= 0, \end{aligned}$$

que em termos de componentes resulta em:

$$(N^2 \delta_{ij} - N_i N_j - \epsilon_{ij}) E_j = 0, \quad (2.10)$$

onde ϵ_{ij} são os elementos de $\bar{\epsilon}$. Considerando que o diretor da fase nemática é $\hat{n} = \hat{z}$, os únicos elementos não nulos de $\bar{\epsilon}$ são $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_{\perp}$ e $\epsilon_z = \epsilon_{\parallel}$. Assim, o índice de refração sentido pela luz é calculado fazendo o determinante de (2.10) ser nulo, resultando na conhecida *equação de Fresnel* [2,47]:

$$(N^2 - \epsilon_{\perp}) [\epsilon_{\parallel} N_z^2 + \epsilon_{\perp} (N_x^2 + N_y^2) - \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}] = 0, \quad (2.11)$$

onde $\{N_x, N_y, N_z\}$ são as componentes de $\vec{N}$, $N_x^2 + N_y^2 = N^2 \cos^2 \theta$ e $N_z^2 = N^2 \sin^2 \theta$, sendo θ o ângulo entre $\vec{n} = \hat{z}$ e $\vec{k}$.

A equação (2.11) tem duas soluções. A primeira é $N = N_o = \sqrt{\epsilon_{\perp}} = n_o$, onde o índice de refração tem o mesmo valor $\sqrt{\epsilon_{\perp}}$ para todas as direções. A luz que se

comporta desta forma é chamada de luz ordinária. A segunda solução de (2.11) é obtida a partir do seu segundo grupo entre parênteses:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\parallel} N_z^2 + \epsilon_{\perp} (N_x^2 + N_y^2) - \epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} &= 0, \\ \frac{N_z^2}{\epsilon_{\perp}} + \frac{N_x^2 + N_y^2}{\epsilon_{\parallel}} &= 1, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{N^2 \cos^2 \theta}{\epsilon_{\perp}} + \frac{N^2 \sin^2 \theta}{\epsilon_{\parallel}} &= 1, \\ \frac{N^2 (\epsilon_{\parallel} \cos^2 \theta + \epsilon_{\perp} \sin^2 \theta)}{\epsilon_{\perp} \epsilon_{\parallel}} &= 1, \\ N^2 &= \frac{n_e^2 n_o^2}{n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

A equação (2.13) é o índice de refração ligado a luz *extraordinária*, assim chamada por depender da direção de propagação, da velocidade de fase. Esta velocidade não possui significado físico por não carregar energia luminosa, seja ela ligada à onda ordinária ou extraordinária.

É importante destacar que

2.2.1.1 Velocidade de Grupo e Fluxo de Energia

Desta forma, estamos interessados no comportamento do vetor de Poynting $\vec{S}$, que dá a direção de propagação da energia luminosa, com velocidade dada pelo vetor velocidade de grupo $\vec{v}_g$. Uma maneira de extrair o comportamento deste vetor é a partir da equação (2.11) e usando a seguinte relação aplicada à óptica de materiais uniaxiais [47]:

$$\vec{v}_g \cdot \hat{k} = v_k,$$

ou [2]

$$\vec{v}_g \cdot \frac{\hat{k}}{v_k} = 1 \implies \vec{v}_g \cdot \vec{N} = 1. \quad (2.14)$$

De (2.11) vê-se dois comportamentos para $\vec{v}_g$. O primeiro grupo de parênteses pode ser obtido a partir de (2.14) considerando $\vec{v}_{gi} = \frac{N_i}{\epsilon_{\perp}}$, onde $i = [x, y, z]$. Assim

o índice de refração ordinária para o fluxo de energia é:

$$v_g^2 = \frac{1}{\epsilon_\perp},$$

$$N_g = \sqrt{\epsilon_\perp},$$

tendo o mesmo valor para todas as direções.

Do segundo grupo de parênteses de (2.11), é possível obter (2.12) a partir de (2.14) considerando que:

$$\frac{N_x}{\epsilon_\parallel} = v_{gx}, \frac{N_y}{\epsilon_\parallel} = v_{gy}, \frac{N_z}{\epsilon_\perp} = v_{gz}. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) em (2.12) obtemos:

$$v_{gz}^2 \epsilon_\perp + \epsilon_\parallel (v_{gx}^2 + v_{gy}^2) = 1,$$

$$v_g^2 \cos^2 \beta \epsilon_\perp + v_g^2 \sin^2 \beta \epsilon_\parallel = 1,$$

$$\epsilon_\perp \cos^2 \beta + \epsilon_\parallel \sin^2 \beta = \frac{1}{v_g^2},$$

$$n_o^2 \cos^2 \beta + n_e^2 \sin^2 \beta = N_g^2, \quad (2.16)$$

onde β é o ângulo entre $\hat{n}$ e $\vec{v}_g$. Na equação (2.16), N_g é o índice de refração percebido pela luz *extraordinária* (assim chamada por seu índice depender da direção de propagação) ligado à velocidade de grupo, i.e., (2.16) é o índice de refração da porção da energia luminosa que depende da direção de propagação. Assim, o fluxo de energia é dividido em dois feixes: o ordinário, no qual a velocidade de propagação da energia não depende da direção de propagação; e o *extraordinário*, no qual o fluxo de energia sente uma velocidade diferente para cada direção de propagação.

Devido a dependência da direção de propagação, o modelo efetivo para gravitação desenvolvido nos próximos capítulos será baseado na onda extraordinária.

2.3 Propriedades Elásticas e Hidrodinâmicas dos CLN

Energia elástica pode ser armazenada em CLN através de deformações da fase, que podem ser de três tipos: alargamento ou “splay”, torção ou “twist” e flexão ou “bend” (figura 9). Esses três tipo de deformação são representados respectivamente pelas constantes K_{11} , K_{22} e K_{33} (chamadas de constantes elásticas de Frank ou constantes elásticas de curvatura) na equação da densidade de energia elástica $\mathcal{F}$ (também chamada de energia livre) [2, 37]:

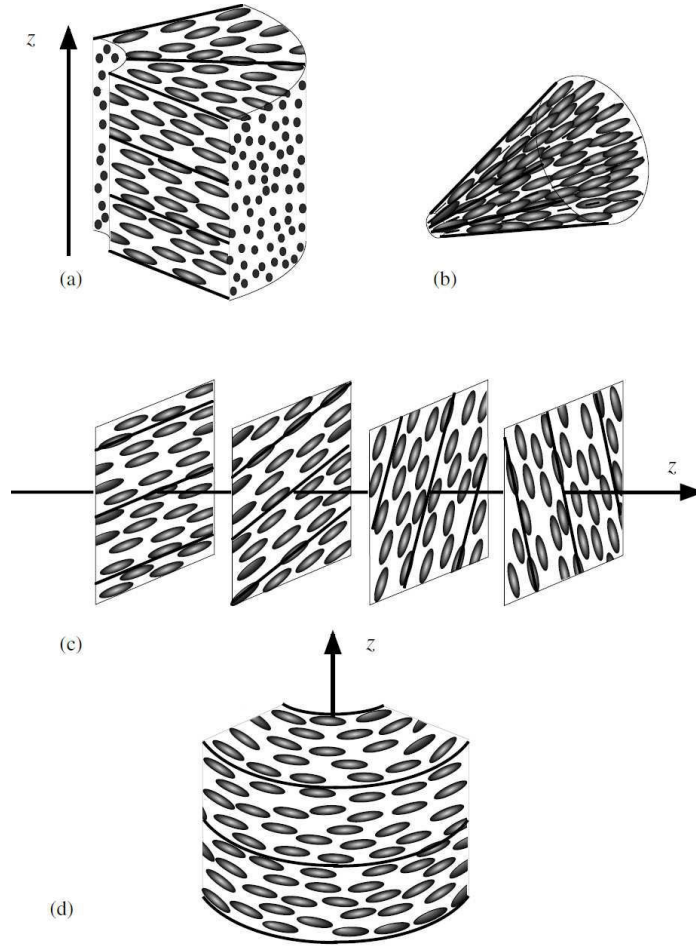


Figura 9: Deformações em CLN. (a) Deformação alargamento em 2D. (b) Deformação alargamento em 3D. (c) Deformação torção. (d) Deformação flexão. Imagem retirada de [2].

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}K_{11}(\nabla \cdot \vec{n})^2 + \frac{1}{2}K_{22}(\hat{n} \cdot \nabla \times \hat{n})^2 + \frac{1}{2}K_{33}(\hat{n} \times \nabla \times \hat{n})^2. \quad (2.17)$$

As constantes de Frank decrescem rapidamente com a temperatura, sendo aproximadamente proporcionais ao quadrado do parâmetro de ordem $q(T)$.

Nas próximas subseções, iremos nos ater à propagação de ondas sonoras em CLN com diretor $\hat{n} = \hat{z}$ e, no caso onde o cristal líquido está fluindo, como o gradiente de velocidade do material interfere no valor do parâmetro de ordem q . Apesar de não ser abordado aqui, um estudo sobre energia elástica em cristais líquidos pode ser encontrado em [2, 37].

2.3.1 Ondas Sonoras

Ondas sonoras em líquidos comuns são de dois modos de propagação: ondas longitudinais e ondas transversais (também chamadas de ondas de cisalhamento). Verifica-se experimentalmente que este último tipo de onda é amortecida em CLN [48, 49]. Assim, estudaremos o comportamento das ondas longitudinais, especificamente a dependência angular de sua velocidade.

A velocidade do som em CLN é da ordem de $10^3 m/s$, semelhante às suas velocidades em líquidos. Além disso, para frequências abaixo de 1 MHz, a velocidade não depende da direção de propagação (outra característica própria dos líquidos). Para frequências da faixa de 2 até 10 MHz, a velocidade passa a depender da direção de propagação e a característica cristalina dos CLN deve ser levados em conta [49, 50].

Nestas condições, a propagação de som em um CLN, por exemplo com $\hat{n} = \hat{z}$, pode ser aproximado com em um cristal, com constantes elásticas lineares nas direções perpendicular e paralela a $\hat{n}$ dada por C_{11} e C_{33} respectivamente [49, 51]. Assim sendo, é possível associar um vetor de onda $\vec{k}$ e um análogo ao vetor de Poynting $\vec{S}$ às ondas sonoras em CLN [52]. Por estes motivos e de forma semelhante às ondas eletromagnéticas, temos ondas ordinárias e extraordinárias, velocidades de fase e de grupo, quando falamos de ondas sonoras. A velocidade de fase da onda extraordinária pode ser medida pela técnica de superposição de pulso [53] e gera a seguinte expressão para o CLN com diretor $\hat{n} = \hat{z}$ [37, 49]:

$$v_k^2(\theta) = \frac{(C_{11} + (C_{33} - C_{11}) \cos^2 \theta)}{\rho^2}, \quad (2.18)$$

onde ρ é a densidade e θ é o ângulo entre o vetor de onda $\vec{k}$ e $\hat{n}$. As velocidades de fase do som nas direções paralela e perpendicular, respectivamente $v_{k\parallel}$ e $v_{k\perp}$, podem ser relacionadas por [50]:

$$\Delta = \frac{v_{k\parallel} - v_{k\perp}}{v_{k\parallel} + 2v_{k\perp}} = \frac{3 \left[(C_{33})^{1/2} - (C_{11})^{1/2} \right]}{(C_{33})^{1/2} + 2(C_{11})^{1/2}},$$

onde $v_{k\parallel} - v_{k\perp}$ é da ordem de 10^{-3} . Esta diferença aumenta com a frequência da onda para temperaturas bem abaixo de T_c . Próximo a T_c , a velocidade perde a dependência com a frequência [37].

A diferença entre $v_{k\parallel}$ e $v_{k\perp}$ é pequena quando comparamos com a diferença de absorção da onda para as direções paralela e perpendicular. A dependência angular da absorção da onda, $\chi(\theta)$, também pode ser expressa de forma parecida a (2.18):

$$\chi(\theta) = \chi(0) [1 - \delta \sin^2 \theta],$$

onde δ é da ordem de 0,1 [37, 49].

2.3.2 A Equação de Beris-Edwards

As abordagens comumente usadas para descrever a hidrodinâmica de CLN são a de Ericksen-Leslie [2, 54, 55] e a de Harvard [2, 56]. Contudo, ambas não se aplicam quando o gradiente de velocidade do volume de CLN é tal que deste o parâmetro de ordem escalar passa a depender. Quando isto acontece, a relação hidrodinâmica entre o parâmetro de ordem q e a velocidade $\vec{v}$ do fluxo de volume do cristal líquido é definida pela equação de Beris-Edwards [44, 45]:

$$(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \mathbf{Q} - \mathbf{S}(\mathbf{W}, \mathbf{Q}) = \Gamma \mathbf{H}, \quad (2.19)$$

onde $\mathbf{Q}$ é o tensor parâmetro de ordem e Γ é uma constante de difusão rotacional coletiva. O tensor $\mathbf{S}(\mathbf{W}, \mathbf{Q})$ depende do tensor gradiente de velocidade $W_{\alpha\beta} = \partial_\beta v_\alpha$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{W}, \mathbf{Q}) &= (\xi \mathbf{D} + \Omega) (\mathbf{Q} + \mathbf{I}/3) + (\mathbf{Q} + \mathbf{I}/3) (\xi \mathbf{D} - \Omega) \\ &- 2\xi (\mathbf{Q} + \mathbf{I}/3) Tr \{ \mathbf{Q} \mathbf{W} \}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde ξ é a razão de aspecto da molécula de cristal líquido (i.e. a razão entre o comprimento maior e o menor da molécula), $\mathbf{D} = (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T)/2$ e $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T)/2$ são as partes simétrica e anti-simétrica, respectivamente, do tensor $\mathbf{W}$. O tensor $\mathbf{H}$ (também chamado de campo molecular) no lado direito da equação (2.19) depende da derivada da energia livre $\mathcal{F}$ em relação ao tensor parâmetro de ordem $\mathbf{Q}$ da seguinte forma [45, 57]:

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{Q}} + (\mathbf{I}/3)Tr \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{Q}} \right] \\ \mathbf{H} &= -a\mathbf{Q} + b(\mathbf{Q}^2 - (\mathbf{I}/3)Tr[\mathbf{Q}^2]) - h\mathbf{Q}Tr[\mathbf{Q}^2] + \kappa \nabla^2 \mathbf{Q},\end{aligned}\tag{2.21}$$

onde a, b, h e κ são constantes e ∇^2 é calculado sobre cada um dos elementos de $\mathbf{Q}$.

Como um exemplo da equação (2.19), que será usado em capítulo posterior, vamos calcular agora a dependência espacial do parâmetro de ordem q na seguinte situação. Em coordenadas cilíndricas, seja a configuração inicial das moléculas de CLN dada pelo diretor $\hat{n} = \hat{\rho}$ – semelhante à da desclinação ($k = 1, c = 0$) – e considere o volume de cristal líquido fluindo radialmente, ou seja, $\vec{v}(\vec{R}) = v(\rho)\hat{\rho}$, onde $\vec{R}$ é o vetor posição de um volume infinitesimal de cristal líquido (esta situação poderia ser realizada por um cilindro reto com orifícios em sua superfície lateral injetando ou drenando cristal líquido sobre sua vizinhança, Fig. 10). O parâmetro de ordem escalar q também será, nessas condições, uma função do tipo $q(\rho)$. Devemos então calcular $\mathbf{Q}, \mathbf{S}$ e $\mathbf{H}$ nas condições apresentadas e substituí-los em (2.19). Calculando $\mathbf{Q}$ a partir de (2.2) usando $\hat{n} = \hat{\rho}$ obtemos:

$$\mathbf{Q}(\vec{v}) = q(\rho) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.\tag{2.22}$$

O emprego de $\vec{v}(\vec{R}) = v(\rho)\hat{\rho}$ e de (2.22) em (2.20) resulta para $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}(\mathbf{W}, \mathbf{Q}) = 2\xi q(\rho) \partial_\rho [v(\rho)] \left(1 - \frac{2q(\rho)}{3} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\tag{2.23}$$

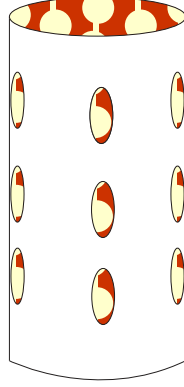


Figura 10: Esquema de cilindro com buracos para a injeção ou drenagem do fluido líquido-cristalino.

Substituindo (2.22) em (2.21) encontramos os seguintes elementos H_{ij} não-nulos:

$$\begin{aligned} H_{\rho\rho} &= -\frac{2aq(\rho)}{3} + \frac{2q^2(\rho)b}{9} - \frac{4hq^3(\rho)}{9} + \frac{2\kappa\rho^{-1}\partial_\rho[\rho\partial_\rho[q(\rho)]]}{3}, \\ H_{\theta\theta} = H_{zz} &= \frac{aq(\rho)}{3} - \frac{q^2(\rho)b}{9} + \frac{2hq^3(\rho)}{9} - \frac{\kappa\rho^{-1}\partial_\rho[\rho\partial_\rho[q(\rho)]]}{3}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Aplicando (2.22 – 2.24) em (2.19), encontramos uma equação matricial que governa a relação entre o parâmetro de ordem escalar q e o módulo da velocidade, tendo como solução:

$$q(\rho) = \frac{3}{2 + \frac{3C}{v(\rho)^{3\xi}}}, \quad (2.25)$$

onde C é uma constante definida pelas condições de contorno (por exemplo, velocidade do fluido sobre fluido).

3 Modelo Análogo para Luz em CLN via Princípio de Fermat

“Nada se cria, nada se perde, tudo se transforma.”

Lavoisier

3.1 Introdução

De acordo com Douglas S. Goodman em [58], nos materiais onde o índice de refração depende da posição (seja por heterogenia, seja por anisotropia), o gradiente dele é responsável pela convergência de raios luminosos paralelos. Como observado por Matt Visser em [8], este problema de convergência pode ser geometrizado (e por ele chamado de *método de gradiente de índice*), já que gradientes do tensor métrico $\mathbf{g}$ (vide apêndice A) também convergem raios paralelos, permitindo a relação $g_{ij} = n_{ij}$, onde g_{ij} é a matriz que representa os elementos de $\mathbf{g}$ e n_{ij} é uma matriz cujo os autovalores são os valores do índice de refração nas três direções principais. Esta é a principal ideia por trás dos modelos análogos apresentados neste e aplicados nos próximos capítulos: para luz e som.

No caso do fluxo de calor, deformações no meio gerarão a métrica efetivamente sentida pela grandeza estudada [20, 59, 60]. Os detalhes matemáticos do método que obtém esta métrica efetiva fogem do arcabouço desta tese (detalhes que usam vielbeins, conexões $SO(m)$, etc. [61]), porém o método encontra várias aplicações [62–67]. As consequências dessa métrica efetiva serão estudadas no último capítulo das aplicações (cap. 7).

3.2 O Princípio de Fermat e a Geometria Riemanniana

Nesta seção, vamos mostrar como geometrizar o problema da propagação de luz em cristais líquidos. O mesmo preceito será usado para o caso de ondas sonoras em cristais líquidos (seção 6). O princípio de Fermat diz que o caminho percorrido por um feixe de luz entre os pontos A e B será aquele que minimizar a integral:

$$F = \int_A^B N(\vec{r}) dl,$$

onde F é chamado de caminho óptico, $\vec{r}$ é o vetor posição da frente de onda da luz, $N(\vec{r})$ é o índice de refração na posição $\vec{r}$ e l um parâmetro chamado de comprimento de arco da curva [47]. Em um material opticamente anisotrópico, o índice de refração varia com a direção, fazendo a luz percorrer uma trajetória

curva. A idéia de minimizar uma grandeza a fim de calcular a trajetória, usada aqui no princípio de Fermat, também aparece na geometria Riemanniana no cálculo de geodésicas (Apêndice A). Nela, curvas geodésicas entre os pontos A e B são aquelas que minimizam a integral [10, 11]:

$$\int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j},$$

onde ds^2 é o elemento de linha e g_{ij} são os elementos do tensor métrico $\mathbf{g}$.

Devido à semelhança matemática desses dois métodos, é possível interpretar o caminho da luz dentro de um meio anisotrópico como geodésicas nulas no espaço vazio de uma métrica efetiva [47], i.e.:

$$ds^2 = N^2(\vec{r}) dl^2. \quad (3.1)$$

Para as trajetórias da luz em um cristal líquido na fase nemática, o índice de refração em (3.1) será o da onda extraordinária dada pela equação (2.16), já que esta onda está relacionada com a propagação de energia, orientada na direção de $\vec{S}$. Vejamos agora algumas aplicações dessa semelhança.

3.2.1 Análogos a Monopolos Globais

De acordo com a teoria do Big Bang, o universo pode ser considerado como um sistema que sofreu mudanças de fase até chegar à configuração atual. Essas mudanças podem criar defeitos cosmológicos, com um mecanismo de criação semelhante à de defeitos em CLN [68]. Um desses defeitos cosmológicos é o monopolo global [69], objeto cujas propriedades métricas são dadas pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + b^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.2)$$

onde b é chamado de déficit de ângulo sólido. A equação (3.2) permite-nos pensar o monopolo global como um ponto onde um cone de ângulo sólido dado por $\Delta = 4\pi(1 - b)$ foi retirado e o espaço ao redor deformou-se fechando o “buraco” deixado (se b for maior que 1, então um cone de ângulo sólido foi adicionado e o espaço ao redor acomodou-se na nova situação). A Fig. 11 é uma representação dessa ideia.

Vamos mostrar agora que a luz na vizinhança de um defeito ouriço, com $\hat{n} = \hat{r}$,

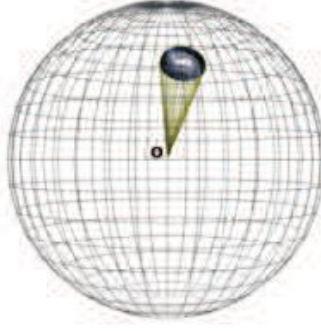


Figura 11: Esquema de um monopolo global. O cone representa a quantidade de ângulo sólido retirado dado por $\Delta = 4\pi(1 - b)$, onde b é o déficit de ângulo sólido.

em um CLN (Fig. 3) comporta-se como se estivesse sob o efeito de uma métrica de um monopolo global (Eq. (3.2)). Isto será dado através da equação (3.1), com o índice de refração da luz extraordinária, equação (2.16):

$$N_g^2 = n_e^2 \cos^2 \beta + n_o^2 \sin^2 \beta,$$

relacionada com a presença do defeito ouriço. Precisamos encontrar o termo $\cos \beta$ em (2.16), onde β é o ângulo entre o diretor $\hat{n}$ e a direção de propagação. Seja $\vec{R}(l)$ o vetor posição da frente de onda, descrevendo a trajetória de propagação da luz, e l o comprimento de arco da trajetória. Nestas condições, o vetor tangente à curva $\vec{T}(l) = \frac{d\vec{R}(l)}{dl}$ está normalizado [70], tendo a mesma direção do vetor de Poynting $\vec{S}$. Assim, $\cos \beta$ em (2.16) será dado por:

$$\cos \beta = \vec{T} \cdot \hat{n}. \quad (3.3)$$

Em coordenadas esféricas, sendo $\vec{R}(l) = r(l)\hat{r}(l)$, encontramos para $\vec{T}$:

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \frac{d[r(l)\hat{r}(l)]}{dl} = \frac{d[r(l)]}{dl}\hat{r}(l) + r(l)\frac{d[\hat{r}(l)]}{dl} \\ &= \dot{r}\hat{r}(l) + r(l)\left(\dot{\theta}(l)\hat{\theta}(l) + \dot{\phi}(l)\sin\theta(l)\hat{\phi}(l)\right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde, de agora em diante, usamos a convenção às coordenadas esféricas $\frac{d[r(l)]}{dl} \equiv \dot{r}(l) \equiv \dot{r}$, $\frac{d[\theta(l)]}{dl} \equiv \dot{\theta}(l) \equiv \dot{\theta}$ e $\frac{d[\phi(l)]}{dl} \equiv \dot{\phi}(l) \equiv \dot{\phi}$ e aos outros sistemas de coordenadas. Omitiremos também a dependência funcional do parâmetro l para coordenadas,

versores e vetores. Substituindo (3.4) em (3.3) obtemos:

$$\cos \beta = \dot{r}. \quad (3.5)$$

Para encontramos $\sin \beta$, usamos o elemento de linha dl^2 para o espaço plano e a relação trigonométrica unitária entre as funções $\sin$ e $\cos$:

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ 1 &= \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \\ \dot{r}^2 &= 1 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \\ \cos^2 \beta &= 1 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2), \\ \sin^2 \beta &= r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Substituindo as equações (3.5) e (3.6) em (2.16) e, em seguida, em (3.1), obtemos:

$$ds^2 = n_o^2 dr^2 + n_e^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.7)$$

$$d\tilde{s}^2 = d\tilde{r}^2 + b^2 \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.8)$$

onde as equações anteriores relacionam-se por uma transformação conforme do tipo $d\tilde{s}^2 = \frac{ds^2}{n_o^2}$, com $b \equiv \frac{n_e}{n_o}$ e $\tilde{r} \equiv n_e r$. A equação (3.8) é equivalente à parte espacial de (3.2).

Um fato importante deve ser destacado. Se estivermos diante de uma métrica estática em uma variedade quadridimensional pseudo-riemanianna, o cálculo de geodésicas nulas via princípio de Fermat permite definir uma métrica tridimensional riemanianna, de tal forma que [13, 17, 71]:

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j = 0, \quad (3.9)$$

$$dt^2 = -\frac{g_{ij}}{g_{tt}} dx^i dx^j \equiv d\tilde{s}^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.10)$$

sendo g_{tt} o elemento da métrica ligado à coordenada temporal e γ_{ij} os elementos da métrica responsável por (3.7). Contudo, uma vez sendo dado γ_{ij} , que é o nosso caso, existe uma arbitrariedade na determinação de g_{tt} e g_{ij} , equivalente a uma liberdade na escolha do fator conforme que leva de (3.9) para (3.10). Por exemplo, para gerar o elemento de linha (3.7), podemos ter $g_{tt} = -1$ com $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = \frac{n_e^2 r^2}{n_o^2}$, $g_{\phi\phi} = \frac{n_e^2 r^2 \sin^2 \theta}{n_o^2}$ ou $g_{tt} = -\frac{1}{r^2}$ com $g_{rr} = r^2$, $g_{\theta\theta} = \frac{n_e^2}{n_o^2}$, $g_{\phi\phi} = \frac{n_e^2 \sin^2 \theta}{n_o^2}$.

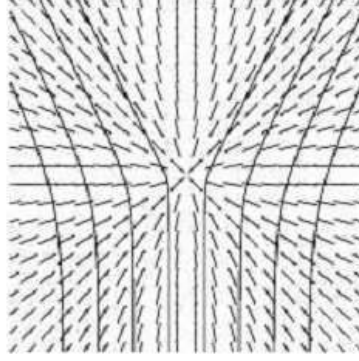


Figura 12: Vista equatorial de um defeito ouriço em cristal líquido com $n_o = 1,65$ e $n_e = 1,95$ ($b > 1$). As linhas são as trajetórias da luz. Imagem retirada de [3].

O que determina a escolha correta será o experimento do comportamento da luz. Por uma questão de simplificar os cálculos, adotaremos $g_{tt} = -1$ com $g_{rr} = 1$, $g_{\theta\theta} = \frac{n_e^2 r^2}{n_o^2}$, $g_{\phi\phi} = \frac{n_e^2 r^2 \sin^2 \theta}{n_o^2}$, permitindo-nos reescrever (3.7) da seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + d\tilde{r}^2 + b^2 \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.11)$$

Essa escolha dos elementos de $\mathbf{g}$ será considerada, de agora em diante, para todas métricas efetivas obtidas por este processo.

Um exemplo das trajetórias da luz é dada pela figura 12, onde foi usado $n_o = 1,65$ e $n_e = 1,95$ correspondentes ao cristal líquido nemático Merck Phase V [72]. Estes valores de n_o e n_e equivalem, para o CLN na configuração mostrada, a uma adição de ângulo sólido ao espaço, resultando na divergência dos raios luminosos.

3.2.2 Análogos a Cordas Cósmicas

Vejamos agora a métrica efetiva sentida pela luz na vizinhança de uma desclinação do tipo ($k = 1, c = 0$). Este defeito possui o diretor $\hat{n} = \hat{\rho}$ e uma distribuição de moléculas no plano $z = \text{const.}$ semelhante à da figura 12. O vetor posição da frente de onda em coordenadas cilíndricas, $\vec{R} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$, tem o seguinte vetor

tangente $\vec{T}$ na direção de propagação da frente de onda:

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \frac{d\vec{R}}{dl} = \hat{\rho} \frac{d\rho}{dl} + \rho \frac{d\hat{\rho}}{dl} + \frac{dz}{dl} \hat{z}, \\ &= \hat{\rho} \frac{d\rho}{dl} + \rho \frac{d\phi}{dl} \hat{\phi} + \frac{dz}{dl} \hat{z},\end{aligned}$$

gerando $\cos \beta = \dot{\rho}$ e todo um conjunto de cálculos semelhantes aos da seção anterior, que convergem no seguinte elemento de linha efetivo na vizinhança da desclinação ($k = 1, c = 0$):

$$ds^2 = d\tilde{\rho}^2 + b^2 \tilde{\rho}^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (3.12)$$

onde $b \equiv \frac{n_e}{n_o}$ e $\tilde{\rho} \equiv n_o \rho$. O elemento de linha (3.12) é semelhante à métrica efetiva do defeito cosmológico chamado de corda cósmica. Essa desclinação também produz trajetórias luminosas mostradas na figura 12.

É possível encontrar uma métrica generalizada para os defeitos tipo desclinação da seguinte maneira [3]. Em coordenadas cartesianas, descrevendo uma desclinação geral com um diretor confinando no plano $z = \text{const.}$ por:

$$\hat{n} = \cos(k\phi + c) \hat{x} + \sin(k\phi + c) \hat{y}, \quad (3.13)$$

sendo k e c as constantes que caracterizam o defeito, o vetor posição por $\vec{R} = \rho \cos \phi \hat{x} + \rho \sin \phi \hat{y}$ e o vetor tangente à $\vec{R}$ por:

$$\vec{T} = \frac{d\vec{R}}{dl} = \left(\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi \right) \hat{x} + \left(\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi \right) \hat{y}, \quad (3.14)$$

o produto interno entre (3.13) e (3.14) resulta em:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \dot{\rho} \cos [(k-1)\phi + c] + \rho \dot{\phi} \sin [(k-1)\phi + c], \\ \sin \beta &= \dot{\rho} \sin [(k-1)\phi + c] + \rho \dot{\phi} \cos [(k-1)\phi + c].\end{aligned}$$

Substituindo as duas últimas equações em (2.16) e, em seguida, em (3.1) obtemos

uma métrica descrita pelo seguinte elemento de linha:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \{n_o^2 \cos^2 [(k-1)\phi + c] + n_e^2 \sin^2 [(k-1)\phi + c]\} d\rho^2 \\
 & + \{n_o^2 \sin^2 [(k-1)\phi + c] + n_e^2 \cos^2 [(k-1)\phi + c]\} \rho^2 d\phi^2 \\
 & - \{2(n_e^2 - n_o^2) \sin [(k-1)\phi + c] \cos [(k-1)\phi + c]\} \rho d\rho d\phi \\
 & + dz^2.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

A equação (3.15) descreve a métrica efetivamente sentida por raios luminosos na proximidade de uma desclinação qualquer do tipo (k, c) (observe nela que quando $(k = 1, c = 0)$ o elemento de linha (3.12) é obtido).

Parte II

Aplicações do Modelo Análogo em CLN

4 Difração de Luz por Defeitos Ouriço e Desclinação ($k = 1, c = 0$)

*“Se o conhecimento pode criar problemas,
não é através da ignorância que podemos solucioná-los.”*

Issac Asimov

4.1 Introdução

O modelo análogo apresentado no capítulo anterior considera a luz como um feixe de raios, caracterizando o domínio da óptica geométrica. O objetivo desta seção é aplicar o modelo análogo para uma abordagem ondulatória da luz. Isso só é possível pois as trajetórias dos raios luminosos no limite da óptica geométrica são os mesmos das frentes de onda da luz com polarização plana para pequenos comprimentos de onda [47]. Usaremos este fato para descrever a difração de luz por defeitos ouriços e desclinações do tipo $(k = 1, c = 0)$ [7], respectivamente nos planos $\theta = \pi/2$ e $z = \text{const}$, assim como a influência da temperatura na posição do padrão de difração. O método das ondas parciais [73] é o empregado para estudar a difração de luz (considerada como uma onda escalar, em caráter de simplificação, de agora em diante) e, por isso, tal método é resumido a seguir (detalhes podem ser encontrados em [73] e na transcrição parcial de minha dissertação de mestrado apresentada no apêndice B).

O estado de espalhamento da luz difratada por um potencial central é dado pela seguinte expressão:

$$v_k^{(dif)}(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (4.1)$$

onde e^{ikz} representa a onda plana incidente não espalhada, e $f(\theta, \phi)$ é a *amplitude de espalhamento* dada por:

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_l^0(\theta). \quad (4.2)$$

Esta função permite encontrar o número de partículas espalhadas por segundo por esferorradiano definindo a *seção transversal diferencial de choque* como sendo:

$$\sigma(\theta, \phi) \equiv |f(\theta)|^2. \quad (4.3)$$

A grandeza central neste método é o *deslocamento de fase* δ_l , que expressa a diferença de fase entre a onda incidente e a onda espalhada, descrita por uma expansão de ondas parciais. Com δ_l , podemos calcular (4.3) e encontrar como o número de partículas espalhadas depende do ângulo de espalhamento, sendo possível descrever o padrão de difração do fenômeno.

4.2 Defeito Ouriço

A onda parcial que emerge da difração da onda escalar de luz por um defeito ouriço é calculada pela equação de d'Alembert:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (4.4)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é a transposta de $g_{\mu\nu}$ e g é o determinante de $g_{\mu\nu}$ relativo ao elemento de linha (3.11).

Considerando a luz com frequência ω :

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} \psi(r, \theta, \phi), \quad (4.5)$$

e usando (4.5) em (4.4), obtemos:

$$(\Delta - \omega^2) \psi = 0, \quad (4.6)$$

sendo Δ escrito como:

$$\Delta = \frac{\partial_r (r^2 \partial_r)}{r^2} + \frac{\mathbf{L}^2}{b^2 r^2},$$

e o operador $\mathbf{L}$ é a parte angular do laplaciano no espaço plano em coordenadas esféricas. Neste ponto, podemos usar separação de variáveis em harmônicos esféricos sobre $\psi(r, \theta, \phi)$. Entretanto, a simetria esférica implica na ausência de dependência sobre a coordenada ϕ ($m = 0$ para harmônicos esféricos). Assim, a parte espacial da equação de onda da luz é:

$$\psi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R_l(r) P_l(\cos \theta), \quad (4.7)$$

onde $P_l(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre de ordem l . Como a principal quantidade obtida no método das ondas parciais é o deslocamento de fase, o cálculo do termo a_l na equação anterior será ignorado. Assim, substituindo (4.7) em (4.6), teremos a seguinte equação radial:

$$R_l''(r) + 2 \frac{R_l'(r)}{r} + \left[\omega^2 - \frac{l(l+1)}{b^2 r^2} \right] R_l(r) = 0,$$

onde $R_l'(r) \equiv \frac{\partial R_l(r)}{\partial r}$. Após a mudança de variável $R_l(r) = \frac{G_l(r)}{r^{1/2}}$ na equação anterior,

encontramos:

$$r^2 G_l''(r) + r G_l'(r) + \left\{ \omega^2 r^2 - \left[\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} \right] \right\} G_l(r) = 0.$$

Esta equação possui como solução as funções de Bessel do primeiro tipo [74]:

$$G_l(r) = J_{n(l)}(\omega r),$$

onde a fase desta função é:

$$n(l) = \frac{1}{b} \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1-b^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que, quando $b = n_e/n_o = 1$, obtemos $n(l) = l + \frac{1}{2}$, representando uma onda se propagando no espaço plano, *i.e.*, na ausência do defeito. Comparando as fases das funções de onda na presença, $\left(\frac{\pi n(l)}{2} \right)$, e na ausência do defeito, $\left(\frac{\pi}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right) \right)$, encontramos o seguinte deslocamento de fase:

$$\begin{aligned} \delta_l(b) &= \frac{\pi}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi n(l)}{2}, \\ &= \frac{\pi}{2} \left(l + \frac{1}{2} - \frac{1}{b} \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1-b^2}{4} \right]^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

No método das ondas parciais, uma função importante é $f(\theta)$, chamada de *amplitude de espalhamento*. Sua expressão algébrica é dada por [73]:

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\omega} \sum_l^{\infty} (2l+1)(e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos\theta). \quad (4.9)$$

Para um dado valor numérico b em (4.8) e substituindo em (4.9), esta última equação permite-nos calcular numericamente a seção transversal diferencial de choque $\sigma(\theta)$ (Fig. 13), *i.e.*, a distribuição angular da luz espalhada, dada pela seguinte expressão [73]:

$$\sigma(\theta) = \sigma(\theta, \phi) \equiv |f(\theta)|^2, \quad (4.10)$$

onde a simetria azimutal do espalhamento foi usada. Esta característica gera um padrão de difração anular, com o seu máximo localizado no ângulo indicado pela Fig. 13. Esse anel de difração é a principal característica do espalhamento

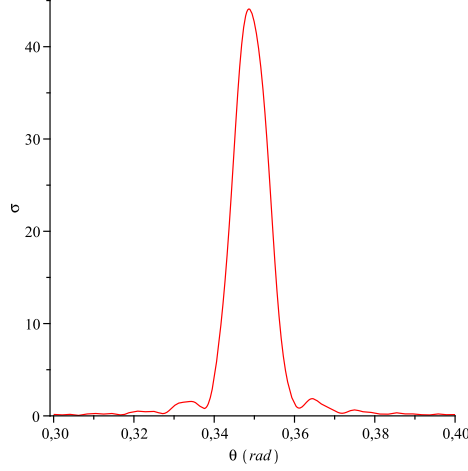


Figura 13: Seção transversal diferencial de choque, eq. (4.10), para um defeito ouriço com $b = 0.9$ usando a eq. (4.9) truncada em $l = 600$.

luminoso nas proximidades de um monopolo global.

Seguindo os passos apresentados em [75], no regime $b^2 \approx 1$, podemos obter uma expressão analítica para o ângulo que localiza o anel de difração e para a seção transversal total de choque σ_{tot} utilizando o teorema óptico [73]:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(0), \quad (4.11)$$

onde fizemos a velocidade da luz $c = 1$ e, assim, $k = \omega$.

Inicialmente, fazendo $\zeta \equiv l + \frac{1}{2}$ e $a^2 \equiv \frac{1-b^2}{4}$ em (4.8), temos:

$$\delta_l(b) = \frac{\pi}{2} \left(\zeta - \frac{\zeta}{b} \sqrt{1 - \frac{a^2}{\zeta^2}} \right). \quad (4.12)$$

Expandindo a equação (4.12) em torno de $b^2 \approx 1$ e reescrevendo-a em termos de a^2 , resultando em:

$$\delta_l(b) \approx \frac{\pi}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{b} \right) \zeta + \frac{a^2}{2b\zeta} + O(a^4) \right]. \quad (4.13)$$

Como a^2 é pequeno, os dois primeiros termos da expansão anterior são cálculos aproximados. Podemos aplicar (4.13) em (4.9) e encontrar o primeiro e o segundo termo da expansão $f(\theta) = f^{(0)}(\theta) + f^{(1)}(\theta) + \dots$ para a amplitude de espalhamento.

Estes dois termos podem ser escritos através da função:

$$h(\theta, \alpha) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{\pi i \alpha \zeta(l)} P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \pi \alpha - \cos \theta)}},$$

relacionada com a função geradora dos polinômios de Legendre [74], onde $\alpha \equiv 1 - \frac{1}{b}$. O primeiro termo da expansão da amplitude de espalhamento é proporcional à derivada de $h(\theta, \alpha)$ em relação a α :

$$f^{(0)}(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2}k} \frac{\sin \pi \alpha}{(\cos \pi \alpha - \cos \theta)^{3/2}}. \quad (4.14)$$

Substituindo este resultado na equação (4.11), encontramos o primeiro termo da expansão $\sigma_{tot} = \sigma^{(0)} + \sigma^{(1)} + \dots$:

$$\sigma^{(0)} = \frac{\pi}{k^2} \frac{\cos \frac{\pi \alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\pi \alpha}{2}}. \quad (4.15)$$

O segundo termo da amplitude de espalhamento, após considerar a ordem $O(a^2)$ em (4.13), é proporcional a $h(\theta, \alpha)$:

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{\pi \alpha^2}{2bk} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \pi \alpha - \cos \theta)}}. \quad (4.16)$$

E, novamente, aplicando este resultado no teorema óptico, encontramos:

$$\sigma^{(1)} = -\frac{\pi \alpha^2}{bk^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi \alpha}{2}}. \quad (4.17)$$

Como pode ser visto, as equações (4.14) e (4.16) têm comportamento singular para o ângulo $\theta_0 = \pi \alpha$. Aplicando este resultado em (4.10), encontramos um padrão de difração anular localizado em $\theta_0 = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, válida apenas para $b^2 \approx 1$. Entretanto, quando comparamos esta localização com a obtida por meios de cálculo numérico usando a aplicação direta de (4.8) em (4.9), vemos que ambos os métodos predizem a mesma posição do anel de difração para um dado b . Isto significa que os termos $f^{(0)}(\theta)$ e $f^{(1)}(\theta)$ são realmente dominantes no cálculo de valores precisos de $f(\theta)$.

4.3 Desclinação ($k = 1, c = 0$)

Como estamos estudando a propagação da luz no plano $z = \text{const.}$ na vizinhança de uma desclinação do tipo $\{\kappa = 1, \gamma = 0\}$, tratamos com um problema de simetria cilíndrica, isto é, $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Assim, torna-se natural, para o estudo da difração de luz, a aplicação do método das ondas parciais cilíndricas. Este método será desenvolvido de maneira similar a [73] e ao apêndice B para o caso esférico. O problema ondulatório nesta seção está relacionado a um defeito que se estende infinitamente na direção $\hat{z}$, sendo descrito por apenas duas variáveis espaciais (ρ, ϕ) . Consequentemente, a equação de onda será dada por:

$$(\Delta - k^2) \frac{e^{ik\rho}}{\rho^{1/2}} = 0, \quad (4.18)$$

onde o fator $\rho^{-\frac{1}{2}}$ garante que o fluxo total de energia que passa por um cilindro de raio ρ é independente de ρ para grandes valores. Desta forma, a função de onda que representa o estado de espalhamento, $v_k^{(diff)}(\mathbf{r})$, será composta pela onda plana na direção, por exemplo, do eixo $\hat{x}$, e^{ikx} , e por uma onda espalhada (sendo ignorado o problema da normalização). Assim, o comportamento de $v_k^{(diff)}(\mathbf{r})$ para grandes valores de ρ será:

$$v_k^{(diff)}(\mathbf{r}) \approx e^{ikx} + f(\phi) \frac{e^{ik\rho}}{\rho^{1/2}}. \quad (4.19)$$

A fim de aplicarmos o método das ondas parciais, precisamos de três elementos. Primeiro, a solução da equação (4.18) na ausência do potencial, isto é, a onda cilíndrica livre $\psi_{k,l}^{(0)}(\rho, \phi)$:

$$\begin{aligned} \psi_{k,l}^{(0)}(\rho, \phi) &\approx J_l(k\rho) e^{il\phi} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi_{k,l}^{(0)}(\rho, \phi) &\approx \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \cos\left(k\rho - \frac{\pi}{2} \left(l - \frac{1}{2}\right)\right) e^{il\theta}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Segundo, precisamos da solução da equação (4.18) na presença de um potencial

cilindricamente simétrico $V(\mathbf{r}) = V(\rho)$, *i.e.*, as ondas parciais cilíndricas $\psi_{k,l}(\rho, \phi)$:

$$\begin{aligned}\psi_{k,l}(\rho, \phi) &\approx J_{\nu_l}(k\rho)e^{il\phi} \\ \lim_{\rho \rightarrow \infty} \psi_{k,l}(\rho, \phi) &\approx \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \cos\left(k\rho - \frac{\pi}{2}\left(\nu_l - \frac{1}{2}\right)\right) e^{il\theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k\rho}} \cos\left(k\rho - \frac{\pi}{2}\left(l - \frac{1}{2}\right) + \delta_l\right) e^{il\theta},\end{aligned}\quad (4.21)$$

sendo δ_l o deslocamento de fase em relação à onda plana (4.20). E terceiro, precisamos da onda plana expandida em ondas livres cilíndricas, a expansão de Jacobi–Anger [76]:

$$e^{ikx} = e^{ik\rho \cos \phi} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} i^l J_l(k\rho) e^{il\phi} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \epsilon_l J_l(k\rho) e^{il\phi} \quad (4.22)$$

onde $\epsilon_0 \equiv 1$ e $\epsilon_l \equiv (1 + e^{-2il\phi})$ ($l \geq 1$).

Com estes três elementos, é possível expandir $v_k^{(diff)}(\mathbf{r})$ em uma série de ondas parciais cilíndricas de tal forma que os coeficientes de (4.22) serão usados para que $v_k^{(diff)}(\mathbf{r})$ reproduza uma onda plana quando $\rho \rightarrow \infty$:

$$v_k^{(diff)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \psi_{k,l}(\rho, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \epsilon_l \psi_{k,l}(\rho, \phi). \quad (4.23)$$

Para $\rho \rightarrow \infty$ e usando a forma exponencial da função cosseno, a substituição de (4.21) em (4.23) resulta em:

$$v_k^{(diff)}(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \epsilon_l e^{il\theta} \times \frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{2}(l - \frac{1}{2}))} e^{i\delta_l} + e^{-i(k\rho - \frac{\pi}{2}(l - \frac{1}{2}))} e^{-i\delta_l}}{2\sqrt{k\rho}}.$$

Multiplicando o lado direito da última equação pelo fator $e^{i\delta_l}$ e usando $e^{2i\delta_l} = 1 + 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l$, obtém-se:

$$\begin{aligned}v_k^{(diff)}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \epsilon_l e^{il\theta} \times \\ &\times \left(\frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{2}(l - \frac{1}{2}))} e^{i\delta_l} + e^{-i(k\rho - \frac{\pi}{2}(l - \frac{1}{2}))} e^{-i\delta_l}}{2\sqrt{k\rho}} \right. \\ &\left. + \frac{e^{i(k\rho - \frac{\pi}{2}(l - \frac{1}{2}))} 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l}{2\sqrt{k\rho}} \right).\end{aligned}$$

Reconhecendo o primeiro termo entre parênteses como sendo a forma assintótica de (4.22) e colocando em evidência o termo $\frac{e^{ik\rho}}{\rho^{1/2}}$ no segundo termo, a comparação deste com (4.19) identifica $f(\phi)$ como sendo:

$$f(\phi) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sum_{l=0}^{\infty} i e^{\frac{-i\pi}{4}} \epsilon_l e^{il\phi} \sin \delta_l e^{i\delta_l}. \quad (4.24)$$

Aplicando (4.24) em (4.10), obtemos a seção transversal diferencial de choque para defeitos com simetria cilíndrica.

Vamos aplicar a teoria desenvolvida até aqui para calcular a amplitude de espalhamento e a seção transversal diferencial de choque para a luz no plano $z = \text{const.}$ espalhada pela desclinação com métrica efetiva dada por (3.12). A configuração de moléculas no plano $z = \text{const.}$ é similar ao caso do defeito tipo ouriço visto da sua seção equatorial ($\phi = 0$), que pode ser verificado comparando as equações (3.8) e (3.12). Desta maneira, nosso ponto de partida será novamente a aplicação da métrica efetiva (3.12) da desclinação sob estudo na equação de onda (4.4).

Devido a simetria na direção z , estudaremos a propagação devido às coordenadas ρ e ϕ (uma abordagem diferente do problema em questão para a corda cósmica pode ser vista em [77]). Então, usando uma separação de variáveis similar a (4.5), encontramos a seguinte equação de onda na presença de uma desclinação:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{b^2 r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \omega^2 \right) \psi(\rho, \phi) = 0.$$

onde será usado $\psi(\rho, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l R_l(\rho) e^{il\phi}$. Com a expansão anterior, a equação para a coordenada radial será:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_l^2}{r^2} + \omega^2 \right) R_l(\rho) = 0,$$

sendo $R_l(\rho) = J_{\nu_l}(\rho)$, $\nu_l = \frac{l}{b}$. Usando este índice, é possível encontrar o deslocamento de fase de forma semelhante a (4.21) e, conseqüentemente, a amplitude de espalhamento (4.24) e a seção transversal diferencial de choque (4.10).

O deslocamento de fase da onda espalhada pela desclinação (3.12) é $\delta_l = \frac{l\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{b} \right)$. Fig. 14 mostra a seção transversal diferencial de choque com os mesmos parâmetros da Fig. 13. Análoga à anterior, a Fig. 14 indica, para o caso da desclinação, um comportamento singular de (4.10) em torno de $\phi_0 = \pi\alpha$, onde

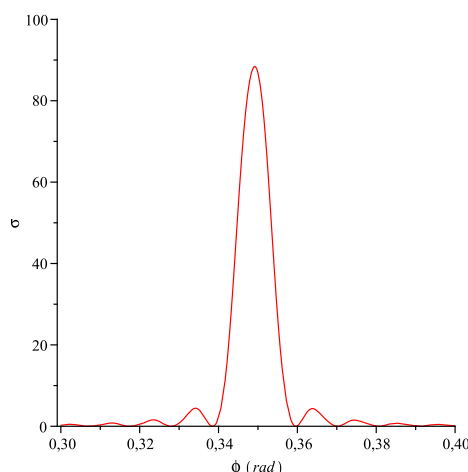


Figura 14: Seção transversal diferencial de choque, eq. (4.10), para uma desclinação do tipo $\{\kappa = 1, \gamma = 0\}$ com $b = 0.9$ usando eq. (4.24) truncada em $l = 600$.

$\alpha \equiv (1 - \frac{1}{b})$, gerando o padrão de difração na forma de uma linha luminosa em torno de ϕ_0 . Desta forma, é possível imaginar a desclinação como uma linha de defeitos pontuais do tipo ouriço ou, do ponto de vista gravitacional, uma corda cósmica como uma linha de monopolos globais.

Como observado por Grandjean em 1919 [2,78], o ângulo formado pelos raios de luz espalhados à direita e à esquerda da desclinação é $2\pi \left(1 - \frac{n_o}{n_e}\right)$. Este resultado, que foi obtido por um método diferente, é exatamente o mesmo que nós obtemos usando o modelo análogo baseado no princípio de Fermat, já que ϕ_0 é simplesmente o ângulo entre o feixe incidente e o feixe espalhado, devido a simetria azimutal. Assim ϕ_0 é a metade do valor obtido por Grandjean.

Com o que foi desenvolvido nas duas seções anteriores, o padrão de difração dos defeitos permite inferir valores para os índices de refração da molécula líquido-cristalina. Isso se deve ao fato da posição do padrão de difração ser dependente da relação $b = \frac{n_e}{n_o}$.

4.4 Influência da Temperatura

É bem conhecida a dependência na temperatura que os índices de refração de uma molécula de cristal líquido possui [43, 79]. Nós usaremos este fato para calcular a influência da temperatura na posição do padrão de difração para os

defeitos anteriormente estudados.

Como visto em [3, 43], os índices de refração n_e e n_o de uma molécula líquido-cristalina podem ser tratados por um modelo de quatro parâmetros experimentais. Assim, os índices de refração são expressos por:

$$n_e(T) \approx A - BT + \frac{2(\Delta n)_0}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta \quad (4.25)$$

$$n_o(T) \approx A - BT - \frac{(\Delta n)_0}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta, \quad (4.26)$$

onde A é uma constante adimensional, B é uma constante de unidade $(K)^{-1}$, $(\Delta n)_0 \equiv (n_e - n_o)_0$ é a birrefringência teórica a $T = 0$ K, β é uma constante do material e T_c é a temperatura de transição entre as fases nemática e isotrópica. Usando este modelo para o cristal líquido 5CB (4-cyano-4-n-pentilbifenil), que tem $T_c = 306.6$ K, e um feixe de luz de comprimento de onda $\lambda = 589$ nm, obtém-se $A = 1.7674$, $B = 5.79 \times 10^{-4} K^{-1}$, $(\Delta n)_0 = 0.3505$ e $\beta = 0.1889$ [43]. Aplicando (4.25) e (4.26) em (3.8) e (3.12), obtemos uma nova expressão para b e, conseqüentemente, a dependência na temperatura do padrão de difração de um defeito tipo ouriço e desclinação ($k = 1, c = 0$) através da relação

$$\phi_0 = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right). \quad (4.27)$$

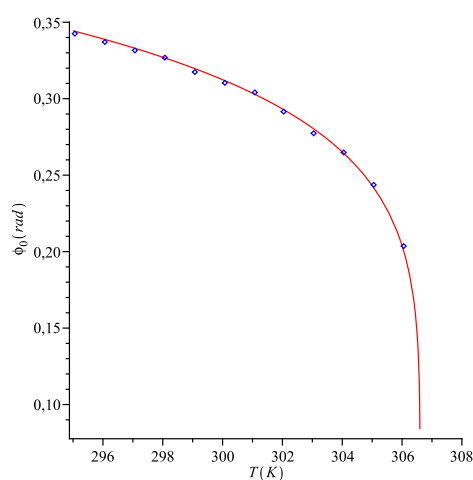


Figura 15: Dependência na temperatura da posição do padrão de difração, $\phi_0 = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right)$, para o 5CB. A linha foi calculada usando (4.27), enquanto que os pontos são resultados numéricos.

A Fig. 15 mostra a predição teórica da posição do padrão de difração para o 5CB no intervalo $T = [295.65; 306.6]$ K [2] considerando os dois defeitos anteriormente estudados. Observe a baixa sensibilidade da posição no início do intervalo de temperatura (≈ 295 K) e uma alta sensibilidade no final do intervalo (≈ 306 K), próxima da transição de fase nemático-isotrópico.

5 *Simulando a Atração Gravitacional de Planetas*

“O teatro foi a primeira invenção humana.”

Augusto Boal

5.1 Introdução

Objetos com massa deformam a variedade espaço-temporal em sua vizinhança. Essa deformação pode ser descrita através da equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

onde $R_{\mu\nu} = R_{\mu\gamma\nu}^{\gamma} = g^{\gamma\delta}R_{\delta\mu\gamma\nu}$ é o tensor de Ricci, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de Ricci (ou de curvatura) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento (onde usamos a convenção de soma de Einstein para índices repetidos e foi feito $c = 1$ para a velocidade da luz e $G = 1$ para a constante de gravitação de Newton) [10, 12]. A solução da equação de Einstein externa a uma distribuição de massa estática e isotrópica em coordenadas esféricas é a métrica de Schwarzschild, representada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

onde m é chamada de massa geométrica do objeto, tendo unidade de comprimento. Esta métrica diverge para a distância radial não-nula $r_{sc} = 2m$, sendo r_{sc} chamado de raio de Schwarzschild.

Caso o objeto possua um raio $r_0 > r_{sc}$, a métrica (5.1) descreve o espaço-tempo de planetas, estrelas e da maioria dos objetos massivos. A exceção é o caso $r_0 < r_{sc}$, ligado a buracos negros. Neste capítulo, vamos mostrar como descrever a métrica efetivamente sentida pela luz para o primeiro caso na vizinhança de uma desclinação em um CLN usando a teoria hidrodinâmica de Beris-Edwards (seção 2.3.2).

5.2 Fluxo radial de CLN

Quando a métrica de Schwarzschild é reescrita em coordenadas isotrópicas, a função $\lambda(\tilde{r})$ multiplica o termo espacial referente ao espaço plano, gerando um elemento de linha do tipo [11]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \lambda^2(\tilde{r}) [d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \quad (5.2)$$

onde $\tilde{r}$ é a nova coordenada radial. Vamos agora determinar $\tilde{r}$ e $\lambda(\tilde{r})$. Uma comparação direta entre os termos de (5.1) e (5.2) resulta em:

$$\lambda(\tilde{r})\tilde{r} = r, \quad (5.3)$$

$$\lambda(\tilde{r})d\tilde{r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} dr. \quad (5.4)$$

Eliminando λ pela substituição de (5.3) em (5.4), obtemos:

$$\frac{d\tilde{r}}{\tilde{r}} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1/2} \frac{dr}{r} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - 2mr}}.$$

Integrando a última equação, encontramos $r = \tilde{r} \left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2$ e $\lambda = \left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2$. Substituindo estas equações em (5.2), obtemos o elemento de linha da métrica de Schwarzschild escrito em coordenadas isotrópicas:

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2} dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^4 \left[d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\right]. \quad (5.5)$$

Duas métricas são ditas serem *conformes entre si* quando relacionam-se da seguinte forma: $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(r, \theta, \phi)g_{\mu\nu}$, onde $\Omega(r, \theta, \phi)$ é uma função diferenciável não-nula [11]. Apesar das métricas representarem espaços-tempos diferentes, entre eles permanecem inalterados os ângulos entre vetores, as razões entre comprimentos e, principalmente, as geodésicas nulas (que representam as trajetórias da luz). Dividindo (5.5) por $\frac{\left(1 - \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2}$, obtemos uma métrica conforme dada pelo elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^6}{\left(1 - \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2} \left[d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\right]. \quad (5.6)$$

Isto significa que (5.6) possui as mesmas geodésicas nulas da métrica de Schwarzschild, (5.1).

Desejamos simular (5.6) na vizinhança de uma desclinação do tipo ($k = 1, c = 0$) com raio r_0 em escala microscópica para luz que se propaga no plano $z = \text{const.}$.

Para isso, fazendo $k = 1$ e $c = 0$ na equação geral das desclinações, (3.15):

$$\begin{aligned} ds^2 = & \{n_o^2 \cos^2 [(k-1)\phi + c] + n_e^2 \sin^2 [(k-1)\phi + c]\} d\rho^2 \\ & + \{n_o^2 \sin^2 [(k-1)\phi + c] + n_e^2 \cos^2 [(k-1)\phi + c]\} \rho^2 d\phi^2 \\ & - \{2(n_e^2 - n_o^2) \sin [(k-1)\phi + c] \cos [(k-1)\phi + c]\} \rho d\rho d\phi, \end{aligned}$$

obtemos:

$$ds^2 = n_o^2 d\rho^2 + n_e^2 \rho^2 d\phi^2.$$

Considerando a nova variável radial $\tilde{\rho} \equiv n_e \rho$, o elemento de linha anterior modifica-se para:

$$ds^2 = \tilde{b}^2 d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi^2,$$

onde $\tilde{b} = \frac{n_o}{n_e}$. Já que estamos tratando de uma métrica efetiva que descreve o comportamento real da luz, o termo dt^2 precisa ser adicionado em uma descrição completa:

$$ds^2 = -dt^2 + \tilde{b}^2 d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi^2. \quad (5.7)$$

Se, ao invés de uma constante, $\tilde{b}$ for uma função de $\tilde{\rho}$ (o que não modifica a métrica efetiva já que a equação de (2.6) aplica uma derivada temporal sobre $\vec{D}$), é possível encontrar qual a função específica $\tilde{b}(\tilde{\rho})$ que permite (5.7) ter as mesmas geodésicas nulas de (5.6) no plano $z = \text{const.}$ (equivalente a $\theta = \frac{\pi}{2}$). Isto pode ser obtido simplesmente comparando os termos entre (5.6) e (5.7), resultando em:

$$\frac{(1 + \frac{m}{2\tilde{r}})^3}{(1 - \frac{m}{2\tilde{r}})} d\tilde{r} = \tilde{b}(\tilde{\rho}) d\tilde{\rho}, \quad (5.8)$$

$$\frac{(1 + \frac{m}{2\tilde{r}})^3}{(1 - \frac{m}{2\tilde{r}})} \tilde{r} = \tilde{\rho}. \quad (5.9)$$

Manipulando (5.8), temos:

$$\frac{(1 + \frac{m}{2\tilde{r}})^3}{(1 - \frac{m}{2\tilde{r}})} \frac{1}{\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{r}}} = \tilde{b}(\tilde{\rho}).$$

Para encontrarmos $\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{r}}$, diferenciamos (5.9) em relação a $\tilde{r}$, resultando em:

$$\frac{d\tilde{\rho}}{d\tilde{r}} = \frac{\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^3}{1 - \frac{m}{2\tilde{r}}} - \frac{3m\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2}{2\tilde{r}\left(1 - \frac{m}{2\tilde{r}}\right)} - \frac{m\left(1 + \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^3}{2\tilde{r}\left(1 - \frac{m}{2\tilde{r}}\right)^2}.$$

Substituindo esta equação na anterior e considerando $m^2 \ll 1$ por estarmos tratando de defeitos microscópicos (equivalente ao regime de campo fraco), encontramos $\tilde{b}(\tilde{r})$:

$$\tilde{b}(\tilde{r}) = \frac{1}{1 - \frac{2m}{\tilde{r}}}. \quad (5.10)$$

Voltando à equação (5.9), ela tem três soluções do tipo $\tilde{r}(\tilde{\rho})$, porém apenas para uma delas $\tilde{r}$ cresce com $\tilde{\rho}$. Para esta solução, o uso de $m^2 \ll 1$ gera:

$$\tilde{r} = \frac{8\tilde{\rho}^3 - 54\tilde{\rho}^2m + 2\tilde{\rho} - 3m}{6} + \frac{6\left(\frac{\tilde{\rho}^2}{9} - \frac{\tilde{\rho}m}{2}\right)}{8\tilde{\rho}^3 - 54\tilde{\rho}^2m}. \quad (5.11)$$

Chegamos ao resultado que queríamos. Para que (5.7) tenha geodésicas nulas do tipo Schwarzschild, $\tilde{b}(\tilde{r})$ deve ser dado por (5.10) e $\tilde{r}(\tilde{\rho})$ por (5.11) [80].

O que desenvolvemos até agora pode ser aplicado na métrica efetiva da desclinação (5.7). Primeiro, reescrevamos (5.7) explicitando a dependência na temperatura dos índices n_o e n_e pelas equações (4.25) e (4.26) [43] e, em seguida, usemos a aproximação de Haller (2.1), $q(T) = \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\alpha$, para escrever a métrica efetiva da desclinação em termos do parâmetro de ordem q , o que resulta nos seguintes passos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + \left(\frac{n_o}{n_e}\right)^2 d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi^2, \\ ds^2 &= -dt^2 + \left[\frac{A - BT - \frac{(\Delta n)_0}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\alpha}{A - BT + \frac{2(\Delta n)_0}{3} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\alpha} \right]^2 d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi^2, \\ ds^2 &= -dt^2 + \left[\frac{A - BT_c(1 - q^{1/\alpha}) - \frac{(\Delta n)_0 q}{3}}{A - BT_c(1 - q^{1/\alpha}) + \frac{2(\Delta n)_0 q}{3}} \right]^2 d\tilde{\rho}^2 + \tilde{\rho}^2 d\phi^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A função $q(\tilde{\rho})$ é determinada comparando a função associada à coordenada radial de (5.12) com a função da coordenada radial de (5.7), i. e., com $\tilde{b}^2(\tilde{\rho})$ via (5.10) e (5.11). Fazendo esta igualdade e notando que $q^{\frac{1}{\alpha}} \ll 1$ (para valores ordinários de

α [43]) obtemos $q(\tilde{r})$:

$$q(\tilde{\rho}) = \left[\frac{48m\tilde{\rho}^2 (A + BT_c)}{(\Delta n)_0} \right] \times [32\tilde{\rho}^5 - 432m\tilde{r}^4 + 8\tilde{\rho}^3 - 82m\tilde{\rho}^2 + 2\tilde{\rho} - 9m]^{-1}, \quad (5.13)$$

onde novamente consideramos $m^2 \ll 1$. Este é o parâmetro de ordem escalar que deve existir em torno de uma configuração do tipo desclinação ($k = 1, c = 0$) a fim de que a métrica (5.7) tenha geodésicas nulas que coincidam com as da métrica de Schwarzschild para $m^2 \ll 1$, no regime de campo fraco. Note que nós obtemos a expressão mais geral para o parâmetro de ordem escalar q , já que nenhuma consideração foi feita sobre o que está criando este parâmetro de ordem específico (fluxo do material líquido-cristalino, gradientes de temperatura e/ou campo elétrico, etc.). Agora, considerando que estamos tratando com um fluxo de material líquido-cristalino, como estudado na seção 2.3.2, e substituindo a equação (5.13) em (2.25):

$$q(\tilde{\rho}) = \frac{3}{2 + \frac{3C}{v(\tilde{\rho})^{3\xi}}},$$

encontramos o perfil de velocidade que gera o comportamento do parâmetro de ordem dado por (5.13):

$$\begin{aligned} v(\tilde{\rho}) = \{ [144Cm\tilde{\rho}^2 (A + BT_c)] \times [(6\tilde{\rho}^5 - 1296m\tilde{\rho}^4 \\ + 24\tilde{\rho}^3 - 246m\tilde{\rho}^2 + 6\tilde{\rho} - 27m) (\Delta n)_0 \\ - 96m\tilde{\rho}^2 (A + BT_c)]^{-1} \}^{\frac{1}{3\xi}}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Esta equação é válida para velocidades pequenas, pois estamos apreciando a métrica efetiva sendo simulada pela mudança contínua dos valores dos índices de refração da molécula, n_o e n_e , e da sua consequente influência no índice de refração da luz extraordinária: $N_g^2 = n_e^2 \cos^2 \beta + n_o^2 \sin^2 \beta$, lembrando que β é o ângulo entre a frente de onda da luz e o diretor $\hat{n}$ do cristal líquido. Se a velocidade for alta, efeitos de arraste da luz pelo material devem ser levados em conta [8]. Um exemplo é o uso da métrica de Gordon para determinar o perfil de velocidade, de um fluido com índice de refração isotrópico, necessário à simulação da métrica de Schwarzschild.

Resumindo, toda vez que um CLN de configuração inicial $\hat{n} = \hat{\rho}$ flui radial-

mente para o centro com um perfil de velocidade dado por (5.14), qualquer raio luminoso que viaja no plano $z = \text{const.}$ comportar-se-á como na presença da métrica de Schwarzschild (5.1). Contudo, o ponto chave é a equação (5.13), que mostra como o parâmetro de ordem deve ser, nas condições citadas, para que a métrica de Schwarzschild seja simulada.

5.2.1 Um Exemplo

Vamos usar as informações sobre o cristal líquido 5CB [43, 81] e aplicá-las na equação (5.14) para obter o perfil de velocidade que simula a métrica de Schwarzschild.

Imaginemos um volume de CLN que apresente as suas moléculas com configuração tal que imite uma desclinação do tipo ($k = 1, c = 0$) em torno de um sorvedouro de raio finito, mas ainda microscópico, e que o volume esteja fluindo na direção deste núcleo. Usando os valores possíveis para o parâmetro de ordem dentro da fase nemática [2], admitamos que o valor máximo dele seja sobre o núcleo de tamanho, neste exemplo, $\rho_0 = 30\mu\text{m} \Rightarrow \tilde{\rho}_0 = 5,12 \cdot 10^{-5}$: $q(\tilde{\rho}_0) = 0.5$. Com estes dados, a equação (5.13) fornece-nos $m \approx 1.13 \cdot 10^{-5}$.

É importante lembrar que m está relacionada com o raio de Schwarzschild:

$$\tilde{r}_s \equiv 2m \approx 2.26 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \tilde{\rho}_s = 5,08 \cdot 10^{-5} < \tilde{\rho}_0 = 5,12 \cdot 10^{-5},$$

e como a luz viaja fora do raio do núcleo, $\tilde{\rho}_0$, ela segue uma trajetória aberta, isto é, não podemos estudar o comportamento dentro do raio de Schwarzschild. Também é importante destacar que, aumentando r_0 ou o valor do parâmetro de ordem na superfície do núcleo, m aumenta.

Tendo m em mãos, a substituição de (5.13) em (2.25) permite encontrar C . Entretanto, esta constante tem uma arbitrariedade na sua determinação, já que C depende das condições de contorno. Admitindo que a velocidade do fluido sobre o núcleo é de 1 m/s , encontramos $C \approx 0.334$. Finalmente, usando todas as constantes obtidas até agora em (5.14), geramos a figura 16 que representa o perfil de velocidade que simula a métrica de Schwarzschild. Devido à arbitrariedade de C , qualquer outro valor desta constante apenas desloca para cima ou para baixo

os pontos do gráfico, mantendo o comportamento do gradiente de velocidade.

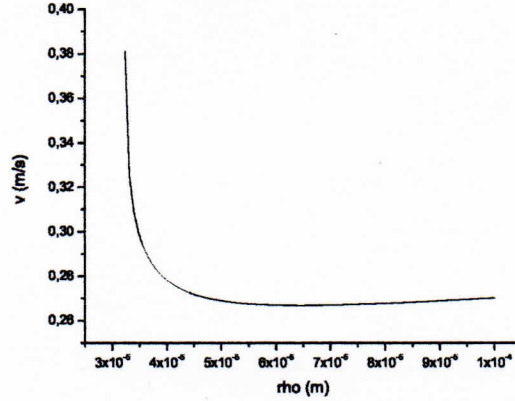


Figura 16: Perfil de velocidade que simula a métrica de Schwarzschild entorno de uma configuração do tipo desclinação ($k = 1, c = 0$) com raio do cilindro $\rho_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ m.

Agora, vamos calcular a velocidade do fluido, de índice de refração isotrópico, necessário para simular a métrica de Schwarzschild de acordo com a métrica de Gordon. A expressão algébrica para a velocidade a uma distância r é dada por [82]:

$$v_{Gordon}(r) = \frac{c}{\sqrt{1 + (n^2 - 1) \frac{r}{2M}}}, \quad (5.15)$$

onde n é o índice de refração do meio. Como queremos comparar com o raio extraordinário em CLN, este índice deve ser N_g . Assim, igualando n a (2.16) para o 5CB e para um feixe incidindo radialmente ($\beta = 0$), nós temos $n = 1.54$. Substituindo este valor, $m = 1.13 \cdot 10^{-5}$ e $r = r_0 = 3 \cdot 10^{-5}$ m em (5.15), obtemos $v_{Gordon} = 1.79 \cdot 10^8$ m/s, um valor 10^8 vezes maior do que o obtido com $C = 0.334$, $v = 1$ m/s. Então, o uso da métrica de Gordon neste problema é experimentalmente impraticável.

6 Descrição Métrica para Ondas Sonoras

*“Tudo é perfeito nesta vida para aquele
cuja mente está colocada na igualdade.”*

Bhagavad Gita

6.1 Introdução

Um dos trabalhos desenvolvidos durante o doutorado foi aplicar a ideia de métricas efetivas via princípio de Fermat para ondas sonoras [83]. Como resultado, vamos apresentar o comportamento das trajetórias de som e da difração na presença de defeitos topológicos da fase nemática em cristais líquidos. O que será visto aqui serve de inspiração para futuras pesquisas em ondas de calor (também conhecidas como *segundos sons* [84]).

6.2 Métrica Efetiva para o Som

Vimos na seção 2.3.1 que a velocidade de fase da onda sonora extraordinária para o modo longitudinal é descrita por:

$$v_k^2(\theta) = \frac{(C_{11} + (C_{33} - C_{11}) \cos^2 \theta)}{\rho^2},$$

onde ρ é a densidade e θ é o ângulo entre o vetor de onda $\vec{k}$ e o diretor $\hat{n}$. Esta equação foi obtida considerando o CLN como um sólido simples com constantes elásticas lineares nas direções $\hat{x}$ e $\hat{y}$ dadas por C_{11} e na direção $\hat{z}$ dada por C_{33} [51,85]. Substituindo esta equação de velocidade na expressão de índice de refração $N_k = \frac{v}{v_k}$, onde a velocidade v da onda na fase isotrópica é feita $v \equiv 1$ (nesta fase, a velocidade da onda não depende da direção de propagação e as velocidades de fase e de grupo são iguais [52,86]), chegamos na expressão do índice de refração da velocidade de fase:

$$N_k^2 = \frac{\rho^2}{C_{11} \sin^2 \theta + C_{33} \cos^2 \theta},$$

ou

$$\frac{N_k^2 \sin^2 \theta}{\frac{\rho^2}{C_{11}}} + \frac{N_k^2 \cos^2 \theta}{\frac{\rho^2}{C_{33}}} = 1.$$

De forma semelhante à seção 2.2.1, definimos um vetor índice de refração $\vec{N}_k = \frac{\hat{k}}{v_k}$ de tal forma que a simetria cilíndrica da fase nemática permite-nos reescrever a

equação anterior como:

$$\frac{N_{kx}^2 + N_{ky}^2}{\frac{\rho^2}{C_{11}}} + \frac{N_{kz}^2}{\frac{\rho^2}{C_{33}}} = 1, \quad (6.1)$$

onde $N_{kx}^2 + N_{ky}^2 = N_k^2 \sin^2 \theta$ e $N_{kz}^2 = N_k^2 \cos^2 \theta$, sendo N_{kx} , N_{ky} e N_{kz} as componentes de $\vec{N}_k$. A equação (6.1) é semelhante a (2.12), onde $\frac{\rho^2}{C_{11}}$ e $\frac{\rho^2}{C_{33}}$ representam, respectivamente, os índices de refração paralelo e perpendicular da molécula de cristal líquido.

Como a equação (2.14) também é válida para ondas em cristais [52], assim como a existência de um vetor $\vec{S}$ que dá a direção de propagação da energia ligada à onda elástica, encontramos a seguinte equação para o índice de refração da onda extraordinária relacionada à velocidade de grupo [83]:

$$\begin{aligned} N_g^2(\beta) &\equiv \frac{1}{v_g^2} = \frac{\rho^2}{C_{11}} \sin^2 \beta + \frac{\rho^2}{C_{33}} \cos^2 \beta, \\ &= c_{\perp} \sin^2 \beta + c_{\parallel} \cos^2 \beta, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde $c_{\perp} \equiv \frac{\rho}{C_{11}}$ e $c_{\parallel} \equiv \frac{\rho}{C_{33}}$.

A equação (6.2) permite-nos encontrar uma métrica efetiva para o som, nos moldes do capítulo 3, e aplicá-la para a difração de som por defeito topológico (capítulo 4). A métrica efetiva surge da comparação do integrando do princípio de Fermat:

$$F = \int_A^B N_g(\vec{r}) dl,$$

com o elemento de linha ds^2 :

$$ds^2 = N_g^2 dl^2. \quad (6.3)$$

Observe que a métrica efetiva assim obtida é válida para qualquer configuração do diretor $\hat{n}$ que permita aferir $\sin \beta$ e $\cos \beta$. Nas próximas subseções, veremos como esta descrição se aplica na presença de defeitos topológicos da fase nemática.

6.2.1 Trajetórias Sonoras

O procedimento para calcular a métrica efetiva sentida pelo som é similar à do capítulo 3. Encontramos $\cos \beta$ e $\sin \beta$ em termos das coordenadas do laboratório, via o elemento de linha euclidiano $dl^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$, substituímos eles em (6.2) e obtemos os g_{ij} 's para (6.3).

Para o defeito ouriço com $\hat{n} = \hat{r}$, os vetores posição da frente de onda $\vec{R} = r\hat{r}$, o vetor tangente $\vec{T}(l) = \frac{d\vec{R}}{dl}$ e o elemento de linha euclidiano $ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ geram:

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \dot{r}, \\ \sin \beta &= \sqrt{r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)}.\end{aligned}$$

Com eles encontramos a métrica efetivamente sentida por ondas planas sonoras na vizinhança de um defeito ouriço:

$$ds^2 = -dt^2 + d\tilde{r}^2 + b^2 \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6.4)$$

onde $b \equiv \frac{C_{33}}{C_{11}}$ e $\tilde{r} \equiv c_{\parallel} r$.

Repetindo o procedimento para desclinações, obtemos uma métrica generalizada para diferentes valores de k e c :

$$\begin{aligned}ds^2 &= (c_{\parallel}^2 \cos^2 (\alpha - \phi) + c_{\perp}^2 \sin^2 (\alpha - \phi)) dr^2 \\ &+ (c_{\parallel}^2 \sin^2 (\alpha - \phi) + c_{\perp}^2 \cos^2 (\alpha - \phi)) r^2 d\phi^2 \\ &- [2 (c_{\perp} - c_{\parallel}) \sin (\alpha - \phi) \cos (\alpha - \phi)] r dr d\phi,\end{aligned} \quad (6.5)$$

onde $\alpha = k\phi + c$.

Essas são as métricas efetivas sentidas pelo som na vizinhança de defeitos topológicos de CLN. As equações (6.4) e (6.5) geram trajetórias sonoras idênticas às trajetórias luminosas (ver Fig. 12).

6.2.2 Difração do Som por Defeitos Topológicos

A semelhança entre o índice de refração para luz extraordinária, (2.16):

$$N_g^2(\beta) = n_e^2 \cos^2 \beta + n_o^2 \sin^2 \beta,$$

e a onda sonora extraordinária:

$$N_g^2(\beta) = c_\perp \sin^2 \beta + c_\parallel \cos^2 \beta, \quad (6.6)$$

permite-nos, novamente, repetir os procedimentos do capítulo 4. Assim sendo, o uso do método das ondas parciais, apêndice B, para estudar a difração de uma onda sonora plana por um defeito ouriço de métrica efetiva (6.4) começa aplicando esta métrica efetiva na equação de onda de d'Alembert:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0, \quad (6.7)$$

onde $\Phi = \Phi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} \psi(r, \theta, \phi)$ é a onda escalar com frequência ω .

Como resultado, encontramos a posição do padrão de difração da onda dada por:

$$\theta_0 = \pi \left(1 - \frac{1}{b} \right) = \pi \left(1 - \frac{C_{11}}{C_{33}} \right).$$

Assim, recobramos o mesmo comportamento para a luz, aqui aplicado ao som difratado por um defeito ouriço ou, como vimos, para a desclinação ($k = 1, c = 0$). O gráfico da seção transversal diferencial de choque para o som próximo a um defeito ouriço é semelhante ao da figura 13.

7 Descrição Métrica do Fluxo de Calor através de Defeitos Topológicos

*“A mente é um fogo a ser aceso,
não um vaso a preencher”*

Plutarco

7.1 Introdução

Em cristais perfeitos, a energia térmica pode ser transmitida por elétrons livres e por vibrações na rede. Enquanto que a primeira forma governa o transporte de calor em metais, as vibrações da rede são predominantes em dielétricos. A condução de calor é modelada por duas equações, para o último caso e em escala macroscópica. Primeiro, pela lei de Fourier:

$$q^i = -\lambda^{ij} \partial_j T(\vec{r}), \quad (7.1)$$

onde q^i é a componente do vetor fluxo de calor $\vec{q}$, que, no caso geral, não é normal à superfície isotérmica e aponta na direção da diminuição da temperatura (representando o fluxo de calor, por unidade de tempo, por unidade de área), λ^{ij} é a componente do λ , $\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}$, $T(\vec{r})$ é a temperatura no ponto com vetor posição $\vec{r}$ e a convenção de soma sobre índices repetidos foi usada [87]. Esta equação relaciona o gradiente de temperatura com o vetor fluxo de calor $\vec{q}$. A segunda equação trata da difusão de temperatura que, quando descreve o estado estacionário de uma situação sem fontes de calor, é dada por:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{q} &= -\partial_i [\lambda^{ij} \partial_j T(\vec{r}, t)] = -\partial_t T(\vec{r}, t), \\ \partial_i [\lambda^{ij} \partial_j T(\vec{r})] &= 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

que está ligada à equação de continuidade.

A existência de defeitos no meio modifica as propriedades físicas do material, por exemplo, o crescimento cristalino, a resistência ao cisalhamento [36], assim como propriedades ópticas e elásticas em CLN (como visto ao longo desta tese). Considerando a condução térmica, é esperado que a presença de defeitos perturbe a transferência de calor, já que defeitos influenciam nas vibrações elásticas na forma de ondas sonoras (um estudo sobre a influência de defeitos na condução térmica, com abordagem diferente da que será desenvolvida neste capítulo, pode ser encontrada em [88]).

Quando descrevemos esta perturbação como uma métrica efetiva para o material, é possível modificar a lei de Fourier e a da condução térmica adicionando a

métrica efetiva nas seguintes expressões [12, 13, 89]:

$$q^i = -\lambda g^{ij} \partial_j T(\vec{r}) \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{q} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i [\sqrt{g} q^i] = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_i [\sqrt{g} \lambda g^{ij} \partial_j T(\vec{r})] = 0 \quad (7.4)$$

onde $g = \det g_{ij}$. Observando (7.3), vemos que o vetor fluxo de calor $\vec{q}$ não é necessariamente normal às superfícies isotérmicas.

A seguir, vamos usar (7.1), (7.2) e (7.4) para investigar a condução de calor no caso de um defeito ouriço e uma desclinação do tipo ($k = 1, c = 0$).

7.2 Desclinação e Defeito Ouriço

Imaginemos um CLN com $\hat{n} = \hat{x}$, e $\lambda_{\parallel}$ e $\lambda_{\perp}$ sendo os coeficientes de condução térmica paralela e perpendicular a $\hat{n} = \hat{x}$. Neste quadro, um ângulo sólido cilíndrico (uma cunha cilíndrica) é retirado do espaço e as bordas restantes são coladas. Após a relaxação do meio, a condutividade térmica dependerá da direção e passará a ser regido pelo seguinte tensor condutividade térmica escrito em coordenadas cilíndricas [2]:

$$\lambda_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{pmatrix},$$

resultando no diretor $\hat{n} = \hat{\rho}$. Este processo de criação de defeito (retirar um volume de material de um meio) gera uma distribuição de moléculas de forma idêntica a de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) [2], além de uma métrica efetiva do espaço para a condutividade térmica dada por [20, 59, 60, 90]:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

e sua inversa por:

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2 \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.6)$$

com o elemento de linha dado por (3.12):

$$ds^2 = d\rho^2 + b^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2,$$

onde $b \equiv \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}}$. O método empregado na obtenção dessa métrica efetiva utiliza um aparato matemático intrincado, mas, como pode se ver, de resultado idêntico ao do capítulo 3. Usando (7.6) em (7.4) e comparando com (7.2), encontramos o tensor condutividade térmica do CLN na presença de um desclinação ($k = 1, c = 0$):

$$\lambda^{ij} = \lambda g^{ij} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2 \rho^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

que, escrito em coordenadas cartesianas, fica:

$$\lambda^{ij} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{y^2 + x^2 b^2}{b^2(x^2 + y^2)} & \frac{xy(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2)} & 0 \\ \frac{xy(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2)} & \frac{x^2 + y^2 b^2}{b^2(x^2 + y^2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

onde $\det g_{ij}$ em coordenadas cartesianas é b^2 . Note que quando $b = 1$, recobramos o tensor condutividade térmica de um meio sem defeito.

Observe que o tensor (7.7) ou (7.8) é empregado em (7.1) e (7.2) como se o espaço fosse plano e o efeito do defeito é apenas modificar o tensor condutividade térmica. Nestas condições, o vetor fluxo de calor $\vec{q}$ já não é mais normal às superfícies isotérmicas. Isso pode ser visto quando escrevemos $\vec{q}$ pela combinação linear dos gradientes de temperatura ao longo das três dimensões: eq. (7.1). Por exemplo, se a temperatura varia apenas ao longo de $\hat{y}$ pelas eqs. (7.8) e (7.1)

temos:

$$\begin{aligned} q^x &= -\lambda^{xy} \partial_y T(x, y, z), \\ q^y &= -\lambda^{yy} \partial_y T(x, y, z), \\ q^z &= 0. \end{aligned}$$

Como veremos mais adiante, se b^2 for menor ou maior que 1, é possível focalizar ou atenuar o fluxo de calor sobre o defeito.

É importante observar que, embora a eq. (7.8) tenha sido derivada de considerações geométricas, as suas componentes continuam obedecendo às relações de reciprocidade de Onsanger para processos termodinamicamente irreversíveis [87, 91, 92]:

$$\begin{aligned} \lambda^{ij} &= \lambda^{ji}, \\ \lambda^{ii} &> 0, \\ \lambda^{ii} \lambda^{jj} &> (\lambda^{ji})^2. \end{aligned}$$

O campo de temperatura é obtido resolvendo a equação de difusão de temperatura na presença da desclinação. Em coordenadas cilíndricas, substituindo (7.7) em (7.2), obtemos:

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho T(\rho, \phi, z)) + \frac{\partial_\phi^2 T(\rho, \phi, z)}{\rho^2 b^2} + \partial_z^2 T(\rho, \phi, z) = 0, \quad (7.9)$$

que possui como solução radial, $R(\rho)$, funções de Bessel do primeiro tipo de ordem não-inteira $\nu = \frac{m}{b}$. Assim, $R_{km}(\rho) = A_{km} J_{m/b}(k\rho) + B_{km} J_{-m/b}(k\rho)$, onde k e m são constantes relacionadas com as coordenadas z e ϕ respectivamente [76].

7.3 Resultados Numéricos da Condução Térmica

Usaremos a equação (7.9) em coordenadas cartesianas como base do estudo numérico de um cubo de aresta de tamanho 1, onde a temperatura é $T(x, y = 0, z) = 1$ e $T(x, y = 2, z) = 0$ em unidades arbitrárias, enquanto que as outras paredes são isolantes térmicos (um caso mais realista pode ser obtido usando o teorema da superposição das temperaturas [93]). O método numérico empregado

é o dos elementos finitos [94] através de um software dedicado (como o Z88[©] ou o COMSOL[©] Multiphysics). A seguir estão plotadas nas figuras 17 e 18 o campo de temperatura para desclinações do tipo ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.1$ e $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$ (caso extrapolado dos valores comuns).

Observe que, quando aumentamos b (equivalendo a uma retirada maior de ângulo cilíndrico sólido), o gradiente de temperatura torna-se maior sobre o defeito. Isto pode ser claramente visto nas figuras 19 e 20 que mostram a magnitude e a direção do campo vetorial de fluxo de calor $\vec{q}$.

O comportamento simetricamente oposto é encontrado para a desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.9$ e $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$ (caso extrapolado dos valores comuns). Como visto nas figuras 21 e 22, o gradiente de temperatura é atenuado sobre o defeito cada vez que diminui o valor de b . Os campos vetoriais do fluxo de calor para cada valor de b estão representados nas figuras 23 e 24. Observe como os vetores de fluxo de calor contornam o defeito.

Vejamos agora o comportamento do fluxo de calor perturbado por um defeito tipo ouriço. Seguindo o raciocínio desenvolvido para a desclinação, o defeito ouriço possui o seguinte tensor condutividade térmica escrita em coordenadas cartesianas:

$$\lambda^{ij} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{x^2 b^2 + y^2 + z^2}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{xy(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{xz(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \frac{xy(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{x^2 + y^2 b^2 + z^2}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{yz(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \\ \frac{xz(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{yz(b^2 - 1)}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} & \frac{x^2 + y^2 + z^2 b^2}{b^2(x^2 + y^2 + z^2)} \end{pmatrix},$$

onde o $\det g_{ij} = b^4$. As figuras 25 e 26 mostram as linhas tangentes ao campo vetorial do fluxo de calor $\vec{q}$ para $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$ e $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$ respectivamente. Neste último caso, observe o contorno do fluxo de calor em torno do defeito (um comportamento análogo ao da desclinação estudada com $b = 0.5$).

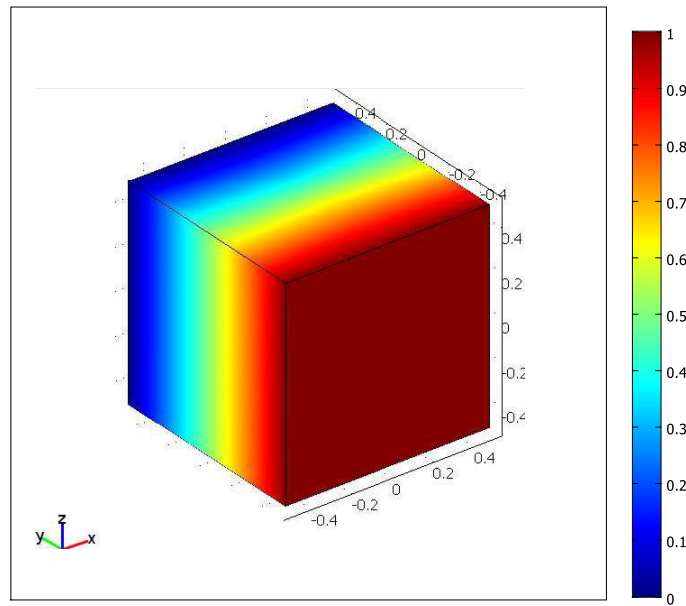


Figura 17: Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.1$.

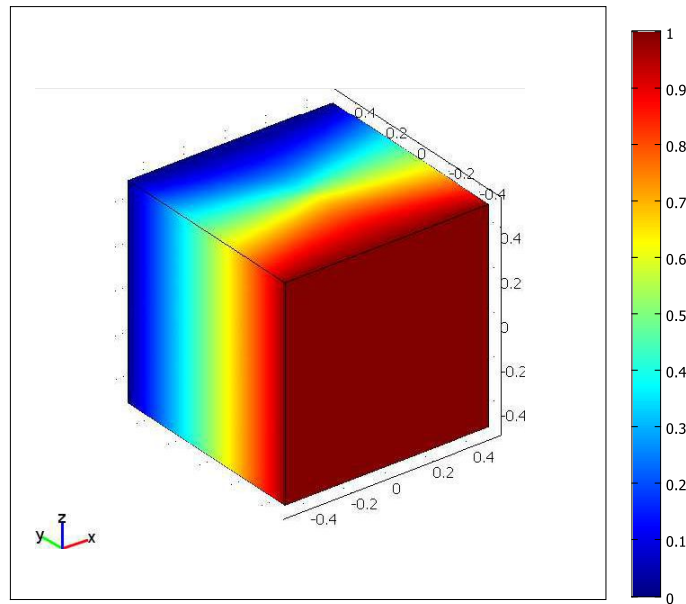


Figura 18: Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$. A proximidade das cores no centro da figura, onde se encontra a desclinação, indica uma grande variação da temperatura nessa região.

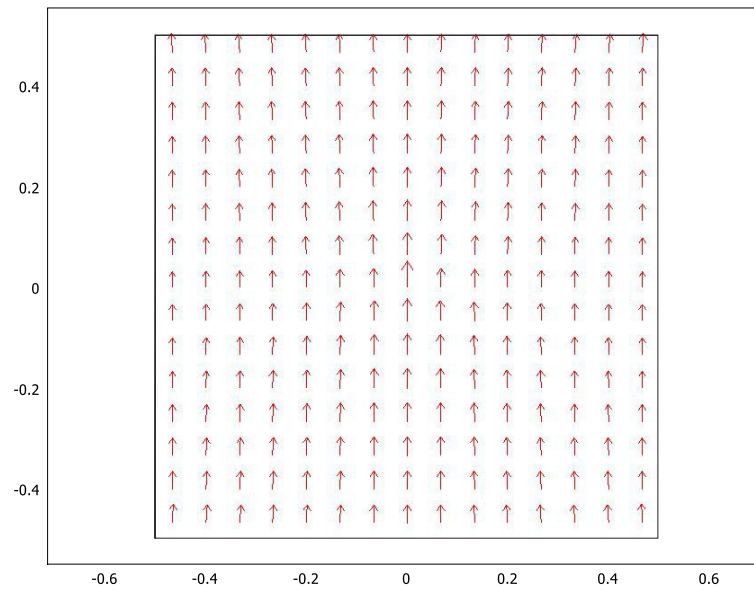


Figura 19: Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.1$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$.

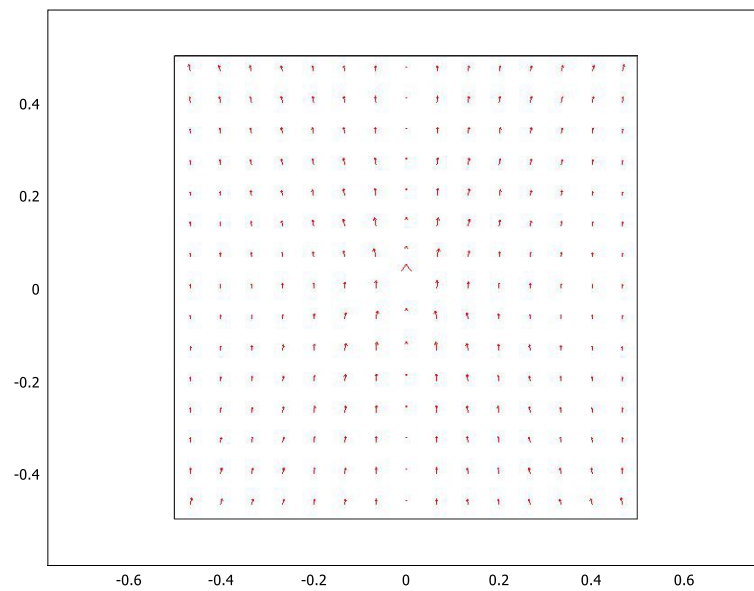


Figura 20: Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$.

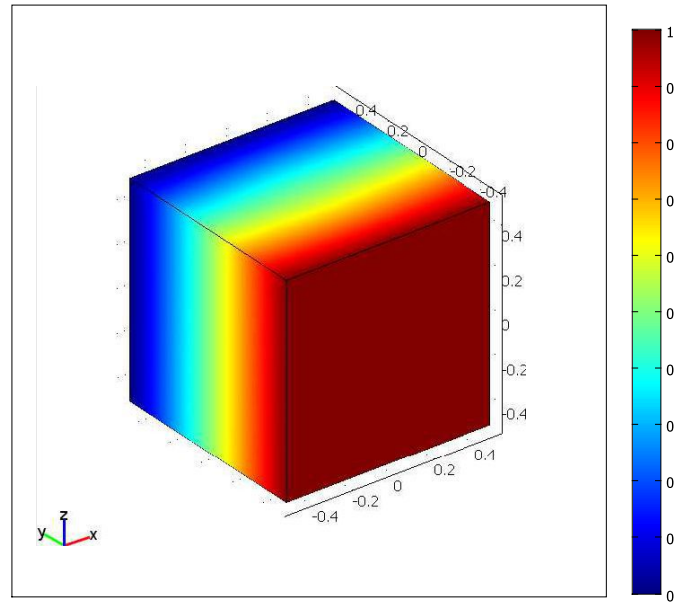


Figura 21: Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.9$.

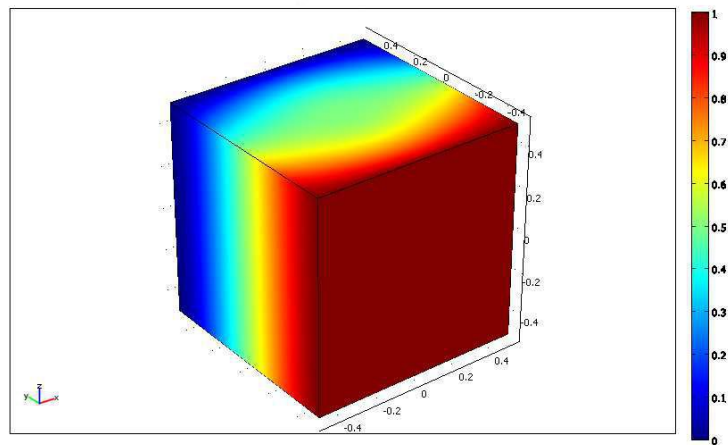


Figura 22: Campo de temperatura na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$. Observe como a temperatura varia pouco sobre a desclinação.

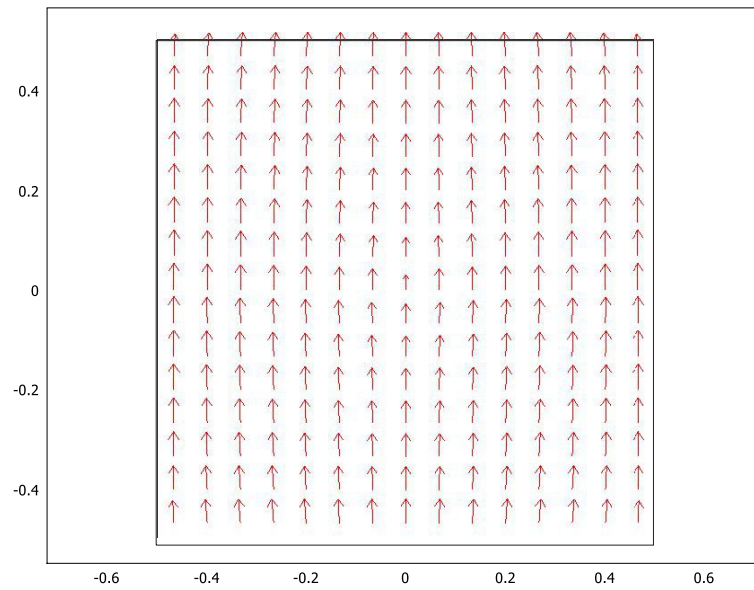


Figura 23: Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.9$. A intensidade do fluxo é dado pelo tamanho do vetor $\vec{q}$.

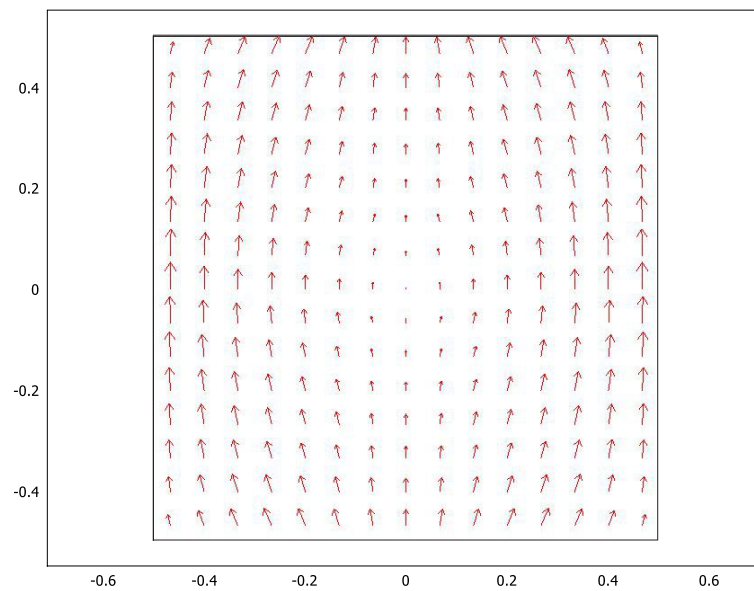


Figura 24: Campo vetorial no plano $z = 0$ do fluxo de calor $\vec{q}$ na presença de uma desclinação ($k = 1, c = 0$) com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.6$. A variação de temperatura, indicada pelo módulo de $\vec{q}$, é mínima sobre o defeito.

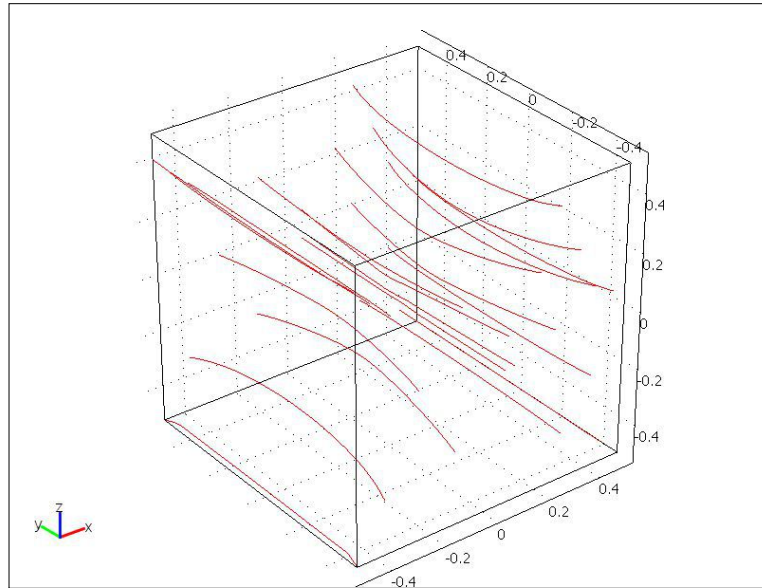


Figura 25: Aspecto das linhas tangentes ao campo vetorial $\vec{q}$ na presença de um defeito ouriço com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 1.5$.

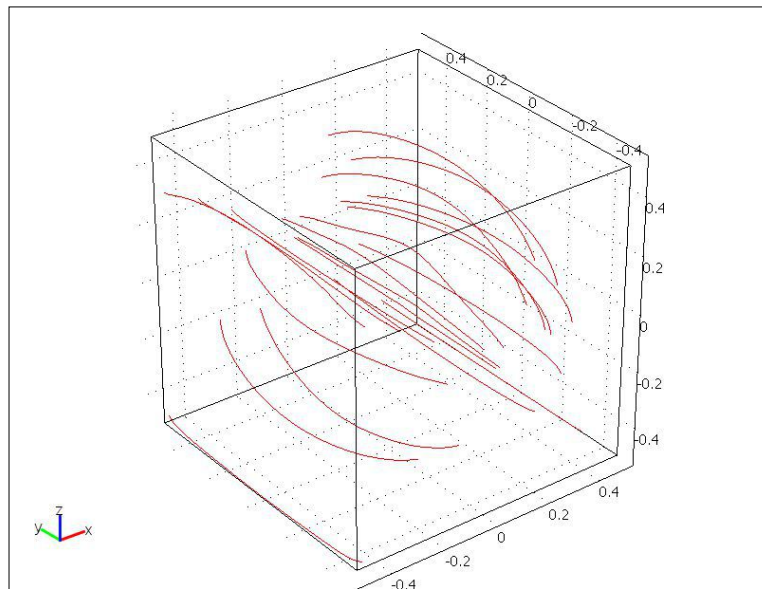


Figura 26: Aspecto das linhas tangentes ao campo vetorial $\vec{q}$ na presença de um defeito ouriço com $b = \frac{\lambda_{\parallel}}{\lambda_{\perp}} = 0.5$.

Parte III

Conclusões e Perspectivas

8 *Discussão sobre os Capítulos de Aplicações*

“Tempo

*Coisa que acaba de deixar a querida leitora
um pouco mais velha ao chegar ao fim desta linha.”*

Mario Quitanda

8.1 Introdução

É notável como a semelhança entre diferentes áreas da física permite extrair resultados interessantes. Vejamos as principais consequências dos desenvolvimentos apresentados nos quatro capítulos anteriores.

8.2 Difração de Luz por Defeitos Ouriço e Desclinação ($k = 1, c = 0$)

No capítulo 4, vimos que a luz espalhada pelo defeito da fase nemática gera um padrão de difração bem específico, que depende do defeito em questão e das propriedades ópticas do CLN. Apesar do defeito ouriço gerar um padrão anular e da desclinação ($k = 1, c = 0$) gerar uma linha luminosa, ambos possuem o mesmo ângulo, em relação ao eixo de simetria próprio de cada defeito, localizando os padrões de difração através da expressão: $\pi\alpha = \pi \left(1 - \frac{n_o}{n_e}\right)$. Com esta fórmula, é possível aferir informação sobre a especificidade óptica dos índices de refração da molécula de CLN, medindo a posição angular do padrão luminoso formado pela luz espalhada pelos defeitos.

Através dos seguintes passos, esta análise pode ser estendida quando pensamos em desclinações ($k = 1, c = 0$) reais, onde existe escape das moléculas do plano perpendicular ao defeito. Primeiro, precisamos de uma expressão algébrica para o diretor das moléculas em torno do defeito real. O ponto de partida deste passo são as equações abaixo [2, 95]:

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \Omega} - \bar{\kappa} \cos \Omega}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \Omega} + \bar{\kappa} \cos \Omega} \right)^{1/2} \times \exp \left(-\frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \sin^{-1} (\kappa \cos \Omega) \right), K_{33} > K_{11} \quad (8.1)$$

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \Omega} - \bar{\kappa} \cos \Omega}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cos^2 \Omega} + \bar{\kappa} \cos \Omega} \right)^{1/2} \times \exp \left(\frac{\kappa}{\bar{\kappa}} \sinh^{-1} (\kappa \cos \Omega) \right), K_{33} < K_{11} \quad (8.2)$$

onde R é o raio do capilar de vidro que confina o CLN, Ω é o ângulo entre o diretor $\hat{n} = \sin \Omega \hat{\rho} + \cos \Omega \hat{z}$ e o eixo do defeito na direção $\hat{z}$, K_{11} e K_{33} são constantes elásticas de Frank relativas às deformações alargamento e flexão [2, 37] (equação

2.17 e figura 9), $\kappa^2 = |k - 1|/k$, $\bar{\kappa}^2 = 1/k$ e $k = K_{33}/K_{11}$.

As equações (8.1) e (8.2) podem ser simplificadas, por exemplo, fazendo $k \ll 1$ para valores do parâmetro de ordem próximos de 1 [2, 96], permitindo uma expressão algébrica para elas. O segundo passo é usar esta expressão obtida para encontrar $\cos \beta = \hat{n} \cdot \hat{T}$ e $\sin \beta$ (onde β é o ângulo entre $\hat{n}$ e o vetor tangente unitário $\hat{T}$ ao feixe luminoso). Por fim, substituir estas funções trigonométricas na equação do índice de refração da luz extraordinária e encontrar uma métrica efetivamente sentida pela luz. O que se segue é a aplicação do método desenvolvido no capítulo 4. Espera-se que os resultados sejam semelhantes aos obtidos em [95]: mais de um ângulo importante para o padrão de difração.

8.3 Simulando a Atração Gravitacional de Planetas

A seção equatorial da métrica de Schwarzschild, que rege o espaço-tempo exterior a planetas, estrelas e objetos massivos esféricos, estáticos e não-girantes, possuidores de raio de Schwarzschild r_{sc} no interior do objeto, foi simulada para feixes luminosos em um CLN que flui radialmente na direção de um sorvedouro cilíndrico. Vimos que a velocidade do fluido possuía valores factíveis de serem realizados experimentalmente. Enquanto que outros modelos usam fluidos com velocidades próximas a da luz ou a do som no meio [6, 18, 23, 25, 82], teoricamente é possível simular a métrica de Schwarzschild usando velocidades do fluido da ordem de metros por segundo, como visto no capítulo 5.

Contudo, o que foi apresentado não permite a aplicação dos testes clássicos da relatividade geral [10–13] à métrica efetiva obtida, uma vez que o termo temporal é a do espaço plano: dt^2 . Este quadro pode ser modificado se considerarmos efeitos não-lineares das relações constitutivas do CLN. Por exemplo, quando isto é feito para um dielétrico geral em movimento, é possível encontrar uma métrica efetiva para luz com funções de posição para o termo dt^2 , permitindo, inclusive, simular alguns aspectos da métrica de Schwarzschild [8, 97, 98]. Assim, espera-se que efeitos eletromagnéticos não-lineares aumentem a aplicabilidade dos CLN como elementos simuladores de métricas efetivas mais abrangentes.

8.4 Descrição Métrica para Ondas Sonoras

O modelo análogo para ondas sonoras baseado num princípio de Fermat acústico foi desenvolvido e aplicado no capítulo 6 para estudar, na vizinhança de defeitos topológicos, as trajetórias de ondas de som e a difração sonora. Resultados idênticos ao caso da métrica efetivamente sentida pela luz foram obtidos aqui devido à semelhança matemática que ambos os problemas compartilham. É importante frisar que as trajetórias sonoras e a posição do padrão de difração dependem das constantes elásticas C_{11} e C_{33} , que fazem o papel de n_o e n_e para o caso da luz. Seguindo a lógica para ondas luminosas, quando aumentamos a temperatura, os valores de n_o e n_e aproximam-se um do outro, diminuindo a deflexão das trajetórias da luz [99] e o ângulo de localização do padrão de difração [7].

Este aspecto pode ser empregado para ondas sonoras quando trabalhamos com a dependência da temperatura que as constantes possuem, seguindo as expressões algébricas heurísticas dadas abaixo:

$$C_{ij} = C_{ij}^0 - \frac{s}{e^{t/T} - 1}, \quad (8.3)$$

$$C_{ij} = a - \frac{bT^2}{T + c}, \quad (8.4)$$

onde C_{ij}^0 , a , b , c , s e t são constantes determinadas experimentalmente (C_{ij}^0 e a representam a constante elástica quando $T = 0$) [100]. Como uma proposta de trabalho experimental, trabalhando de forma semelhante a [100], é possível encontrar os valores destas constantes para diferentes cristais líquidos.

Essa dependência das constantes elásticas com a temperatura é o ponto de partida para a simulação de métrica de objeto massivo esférico, estático e não-girante efetivamente sentida por ondas sonoras na vizinhança de configuração específica. Contudo pela diferença algébrica de (4.25) e (4.26) com (8.3) ou (8.4) espera-se uma mudança significativa na dependência radial do parâmetro de ordem e no perfil de velocidade.

8.5 Descrição Métrica do Fluxo de Calor através de Defeitos Topológicos

A influência do espaço-tempo não-euclidiano na condução de calor é um fato conhecido [12, 13, 89], assim como a descrição métrica de propriedades físicas de materiais deformados [62–67]. Usando esta descrição métrica nas equações covariantes da condução de calor, desenvolvemos no capítulo 7 um estudo numérico da influência de defeitos na condução térmica.

Foi visto que, para valores $b > 1$, houve uma concentração do fluxo de calor $\vec{q}$ sobre o defeito e, para $b < 1$, uma atenuação de $\vec{q}$. Este fato pode ser usado como uma forma de controle térmico do fluxo de calor em região específica do espaço, devido ao seguinte motivo. Cristais líquidos nemáticos têm a propriedade de seu diretor $\hat{n}$ responder rapidamente à aplicação de campos elétricos e/ou magnéticos, permitindo serem usadas na fabricação de dispositivos, como TV's, visores de notebook, entre outros [2, 101]. Por este controle através da aplicação de campos, é possível selecionar regiões do espaço onde haverá concentração de fluxo de calor e onde haverá dispersão.

Os resultados obtidos no capítulo 7 podem ser inversamente interpretados para o estudo de defeitos cosmológicos. Uma vez que estes possuem métrica semelhante à efetiva dos defeitos em CLN, o comportamento do fluxo de calor em região específica do espaço sideral pode servir como detector da presença de defeitos cosmológicos.

Uma perspectiva de futuras pesquisas é analisar a influência de uma distribuição de defeitos sobre o fluxo de calor $\vec{q}$. Uma vez que estes vetores não descrevem geodésicas da métrica efetiva, devido à equação (7.2), é compreensível que $\vec{q}$ se comporte de forma nitidamente diversa ao da propagação de phonons em uma densidade de defeitos [66].

É possível que o fluxo de calor em alguns materiais não se propague de maneira difusiva, mas, sim, de forma ondulatória, através de ondas de calor (ou segundo som) [84]. Como existem indícios da propagação de segundos sons em soluções poliméricas nemáticas [102], uma pesquisa futura é descrever metricamente estas ondas de calor na presença de defeitos e compará-las com os resultados obtido no

capítulo 7.

Uma última proposta de pesquisa pode ser levantada sobre desclinação ($k = 1, c = 0$) com escape. Ela consiste no uso deste defeito, além do estudo de difração, na análise das suas geodésicas (luminosas, sonoras ou de segundo som) e da difusão axial de calor. Particularmente sobre o estudo de geodésicas, alguns resultados preliminares obtidos pelo grupo de pesquisa do prof. Fernando Moraes indicam o comportamento desse defeito topológico como o de uma guia de onda.

8.6 Perspectivas Além-Tese

Trabalhar com modelos análogos de gravitação em cristais líquidos permite explorar vários comportamentos e teorias próprios de cada uma das áreas. Um exemplo é o apontado pelo professor Dr. Carlos Romero do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba. Ele lembrou que a geometria riemanniana é um caso particular da geometria de Weyl, onde esta última faz uso de um campo escalar que incorpora as propriedades de curvatura do espaço tempo [103]. Desta forma, uma possibilidade é descrever o índice de refração da luz (ou onda sonora) extraordinária N_e como sendo o campo escalar de Weyl.

Seguindo indicações de livros-textos [13] e de trabalhos publicados [104], uma linha de pesquisa é usar CLN para modelar a gravitação quântica. Isso pode ser feito considerando a influência da perturbação térmica do diretor $\hat{n}$ sobre a luz espalhada [37], o que equivale a perturbar o cone de luz da métrica efetiva.

Outra ideia que pode ser pesquisada sobre modelos análogos de gravitação em CLN é a busca por uma equação análoga a de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

para o comportamento da luz ou onda sonora, como indicado pelo professor Dr. Manoel Simões, do Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, em visita à UFPB. Isto parece possível uma vez que os tensores de Riemann e de Ricci podem ser escritos em termos da métrica $\mathbf{g}$ [39].

Outras características físicas dos sistemas líquido cristalinos podem ser usados na previsão de comportamentos cosmológicos. Por exemplo, é sabido que CLN

produzem torque [37] (por exemplo através da deformação torção (figura 9)) e que ele permite a levitação elástica de fios metálicos [105]. Desta forma, pode-se procurar por um fenômeno análogo na presença de defeitos quirais cosmológicos [106], assim como fenômenos relacionados [107].

Concluindo toda esta tese, esperamos que ela venha estimular o uso da Física dos Cristais Líquidos Nemáticos como mais um campo de pesquisas capaz de simular a Gravitação e aspectos correlatos, abrindo novos ângulos de entendimento para ambas as áreas.

ANEXO A – Um Pouco de Geometria Riemanniana

A geometria Riemanniana é definida por uma variedade diferenciável dotada de métrica positiva-definida. Como isto define a ideia de geometria Riemanniana, vamos explicar rapidamente cada um dos seguintes conceitos [10]:

Variedade. Uma variedade é o ente matemático que generaliza o conceito de espaço, permitindo o uso da ideia de espaços curvos. A variedade é uma superfície contínua de dimensão n que localmente é idêntica ao R^n (i.e. plana), globalmente pode ser diferente (curva ou torcida) e curvas sobre a variedade são dadas parâmetros chamados de *coordenadas*, sendo o número destas a dimensão n da variedade.

Variedade Diferenciável. É uma variedade infinitamente diferenciável. Isto significa que é possível definir um campo escalar ϕ em cada ponto do espaço tal que ela seja infinitamente diferenciável. Além disso, torna-se possível a existência de curvas nesse espaço dotadas de vetor tangente a elas.

Métrica. A métrica, ou o tensor métrico $\mathbf{g}$ de ordem 2, está ligada diretamente ao “formato” da variedade, e, assim, à definição de curvatura. Porém, variedades não-riemannianas existem que não possuem métrica e ainda têm conceitos bem definidos sobre curvatura. A métrica é responsável pela medição de comprimento na variedade, onde o quadrado deste comprimento é dado pelo elemento de linha $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j \equiv g_{ij} dx^i dx^j$, onde a convenção de Einstein para a soma sobre índices repetidos foi utilizado, i e j representam coordenadas espaciais e g_{ij} é a matriz que representa os elementos de $\mathbf{g}$. Uma métrica positiva definida é aquela em que o elemento de linha entre dois pontos da variedade é $ds^2 > 0$. Métricas indefinidas, que compõem as variedades pseudo-Riemannianas presentes nas Relatividades Especial e Geral, são aquelas em que o elemento de linha também

pode ter valores do tipo $ds^2 \leq 0$.

Geodésicas. Entre as possíveis curvas na variedade, as geodésicas são curvas cujo comprimento minimiza o elemento de linha ds^2 (também chamadas de curvas tipo nula ou tipo luz, para geometrias pseudo-Riemannianas), sendo calculadas pela equação chamada de *equação de geodésica* [108]:

$$\frac{d^2 x^i}{dl^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dl} \frac{dx^k}{dl} = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde x^i é a componente i do vetor posição do ponto sobre a geodésica, l é um parâmetro ao longo da curva e Γ_{jk}^i é dado por:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{g^{im}}{2} \left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right). \quad (\text{A.2})$$

Uma equação parecida com (A.1) é a de *desvio geodésico*, que mostra como a separação transversal $\Delta x^i = \tilde{x}^i - x^i$ entre pontos $\tilde{x}^i$ e x^i de duas geodésicas paralelas muito próximas varia com o mesmo parâmetro l ao longo das geodésicas:

$$\frac{d^2(\Delta x^i)}{dl^2} = R_{jkm}^i \frac{dx^j}{dl} \Delta x^k \frac{dx^m}{dl}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\frac{dx^j}{dl}$ e $\frac{dx^m}{dl}$ são vetores tangentes à curva x^i e R_{jkm}^i é a componente do *tensor de curvatura* ou *tensor de Riemann* dada por:

$$R_{jkm}^i = \frac{\partial \Gamma_{jm}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{jm}^a \Gamma_{ak}^i - \Gamma_{jk}^a \Gamma_{am}^i, \quad (\text{A.4})$$

lembrando que foi usada a convenção de soma sobre índices repetidos. A equação (A.3) pode ser pensada como uma medida da aceleração de Δx . Quando $R_{jkm}^i = 0$, o espaço é plano e, pelo paralelismo inicial das geodésicas, (A.3) resulta na inexistência de aceleração entre elas.

Escalar de Curvatura. Uma grandeza geométrica que é invariante por transformação de coordenadas e que dá uma medida da curvatura da variedade é o escalar de curvatura ou escalar de Ricci R . Ele faz uso do tensor de Ricci R_{jm} :

$$R_{jm} = R_{jkm}^k = R_{mj},$$

contraído com seus índices:

$$R = g^{jm} R_{jm}.$$

O escalar de curvatura é usado para compor o lagrangeano que gera a equação de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu},$$

onde μ e ν representam as coordenadas espaço-temporais.

ANEXO B – Detalhes Sobre o Método das Ondas Parciais

Ao aplicarmos um feixe de luz que se propaga na direção $\hat{z}$ sobre um potencial espalhador, longe da zona de influência deste, a função de onda $v_k^{(dif)}(\mathbf{r})$ associada com o estado de espalhamento estacionário possui dependência radial da forma $\frac{e^{ikr}}{r}$ (garantindo que a onda emergente do espalhador tenha a mesma energia da onda incidente) e a amplitude da onda emergente depende das coordenadas (θ, ϕ) . Desta forma, temos para $v_k^{(dif)}(\mathbf{r})$:

$$v_k^{(dif)}(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (\text{B.1})$$

onde e^{ikz} representa a onda plana incidente não espalhada.

Em coordenadas esféricas, se $V(r)$ for um potencial espalhador central, o momento angular será uma constante de movimento. Assim, haverá auto-estados comuns a $\mathbf{H}_0 + V(r)$, $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$ chamados de *ondas parciais* e representados por $\varphi_{k,l,m}(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{H}_0$ é o hamiltoniano livre de potenciais. Para valores de r muito além da zona de influência do potencial, espera-se que [73] as ondas parciais comportem-se semelhantemente aos auto-estados comuns a $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{L}^2$ e $\mathbf{L}_z$. Estes auto-estados, associados à ausência de espalhamento, são chamados de *ondas esféricas livres* e representados por $\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r})$. As ondas esféricas livres, assim como as parciais, dependem de (θ, ϕ) através de harmônicos esféricos.

O método das ondas parciais baseia-se na análise das fases das ondas $\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r})$ e $\varphi_{k,l,m}(\mathbf{r})$ na região suficientemente afastada da influência do potencial. Nessa região de interesse, o comportamento assintótico da dependência radial de $\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r})$ e $\varphi_{k,l,m}(\mathbf{r})$ será considerado (trataremos nessa seção apenas com os resultados; o detalhe dos cálculos podem ser encontrados em [73]).

A forma explícita para a onda esférica livre é dada por:

$$\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} j_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{B.2})$$

onde $j_l(\rho)$ é uma função de Bessel esférica [74]. Estas funções são proporcionais às funções de Bessel de primeiro tipo através da forma $j_l(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} J_{l+1/2}(\rho)$, onde o comportamento assintótico ($\rho \rightarrow \infty$) de $J_{l+1/2}(\rho)$ é dado por [109]:

$$J_{l+1/2}(\rho) = \frac{1}{\rho} \cos \left(\rho - \left(l + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} \right).$$

Com este comportamento assintótico, (B.2) será escrita como:

$$\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r}) = -\sqrt{\frac{2k^2}{\pi}} Y_l^m(\theta, \phi) \frac{e^{-i\rho} e^{i\pi l/2} - e^{i\rho} e^{-i\pi l/2}}{2i\rho}. \quad (\text{B.3})$$

Ou seja, a fase de onda associada ao não-espalhamento será $\frac{\pi}{2} (l + \frac{1}{2})$. Além disso, como as funções $\varphi_{k,l,m}^{(0)}(\mathbf{r})$ são ortogonais, então a onda plana e^{ikz} pode ser expandida através delas, resultando em:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_l^0(\theta). \quad (\text{B.4})$$

A parte radial da onda parcial:

$$\varphi_{k,l,m}(\mathbf{r}) = \frac{u_{k,l}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \phi),$$

quando $r \rightarrow \infty$, comportar-se-á como:

$$u_{k,l}(r) \approx \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} \beta_l \right),$$

onde β_l é a nova fase da onda na presença do espalhador. Todavia, $v_k^{(dif)}(\mathbf{r})$ expandida em ondas parciais deve recair na onda plana na ausência de potencial, que pode ser escrita em termos das ondas esféricas livres. Neste caso, a fase β_l deve ser igual a fase das ondas esféricas livres: $\frac{\pi}{2} (l + \frac{1}{2})$. Usando este valor como referência, a equação anterior será escrita como:

$$u_{k,l}(r) \approx \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} \left(l + \frac{1}{2} \right) + \delta_l \right),$$

sendo δ_l o *deslocamento de fase* dado por

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} \left(l + \frac{1}{2} - \beta_l \right). \quad (\text{B.5})$$

Definindo uma nova onda parcial $\tilde{\varphi}_{k,l,m}(\mathbf{r})$ através da multiplicação de $\varphi_{k,l,m}(\mathbf{r})$ por $e^{i\delta_l}$ (não possuindo esta fase significado físico), teremos:

$$\tilde{\varphi}_{k,l,m}(\mathbf{r}) \approx -\frac{e^{-ikr}e^{il\pi/2} - e^{ikr}e^{-il\pi/2}e^{2i\delta_l}}{2ikr} Y_l^m(\theta, \phi). \quad (\text{B.6})$$

Nós devemos encontrar uma expansão de ondas parciais cujo o comportamento assintótico seja da forma (B.1). Como o espalhamento é simétrico com respeito a rotações ao longo do eixo definido pelo feixe incidente (simetria azimutal), e que $v_k^{(dif)}(\mathbf{r})$ deve ser igual a e^{ikz} quando o potencial é nulo, teremos, ao usarmos (B.4):

$$\begin{aligned} v_k^{(dif)}(\mathbf{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} c_l \tilde{\varphi}_{k,l,0}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \tilde{\varphi}_{k,l,0}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Substituindo (B.6) nesta equação, fazendo uso de $e^{2i\delta_l} = 1 + 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l$ e agrupando os termos independentes de δ_l , temos:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \tilde{\varphi}_{k,l,0}(\mathbf{r}) &\approx - \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_l^0(\theta) \times \\ &\times \left[\frac{e^{-ikr}e^{il\pi/2} - e^{ikr}e^{-il\pi/2}}{2ikr} - \frac{e^{ikr}}{rk} e^{-il\pi/2} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \right]. \end{aligned}$$

Reconhecemos que o primeiro termo do lado direito na equação anterior, fazendo uso de (B.3) e (B.4), é a expansão de e^{ikz} , de tal forma que:

$$\sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \tilde{\varphi}_{k,l,0}(\mathbf{r}) \approx e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r},$$

onde

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_l^0(\theta) \quad (\text{B.7})$$

é a *amplitude de espalhamento* (unidade: m^{-1}) em termos do deslocamento de fase δ_l . Esta função dá uma idéia quantitativa da intensidade da onda espalhada em

um ângulo sólido $d\Omega$ em torno da direção (θ, ϕ) [73].

A seção transversal diferencial de choque é definida como

$$\sigma(\theta, \phi) \equiv |f(\theta)|^2. \quad (\text{B.8})$$

Apesar de ter unidade de m^{-2} , a seção transversal diferencial de choque permite calcular o número *dn de partículas espalhadas por unidade de tempo dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ em torno da direção (θ, ϕ)* [73]. Um gráfico de $\sigma(\theta, \phi)$ mostra a dependência angular da intensidade luminosa espalhada, permitindo um desenho do padrão de difração. Integrando (B.8) sobre (θ, ϕ) , temos

$$\begin{aligned} \sigma = \int \sigma(\theta, \phi) d\Omega &= \frac{1}{k^2} \sum_{l,s} 4\pi \sqrt{(2l+1)(2s+1)} e^{i(\delta_l - \delta_s)} \sin \delta_l \sin \delta_s \times \\ &\times \int Y_s^{0*}(\theta) Y_l^0(\theta) d\Omega \end{aligned}$$

e devido a ortogonalidade dos harmônicos esféricos encontramos

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (\text{B.9})$$

como sendo a *seção transversal total de choque*.

Referências

- [1] POLIN, P. et al. Novel colloidal interactions in anisotropic fluids. *Science*, v. 275, p. 1770–1773, 1997.
- [2] KLEMAN, M.; LAVRENTOVICH, O. D. *Soft Matter Physics: an introduction*. New York: Springer-Verlag, 2003.
- [3] SÁTIRO, C.; MORAES, F. Lensing effects in a nematic liquid crystal with topological defects. *Eur. Phys. J. E*, v. 20, p. 173:1–6, 2006.
- [4] WHEWELL, W. *History of the Inductive Sciences*. Londres: Frank Cass and Co., 1967.
- [5] BARCELÓ, C.; LIBERATI, S.; VISSER, M. Analogue gravity. *Living Rev. Relativity*, v. 8, p. 12:1–113, 2005.
- [6] GARAY J. R. ANGLI, J. I. C. L. J.; ZOLLER, P. Sonic black holes in dilute bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, v. 63, p. 023611:1–13, 2001.
- [7] PEREIRA, E.; MORAES, F. Diffraction of light by topological defects in liquid crystals. *Liq. Crys.*, v. 38, p. 295–302, 2011.
- [8] NOVELLO, M.; VISSER, M.; VOLOVIK, G. (Ed.). *Artificial Black Holes*. New Jersey: World Scientific, 2002.
- [9] GORDON, W. Zur lichtfortpflanzung nach der relativitätstheorie. *Ann. Phys. (Leipzig)*, v. 72, p. 421–456, 1923.
- [10] SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [11] D’INVERNO, R. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford: Oxford University Press, 1998.
- [12] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: John Wiley, 1972.
- [13] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.
- [14] FRESNEL, A. J. Sur l’influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d’optique: Lettre de m. fresnel à m. arago. *Ann. Chim. Phys.*, v. 9, p. 57–66, 1818.

- [15] FIZEAU, H. Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux, et sur une expérience qui paraît démontrer que le mouvement des corps change la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur. *C. R. Acad. Sci. Paris*, v. 33, p. 385–404, 1851.
- [16] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics: The Classical Theory of Fields*. 4. ed. Amsterdam: Butterworth Heinemann, 1987. 2 v.
- [17] QUAN, P. M. Le principe de fermat en relativité générale. *Séminaire Janet. Mécanique analytique et mécanique céleste*, v. 1, n. 5, p. 1–12, 1957.
- [18] UNRUH, W. G. Experimental black-hole evaporation? *Phys. Rev. Lett.*, v. 46, p. 1351–1353, 1981.
- [19] CRISPINO, L. C. B.; HIGUCHI, A.; MATSAS, G. E. A. The unruh effect and its applications. *Rev. Mod. Phys.*, v. 80, p. 787–838, 2008.
- [20] KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Ann. Phys.*, v. 216, p. 1–28, 1992.
- [21] REZNIK, B. Trans-planckian tail in a theory with a cutoff. *Phys. Rev. D*, v. 55, p. 2152–2158, 1997.
- [22] REZNIK, B. Origin of the thermal radiation in a solid-state analogue of a black hole. *Phys. Rev. D*, v. 62, p. 044044:1–7, 2000.
- [23] VOLOVIK, G. E. Induced gravity in superfluid ^3He . *J. Low Temp. Phys.*, v. 113, p. 667–680, 1997.
- [24] VOLOVIK, G. E. Simulation of painleve-gullstrand black hole in thin ^3He -a film. *J. Low Temp. Phys.*, v. 69, p. 662–668, 1999.
- [25] VISSER, M. Acoustic black holes: Horizons, ergospheres, and hawking radiation. *Class. Quantum Grav.*, v. 15, p. 1767–1791, 1998.
- [26] GARAY, L. J. et al. Sonic analog of gravitational black holes in bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, v. 85, p. 4643–4647, 2000.
- [27] LEONHARDT, U.; PIWNICKI, P. Relativistic effects of light in moving media with extremely low group velocity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 822–825, 2000.
- [28] LEONHARDT, U. Space-time geometry of quantum dielectrics. *Phys. Rev. A*, v. 62, p. 012111:1–8, 2000.
- [29] BARCELÓ, C. et al. Hawking-like radiation does not require a trapped region. *Phys. Rev. Lett.*, v. 97, p. 171301:1–4, 2006.
- [30] SAKAROV, A. D. Vacuum quantum fluctuations in curved space and the theory of gravitation. *Sov. Phys. Dokl.*, v. 12, p. 1040–1041, 1968.

- [31] VISSER, M. Sakharov's induced gravity: a modern perspective. *Mod. Phys. Lett. A*, v. 17, p. 977–992, 2002.
- [32] GIRELLI, F.; LIBERATI, S.; SINDONI, L. Emergence of lorentzian signature and scalar gravity. *Phys. Rev. D*, v. 79, p. 044019:1–9, 2009.
- [33] LIBERATI, S.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Naturalness in an emergent analogue spacetime. *Phys. Rev. Lett.*, v. 96, p. 151301:1–4, 2006.
- [34] STEINACKER, H. Emergent gravity from noncommutative gauge theory. *JHEP*, v. 2007, n. 12, p. 049:1–37, 2007.
- [35] KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 8. ed. New Jersey: John Wiley, 2005.
- [36] ASHCROFT, N. W.; MERMIN, N. *Solid State Physics*. Orlando: Hancourt College, 1976.
- [37] GENNES, P. G. de; PROST, J. *The Physics of Liquid Crystals*. 2. ed. Oxford: Claredon Press, 1992.
- [38] MICHAELIS. *Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*. 2010. URL: <http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php>. Online; acessado em 18/01/2010.
- [39] SIMÕES, M.; CAMPOS, A. de; BARBATO, D. Local affine-connection approach to the elastic constants of nematic liquid crystals. *Phys. Rev. E*, v. 75, p. 061710:1–11, 2007.
- [40] BAALS, D.; HESS, S. Nonequilibrium molecular-dynamics studies on the anisotropic viscosity of perfectly aligned nematic liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 57, p. 86–89, 1986.
- [41] GRAY, G. W. *The Molecular Physics of Liquid Crystals*. London: Academic, 1979.
- [42] HALLER, I. Thermodynamic and static properties of liquid crystals. *Prog. Solid State Chem.*, v. 10, p. 103–118, 1975.
- [43] LI, J.; GAUZA, S.; WU, S.-T. Temperature effect on liquid crystal refractive indexes. *J. Appl. Phys.*, v. 96, p. 19–24, 2004.
- [44] BERIS, A. N.; EDWARDS, B. J. *Thermodynamic of flowing systems with internal microstructure*. New York: Oxford University Press, 1994.
- [45] DENNISTON, C.; ORLANDINI, E.; YEOMANS, J. M. Lattice boltzmann simulations of liquid crystal hydrodynamics. *Phys. Rev. E*, v. 63, p. 056702:1–10, 2001.
- [46] ZUMER, S.; DOANE, J. W. Light scattering from a small nematic droplet. *Phys. Rev. A*, v. 34, p. 3373–3386, 1986.

-
- [47] BORN, M.; WOLF, E. *Principles of Optics*. 7. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [48] MARTINOTY, P.; CANDAU, S. Determination of viscosity coefficients of a nematic liquid crystal using a shear waves reflectance technique. *Mol. Cryst. Liq. Cryst.*, v. 14, p. 243–271, 1971.
- [49] STEPHEN, M. J.; STRALEY, J. P. Physics of liquid crystals. *Rev. Mod. Phys.*, v. 46, p. 617–704, 1974.
- [50] MULLEN, M. E.; LÜTHI, B.; STEPHEN, M. J. Sound velocity in a nematic liquid crystal. *Phys. Rev. Lett.*, v. 28, p. 799–801, 1972.
- [51] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Course of Theoretical Physics: Theory of Elasticity*. 3. ed. Amsterdam: Elsevier, 2007. 7 v.
- [52] FEDOROV, F. I. *Theory of Elastic Waves in Crystals*. New York: Plenum, 1968.
- [53] MIYANO, K.; KETTERSON, J. B. *Physical Acoustics*. London: Academic, 1979. 14 v.
- [54] LESLIE, F. M. Some constitutive equations for liquid crystals. *Arch. Ration. Mech. Analysis*, v. 28, p. 265–283, 1968.
- [55] LESLIE, F. M. Continuum theory for nematic liquid crystals. *Continuum Mech. Thermodyn.*, v. 4, p. 167–175, 1992.
- [56] FOSTER, D. et al. Hydrodynamics of liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 26, p. 1016–1019, 1971.
- [57] OLMSTED, P. D.; LU, C.-Y. D. Coexistence and phase separation in sheared complex fluids. *Phys. Rev. E*, v. 56, p. R55–R58, 1997.
- [58] BASS, M. *Handbook of Optics*. 3. ed. New York: McGraw Hill, 2010.
- [59] KATANAEV, M. O. Wedge dislocation in the geometric theory of defects. *Theor. Math. Phys.*, v. 135, p. 733–744, 2003.
- [60] KATANAEV, M. O. Geometric theory of defects. *Phys.-Usp.*, v. 48, p. 675:1–58, 2005.
- [61] DUBROVIN, B. A.; FOMENKO, A. T.; NOVIKOV, S. P. *Modern Geometry - Methods and Applications: The geometry of surfaces, transformation groups, and fields*. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 1992. 1 v.
- [62] FURTADO, C.; MORAES, F. On the binding of electrons and holes to disclinations. *Phys. Lett. A*, v. 188, p. 394–396, 1994.
- [63] FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Phys. Lett. A*, v. 195, p. 90–94, 1994.

- [64] MORAES, F. Casimir effects around disclination. *Phys. Lett. A*, v. 204, p. 399–404, 1995.
- [65] MORAES, F. Enhancement of the magnetic moment of the electron due to a topological defect. *Phys. Lett. A*, v. 10, p. 2335–2338, 1995.
- [66] MORAES, F. Geodesics around disclinations. *Phys. Lett. A*, v. 214, p. 189–192, 1996.
- [67] PADUA, A. de; PARISIO-FILHO, F.; MORAES, F. Geodesics around line defects in elastic solids. *Phys. Lett. A*, v. 238, p. 153–158, 1998.
- [68] KIBBLE, T. Topology of cosmic domains and strings. *J. Phys. A*, v. 9, p. 1387–1398, 1976.
- [69] MELLO, E. R. B. de. Physics in the global monopole spacetime. *Braz. J. Phys.*, v. 31, n. 2, p. 211–222, 2001.
- [70] KAMIEN, R. The geometry of soft materials: a primer. *Rev. Mod. Phys.*, v. 74, p. 953–971, 2002.
- [71] ZHU, S.; SHEN, W. Light trajectory in geometrical optics and metric optics. *Science in China*, v. 40, n. 7, p. 755–760, 1997.
- [72] JOETS, A.; RIBOTTA, R. A geometrical model for the propagation of rays in an anisotropic inhomogeneous medium. *Opt. Commun.*, v. 107, p. 200–204, 1994.
- [73] COHEN-TANNNOUDJI, C.; DIU, B.; LALÖE, F. *Quantum Mechanics*. New York: Wiley-Interscience, 1982. 2 v.
- [74] BUTKOV, E. *Física Matemática*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.
- [75] MAZUR, P. O.; PAPAVALASSILOU, J. Gravitational scattering on a global monopole. *Phys. Rev. D*, v. 44, p. 1317–1320, 1991.
- [76] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. 6. ed. San Diego: Elsevier Academic, 2005.
- [77] SUYAMA, T.; TANAKA, T.; TAKAHASHI, R. Exact wave propagation in a spacetime with a cosmic string. *Phys. Rev. D*, v. 73, p. 024026:1–15, 2006.
- [78] GRANDJEAN, F. *Bull. Soc. Franç. Minéralogie*, v. 42, p. 42, 1919.
- [79] DEMUS, D. et al. *Handbook of Liquid Crystals*. Weinheim: Viley-VCH, 1998.
- [80] PEREIRA, E.; MORAES, F. Flowing liquid crystal simulating the schwarzschild metric. *C. Eur. J. Phys.*, v. 9, p. 1100–1105, 2011.
- [81] CANG, H. et al. Dynamics in supercooled liquids and in the isotropic phase of liquid crystals: A comparison. *J. Chem. Phys.*, v. 118, p. 9303:1–9, 2003.

- [82] ROSQUIST, K. A moving medium simulation of schwarzschild black hole optics. *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 36, p. 1977–1982, 2004.
- [83] FUMERON, S.; PEREIRA, E.; MORAES, F. Metric approach for phonon propagation around defects in nematic liquid crystals. Artigo em conclusão.
- [84] JOSEPH, D. D.; PREZIOSI, L. Heat waves. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, p. 44–73, 1989.
- [85] MARTIN, P. C.; PERSHAN, P. S.; SWIFT, J. New elastic-hydrodynamic theory of liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 25, p. 844–848, 1970.
- [86] ROYER, D.; DIEULESAIT, E. *Elastic Waves in Solids I: free and guided propagation*. Berlin: Springer-Verlag, 2000.
- [87] OZISIK, M. N. *Heat Conduction*. 2. ed. New York: John Wiley and Sons, 1993.
- [88] FUMERON, S.; LACROIX, D. Multiscale heat conduction near a disclination. *EPL*, v. 82, p. 66003:1–6, 2008.
- [89] ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes: 3°. relativistic theory of the simple fluid. *Phys. Rev.*, v. 58, p. 919–924, 1940.
- [90] KLEINERT, H. *Gauge Fields in Condensed Matter*. Singapore: World Scientific, 1990. 2v.
- [91] OSANGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. 1°. *Phys. Rev.*, v. 37, p. 405–426, 1931.
- [92] OSANGER, L. Reciprocal relations in irreversible processes. 2°. *Phys. Rev.*, v. 38, p. 2265–2279, 1931.
- [93] CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959.
- [94] LOGAN, D. L. *First Course in the Finite Element Method*. 4. ed. Delhi: Thompson, 2007.
- [95] CRAWFORD, G. P. et al. $\frac{K_{33}}{K_{11}}$ determination in nematic liquid crystals: An optical birefringence technique. *Appl. Phys. Lett.*, v. 60, p. 3226–3228, 1992.
- [96] STRAJER, G.; FRADEN, S.; MEYER, R. B. Field-induced nonequilibrium periodic structures in nematic liquid crystals: Nonlinear study of the twist frederiks transition. *Phys. Rev. A*, v. 39, p. 4828–4834, 1989.
- [97] NOVELLO, M. et al. Geometrical aspects of light propagation in nonlinear electrodynamics. *Phys. Rev. D*, v. 61, p. 045001:1–10, 2000.
- [98] LORENCI, V. A. de; KLIPPERT, R.; OBUKHOV, Y. N. Optical black holes in moving dielectrics. *Phys. Rev. D*, v. 68, p. 061502:1–4, 2003.

- [99] SÁTIRO, C.; MORAES, F. On the deflection of light around topological defects in nematic liquid crystals. *Eur. Phys. J. E*, v. 25, p. 425–429, 2008.
- [100] VARSHNI, Y. P. Temperature dependence on the elastic constants. *Phys. Rev. B*, v. 2, p. 3952–3958, 1970.
- [101] YANG, D.-K.; WU, S.-T. *Fundamentals of Liquid Crystal Devices*. New Jersey: John Wiley, 2006.
- [102] WEN, X. Second-sound waves in nematic polymer solutions. *Phys. Rev. Lett.*, v. 66, p. 2887–2890, 1991.
- [103] ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to General Relativity*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1975.
- [104] KREIN, G.; MENEZES, G.; SVAITER, N. F. Analog model for quantum gravity effects: phonons in random fluids. *Phys. Rev. Lett.*, v. 105, p. 131301:1–4, 2010.
- [105] LAPOINTE, C. et al. Elastic torque and the levitation of metal wires by a nematic liquid crystal. *Science*, v. 303, n. 5658, p. 652–655, 2004.
- [106] GAL'TSOV, D. V.; LETELIER, P. S. Spinning strings and cosmic dislocations. *Phys. Rev. D*, v. 47, p. 4273–4276, 1993.
- [107] LORENCI, V. A. D.; MOREIRA, E. S. Classical self-forces in a space with a topological defect. *Phys. Rev. D*, v. 65, p. 085013:1–4, 2002.
- [108] CARMO, M. P. do. *Riemannian Geometry*. London: Birkhäuser, 1992.
- [109] DAVYDOV, A. S. *Quantum Mechanics*. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

Índice Remissivo

- Amplitude de espalhamento, 47, 49, 93
- Aproximação de Haller, 25, 61
- Condutividade térmica
 - tensor, 71
- Coordenadas isotrópicas, 58
- Corda cósmica, 43, 44, 54
- Déficit angular, 40
- Defeito
 - desclinação, 26, 27, 35, 43, 51, 53–55, 58, 59, 61–63, 72–74, 76, 77, 83, 86
 - desclinação ($k = \frac{1}{2}, c = \frac{\pi}{4}$), 27
 - desclinação (k,c), 26, 44, 68
 - desclinação com escape 3D, 27, 83
 - ouriço, 26, 27, 40, 41, 43, 47, 48, 50, 53–55, 67–69, 72, 75, 80, 83
 - quiral cosmológico, 87
- Deslocamento de fase, 47
- Desvio geodésico, 89
- Equação
 - condução térmica, 71
 - espaço curvo, 72
 - de d’Alembert, 48, 69
 - de Einstein, 58, 90
 - cristal líquido, 87
 - de Fresnel, 30
 - de geodésica, 89
- Expansão de Jacobi–Anger, 52
- Fator conforme, 42, 43, 59
- Função de Bessel, 49
 - esférica, 92
 - ordem não-inteira, 74
- Gordon
 - métrica, 64
- Gravitação quântica, 87
- Harmônicos esféricos, 48
- Lei de Fourier, 71
 - espaço curvo, 72
- Levitação elástica, 87
- Métodos dos elementos finitos, 74
- Métrica, 88
- Momento angular, 48
- Monopolo global, 40, 41, 49, 54
- Onda
 - de calor, 66, 86
 - esférica livre, 91
 - parcial cilíndrica, 52
 - sonora
 - absorção, 35
 - dependência espectral, 34
 - dependência térmica, 34
 - métrica efetiva, 67
- Osanger
 - relações de reciprocidade, 73
- Parâmetro de ordem
 - escalar, 25, 61
 - tensorial, 25
- Polinômio de Legendre, 48
 - função geradora, 50
- Princípio de Fermat, 28, 39, 42, 55, 67, 84
- Ricci
 - escalar, 89
 - tensor, 89

-
- | | |
|--|---------------------------------------|
| Riemann | Tensor |
| tensor, 89 | parâmetro de ordem, <i>veja</i> Parâ- |
| | metro de ordem |
| Schwarzschild | Teorema óptico, 50 |
| métrica, 58, 59, 61–63, 84 | |
| raio, 58, 63, 84 | Variedade diferenciável, 88 |
| Seção transversal diferencial de cho- | Weyl |
| que, 47, 93 | campo escalar, 87 |
| Segundo som, <i>veja</i> Onda de calor | geometria, 87 |