



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos caóticos

Gilson Francisco de Oliveira Junior

Tese de Doutorado

João Pessoa

Fevereiro de 2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos caóticos

Gilson Francisco de Oliveira Junior

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal Paraíba como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Marcos César Santos Oriá

João Pessoa

Fevereiro de 2016

O48e Oliveira Junior, Gilson Francisco de.
Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos
caóticos / Gilson Francisco de Oliveira Junior.- João Pessoa,
2016.
144f.
Orientador: Marcos César Santos Oriá
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Caos. 3. Sincronização. 4. Eventos de
dessincronização. 5. Lei de potência. 6. Dragões-rei.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Gilson Francisco de
Oliveira Júnior**, candidato ao Título de Doutor
em Física na Área de Concentração Física
Atômica e Molecular.

Aos vinte e três dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e seis, às 09h00, no Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Física Atômica e Molecular, **Gilson Francisco de Oliveira Júnior**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Marcos César Santos Oriá* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Fernando Jorge Sampaio Moraes* (UFPB), *Sérgio André Fontes Azevedo* (UFPB), *José Roberto Rios Leite* (UFPE) e *Flávio Menezes de Aguiar* (UFPE). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Marcos César Santos Oriá* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Estatística de falhas de sincronismo entre circuitos elétricos caóticos*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, redigiu a presente ata que vai assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **23 de fevereiro de 2016**.

Prof. Dr. Marcos César Santos Oriá
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Fernando Jorge Sampaio Moraes
UFPB

Prof. Dr. Sérgio André Fontes Azevedo
UFPB

Prof. Dr. José Roberto Rios Leite
UFPE

Prof. Dr. Flávio Menezes de Aguiar
UFPE

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário



DEDICATÓRIA

Dedico esta tese a minha esposa, Rayana Oliveira, e aos meus pai e mãe, Gilson e Josefa Oliveira, por todo amor e incentivo que tanto me fortaleceram neste projeto.

AGRADECIMENTOS

- Agradeço a Deus pela vida e por tantas conquistas e vitórias.
- Agradeço aos meus orientadores, professores Marcos Oriá e Hugo Cavalcante, por todos os ensinamentos, apoio e orientação, além de serem grandes amigos.
- Agradeço aos professores Martine Chevrollier, Thierry Passerat, Luimar Cavalcanti e Orlando Di Lorenzo pelos conselhos, ensinamentos, debates e momentos de descontração.
- Agradeço ao amigo de pós-graduação Samuel Bezerra pela amizade e pelos debates científicos.
- Agradeço ao técnico de laboratório Manoel Brasileiro.
- Agradeço ao Grupo de Física Atômica, Lasers e Dinâmica Não-linear pelo convívio.
- Agradeço o suporte financeiro dado pela CAPES.

RESUMO

Neste trabalho estudamos, experimentalmente e numericamente, a estatística de eventos de dessincronização que ocorrem em sistemas caóticos acoplados. Tais estudos são realizados através de circuitos eletrônicos caóticos acoplados, operando em regime de sincronização intermitente. Os resultados observados são reproduzidos numericamente por rotinas que construímos para as suas equações diferenciais ordinárias não-lineares. No início desse trabalho reproduzimos alguns resultados da literatura para demonstrar que osciladores caóticos acoplados podem apresentar sincronismo intermitente quando “deveriam” apresentar sincronismo completo, segundo alguns critérios já estabelecidos na literatura para sincronização. A razão para este efeito de fuga da sincronização é a existência de objetos instáveis imersos no atrator caótico do sistema, que retiram a estabilidade do estado sincronizado. Reproduzimos, também, a análise estatística dos eventos de fuga do estado de sincronismo completo que seguem uma distribuição não-normal, sendo que os eventos de maiores amplitudes fogem à lei de distribuição dos eventos de pequena, média e grandes amplitudes e, além disso, podem ser previstos e suprimidos. No último Capítulo desta tese apresentamos nossos três resultados sobre estatística de eventos de fuga de sincronização e sobre o controle dos mesmos. Os três resultados apresentados nesta tese foram realizados em um sistema de segunda ordem não-autônomo (forçado externamente), que nós construímos em duas configurações que permitem explorar diferentes comportamentos dinâmicos. Caracterizamos os sinais do sistema na primeira configuração para diversos parâmetros e utilizando técnicas de análise de sinais e sistemas, pudemos identificar uma variedade de estados dos osciladores, entre

estados periódicos e caóticos. Reproduzimos todos os cenários observados experimentalmente através de simulações numéricas. Para caracterizarmos o nível de sincronismo entre dois osciladores, quase-idênticos e acoplados unidirecionalmente via realimentação negativa, construímos uma variável chamada sinal de erro que mede a diferença entre as respostas dos dois osciladores. Verificamos a eficiência do acoplamento para gerar sincronismo completo para altos valores do acoplamento. Para valores intermédios de acoplamento o sistema exibe um regime de sincronismo intermitente em que caracterizamos os eventos de dessincronização medidos através do sinal de erro. Em nosso primeiro resultado mostramos que, no sistema não-autônomo que utilizamos, o sinal de erro segue uma distribuição do tipo lei de potência e que o expoente dessa lei de potência varia em função do parâmetro de acoplamento do sistema. Este sistema não-autônomo pode exibir diferentes estados caóticos, que diferem entre si na taxa de visitas à região central de seu espaço de fases. Nosso segundo resultado consiste em caracterizar os eventos de dessincronização para alguns desses atratores caóticos, em que observamos que quanto maior a taxa de visita à região central do espaço de fases, maior é a ocorrência dos eventos de dessincronização de grande amplitude. Para uma investigação da ocorrência de eventos extremos construímos um segundo sistema de segunda ordem não-autônomo, uma versão modificada da primeira configuração do sistema. Caracterizamos o sistema, verificando que os objetos instáveis imersos no atrator caótico são órbitas periódicas instáveis, diferentemente de outros resultados da literatura onde a instabilidade é um ponto fixo de sela. Nosso terceiro resultado, obtido através deste segundo sistema, consiste em modificarmos a instabilidade do estado sincronizado através de um único parâmetro, de forma que os eventos de dessincronização passaram seguir uma distribuição não-normal composta por duas contribuições, uma parte que segue uma lei de potência e a outra onde os eventos são do tipo dragões-rei. Assim, mostramos a possibilidade de controle da frequência de ocorrência desses eventos extremos.

Palavras-chave: caos, sincronização, eventos de dessincronização, lei de potência, dragões-rei.

ABSTRACT

We study experimentally and numerically, desynchronization event statistics that occur in coupled chaotic systems. Such studies are conducted through coupled chaotic electronic circuits, operating in intermittent synchronization regime. The observed results are reproduced numerically by routines that integrates their nonlinear ordinary differential equations. At the beginning of this work, we reproduce some results of the literature to demonstrate that coupled chaotic oscillators may have intermittent synchronism when they are expected to have complete synchronism, according to criteria already established in the literature for synchronization. The reason for this fault of synchronization is the presence of unstable objects immersed in the chaotic attractor of the system, which reduce the stability of the synchronized state. We reproduce, also, the analysis of bursts from complete synchronization state which follow a nonnormal distribution, where the events of greatest amplitude escape from the distribution of events of small and medium amplitude, and they can be predicted. In the last Chapter of this thesis we show our three results about the statistics of desynchronization events and how to control them. These results presented here were carried out in a second-order non-autonomous system that we built in two configurations and allow us to explore different behaviors. We characterize the signals from the first system using different parameters and we use analysis techniques that could identify a variety of states of the oscillators between regular and chaotic. We reproduce all scenarios observed experimentally through numerical simulations. To study the level of synchronization between these two oscillators, almost-identical and coupled unidirectionally via negative feedback, we build a

variable named error signal which measures the difference between the responses of the two oscillators. The coupling efficiency to generate full synchronism is verified and using the system under intermittent synchronism we characterize the desynchronization events measured by the so-called error signal. In this non-autonomous system we use the observed error signal following power-law type distributions, and that this power law exponent varies depending on the coupling parameter. As this non-autonomous system may display different chaotic states which differ in the visitation rate at the central region of its phase space, we characterized the desynchronization events for some of chaotic attractors and observed that the greater the entrance rate in the central region of the phase space, the greater the occurrence of the desynchronization events of large amplitude. For an investigation of the occurrence of extreme events we build a second, second-order non-autonomous system, a modified version of the first system. We characterize this second system, verifying that the unstable objects immersed in the chaotic attractor are unstable periodic orbits, unlike other results from the literature where instability is a saddle point. With this second system we have our third result, we modify the instability of the synchronized state by means of a single parameter so that the desynchronization events turns to follow a non-normal distribution composed of two contributions, one following a power-law and the other where the events are dragon-king type. Thus, we show the possibility of control for the frequency of these extreme events.

Keywords: chaos, synchronization, desynchronization events, power law, dragon-king.

SUMÁRIO

Folha de rosto	i
Dedicatória	iv
Agradecimentos	v
Resumo	vi
Abstract	viii
1 Sistemas dinâmicos	1
1.1 Expoentes de Lyapunov	8
1.2 Sistema de Lorenz	10
1.3 Sistema de Rössler	15
2 Sincronização de sistemas caóticos	18
2.1 Sincronismo completo por acoplamento direto	21
2.2 Sincronismo completo por acoplamento via realimentação negativa	24
2.3 Sincronização de fase	26
2.4 Sincronismo antecipado e retardado	31
2.5 Sincronismo entre lasers	34
2.6 Sincronismo em outros sistemas	37

3	Sincronização imperfeita entre sistemas caóticos	39
3.1	Distribuições estatísticas	43
3.1.1	Distribuição normal	43
3.1.2	Distribuição lei de potência	44
3.1.3	Eventos dragões-rei	45
3.2	O Sistema de Bienfang-Gauthier	48
3.3	Acoplamento entre dois sistemas B-G	50
3.3.1	Acoplamento unidirecional gerando sincronismo completo	52
3.3.2	Acoplamento unidirecional gerando sincronismo intermitente	54
3.4	Sincronização parcial e sua estatística	56
3.4.1	Análise estatística dos eventos de dessincronização	57
3.4.2	Previsibilidade e controle dos eventos de dessincronização	58
4	Sincronização com circuitos não-autônomos	62
4.1	Descrição de um sistema não-autônomo	66
4.2	Acoplamento entre dois sistemas não-autônomos quase-idênticos	70
4.3	Lei de potência sintonizável em eventos de dessincronização de circuitos eletrônicos caóticos	74
4.4	Efeito do atrator sobre eventos de dessincronização em circuitos caóticos acoplados	79
4.5	Efeito da instabilidade local na formação de eventos de dessincronização	86
4.5.1	Descrição do sistema não-autônomo modificado	89
4.6	Caracterização dos circuitos acoplados	93
4.6.1	Análise estatística dos eventos de dessincronização	96
5	Conclusões e perspectivas	101
	Referências	103
	Apêndices	113
A	Espectro de Fourier de sistemas não-lineares	114

B	Método de Runge-Kutta de quarta ordem	117
C	Circuitos eletrônicos para simular equações diferenciais ordinárias	120
	Artigos publicados	127
	Tunable power law in the desynchronization events of coupled chaotic electronic circuits	129
	Trajectory-probed instability and statistics of desynchronization events in coupled chaotic systems	130
	Characterization of diffusion processes: Normal and anomalous regimes	131
	Local instability driving extreme events in a pair of coupled chaotic electronic circuits .	132

CAPÍTULO 1

SISTEMAS DINÂMICOS

Entendemos por sistema dinâmico determinístico aquele que apresenta grandezas que variam no tempo e podem ser expressas: ou por equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais, se o sistema apresenta evolução dinâmica contínua no tempo; ou por equações de diferença, quando a evolução dinâmica é discreta no tempo. Concentramos nossos estudos em sistemas dinâmicos não-lineares em que a solução não pode ser escrita como uma função proporcional as variáveis do sistema, ou seja, o princípio da superposição não é válido. Equações com termos quadráticos, cúbicos, exponenciais, logarítmicos, do tipo seno ou cosseno são, por exemplo, equações não-lineares.

Estudamos sistemas dinâmicos determinísticos não-lineares motivados pelo fato de que parte do mundo é regido por leis não-lineares. Podemos citar trabalhos em física (Moon & Holmes 1979, Harrison & Biswas 1986), química (Schmitz *et al.* 1977), biologia (May & Anderson 1987), engenharia (Haykin & Principe 1998), medicina (Witkowski *et al.* 1995, Radhakrishna *et al.* 2000), etc. Note-se, no entanto, que nos últimos cem anos a Física tem se dedicado sobretudo ao estudo de sistemas onde pode-se usar a Álgebra Linear para descrever a sua evolução, como a mecânica clássica (Leis de Newton), o eletromagnetismo clássico (Leis de Maxwell) e a mecânica quântica (Equação de Schrödinger). O estudo de propriedades não-lineares tem crescido desde os anos 1970, impulsionado pelo desenvolvimento de recursos computacionais, praticamente indispensáveis nos estudos de Dinâmica Não-linear.

Antes de darmos início a descrição de nossos trabalhos e resultados mais específicos, vamos, neste capítulo, apresentar alguns conceitos e técnicas referentes ao tratamento de sistemas dinâmicos, tais quais a caracterização de pontos fixos, dimensionalidade do sistema e o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Quanto à evolução temporal, sistemas dinâmicos podem ser contínuos ou discretos. O tempo contínuo é representado pelo conjunto dos números reais, enquanto que o tempo discreto é representado pelo conjunto dos números naturais.

Podemos definir um sistema como autônomo quando em suas leis de evolução dinâmica a variável tempo não aparece explicitamente, como no oscilador harmônico¹ e no sistema de Lorenz (Sec. 1.2). Caso contrário o definimos como não-autônomo, como no sistema de Duffing (Strogatz 1994, Ott 2002) e no sistema com o qual realizamos nossos trabalhos e que será descrito no Capítulo 4.

Vamos representar a evolução dinâmica de um sistema não-linear autônomo n -dimensional por n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem como descrito a seguir:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.2)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.3)$$

Note que, no decorrer desta tese, para simplificar a notação de derivada temporal estamos utilizando $\dot{x}$, no lugar de $\frac{dx}{dt}$.

Em sistemas não-autônomos n -dimensionais a variável tempo, por aparecer explicitamente em suas equações, atua como as outras variáveis de tal forma que o sistema torna-se $n + 1$ -dimensional, como a seguir:

¹O movimento do oscilador harmônico é descrito pela 2ª Lei de Newton: $\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - kx$ que pode ser reescrita por $\frac{dx}{dt} = v$ e $\frac{dv}{dt} = -\gamma v - kx$, onde x é a posição da massa e v sua velocidade.

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (1.4)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (1.5)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad (1.6)$$

$$\dot{t} = 1. \quad (1.7)$$

A dimensionalidade de um sistema está ligada ao número de condições iniciais que ele necessita para ser descrito univocamente em um determinado instante de tempo t . Por exemplo, o oscilador harmônico simples necessita da posição e velocidade iniciais para ser descrito. Portanto ele é de dimensão 2. Para estudarmos um sistema laser de semiconductor (Weiss *et al.* 1988) precisamos conhecer o seu campo elétrico, a fase ótica dependente do tempo e o número de portadores da região ativa de ganho, sendo assim o sistema é de dimensão 3. Uma situação particular ocorre para um sistema descrito por equações diferenciais com termos de defasagem temporal que necessita de um intervalo contínuo de condições iniciais $[x(t - \tau), \dots, x(t)]$, assim temos infinitos pontos entre o tempo atual t e o tempo anterior $t - \tau$, onde τ é a defasagem temporal do sistema. Desta forma, o sistema é dito de dimensão infinita.

Para analisarmos um determinado sistema frequentemente recorreremos ao espaço de fases, ou espaço de estados, que é o espaço n -dimensional em que as n variáveis independentes do sistema formam os seus eixos $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Quando analisamos o espaço de fases de um sistema não-linear podemos encontrar como solução deste sistema, conjuntos que podem ser atratores, repulsores ou neutros. Se (i) para qualquer condição inicial interna a um determinado conjunto A sua evolução permanecer interna a este mesmo conjunto; se (ii) qualquer condição inicial interna a um conjunto D que contém A evoluir para este conjunto; e se (iii) A for o conjunto mínimo que satisfaz as duas condições anteriores, então A é um *conjunto atrator*. Se a condição (i) for satisfeita e para qualquer condição inicial externa ao conjunto A sua evolução divergir deste, então A é um *conjunto repulsor*. Caso soluções iniciais externas ao conjunto A nem se aproximarem nem afastarem dele, então A é um *conjunto neutro*.

Podemos explorar toda a variedade de estados que um sistema pode apresentar no espaço de fases ao variarmos sistematicamente as condições iniciais e os parâmetros desse sistema. Considerando, por exemplo, um volume de condições iniciais em um espaço de fases tridimensional, dizemos que (i) um sistema é *conservativo* se no decorrer de sua evolução temporal, o volume de condições iniciais do sistema no espaço de fase for preservado; ou (ii) o sistema é *dissipativo* quando o volume de condições iniciais se contrai com o passar do tempo.

A dimensionalidade de um sistema restringe o tipo de estado dinâmico que podemos encontrar no espaço de fases. Para um sistema de dimensão 1 podemos ter apenas divergência ou pontos fixos, ou seja, valores da variável independente para o qual sua derivada temporal é nula. Para sistemas de dimensão 2, além de pontos fixos, podemos encontrar ciclos limites, que são órbitas periódicas no espaço de fases e podem ser estáveis ou instáveis, assim como os pontos fixos. Para sistemas com dimensão 3, além dos estados anteriores, podemos obter dinâmica na superfície de um toro, que acontece quando as trajetórias do sistema são controladas por duas componentes de frequência, digamos ω_1 e ω_2 . Quando a razão entre essas componentes de frequência, ω_1/ω_2 , é racional temos então um estado periódico para as trajetórias do sistema; se ω_1/ω_2 é irracional então temos um estado de quasiperiodicidade, um estado em que a trajetória nunca retorna ao ponto inicial como no caso periódico, mas evolui na superfície do toro sem intersectar a si mesma. No caso tridimensional, fora da superfície do toro, também podemos obter caos que é um estado dinâmico determinístico (pois possui leis de evolução bem conhecidas), aperiódico (não existe um tempo T para o qual $x(t) = x(t + T)$), e que, em termos práticos, é imprevisível. A imprevisibilidade do caos está associada à forte dependência da evolução do sistema às suas condições iniciais. Ou seja, se tomarmos duas condições iniciais no espaço de fases, tão próximas quanto quisermos e observarmos a evolução do sistema em ambos os casos, medindo a diferença entre suas trajetórias a cada instante de tempo, esta diferença aumentará exponencialmente e rapidamente uma solução não terá correlação alguma com a outra. A medida desta divergência exponencial é feita através do chamado expoente de Lyapunov, a ser discutido adiante.

Em um estado caótico, um sistema dissipativo exhibe um atrator estranho como solução no seu espaço de fases. Para ser chamado de atrator estranho, um conjunto deve, além de obedecer as três condições para ser um atrator, ser sensível às condições iniciais. Sistemas

conservativos, entretanto, podem apresentar estado caótico mas não exibem atratores.

Os tipos de soluções possíveis em função da dimensionalidade do sistema são determinadas pelo Teorema da Existência e Unicidade de soluções. Seja um sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, o mesmo terá solução única se todas as funções f_k e suas derivadas parciais $\partial f_k / \partial x_i$ forem contínuas no domínio de definição das funções f_k . Em outras palavras, dado um sistema $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, seus parâmetros e condições iniciais, cada ponto da trajetória terá apenas um valor de $\vec{f}(\vec{x}, t)$. Para haver cruzamento de trajetórias é necessário que em um ponto do espaço de fases apresente ao menos dois valores diferentes da derivada $\vec{f}(\vec{x}, t)$, violando o Teorema da Existência e Unicidade de soluções, portanto, uma solução no espaço de fases do sistema não pode ter cruzamentos. Por isso em um sistema 1D não podemos ter órbitas periódicas, pois neste caso precisaríamos ter pontos com dois valores de $\vec{f}(\vec{x}, t)$ possíveis, violando o Teorema da Existência e Unicidade de soluções, e do mesmo modo um sistema 2D não pode oscilar caoticamente.

Ao estudar sistemas dinâmicos não-lineares podemos recorrer a métodos analíticos, qualitativos e numéricos. Soluções analíticas são desejáveis, pois são válidas para quaisquer condições iniciais e parâmetros. Entretanto, em geral, sistemas não-lineares não podem ser resolvidos analiticamente. Assim, recorreremos a métodos numéricos, como por exemplo, a resolução de equações diferenciais através do método de Runge-Kutta. Integrações numéricas têm, porém, a desvantagem de que só geram uma solução para um valor específico de condição inicial (ou um valor de parâmetro): cada vez que trocamos o valor de uma condição inicial ou de um parâmetro, devemos refazer toda a integração numérica. Recorreremos a métodos qualitativos para analisar propriedades mais gerais como, por exemplo, a estabilidade de pontos fixos e ciclos limites, como discutido a seguir, e a existência de bacias de atração no espaço de fases, regiões em que todos os pontos internos evoluem para a mesma solução estável, seja um ponto fixo ou uma órbita periódica.

Seja o ponto (x^*, y^*) do espaço de fase de um sistema não-linear de tempo contínuo descrito pelas equações $\dot{x} = f_1(x, y)$ e $\dot{y} = f_2(x, y)$, um ponto fixo deste sistema tal que $f_1(x^*, y^*) = 0$ e $f_2(x^*, y^*) = 0$. Para determinarmos a estabilidade do ponto fixo (x^*, y^*) devemos tomar um ponto ligeiramente diferente, $(x(t), y(t)) = (x^* + \delta_x(t), y^* + \delta_y(t))$ e analisar sua evolução através da diferença infinitesimal $(\delta_x(t), \delta_y(t))$. Se $(\delta_x(t), \delta_y(t))$ crescer,

a trajetória $(x(t), y(t))$ se afastará do ponto fixo, caso contrário se $(\delta_x(t), \delta_y(t))$ diminuir, $(x(t), y(t))$ se aproximará de (x^*, y^*) .

Podemos obter uma equação para a evolução da diferença $(\delta_x(t), \delta_y(t))$ expandindo a equação não-linear original, com

$$\delta_x = x - x^*, \quad (1.8)$$

$$\delta_y = y - y^*, \quad (1.9)$$

Então,

$$\dot{\delta}_x = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x} = f_1(x, y), \quad (1.10)$$

$$\dot{\delta}_y = \frac{d}{dt}(y - y^*) = \dot{y} = f_2(x, y), \quad (1.11)$$

ou seja,

$$\dot{\delta}_x = f_1(x^* + \delta_x, y^* + \delta_y), \quad (1.12)$$

$$\dot{\delta}_y = f_2(x^* + \delta_x, y^* + \delta_y), \quad (1.13)$$

$$\dot{\delta}_x = f_1(x^*, y^*) + \delta_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \delta_y \frac{\partial f_1}{\partial y} + O(\delta_x^2, \delta_y^2, \delta_x \delta_y), \quad (1.14)$$

$$\dot{\delta}_y = f_2(x^*, y^*) + \delta_x \frac{\partial f_2}{\partial x} + \delta_y \frac{\partial f_2}{\partial y} + O(\delta_x^2, \delta_y^2, \delta_x \delta_y), \quad (1.15)$$

onde $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ são derivadas calculadas no ponto (x^*, y^*) . Consideraremos que os termos quadráticos, ou de ordem superior, $O(\delta_x^2, \delta_y^2, \delta_x \delta_y)$ são suficientemente pequenos, de tal forma que podemos desprezá-los. Lembrando que $f_1(x^*, y^*) = 0$ e $f_2(x^*, y^*) = 0$, podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} \dot{\delta}_x \\ \dot{\delta}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{pmatrix},$$

onde,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

é a matriz jacobiana do sistema linearizado ao redor do ponto fixo (x^*, y^*) e da qual podemos extrair seus autovalores, como a seguir:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} - L & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} - L \end{pmatrix} = 0,$$

resolvendo este determinante, temos que $L^2 - \tau L + \Delta = 0$, onde $\tau = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ é o traço da matriz jacobiana e $\Delta = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x}$. Assim, os autovalores da matrix jacobiana do sistema linearizado são $L_{1,2} = (\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})/2$ e $\tau = L_1 + L_2$ e $\Delta = L_1 L_2$.

Dependendo dos valores de Δ e de τ definimos a estabilidade de um ponto fixo. (i) Se $\Delta < 0$, os autovalores são reais e tem sinais opostos, o ponto de equilíbrio é do tipo sela, que é instável; se $\Delta > 0$ e $\tau^2 - 4\Delta > 0$, os autovalores são reais e tem mesmo sinal, (ii) para $\tau > 0$, o ponto fixo é um nó instável e (iii) para $\tau < 0$, um nó estável; se $\Delta > 0$ e $\tau^2 - 4\Delta < 0$, os autovalores são complexos conjugados, (iv) para $\tau > 0$, o ponto fixo é um foco instável, (v) para $\tau < 0$, um foco assintoticamente estável e (vi) para $\tau = 0$ um centro neutramente estável.

Está análise é válida não somente para sistemas não-lineares bidimensionais, mas pode ser generalizada para sistemas de qualquer dimensionalidade. Podemos linearizar qualquer sistema em torno de cada um de seus pontos fixos. Se encontrarmos apenas autovalores negativos temos um nó estável, caso todos sejam positivos temos um nó instável. Por outro lado, se encontrarmos autovalores reais positivos ou imaginários de parte real positiva e autovalores negativos para o mesmo ponto fixo, este ponto apresenta tanto direções de estabilidade como de instabilidade no espaço de fases do sistema.

Note-se que, estamos tratando de sistemas não-lineares, portanto, devemos realizar correções de ordem superior na expansão do sistema em torno do ponto fixo se o classificarmos como centros, estrelas, entre outros (Strogatz 1994, Monteiro 2011).

Estudar a estabilidade de órbitas periódicas é mais complicado que a estabilidade de pontos fixos. Um modo de realizar esta análise é construindo uma seção de Poincaré (Strogatz 1994, Monteiro 2011). Considerando um sistema n -dimensional $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$, podemos criar S , uma superfície de seção, $n - 1$ dimensional. Essa superfície S deve ser transversa ao fluxo das trajetórias do sistema, ou seja, todas as trajetórias que começam em S fluem através da

superfície e não paralela a mesma. Ao construirmos essa superfície S estamos discretizando nosso sistema, que é de tempo contínuo, e estudando um sistema discretizado com uma dimensão a menos, que em geral, é mais simples. Uma órbita periódica do sistema $\dot{\vec{x}}$ pode ser vista como um conjunto de pontos repetidos na seção de Poincaré. Descrevendo a equação que realiza esse mapeamento podemos realizar um estudo de estabilidade da órbita periódica. Entretanto, encontrar uma equação que descreva o mapeamento na seção de Poincaré é, em geral, complicado. Assim, podemos avaliar a evolução de condições iniciais ligeiramente afastadas de uma órbita periódica conhecida e verificar se essas condições iniciais convergem para essa órbita periódica. Nesse caso ela será descrita como estável; se elas se afastam da órbita periódica, evidencia-se uma órbita instável.

1.1 Expoentes de Lyapunov

Sistemas não-lineares podem ser caracterizados por suas taxas de expansão ou contração no espaço de fases. Se imaginarmos uma esfera de condições iniciais e a fizermos evoluir no tempo, essa esfera será deformada, tornando-se um elipsóide e seu volume irá a zero se o sistema for dissipativo. Os fatores dessas taxas de expansão / contração ($e^{\lambda t}$) nas diferentes direções da esfera são denominados de expoentes de Lyapunov (Strogatz 1994, Hilborn 1994, Monteiro 2011, J Eckmann & Ciliberto 1986, Wolf *et al.* 1985). O número de expoentes de Lyapunov (λ) em um determinado sistema é igual ao de variáveis independentes, ou seja, um sistema bidimensional tem dois expoentes de Lyapunov, um sistema tridimensional tem três expoentes e assim por diante. O expoente de Lyapunov pode ser positivo, negativo, zero ou complexo. Quando, por exemplo, um sistema tridimensional de tempo contínuo exibe ponto fixo estável como solução dinâmica, os três expoentes de Lyapunov possuem suas partes reais negativas. Quando este mesmo sistema exibe ciclo limite estável como solução dinâmica, um dos expoentes de Lyapunov vale zero e os outros dois possuem suas partes reais negativas. Já quando temos um estado caótico, apenas um dos expoentes de Lyapunov possui valor positivo. Outro é negativo e o terceiro possui valor zero ou muito pequeno, próximo de zero. Entretanto a soma dos valores dos três expoentes de Lyapunov deve ser negativa, para um

sistema dissipativo.

Para calcular os expoentes de Lyapunov de um sistema não-linear de tempo contínuo devemos, em geral, recorrer a métodos numéricos, efetuando-se, por exemplo, linearizações ao redor de cada ponto de uma dada trajetória no espaço de fases. Seja o sistema não-linear, $\vec{x} = F(\vec{x})$, onde $\vec{x}_0$ é sua condição inicial e seu espaço tangente linearizado $\delta\vec{x} = D_x F(\delta\vec{x})$, em que D_x é a matriz jacobiana do sistema. Faremos esse espaço tangente linearizado evoluir uma base de vetores linearmente independentes inicialmente normalizados, igual a $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ no caso tridimensional. Ao evoluirmos essa base de vetores através do espaço tangente os vetores tenderão a se alinhar ao vetor de maior crescimento, podendo acumular erros na nossa medida. Desta forma utilizamos a ortogonalização de Gram-Schmidt para separar os vetores e torná-los ortogonais entre si. Seja uma base de vetores linearmente independentes $[u_1, \dots, u_n]$. Podemos construir uma base ortogonal de vetores $[w_1, \dots, w_n]$ e uma ortonormal $[v_1, \dots, v_n]$ fazendo

$$w_1 = u_1, \quad v_1 = w_1 / \|w_1\|, \quad (1.16)$$

$$w_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1, \quad v_2 = w_2 / \|w_2\|, \quad (1.17)$$

$$w_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle u_n, v_i \rangle v_i, \quad v_n = w_n / \|w_n\|. \quad (1.18)$$

Assim, fazemos a base $[u_1, \dots, u_n]$ evoluir por l passos de tempo e em seguida construímos a base ortogonal $[w_1, \dots, w_n]$. Executaremos esse processo k vezes, e em cada vez devemos acumular os logaritmos de cada um dos vetores $[w_1, \dots, w_n]$.

Os expoentes de Lyapunov são, então, dados por:

$$\lambda_1 = \left(\sum_{i=1}^k \log(\|w_{1i}\|) \right) / (l k dt) \quad (1.19)$$

$$\lambda_2 = \left(\sum_{i=1}^k \log(\|w_{2i}\|) \right) / (l k dt) \quad (1.20)$$

$\vdots$

$$\lambda_n = \left(\sum_{i=1}^k \log(\|w_{ni}\|) \right) / (l k dt) \quad (1.21)$$

onde dt é o tamanho do passo de tempo da integração numérica.

Obtemos assim uma estimativa numérica para o espectro de expoentes de Lyapunov de um sistema não-linear. Como dito no início desta seção a soma desses expoentes tem que ser negativa para sistemas dissipativos.

Se o sistema é um mapa iterado unidimensional, ou seja, descrito por uma equação de diferença podemos calcular seu expoente de Lyapunov através da expressão:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}. \quad (1.22)$$

A seguir, fazemos uma breve descrição de alguns sistemas emblemáticos que podem exibir comportamento caótico: o sistema de Lorenz (Lorenz 1963) e o sistema de Rössler (Rössler 1976), que são de tempo contínuo. Ao descrever esses sistemas utilizaremos algumas das análises e técnicas já descritas neste capítulo, como caracterização da estabilidade de pontos fixos e cálculo do expoente de Lyapunov. Utilizaremos os sistemas de Lorenz e de Rössler no próximo capítulo em que estudamos diferentes tipos de sincronização entre sistemas dinâmicos não-lineares acoplados.

1.2 Sistema de Lorenz

Um sistema não-linear tridimensional, dos mais conhecidos é o sistema de Lorenz (Strogatz 1994, Hilborn 1994, Monteiro 2011). Ele foi estabelecido pelo matemático e meteorologista Edward N. Lorenz (1917-2008), quando estudava um modelo simplificado das convecções atmosféricas. Utilizando-se de um conjunto de três equações acopladas, em que duas são não-lineares, Lorenz mostrou que pequenas modificações nas condições iniciais levam a soluções bastante diferentes, que divergem exponencialmente. Na verdade Lorenz já havia encontrado essa sensibilidade exponencial às condições iniciais em um outro sistema meteorológico de 12 equações. Note porém que quem primeiro vislumbrou a sensibilidade de sistemas às suas condições iniciais foi o matemático Jules Henri Poincaré (1854-1912), quando estava estudando um sistema simplificado do problema de três corpos. Ele escreveu em 1903 sobre seus trabalhos: “... pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro

enorme na saída. Previsão torna-se impossível ...”(Monteiro 2011). Mas como o computador só foi inventado décadas depois coube a Lorenz observar numericamente a sensibilidade exponencial às condições iniciais, característica de sistemas caóticos, publicando em 1963 o artigo “Fluxo Determinístico Aperiódico”(Lorenz 1963).

As três equações que representam o sistema de Lorenz são:

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad (1.23)$$

$$\dot{y} = rx - y - xz, \quad (1.24)$$

$$\dot{z} = xy - bz, \quad (1.25)$$

em que os parâmetros σ , r e b são constantes positivas.

Os termos cruzados xz e xy são os responsáveis pela não-linearidade do sistema. Se tomarmos no espaço de fases do sistema de Lorenz uma esfera de condições iniciais e evoluirmos o sistema a partir de cada uma dessas condições iniciais, medindo o volume da esfera em função do tempo, perceberemos que o volume dessa esfera vai a zero, ou seja, o sistema é dissipativo.

Como o sistema de Lorenz possui três equações diferenciais de primeira ordem, possui um espaço de fases tridimensional. Assim pode exibir diferentes estados dinâmicos, que podem ser acessados através da escolha apropriada dos valores dos parâmetros do sistema. De fato ao variarmos os parâmetros do sistema, podemos encontrar como solução: ponto fixo, órbita periódica, intermitência entre peridiocidade e caos, ou caos.

Para encontrarmos pontos fixos em um sistema dinâmico devemos analisar em que pontos as equações diferenciais temporais de suas variáveis se anulam, ou seja, $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0.0$. Para o sistema de Lorenz uma solução do tipo ponto fixo é obtido quando $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ para qualquer conjunto de valores de parâmetros, e quando $r > 1$ outras duas soluções do tipo ponto fixo surgem para $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$.

Podemos estudar a estabilidade destes pontos fixos, se e quando são estáveis, instáveis ou pontos de sela, por exemplo. Linearizando o sistema próximo aos pontos fixos, ou seja, eliminando os termos não-lineares xy e xz , temos:

$$\dot{x} = \sigma(y - x) \quad (1.26)$$

$$\dot{y} = rx - y \quad (1.27)$$

$$\dot{z} = -bz \quad (1.28)$$

Resolvendo o sistema para o ponto fixo $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$, a partir da equação desacoplada $\dot{z}$ temos $z(t) \rightarrow 0$ exponencialmente. Assim,

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

dessa matriz temos que seu traço vale $\tau = -\sigma - 1$ e seu determinante, $\Delta = \sigma(1 - r)$. Se $r > 1$, segue que seu determinante $\Delta < 0$, ou seja, a origem é um ponto de sela, com duas direções de estabilidade e uma de instabilidade. Temos que $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$, e com isso, se $r < 1$ a origem é um ponto fixo estável.

Para os outros dois pontos fixos, $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$, podemos calcular os autovalores de sua matriz jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 & -x^* \\ y^* & x^* & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

A equação característica é:

$$\det \begin{pmatrix} -\sigma - L & \sigma & 0 \\ r - z^* & -1 - L & -x^* \\ y^* & x^* & -b - L \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\sigma - L & \sigma & 0 \\ 1 & -1 - L & -(\pm\sqrt{b(r-1)}) \\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b - L \end{pmatrix} = 0.$$

Efetuada os cálculos obtemos $L^3 + L^2(\sigma + b + 1) + Lb(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0$. Os pontos fixos $(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ são estáveis até que ocorre uma bifurcação de Hopf (Strogatz 1994, Hilborn 1994, Monteiro 2011), em que o sistema passa a apresentar autovalores imaginários. Se considerarmos $L = i\omega$ e substituirmos na equação de autovalores obtida, temos:

$$(i\omega)^3 + (i\omega)^2(\sigma + b + 1) + i\omega b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0, \quad (1.29)$$

$$-i\omega^3 - \omega^2(\sigma + b + 1) + i\omega b(\sigma + r) + 2\sigma b(r - 1) = 0. \quad (1.30)$$

Separando as partes reais e imaginárias, obtemos:

$$\omega^2(\sigma + b + 1) = 2\sigma b(r - 1), \quad (1.31)$$

$$\omega^3 = \omega b(\sigma + r). \quad (1.32)$$

Da segunda igualdade temos $\omega = 0$ (não existe solução imaginária) ou $\omega^2 = b(\sigma + r)$. Substituindo na primeira igualdade, e resolvendo para r , obtemos:

$$r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \quad (1.33)$$

Em que $\sigma - b - 1 > 0$, pois r é definido como parametro positivo. Para $r > r_H$, o sistema de Lorenz passa a exibir comportamento caótico ou periódico ao invés de ponto fixo.

A Fig. 1.1 mostra séries temporais para as três variáveis do sistema de Lorenz que calculamos para os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, que resulta em um regime caótico. A Fig. 1.2 mostra o atrator estranho de Lorenz no espaço de fases 3-D e as suas projeções bidimensionais para os mesmos parâmetros na Fig. 1.3.

Agora modificamos o valor do parâmetro r e calculamos a solução do sistema. A Fig. 1.4 mostra as projeções bidimensionais do atrator periódico de Lorenz para os parâmetros $\sigma = 10$, $r = 126, 52$ e $b = 8/3$ na Fig. 1.4.

De fato, variando-se o parâmetro r encontramos diferentes soluções dinâmicas para o sistema de Lorenz. Para termos uma idéia do tipo de solução que podemos encontrar, calculamos o máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , variando o valor de r no intervalo $110 < r < 190$. Note que este intervalo foi escolhido ao acaso, de modo que poderíamos ter escolhido qualquer outro intervalo para construção do diagrama de bifurcação. Para cada valor de r calculamos a solução do sistema de Lorenz, descartamos a solução transiente, ou seja, consideramos a solução apenas depois de um tempo suficientemente longo para

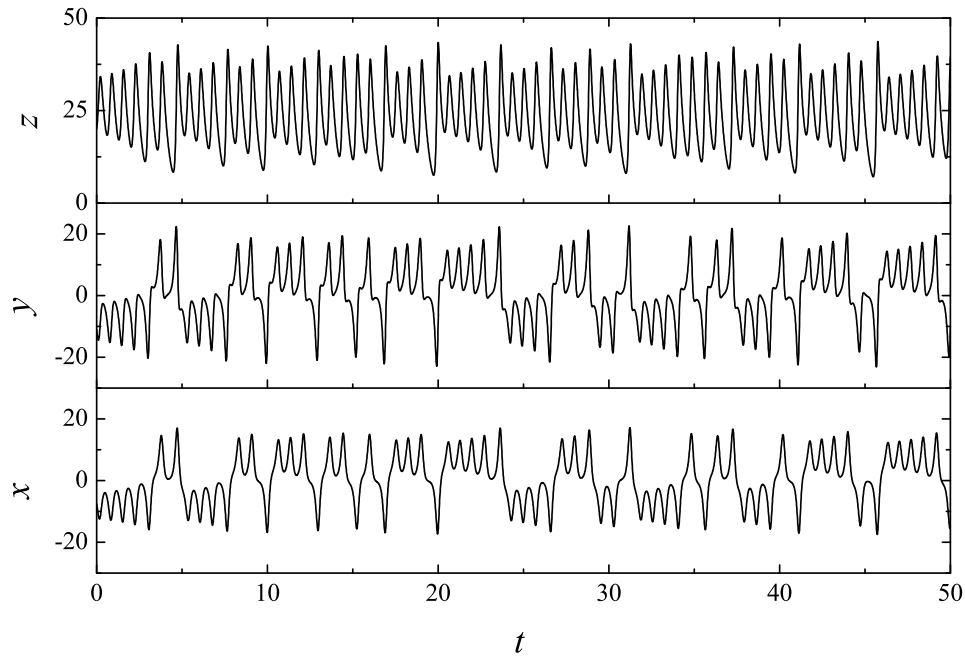


Figura 1.1 – Séries temporais das três variáveis do sistema de Lorenz para os parâmetros $r=28$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

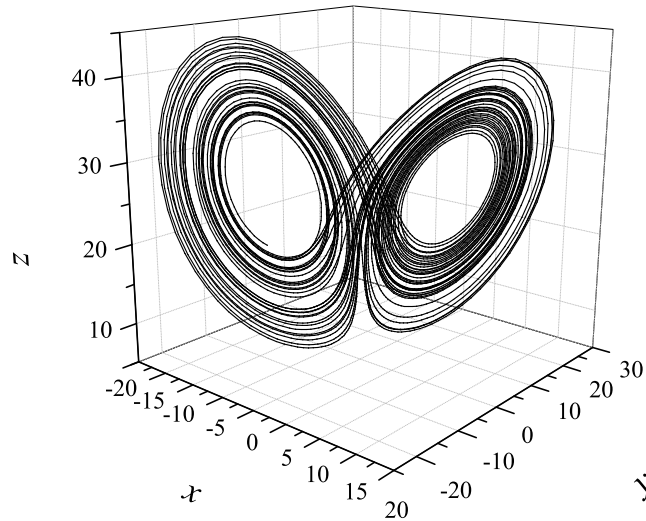


Figura 1.2 – Atrator estranho no espaço de fases 3D do sistema de Lorenz para os parâmetros $r=28$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

se obter a solução estacionária. Quando o máximo expoente de Lyapunov é positivo temos comportamento caótico, quando é zero, temos comportamento periódico e quando é negativo, temos um ponto fixo como solução. Na Fig. 1.5 temos o máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , do sistema de Lorenz variando o parâmetro r no intervalo $110 < r < 190$.

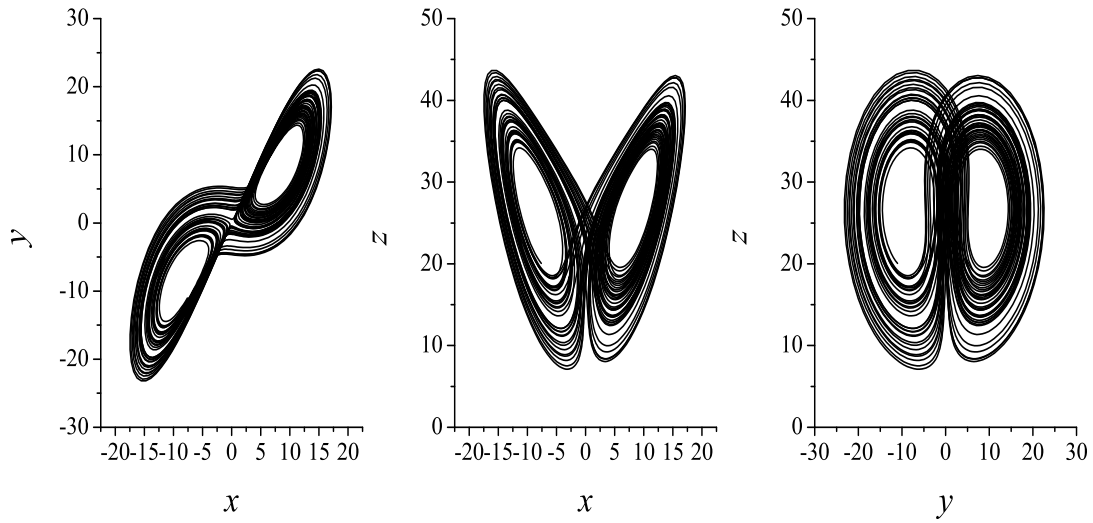


Figura 1.3 – Projeções 2D do atrator estranho do sistema de Lorenz para os parâmetros $r=28$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

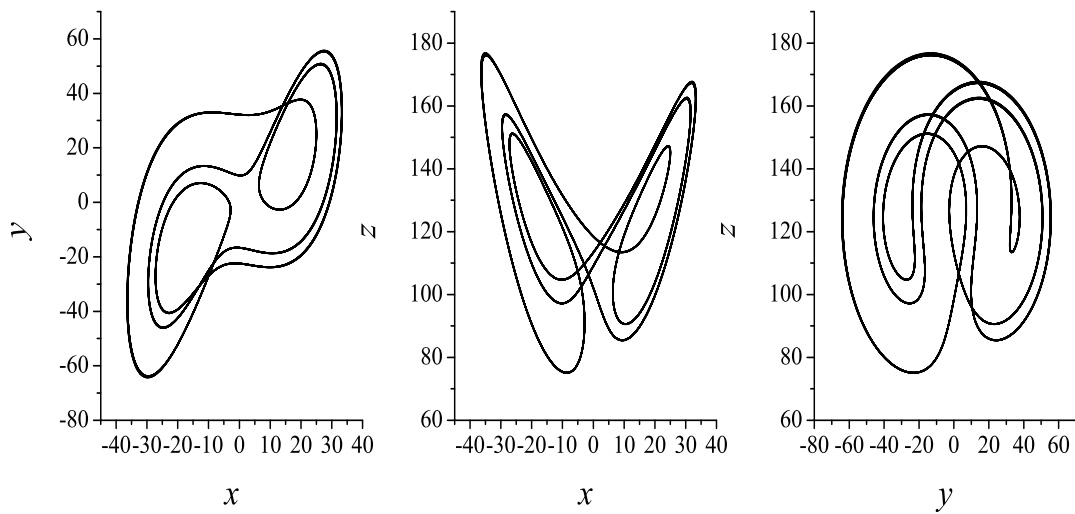


Figura 1.4 – Projeções 2D do atrator periódico do sistema de Lorenz para os parâmetros $r=126,52$, $b=8/3$, $\sigma=10$.

1.3 Sistema de Rössler

Rössler desenvolveu um sistema 3D com apenas um termo não-linear que também pode apresentar comportamento caótico. O sistema descrito por Otto Rössler (Rössler 1976) em 1976, é similar ao sistema de Lorenz mas seu atrator estranho apresenta apenas uma folha de rotação, sendo assim mais simples. O sistema de Rössler inicialmente foi proposto apenas

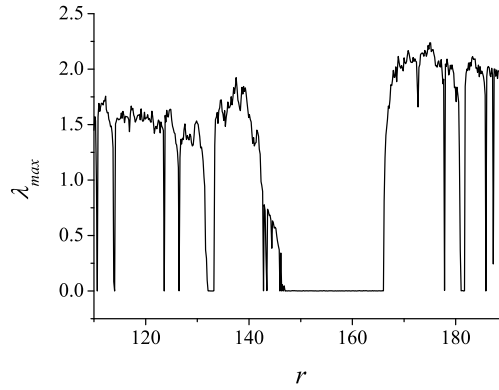


Figura 1.5 – Máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , do sistema de Lorenz variando o parâmetro r , mantendo $b=8/3$ e $\sigma=10$.

como um modelo sem aplicações físicas imediatas, porém tem sido utilizado para estudar diversos tipos de sincronismo entre sistemas caóticos como veremos no próximo capítulo. Para familiarizar com esse sistema, apresentamos alguns resultados para valores particulares de seus parâmetros.

Suas equações são descritas a seguir.

$$\dot{x} = -y - z, \quad (1.34)$$

$$\dot{y} = x + ay, \quad (1.35)$$

$$\dot{z} = b + z(x - c). \quad (1.36)$$

O sistema de Rössler apresenta apenas uma não-linearidade, o termo zx na equação de $\dot{z}$. Do mesmo modo da seção anterior podemos encontrar os pontos fixos (x^*, y^*, z^*) do sistema, obtidos ao fazermos $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 0, 0)$. Desta forma, os pontos fixos do sistema de Rössler correspondem a $(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}), \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a})$.

Na Fig. 1.6 temos o atrator caótico 3D exibido pelo sistema de Rössler para os parâmetros $a=0,432$, $b=2$, $c=4$.

Como no sistema de Lorenz, calculamos o máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , do sistema de Rössler para determinarmos em que faixas de valores de seus parâmetros o sistema exibe caos, periodicidade ou ponto fixo como solução. Na Fig. 1.7 temos o máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , do sistema de Rössler quando variamos o parâmetro b e usamos $a = 0,2$ e $c = 5,7$ fixos. Observamos regiões de comportamento caótico, $\lambda_{max} > 0$ e de comportamento

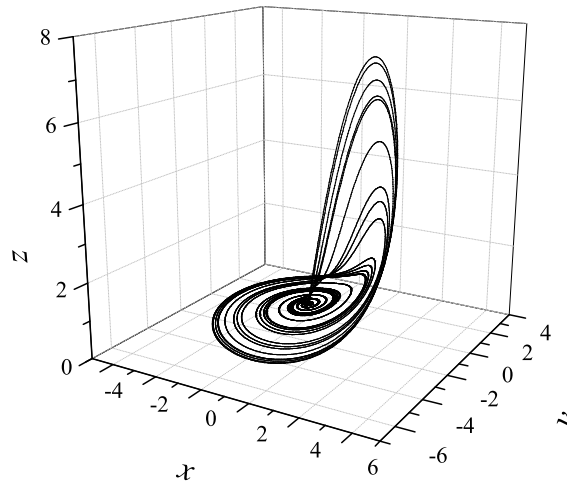


Figura 1.6 – Atrator estranho no espaço de fases 3D do sistema de Rössler para os parâmetros $a=0,432$, $b=2$, $c=4$.

periódico, $\lambda_{max} = 0$.

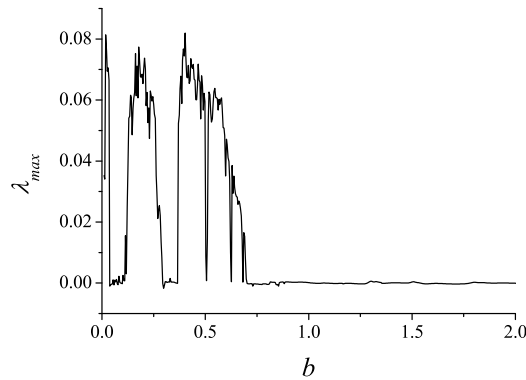


Figura 1.7 – Máximo expoente de Lyapunov, λ_{max} , do sistema de Rössler variando o parâmetro b . Os valores dos parâmetros mantidos fixos são $a=0,2$ e $c=5,7$.

Concluindo, neste capítulo tratamos de sistemas não-lineares, caracterizando estados dinâmicos (periodicidade e caos, por exemplo) em alguns sistemas como o de Lorenz e o de Rössler.

No próximo capítulo discutiremos algumas formas de acoplamento entre osciladores não-lineares e alguns tipos de sincronismo que podem ser obtidos a partir do acoplamento de sistemas caóticos.

CAPÍTULO 2

SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

Desde a década de 1990 muitos trabalhos foram realizados mostrando que sistemas caóticos podem sincronizar entre si. Os trabalhos, que deram início a essa área de pesquisa são de Louis Pecora e Thomas Carrol (Pecora & Carroll 1990, Carroll & Pecora 1991). Eles demonstraram o sincronismo entre sistemas não-lineares caóticos acoplados. Foram usados nessas realizações sistemas como os de Lorenz e de Rössler, entre outros. Desde então foram realizados vários trabalhos para implementação de sincronização de sistemas caóticos, entre os quais, sistemas com circuitos eletrônicos (Cuomo & Oppenheim 1993, Kokarev & Parlitz 1995, Kim *et al.* 2006, Senthilkumar *et al.* 2010, Wagemakers *et al.* 2008), lasers (Fischer *et al.* 2006, Zamora-Munt *et al.* 2010, Nixon *et al.* 2011, DeShazer *et al.* 2001) e mapas (Maritan & Banavar 1994, Pyragas 1996, Herzel & Freund 1995, Masoller *et al.* 2001). Para além da compreensão do comportamento de sistemas caóticos acoplados, existe um forte motivação de aplicação para a sincronização de sistemas caóticos como, por exemplo, para estabelecer comunicação privada entre dois osciladores (mensageiro e receptor), utilizando o sinal caótico de uma das fontes para esconder uma mensagem (Cuomo & Oppenheim 1993). Além da sincronização completa em que as trajetórias dos dois siste-

mas são idênticas, generalizando-se o conceito, pode-se encontrar outras formas de sincronismo, tais quais, sincronização de fase (Rosenblum *et al.* 1996), sincronização generalizada (Rulkov *et al.* 1995, Kocarev & Parlitz 1996), sincronização atrasada (Senthilkumar & Lakshmanan 2005, Ambika & Amritkar 2009, Bhowmick *et al.* 2012) e sincronização por ruído (Gammaitoni *et al.* 1998, Sagués *et al.* 2007, Toral *et al.* 2001).

Podemos nos referir a sincronização de caos como um processo entre dois ou mais sistemas caóticos, que podem ou não ser equivalentes, ajustados a uma dada propriedade de seus movimentos para um comportamento comum, devido a acoplamento ou forçamento, como discutido por S. Boccaletti (Boccaletti *et al.* 2002). Esse comportamento comum pode ser desde o sincronismo completo até o travamento de fases entre os sistemas caóticos ou uma relação mais complicada como sincronismo generalizado. Em síntese, o ajustamento de ritmos devido a interações é a essência do sincronismo (Pikovsky *et al.* 2002).

Dados dois sistemas dinâmicos independentes, podemos acoplá-los unidirecionalmente ou bidirecionalmente. Na primeira situação, temos uma configuração do tipo piloto-resposta (ou mestre-escravo), em que um sistema evolui livremente e o outro, recebe informações diretamente ou indiretamente do primeiro para controlar sua dinâmica. Ou seja, temos no sistema resposta um forçamento externo por sinal caótico gerado pelo sistema piloto. No caso do acoplamento bidirecional, os dois sistemas estão acoplados um ao outro e nenhum deles evolui livremente, não apresentando mais uma configuração do tipo piloto-resposta. Cada sistema é forçado a entrar em estado de equilíbrio com o outro de acordo com o nível da intensidade do acoplamento realizado entre ambos. Podemos ter também o acoplamento entre mais de dois osciladores caóticos, como já realizado, por exemplo, com três lasers acoplados (Fischer *et al.* 2006) ou uma rede de lasers, gerados em um meio de ganho do tipo cristal Nd-Yag, acoplados em diferentes arranjos (Nixon *et al.* 2011).

Uma ferramenta estatística para quantificar o grau de sincronismo entre dois osciladores caóticos acoplados é a função de correlação cruzada. A expressão do coeficiente de correlação de Pearson, normalizado, entre dois sinais, $f(t)$ e $g(t)$, é dada por:

$$C(\Delta t) = \frac{\langle (f(t) - \langle f \rangle)(g(t + \Delta t) - \langle g \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (f(t) - \langle f \rangle)^2 \rangle \langle (g(t + \Delta t) - \langle g \rangle)^2 \rangle}} \quad (2.1)$$

em que $\langle \rangle$ significa média. O Δt é uma translação temporal na função g . Esta função g

será a mais parecida possível à função f , quando o máximo da função de correlação ocorrer.

Quando f é proporcional a g , a função de correlação apresenta valor igual a 1 (constante de proporção positiva), ou -1 (constante de proporção negativa) caso as funções sejam opostas. Quando os sinais são completamente independentes a função de correlação apresenta valor igual a zero. Alguns pares de funções, como seno e cosseno, por exemplo, exibem correlação igual a zero para $\Delta t = 0$ e exibem $C = 1$ para $\Delta t = T/4$, onde T é o período do seno e do cosseno. Valores intermediários de $|C(\Delta t)|$ ($0 < |C(\Delta t)| < 1$) indicam grau parcial de equivalência das funções f e g . Quando obtemos o valor 1 para a função de correlação dizemos que os sistemas acoplados estão perfeitamente sincronizados; quando obtemos zero, os sistemas estão completamente descorrelacionados. Quando obtemos $C = 1$ para $\Delta t \neq 0$ para dois sistemas acoplados, significa que temos sincronização defasada temporal, antecipada ou atrasada, ou seja, os sistemas apenas são iguais se os olharmos em tempos diferentes, se olharmos em $\Delta t = 0$ não observaremos sincronização completa. Entretanto, a função de correlação mede apenas a interdependência linear entre f e g . Para medir interações não-lineares, devemos recorrer ao cálculo da informação mútua (Pompe 1993), definida como:

$$I(f, g, \Delta t) = H(f(t)) + H(g(t + \Delta t)) - H(f(t), g(t + \Delta t)). \quad (2.2)$$

Na Eq. 2.2, os termos $H(f)$ e $H(g)$ são as entropias de Shanon dos sinais f e g , respectivamente, e $H(f, g)$ mede a entropia da função de probabilidade conjunta. Aqui Δt também significa o quanto devemos deslocar temporalmente o sinal g para que o mesmo seja o mais parecido possível com f .

No decorrer deste capítulo exemplificaremos alguns casos de acoplamento entre dois sistemas caóticos acoplados. Nas duas primeiras seções mostraremos sincronismo completo entre sistemas caóticos acoplados tanto através de acoplamento direto como por acoplamento via sinal de erro, em que utilizamos sistemas como o de Lorenz e o de Rössler, apresentados no capítulo anterior. Utilizando novamente o sistema de Rössler discutiremos sincronização de fase, em que as amplitudes dos sinais dos sistemas acoplados estão descorrelacionadas, e com um sistema com defasagem temporal, discutiremos o caso da sincronização atrasada em que os sistemas acoplados apresentam respostas idênticas mas não ao mesmo tempo.

2.1 Sincronismo completo por acoplamento direto

Para exemplificar o acoplamento entre sistemas caóticos vamos analisar o sistema de Lorenz, como feito nas Ref. (Pecora & Carroll 1990, Carroll & Pecora 1991). Para realizarmos este acoplamento vamos construir dois sistemas idênticos e em seguida, acoplar o primeiro sistema no segundo, fazendo com que uma das variáveis do segundo sistema seja parcialmente trocada pela respectiva variável do primeiro sistema.

Consideremos um sistema dinâmico descrito por $\dot{\vec{u}} = f(\vec{u})$, onde $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$ e $()^T$ significa matriz transposta. Podemos reescrevê-lo como dois subsistemas, $\vec{u} = (\vec{v}, \vec{w})$ sendo $\vec{v} = (u_1, \dots, u_m)^T$ e $\vec{w} = (u_{m+1}, \dots, u_n)^T$, com $\dot{\vec{v}} = g(\vec{v}, \vec{w}) = f_1(\vec{u}), \dots, f_m(\vec{u})$ e $\dot{\vec{w}} = h(\vec{v}, \vec{w}) = f_{m+1}(\vec{u}), \dots, f_n(\vec{u})$. Agora consideremos um outro sistema idêntico ao primeiro, $\vec{u}' = (\vec{v}', \vec{w}')$, onde $\dot{\vec{v}}' = g'(\vec{v}', \vec{w}')$ e $\dot{\vec{w}}' = h'(\vec{v}', \vec{w}')$, em que o subsistema w' é gerado pelas variáveis w' do sistema u' e pelas variáveis v do sistema u . Note que o primeiro sistema $\vec{u}$ e o segundo sistema $\vec{u}'$ possuem a mesma dimensionalidade, o mesmo número de equações diferenciais. Substituímos parcialmente o subsistema $\vec{v}'$ pelo $\vec{v}$, ou seja, realizamos esta substituição apenas nas equações diferenciais $\dot{\vec{w}}'$, mas não em $\dot{\vec{v}}'$, de modo que o segundo sistema, idêntico ao primeiro, continua exibindo como variáveis dinâmicas $\vec{u}' = (\vec{v}', \vec{w}')$. Quando a diferença $\Delta w = w - w' \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ o sistema é dito sincronizado. Uma condição necessária, porém não suficiente, para o sistema sincronizar é que os expoentes de Lyapunov do subsistema w' sejam todos negativos.

Discutiremos agora o caso em que dois sistemas de Lorenz estão acoplados unidirecionalmente. Denotando (x_m, y_m, z_m) para o mestre e (x_e, y_e, z_e) para o escravo. O segundo sistema vai ter sua dinâmica influenciada pelo primeiro. Para o sistema escravo teremos também três equações dinâmicas, e podemos realizar o acoplamento através das variáveis x , y ou z . Para acoplar por x , substituiremos a variável x_e por x_m nas equações de $\dot{y}_e$ e $\dot{z}_e$, e como explicado no parágrafo acima, o subsistema v' é composto aqui por x_e e o w' por y_e e z_e . De modo análogo, podemos substituir y_e por y_m nas equações de $\dot{x}_e$ e $\dot{z}_e$ ou z_e por z_m equações de $\dot{x}_e$ e $\dot{y}_e$. Como mostrado nas Ref. (Pecora & Carroll 1990, Carroll & Pecora 1991) podemos sincronizar os dois sistemas de Lorenz utilizando como variável de acoplamento, v , tanto a

variável x_m como a y_m . No caso de utilizarmos a variável z_m não obtemos sincronismo, pois nem todos os expoentes de Lyapunov do subsistema w' são negativos neste caso.

As equações diferenciais para o sistema mestre são:

$$\dot{x}_m = \sigma(y_m - x_m), \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_m = rx_m - y_m - x_m z_m, \quad (2.4)$$

$$\dot{z}_m = x_m y_m - bz_m, \quad (2.5)$$

As equações diferenciais para o sistema escravo acoplado ao sistema mestre através da variável x_m são:

$$\dot{x}_e = \sigma(y_e - x_e), \quad (2.6)$$

$$\dot{y}_e = rx_m - y_e - x_m z_e, \quad (2.7)$$

$$\dot{z}_e = x_m y_e - bz_e. \quad (2.8)$$

E as equações diferenciais para o sistema escravo acoplado ao sistema mestre através da variável z_m são:

$$\dot{x}_e = \sigma(y_e - x_e), \quad (2.9)$$

$$\dot{y}_e = rx_e - y_e - x_e z_m, \quad (2.10)$$

$$\dot{z}_e = x_e y_e - bz_e. \quad (2.11)$$

Dois sistemas de Lorenz idênticos desacoplados, ambos operando em regime caótico, exibem séries temporais descorrelacionadas. Pois por definição sistemas caóticos são exponencialmente sensíveis a condições iniciais e sendo assim, os dois sistemas não apresentam séries temporais iguais. Note que as simulações numéricas devem ser realizadas a partir de condições iniciais distintas para verificar a independência entre os dois sistemas de Lorenz idênticos desacoplados. Caso contrário, ao efetuarmos as simulações numéricas teremos os mesmos resultados para mestre e escravo, pois tanto as equações diferenciais como as condições iniciais são iguais.

Na Fig. 2.1 temos a diferença entre as séries temporais das variáveis x de dois sistemas de Lorenz idênticos acoplados através da variável x_m inserida no subsistema y_e e z_e como

descrito nas Eqs. 2.6 - 2.8. Neste caso o sistema acoplado exibe sincronismo completo, as soluções dos sistemas mestre e escravo são iguais, assim as séries temporais x_m e x_e são iguais e a diferença entre x_m e x_e é zero. Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas são $r = 28$, $b = 8/3$ e $\sigma = 10$.

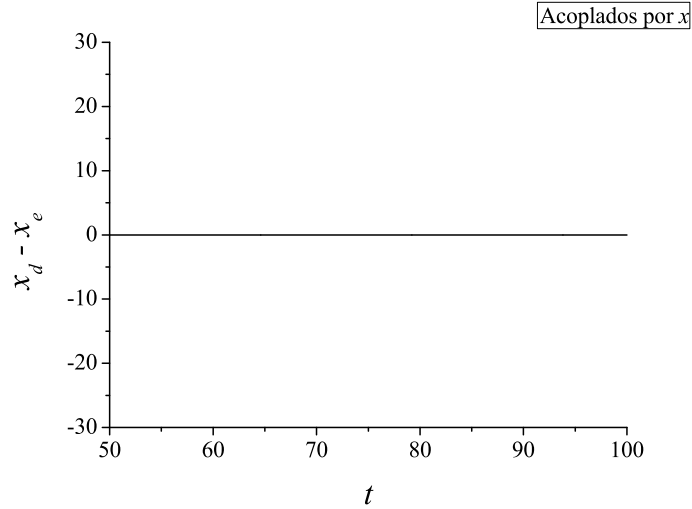


Figura 2.1 – Série temporal da diferença entre as variáveis x de dois sistemas de Lorenz idênticos acoplados através da variável x_m inserida no subsistema $\dot{y}_e$ e $\dot{z}_e$ em que observamos sincronismo. Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas são $r = 28$, $b = 8/3$ e $\sigma = 10$.

Na Fig. 2.2 temos as séries temporais das variáveis x de dois sistemas de Lorenz idênticos acoplados através da variável da variável z_m inserida no subsistema $\dot{x}_e$ e $\dot{y}_e$ como descrito nas Eqs. 2.9 - 2.11. Neste caso as séries temporais x_m e x_e não são iguais, os sistemas mestre e escravo não apresentam as mesmas soluções, de modo que a diferença entre x_m e x_e é diferente de zero. Então não observamos sincronismo no sistema acoplado.

Essa diferença nas respostas dos sistemas acoplados diretamente através da variável x_m ou através da variável z_m é devida aos expoentes de Lyapunov do subsistema escravo. Quando o acoplamento é feito através de x_m os dois expoentes de Lyapunov do subsistema escravo são negativos. Enquanto que, ao efetuarmos o acoplamento através de z_m , um dos expoentes de Lyapunov é positivo, impedindo o sincronismo entre mestre e escravo. Podemos realizar esta mesma análise em outros sistemas, como o de Rössler, obtendo o mesmo resultado geral: quando todos os expoentes de Lyapunov do subsistema escravo forem negativos, o sistema acoplado exibe sincronismo, mas se um dos expoentes de Lyapunov for positivo não obtemos

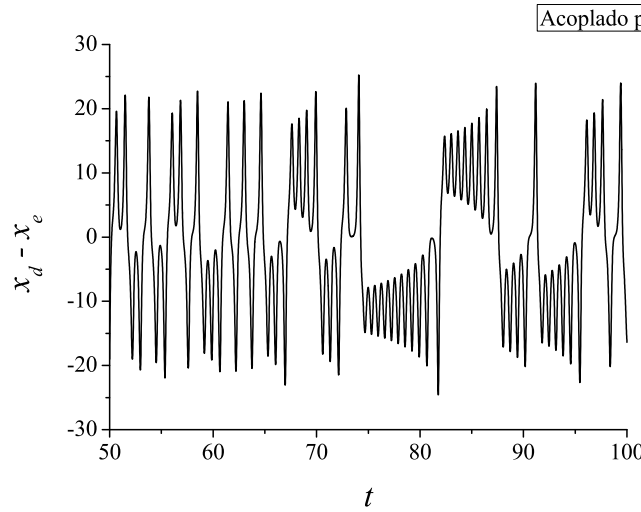


Figura 2.2 – Série temporal da diferença entre as variáveis x de dois sistemas de Lorenz idênticos acoplados através da variável z_m inserida no subsistema $\dot{x}_e$ e $\dot{y}_e$ em que não observamos sincronismo entre mestre e escravo. Os valores dos parâmetros utilizados nas simulações numéricas são $r = 28$, $b = 8/3$ e $\sigma = 10$.

sincronismo (Pecora & Carroll 1990, Carroll & Pecora 1991).

2.2 Sincronismo completo por acoplamento via realimentação negativa

Podemos obter sincronismo completo entre osciladores caóticos através do acoplamento direto (seção anterior) como também através de acoplamento via realimentação negativa. Diferente da seção anterior, tratamos aqui dois sistemas caóticos que podem ser acoplados unidirecionalmente, em que o segundo sistema é estimulado pela dinâmica do primeiro sistema; ou bidirecionalmente, em que cada um dos dois sistemas, simultaneamente, recebem informações da dinâmica do outro, simultaneamente. Para exemplificar tal processo, analisaremos aqui o caso do acoplamento bidirecional via realimentação negativa para dois sistemas de Rössler. Nas equações a seguir o índice m (mestre) é para o sistema piloto e o índice e (escravo) denota as equações do sistema resposta. No sistema piloto utilizamos os parâmetros $a_m = 0,2$, $b_m = 0,2$, $c_m = 9$ e no sistema resposta utilizamos os parâmetros $a_e = 0,201$, $b_e = 0,198$, $c_e = 9,001$, ou seja, existe uma pequena diferença entre os parâmetros ($\sim 10^{-3}$).

Na Fig. 2.3 exibimos a projeção bidimensional no plano (x_m, y_m) do atrator caótico do sistema de Rössler piloto que é similar ao atrator caótico do sistema resposta, entretanto são descorrelacionados quando desacoplados.

$$\dot{x}_m = -y_m - z_m + K(x_e - x_m) \quad (2.12)$$

$$\dot{y}_m = x_m + ay_m \quad (2.13)$$

$$\dot{z}_m = b + z_m(x_m - c) \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_e = -y_e - z_e + K(x_m - x_e) \quad (2.15)$$

$$\dot{y}_e = x_e + ay_e \quad (2.16)$$

$$\dot{z}_e = b + z_e(x_e - c) \quad (2.17)$$

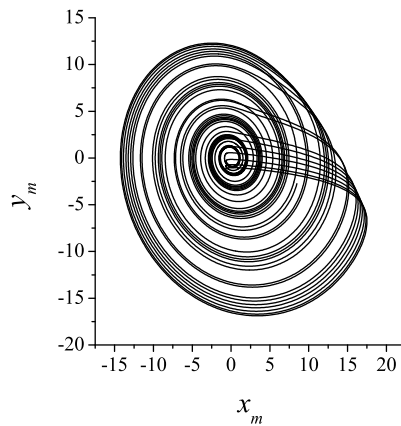


Figura 2.3 – Projeção 2D no plano (x_m, y_m) do atrator estranho do sistema de Rössler para os parâmetros $a_m = 0,2$, $b_m = 0,2$, $c_m = 9$.

Portanto, os parâmetros estão ligeiramente diferentes para simular o que temos em um sistema experimental, no qual não podemos conseguir duas cópias completamente iguais, pois sempre há um desencontro de parâmetros, por menor que seja. Um estudo numérico similar pode ser feito utilizando-se parâmetros iguais em ambos sistemas, piloto e resposta, porém adicionando-se ruído branco de amplitude muito menor que o sinal caótico do sistema (Heagy *et al.* 1995). Adicionar ruído branco com amplitude muito pequena nas simulações numéricas de sistemas idênticos acoplados ou utilizar um pequeno desajuste de parâmetros para sistemas quase-idênticos acoplados serve para evitar que obtenhamos sincronização

completa devido a perfeita igualdade das equações e, de fato, simular o melhor possível o que observamos em um experimento real.

Na Fig. 2.4 temos projeções no plano (x_m, x_e) dos sistemas piloto e resposta variando-se o nível de acoplamento $K \in \{0; 0,1; 0,2\}$. Vemos que para $K = 0$ o sistema está desacoplado e não há correlação entre as evoluções de piloto e resposta. À medida que aumentamos o nível de acoplamento os sistema tendem a sincronizar até que para $K = 0,2$ temos sincronismo completo.

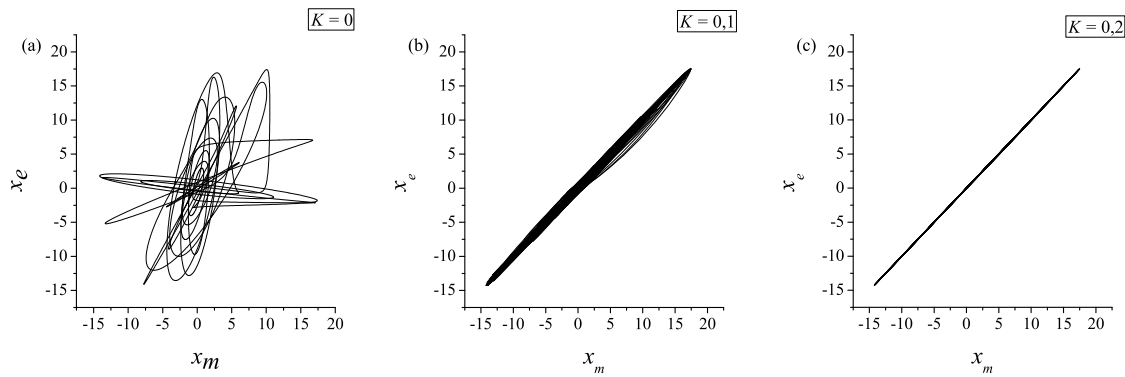


Figura 2.4 – Projeções no plano (x_m, x_e) dos sistemas piloto e resposta com os níveis de acoplamento $K =$ (a) 0, 1; (b) 0, 1; (c) 0, 2.

Na próxima seção trataremos da sincronização de fase entre osciladores caóticos. Este tipo de sincronização ocorre para níveis baixos de acoplamento, ocorrendo o travamento entre as fases dos osciladores mas suas amplitudes se mantêm descorrelacionadas.

2.3 Sincronização de fase

A sincronização de fase entre sistemas dinâmicos tem sido bastante estudada, visto que em diversas situações a intensidade do acoplamento realizado entre dois sistemas não é suficiente para gerar sincronismo completo, ou seja, tanto em fase quanto em amplitude. Como veremos adiante, um sinal x pode ser descrito em termos de duas variáveis, sua amplitude e sua fase. Em alguns casos, é apenas a parte da fase do sinal x que vai ser sincronizada com a fase de outro sinal.

O fenômeno da sincronização tem sido estudado em diversos sistemas, entre eles, em

sistemas biológicos (Strogatz 1994). Por exemplo, um modelo para o comportamento de um vagalume estabelece que, dado um vagalume piscando a uma frequência ω e uma fonte de luz que pisca com frequência Ω , este vagalume vai responder a esse estímulo tentando sincronizar o seu “piscar” ao da fonte de luz.

Se a evolução dinâmica da fase da fonte de luz é dada por $\dot{\Theta} = \Omega$ (frequência constante), podemos escrever para a do vagalume, $\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta)$ onde a frequência ω pode ser ajustada para acompanhar o estímulo. Com esse modelo, vemos que se o vagalume pisca com frequência menor que a fonte de luz, então $A \sin(\Theta - \theta) > 0$ e ω aumenta. Se o vagalume pisca com frequência maior que a fonte de luz, $A \sin(\Theta - \theta) < 0$ e ω diminui.

Analizando a diferença de fases entre a fonte de luz e o piscar do vagalume temos $\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin(\phi)$. Tornando adimensional esta equação, $\tau = At$ e $\mu = (\Omega - \omega)/A$, encontramos $d\phi/d\tau = \mu - \sin(\phi)$. Esta equação possui pontos fixos dependendo do valor de μ : (i) se $\mu = 0$ temos três pontos fixos no intervalo $-\pi < \phi < \pi$, que são $\phi^* = \pm\pi$ (instáveis) e $\phi = 0$ (estável), ou seja, o vagalume pisca na mesma frequência e em fase com a fonte de luz; (ii) se $0 < \mu < 1$, temos dois pontos fixos $\phi^* > 0$, um estável e um instável, ou seja, o vagalume pisca na mesma frequência mas não ao mesmo momento que a fonte de luz; e (iii) se $\mu > 1$ não temos pontos fixos, ou seja, o vagalume não consegue piscar na mesma frequência da fonte de luz. Se esta análise for feita para $\mu < 0$ teremos resultados semelhantes.

Outro exemplo no qual podemos estudar sincronismo de fase é o acoplamento entre um sinal periódico senoidal de frequência ω_f e o sistema de Rössler. Para tanto, vamos adicionar o termo periódico em uma das equações diferenciais que regem a evolução dinâmica do sistema de Rössler, neste caso em $\dot{x}$. A seguir temos o sistema de equações:

$$\dot{x} = -\omega y - z + K \sin(\omega_f t) \quad (2.18)$$

$$\dot{y} = \omega x + ay \quad (2.19)$$

$$\dot{z} = b + z(x - c) \quad (2.20)$$

Aqui os parâmetros fixos são $\omega = 0,97$, $a = 0,04$, $b = 0,2$, $c = 10$, que sintoniza o sistema para um estado periódico de frequência $\Omega = 0,98$. Vamos variar a frequência ω_f do

sinal periódico, assim como a intensidade de seu acoplamento K ao sistema de Rössler. Ao ajustarmos os parâmetros para $w_f = 1,0$ e $K = 0,4$, temos os resultados exibidos na Fig. 2.5 em que vemos o atrator periódico de Rössler no plano (x, y) , as séries temporais da fase do atrator de Rössler e da fase do sinal periódico externo e série temporal da diferença de fase entre os dois sinais mostrando que o sistema está sincronizado em fase.

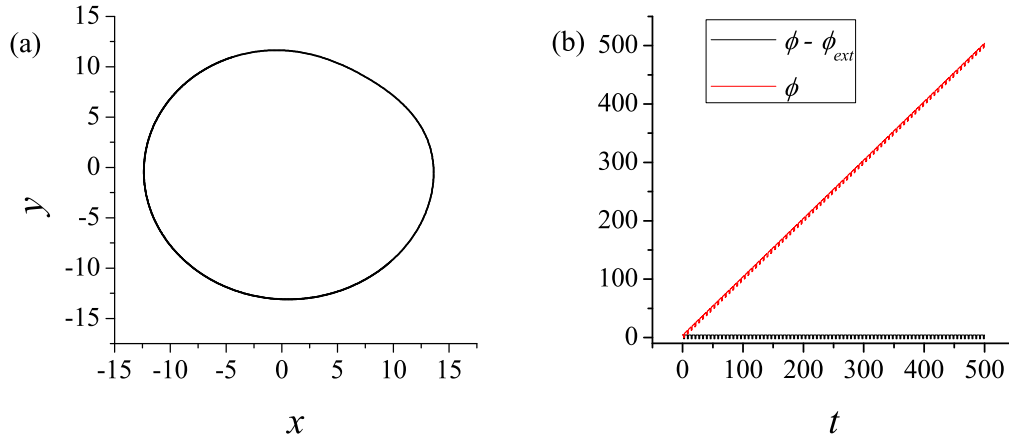


Figura 2.5 – (a) Atrator periódico no plano (x, y) . (b) Séries temporais da fase do atrator de Rössler e da diferença de fase entre os dois sinais mostrando que o sistema está sincronizado em fase.

Calcular a fase de um sistema não-linear em regime caótico pode ser não trivial, deste modo vários métodos têm sido propostos (Rosenblum *et al.* 1996), onde alguns são discutidos a seguir. Para atratores caóticos mais simples, como o da Fig. 2.6(a) em que a trajetória oscila em torno de um centro bem definido, podemos calcular sua fase fazendo:

$$\phi = \arctan(y/x), \quad (2.21)$$

ou podemos calcular a fase utilizando uma seção de Poincaré e fazendo:

$$\phi = 2\pi l + 2\pi \frac{t - \tau_l}{\tau_{l+1} - \tau_l} (\tau_l < t < \tau_{l+1}), \quad (2.22)$$

em que τ_l é o tempo do l -ésimo cruzamento da trajetória através da seção de Poincaré. Para atratores caóticos mais complexos como o da Fig. 2.6(b) podemos calcular a fase do sinal caótico pela abordagem do sinal analítico (Gabor 1946), $\Psi(t) = s(t) + j\tilde{s}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$, em que $\tilde{s}(t)$ é a transformada de Hilbert do sinal caótico $s(t)$; ou utilizando as derivadas das variáveis do sinal caótico (Osipov *et al.* 2003).

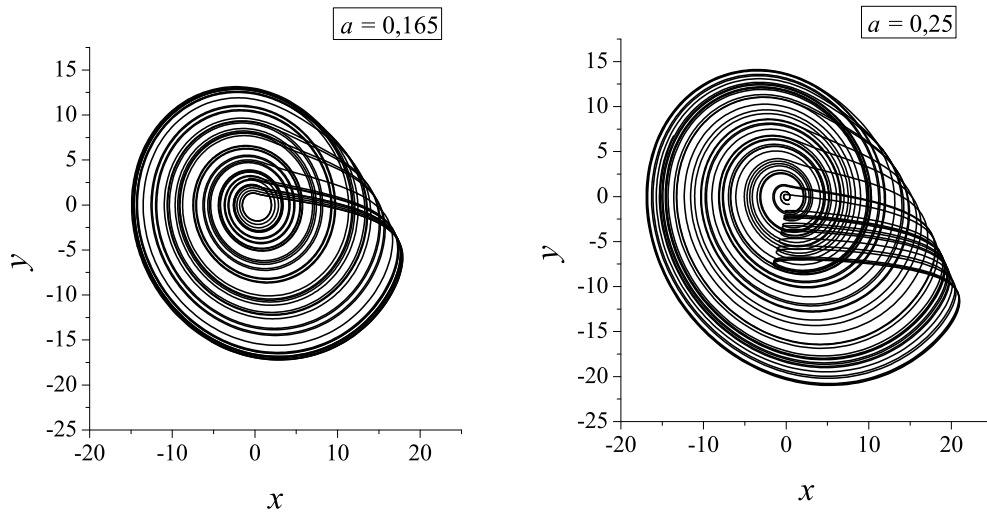


Figura 2.6 – Atratores caóticos do sistema de Rössler no plano (x, y) .

Fazendo $a = 0,165$, $K = 0,15$ mostramos na Fig. 2.7 um gráfico estroboscópico, ou seja, registramos a posição da trajetória que forma o atrator caótico no espaço de fases do sistema de Rössler a cada período do sinal externo. À esquerda, para $\omega_f = 1,0$ observamos que o gráfico estroboscópico se concentra em uma área do atrator caótico, exibindo assim a correlação entre a fase do atrator caótico e a fase do sinal externo, ou seja, sincronismo de fase. À direita, temos $\omega_f = 1,02$ e o gráfico estroboscópico recobre todo o atrator caótico mostrando que é necessário um maior acoplamento para obtermos sincronismo de fase.

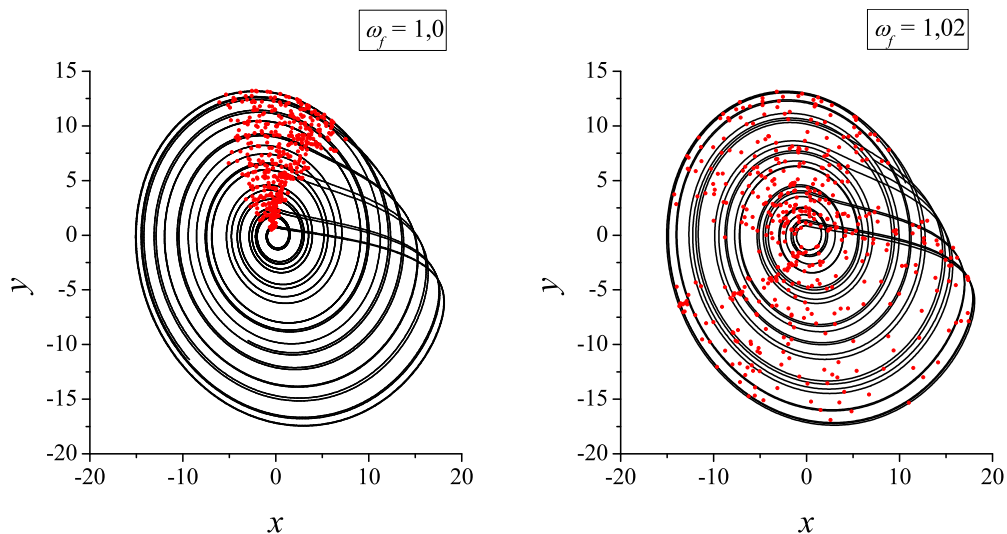


Figura 2.7 – Gráfico estroboscópico do atrator caótico de Rössler em cada período do sinal externo com $K = 0,1$ e para $w_f = 1,0$, esquerda, e $w_f = 1,02$, direita.

Depois de estudar sincronismo de fase entre um sistema de Rössler e um sinal periódico

externo, vamos analisar o acoplamento bidirecional entre dois sistemas de Rössler em regime caótico. O acoplamento é realizado adicionando o termo $K(x_2 - x_1)$ em $\dot{x}_1$ e o termo $K(x_1 - x_2)$ em $\dot{x}_2$. O acoplamento poderia ter sido realizado através das variáveis y ou das variáveis z e a análise, a ser feita, é a mesma que faremos a seguir. Entretanto, como vimos para sistemas acoplados diretamente, nem em todos os casos as variáveis conseguem sincronizar completamente, para os sistemas de Rössler acoplados bidirecionalmente através das variáveis x o sincronismo de fase é atingido. As equações do sistema estão descritas a seguir:

$$\dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - z_1 + K(x_2 - x_1) \quad (2.23)$$

$$\dot{y}_1 = \omega_1 x_1 + 0,165 y_1 \quad (2.24)$$

$$\dot{z}_1 = 0,2 + z_1(x_1 - 10) \quad (2.25)$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - z_2 + K(x_1 - x_2) \quad (2.26)$$

$$\dot{y}_2 = \omega_2 x_2 + 0,165 y_2 \quad (2.27)$$

$$\dot{z}_2 = 0,2 + z_2(x_2 - 10) \quad (2.28)$$

Nesse caso temos, $\omega_1 = 0,97$ e $\omega_2 = 1,03$. Variando-se K controlamos a intensidade do acoplamento entre os sistema 1 e o sistema 2. Na Fig. 2.8 temos séries temporais de x_1 e x_2 para $K = 0,01$ e para $K = 0,03$. À esquerda, vemos que as séries temporais estão completamente descorrelacionadas enquanto que ao aumentarmos o nível de acoplamento a partir de um certo valor crítico, que varia com a diferença $\omega_1 - \omega_2$, obtemos sincronismo de fase como podemos ver na Fig. 2.8, à direita.

Na Fig. 2.9 temos séries temporais da diferença de fase, $\phi_1 - \phi_2$, dos dois sistemas de Rössler acoplados para $K = 0,01$, $K = 0,02$ e para $K = 0,03$. Quando não há correlação entre as fases dos sistemas 1 e 2, $\phi_1 - \phi_2$ cresce com o tempo, enquanto que quando temos sincronismo de fase, $\phi_1 - \phi_2 \sim 0$, ou seja, não cresce com o passar do tempo. Na Fig. 2.9 observamos sincronismo de fase no caso $K = 0,03$.

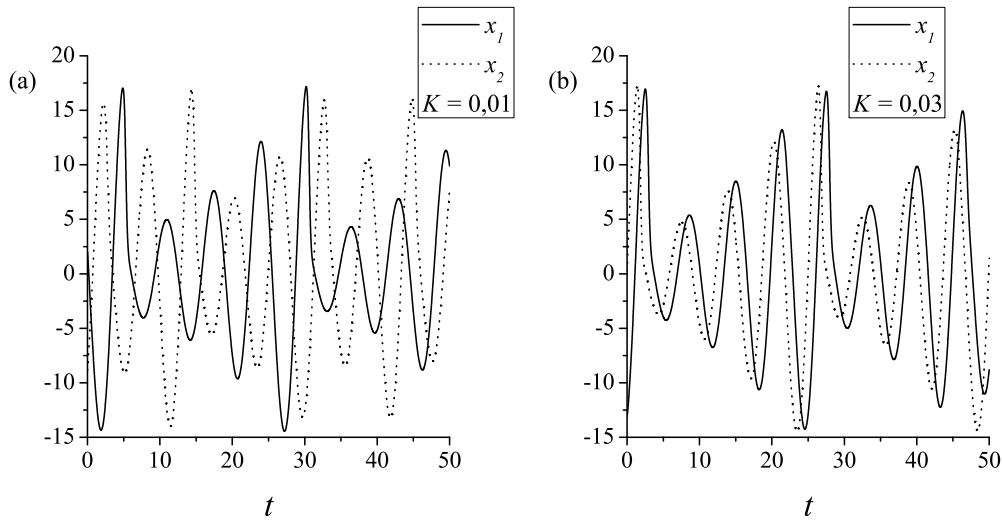


Figura 2.8 – (a) Séries temporais de x_1 e x_2 para $K = 0,01$. As duas séries temporais estão completamente descorrelacionadas. (b) Vemos que as séries temporais estão em fase, apesar da amplitude ainda estar descorrelacionada. Ou seja, temos sincronismo de fase.

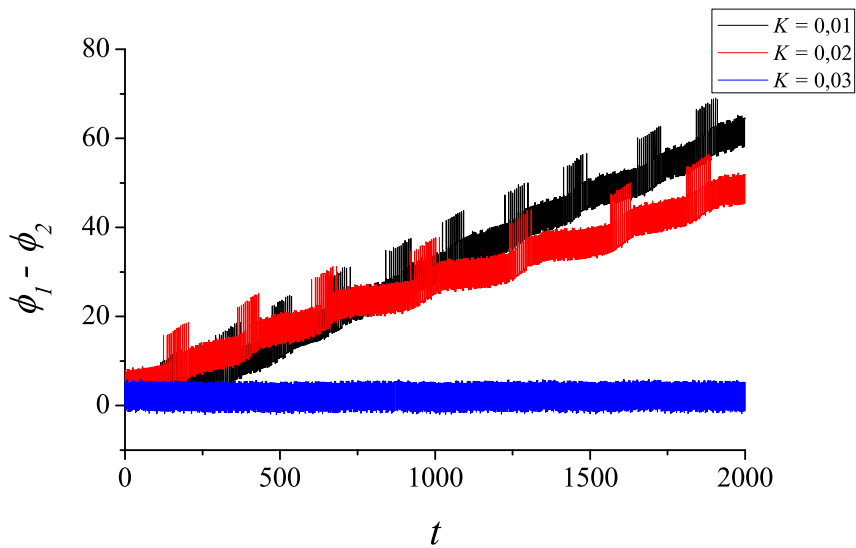


Figura 2.9 – Diferença de fase dos dois sistemas de Rössler acoplados para $K = 0,01$ e $K = 0,02$, em que não há sincronismo, e para $K = 0,03$ em que observamos que a diferença de fase não cresce com o tempo, ou seja, o sistema está sincronizado em fase.

2.4 Sincronismo antecipado e retardado

Podemos encontrar sincronismo com atraso temporal entre dois osciladores caóticos acoplados, seja esse atraso positivo ou negativo (Senthilkumar & Lakshmanan 2005). Lembrando que sistemas nos quais a dinâmica possui atraso temporal podem exibir comportamento caó-

tico mesmo quando descritos por apenas uma única equação diferencial de primeira ordem, pois são ditos de dimensão infinita (Farmer 1982). Para descrevermos o estado atual de um sistema com atraso temporal precisamos saber o valor de sua variável x durante o intervalo de tempo que vai do momento atual t até o tempo passado $t - \tau$, em que τ é o tempo de atraso do sistema.

Uma equação diferencial que rege um específico sistema dissipativo com atraso temporal é descrita a seguir:

$$\dot{x}_1(t) = -a_1 x(t) + b_1 f(x_1(t - \tau_1)), \quad (2.29)$$

com,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq -4/3, \\ -1,5x - 2, & \text{se } -4/3 \leq x < -0,8, \\ x, & \text{se } -0,8 \leq x < 0,8, \\ -1,5x + 2, & \text{se } 0,8 \leq x < 4/3, \\ 0, & \text{se } x > 4/3. \end{cases} \quad (2.30)$$

Nesse sistema a_1 , b_1 , e τ_1 são parâmetros ajustáveis. Aqui, vamos utilizar $a_1 = 0,16$, $b_1 = 0,2$ e $\tau = 25,0$ para obter comportamento caótico, Fig. 2.10.

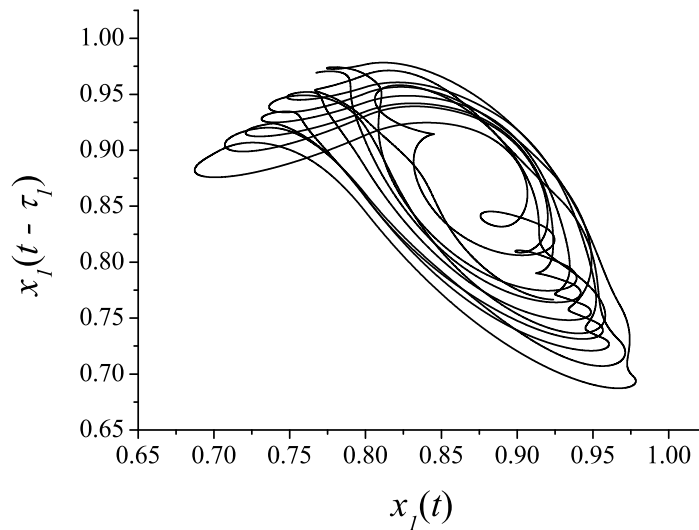


Figura 2.10 – Atrator caótico no plano $(x(t), x(t - \tau_1))$.

O sistema resposta é dado por:

$$\dot{x}_2(t) = -a_1x(t) + b_2f(x_2(t - \tau_1)) + b_3f(x_1(t - \tau_2)), \quad (2.31)$$

onde b_3 é o fator de acoplamento com o sistema piloto, τ_2 é o atraso temporal da linha de acoplamento e pode ser menor, igual ou maior que o tempo de atraso τ_1 interno de cada sistema.

As condições sobre os parâmetros b_2 e b_3 para obter sincronismo entre os sistemas piloto e resposta são discutidas na Ref. (Senthilkumar & Lakshmanan 2005). O nível de sincronismo pode ser quantificado pela função de similaridade (Rosenblum *et al.* 1997):

$$S^2(\tau) = \frac{\langle [x_2(t + \tau) - x_1(t)]^2 \rangle}{[\langle x_1^2(t) \rangle \langle x_2^2(t) \rangle]^{1/2}}, \quad (2.32)$$

em que procura-se o mínimo desta função. Se x_1 e x_2 estão sincronizados com atraso temporal, então S apresenta um mínimo para um determinado tempo de atraso τ ; caso contrário, se os sistemas são independentes, S é da ordem do tamanho dos sinais x_1 e x_2 e $S \sim 1$ para qualquer τ . No caso de sincronização completa, quando não há atraso temporal entre os sistemas temos $S = 0$ para $\tau = 0$.

Na Fig. 2.11 temos (a) séries temporais dos sistemas piloto e resposta com $b_2 = 0, 1$, $b_3 = 0, 1$ e $\tau_2 = 20, 0$, e (b) a projeção no plano $(x_1(t), x_2(t))$ mostrando que não há sincronismo a tempo atual entre os sistemas e (c) a projeção no plano $(x_1(t), x_2(t - \tau))$ em que observamos o sincronismo antecipado, e $\tau = \tau_2 - \tau_1 = 20 - 25 = -5$.

Fazendo agora $\tau_2 = \tau_1$, temos $\tau = \tau_2 - \tau_1 = 0$, o sistema acoplado exhibe sincronismo completo e instantâneo (isócrono) como vemos na Fig. 2.12.

Aumentando mais o valor do atraso temporal da linha de acoplamento, $\tau_2 = 30$ ($\tau = 5$), o sistema resposta passa a sincronizar atrasado com o sistema piloto, Fig. 2.13.

Na seção seguinte abordaremos o sincronismo entre lasers, que são sistemas físicos importantes, pois ainda são objeto de estudo e são largamente utilizados em experimentos de ótica, física atômica e metrologia entre outras áreas da Física. Sistemas lasers podem exibir comportamento caótico e com os quais diversos trabalhos sobre sincronização foram realizados (Fischer *et al.* 2006, Zamora-Munt *et al.* 2010, Nixon *et al.* 2011, DeShazer *et al.* 2001).

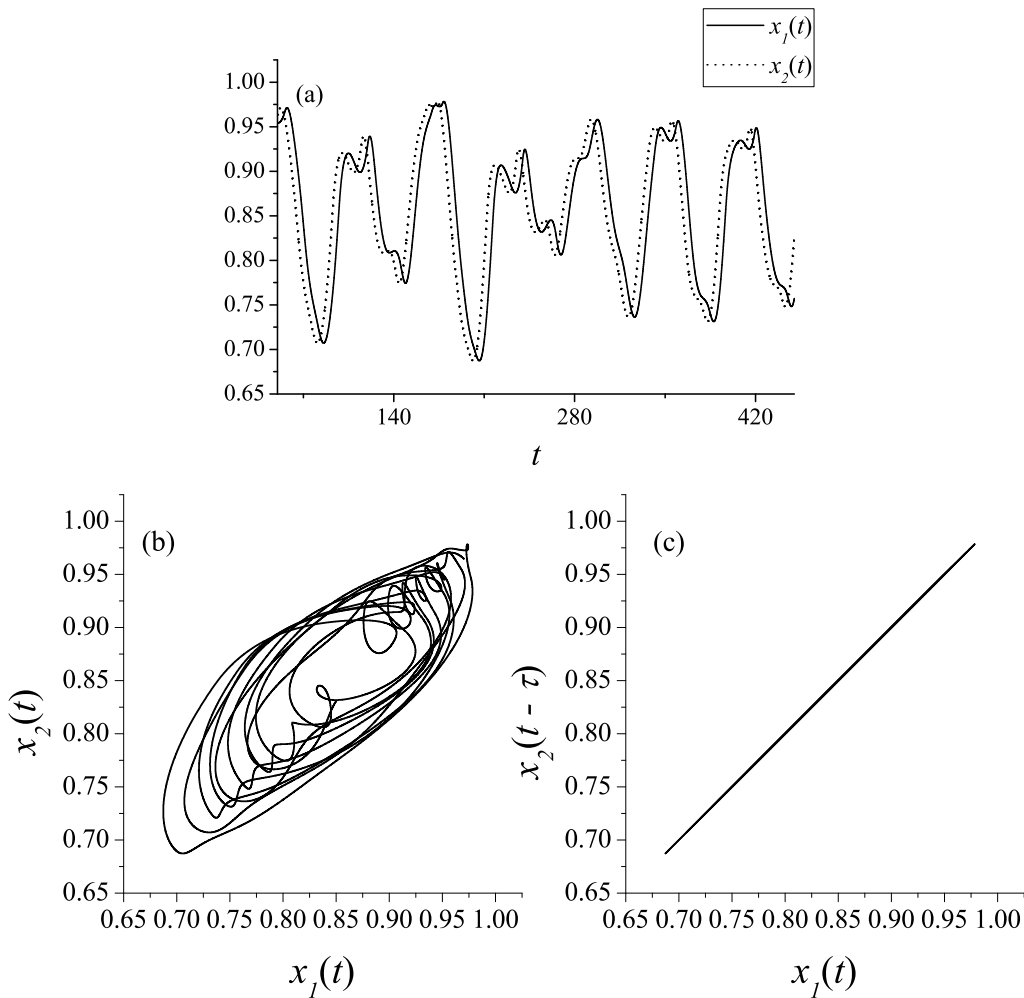


Figura 2.11 – (a) Séries temporais dos sistemas com atraso temporal piloto e resposta com $b_2 = 0, 1$, $b_3 = 0, 1$, $\tau_2 = 20$ e $\tau = \tau_2 - \tau_1 = -5$. Projeções nos planos (b) $(x_1(t), x_2(t))$, sem sincronismo, e (c) $(x_1(t), x_2(t - \tau))$ em que observamos o sincronismo antecipado.

2.5 Sincronismo entre lasers

A dinâmica temporal de um laser (de semicondutor, de fibra dopada por érbio, de CO_2 , entre outros) também pode exibir comportamento caótico (Schwartz 1988, Weiss *et al.* 1988, Winful & Rahman 1990, Wang & Shen 2001). Em particular, para um sistema laser de semicondutor as variáveis são a amplitude do campo elétrico E , a fase ótica dependente do tempo Φ , e o número de portadores da região ativa de ganho η . Um modo de ajustar um laser de semicondutor para que ele emita caoticamente é reinjetar a luz na cavidade laser utilizando polarização paralela a de emissão. Dependendo do tempo que a luz emitida leva para ser reinjetada na cavidade, ou seja, do comprimento do caminho ótico da realimentação,

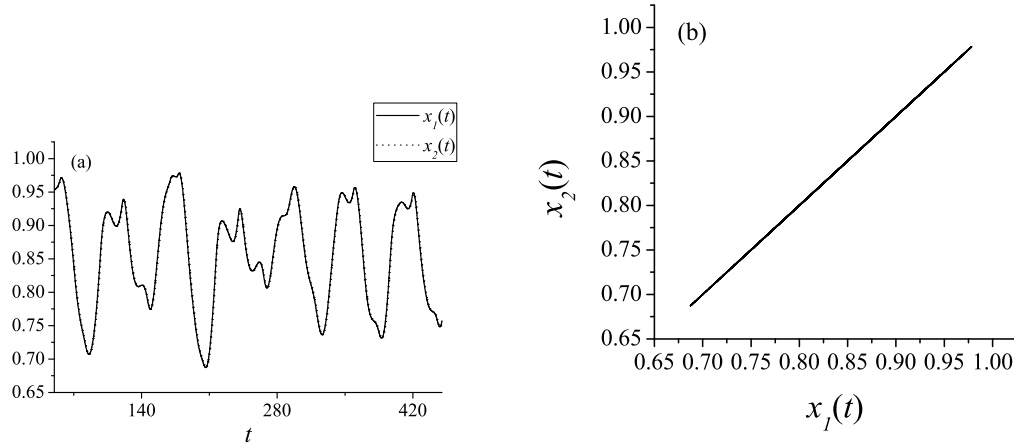


Figura 2.12 – (a) Séries temporais dos sistemas com atraso temporal piloto e resposta com $b_2 = 0, 1$, $b_3 = 0, 1$, $\tau_2 = 25$ e $\tau = 0$. (b) Projeção no plano $(x_1(t), x_2(t))$ em que observamos o sincronismo completo.

podemos controlar o estado dinâmico do laser semiconductor entre periódico e caótico. Do mesmo modo, podemos ter dois lasers em regime caótico e realizar um acoplamento mútuo, injetar a luz de um na cavidade laser do outro (Winful & Rahman 1990).

Utilizando um laser em anel de fibra dopada por érbio (EDFRL) produzindo luz caótica de $1.53 \mu\text{m}$, Gregory D. VanWiggeren e Rajarshi Roy introduziram uma mensagem de 10 MHz em uma portadora caótica com banda de frequência larga e transmitiram para sistema receptor em que recuperaram a mensagem escondida no sinal caótico do laser, estabelecendo assim comunicação mascarada (VanWiggeren & Roy 1998).

Ingo Fisher e colaboradores (Fischer *et al.* 2006) mostraram que é possível sincronizar dois lasers acoplados isocronicamente via um terceiro laser. Utilizando uma configuração em anel aberto, em que o laser 1 acopla bidirecionalmente com o laser 2, que por sua vez, também acopla bidirecionalmente com o laser 3, entretanto os lasers 1 e 3 estão desacoplados. Nessa configuração, os lasers 1 e 3 emitem campos elétricos iguais isocronicamente. Como o acoplamento entre os lasers é feito através da luz emitida de cada um, e a luz tem velocidade finita, leva-se um tempo diferente de zero para que a emissão de um laser seja injetada em outro laser. Nessa configuração de três lasers acoplados, I. Fisher *et al.* mostraram o sincronismo isocrônico entre os lasers 1 e 3 e sincronismo atrasado entre os lasers 1 e 2 e entre os lasers 2 e 3.

Por sua vez, Micha Nixon e colaboradores (Nixon *et al.* 2011) estudaram uma rede de

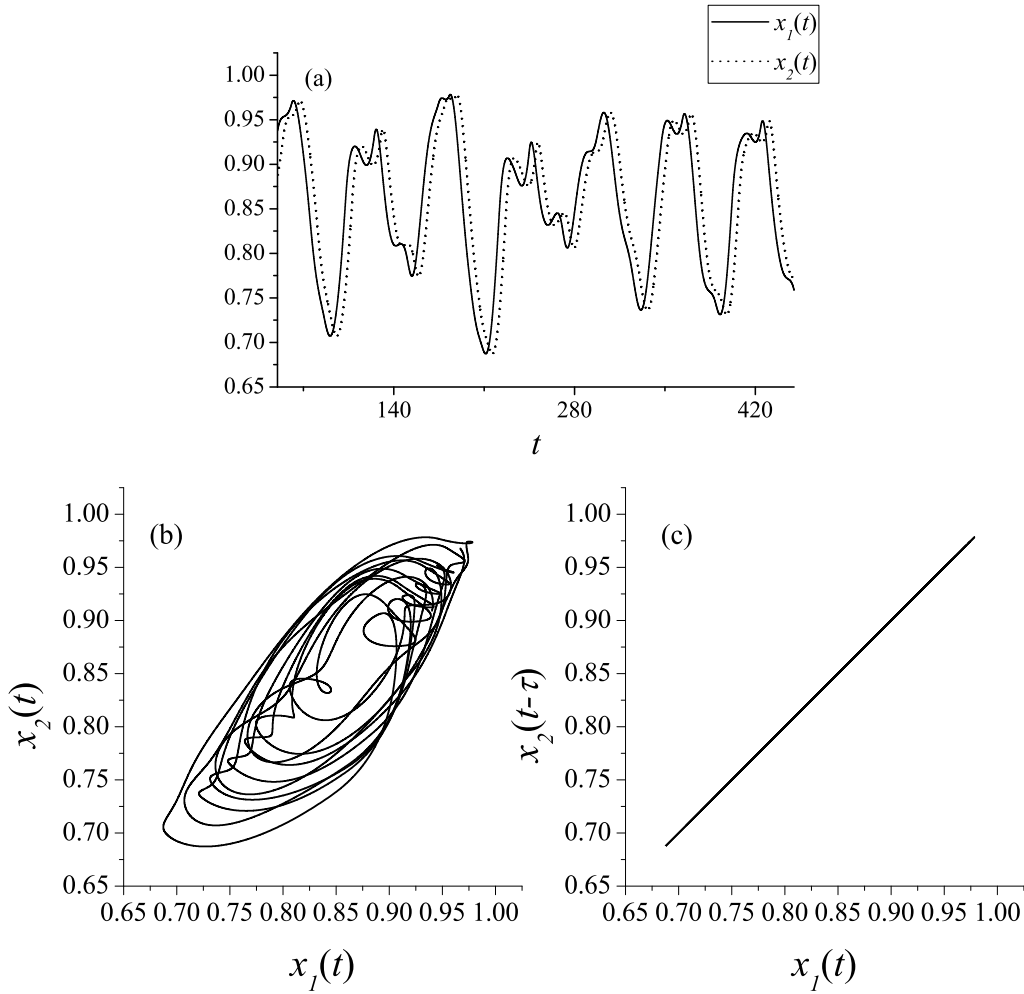


Figura 2.13 – (a) Séries temporais dos sistemas com atraso temporal piloto e resposta com $b_2 = 0,1$, $b_3 = 0,1$, $\tau_2 = 25$ e $\tau = 5$. (b) Projeção no plano $(x_1(t), x_2(t))$ em que não observamos sincronismo no sistema acoplado. (c) Projeção no plano $(x_1(t), x_2(t - \tau))$ em que observamos o sincronismo completo.

lasers com diferentes arranjos de acoplamento. Utilizando como meio de ganho um cristal Nd-Yag que permite gerar várias fontes lasers independentes e desacopladas no mesmo cristal. Gerando 7 fontes lasers M. Nixon *et al.* mostraram que dependendo de como é realizado o acoplamento entre as diferentes fontes laser o sistema pode ou não exibir sincronismo de fase. Quando conectadas as 7 fontes lasers em anel fechado o sistema exibe sincronismo de fase em todas as fontes lasers. Quando utilizadas apenas 6 fontes lasers, também em anel fechado, o sistema passa a exibir sincronismo de fase em sub redes, em que cada laser está sincronizado em fase com os seus segundos vizinhos mas não com os primeiros vizinhos, ou seja, sincronismo de fase entre as fontes laser pares e sincronismo de fase entre as fontes laser ímpares, e essas duas sub redes não estão sincronizadas entre si, não há sincronismo de fase

entre uma fonte laser par com uma fonte laser ímpar.

2.6 Sincronismo em outros sistemas

Em alguns sistemas não-lineares também tem sido estudado o efeito de ruído, que pode ser gaussiano ou não, para se gerar sincronismo entre osciladores caóticos que não necessariamente estão acoplados diretamente. Podemos citar a ressonância estocástica que otimiza a resposta de um sistema a um sinal externo (Gammaitoni *et al.* 1998) e a ressonância coerente em que ruído puro pode gerar movimento coerente no sistema (Pikovsky & Kurths 1997, Zhou *et al.* 2001) e a ressonância coerente determinística na qual o ruído é substituído por dinâmica caótica determinística (Avila *et al.* 2004). O efeito de ruído na sincronização é caracterizado em diversos sistemas biológicos, como neurociência e ecologia; (Mainen & Sejnowski 1995, Bjørnstad *et al.* 1999, Hudson & Cattadori 1999).

Sistemas não-lineares formados por mais de dois osciladores caóticos acoplados localmente ou globalmente formam conjuntos que podem exibir sincronismo em populações (Strogatz *et al.* 1992, Pikovsky *et al.* 1996), em elementos biestáveis acoplados globalmente (Zanette 1997), em mapas iterados com acoplamento global de campo médio (de San Roman *et al.* 1998).

Uma revisão sobre oscilações sincronizadas em córtex sensorio-motor humano é apresentada na Ref. (Schnitzler *et al.* 2000). Com a técnica de análise de fase em eletoencefalografias de pacientes com epilepsia tem-se mostrado diferenças distintas no grau de sincronização entre gravações de intervalos livres de apreensão e aqueles antes de um ataque iminente, indicando um estado alterado da dinâmica cerebral antes da atividade de apreensão (Mormann *et al.* 2000).

A sincronização também tem sido investigada na atividade solar e assim identificou-se sincronização de fase entre o ciclo de manchas solares e um componente rápida do movimento inercial do sol (PALUŠ *et al.* 2000).

Neste capítulo discutimos alguns casos de sincronismo entre sistemas caóticos, variando a forma de acoplamento e a intensidade do mesmo. Discutimos sincronismo completo, de

fase, antecipado, atrasado. Ressaltando que o critério para sincronismo completo é que os expoentes de Lyapunov do sistema acoplado sejam todos negativos.

No próximo capítulo, discutiremos um outro sistema não-linear caótico no qual, mesmo quando a condição de sincronismo completo é satisfeita, o sistema acoplado não exibe sincronismo completo, exibindo na verdade sincronismo intermitente.

CAPÍTULO 3

SINCRONIZAÇÃO IMPERFEITA ENTRE SISTEMAS CAÓTICOS

No capítulo anterior apresentamos conceitos e exemplos de acoplamentos entre sistemas caóticos quase-idênticos. Mostramos que dependendo da forma e da intensidade do acoplamento os sistemas podem exibir diversas formas de sincronismo, como sincronismo completo, sincronismo de fase e sincronismo atrasado. Hirokazu Fusijaka e Tomoji Yamada (Fujisaka & Yamada 1983, Yamada & Fujisaka 1983, Yamada & Fujisaka 1984) estabeleceram a condição, suficiente e necessária, para que um par de sistemas caóticos acoplados exibam sincronismo completo: todos os expoentes de Lyapunov transversos do sistema acoplado serem negativos.

Sejam dois sistemas acoplados formados pelas variáveis $\vec{X}_1 = (x_1, y_1, z_1)^T$ e $\vec{X}_2 = (x_2, y_2, z_2)^T$ podemos analisar o estado de sincronismo do sistema realizando uma mudança de variáveis, em que $\delta_1 = x_1 - x_2$, $\delta_2 = y_1 - y_2$ e $\delta_3 = z_1 - z_2$. Podemos analisar a evolução desse sistema diferença e calcularmos seus expoentes de Lyapunov, que agora dependem da forma e da intensidade do acoplamento do sistema. Quando calculados para o sistema diferença, chamaremos esses expoentes de expoentes de Lyapunov transversos. Hirokazu Fusijaka e Tomoji Yamada mostraram que se o maior expoente de Lyapunov transverso for positivo o sistema não sincroniza. Em outras palavras, para um par de sistemas caóticos sincronizar

é necessário que o maior expoente de Lyapunov transverso se torne negativo, o que pode ou não ocorrer ao aumentarmos a intensidade do acoplamento do sistema. Assim, se os sistemas estiverem sincronizados $\vec{X}_1 = \vec{X}_2 = \vec{s}(t)$, em que $\vec{s}(t)$ é uma trajetória do sistema. A estabilidade do estado sincronizado pode ser obtida linearizando a evolução dinâmica do sistema ao longo da trajetória $\vec{s}(t)$ diferença é dada por:

$$\dot{\vec{\delta}} = \{Df(\vec{s}) + cK\} \vec{\delta}, \quad (3.1)$$

em que $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, $Df(\vec{s})$ é o jacobiano do sistema calculado sobre $\vec{s}$, c é a intensidade do acoplamento e K é a matriz de acoplamento. A partir de 3.1 podemos calcular os expoentes de Lyapunov transversos.

Entretanto, observou-se que tal condição não é suficiente, sendo apenas necessária para obtenção de sincronismo completo, pois mesmo quando é satisfeita podemos observar que a sincronização pode ser intermitente em alguns sistemas. Este é, por exemplo, o caso do sistema de Bienfang-Gauthier (B-G) (Gauthier & Bienfang 1996), que discutiremos neste capítulo. Apresentaremos o principal resultado do trabalho de B-G, que mostraram que o critério de H. Fusijaka e T. Yamada para estabelecer se um sistema pode ou não exibir sincronismo completo é falho em algumas situações. Joshua Bienfang e Daniel Gauthier também estabeleceram um novo critério para a obtenção de sincronismo completo (Gauthier & Bienfang 1996).

Descrevemos o sistema B-G através de suas equações diferenciais ordinárias que descrevem a evolução temporal de suas variáveis dinâmicas. Através de simulações numéricas de suas equações diferenciais mostramos a sincronização intermitente exibida neste sistema quando o esperado seria uma sincronização completa.

Ao acoplarmos dois sistemas B-G quase-idênticos em duas configurações diferentes, observamos que apesar de a condição para sincronismo completo ser satisfeita em ambas configurações, apenas em uma delas podemos sincronizar completamente os sistemas a partir de um determinado nível de acoplamento. Pode-se mostrar que em uma das configurações o sistema resiste a sincronizar, exibindo falhas interminentes de sincronização mesmo para altos níveis de acoplamento (Gauthier & Bienfang 1996). Foi então identificado que esta falha na capacidade do sistema em sincronizar completamente advém de um objeto de instabilidade

no centro do espaço de fase do sistema. No caso específico do sistema B-G um ponto fixo de sela, que possui duas variedades estáveis e uma instável, sendo a variedade instável a responsável pela sincronização ser intermitente.

Observa-se que quando as trajetórias no espaço de fases de ambos os sistemas, que estão momentaneamente sincronizados, se aproximam do objeto instável, elas podem sair da variedade estável deste objeto, no caso o ponto de sela, para sua variedade instável provocando assim uma quebra do estado de sincronismo completo (Heagy *et al.* 1995, Gauthier & Bienfang 1996, Cavalcante *et al.* 2013), caracterizando o estado que denominamos *attractor bubbling*, ou borbulhamento de atratores. Em alguns sistemas o objeto instável responsável pelo estado de borbulhamento de atratores não é um ponto fixo instável, como o ponto de sela no sistema B-G, e sim órbitas instáveis (Heagy *et al.* 1995, de Oliveira Jr *et al.* 2014, de Oliveira Jr *et al.* 2015). J. F. Heagy e colaboradores (Heagy *et al.* 1995) analisando um par de sistemas de Rössler idênticos acoplados e adicionando ruído no sistema ao realizar suas simulações numéricas mostraram que as trajetórias dos dois sistemas permanecem sincronizadas até que ao aproximaram-se de regiões de seus espaços de fase contendo órbitas instáveis (que possuem o maior expoente de Lyapunov transversal positivo) imersas no atrator caótico, ocorre uma quebra de sincronismo, processo que ocorre indefinidamente. Essas quebras de sincronismo evidenciam que mesmo quando o sistema exibe expoentes de Lyapunov transversais globais negativos, essa condição não é suficiente para obtenção de sincronismo completo. Este estado de borbulhamento de atratores é um mecanismo global de instabilidade e ocorre em diversos sistemas (Ashwin *et al.* 1994, Gauthier & Bienfang 1996, Venkataramani *et al.* 1996, Flunkert *et al.* 2009). Os eventos de dessincronização são causados pela instabilidade de pontos invariantes ou órbitas invariantes imersas que formam regiões instáveis no espaço de fases e seu estudo é grandemente simplificado quando um destes objetos instáveis é muito mais instável do que os outros, e portanto domina a dinâmica local. A quantidade de instabilidade é quantificada pelos expoentes de Lyapunov locais positivos do objeto instável.

Na ausência de ruído, perturbações externas ou desajuste de parâmetros, dois sistemas caóticos sincronizados permanecerão neste estado indefinidamente. Um atrator caótico está imerso em uma superfície invariante estável, de modo que trajetórias próximas a essa superfície são atraídas para o atrator caótico. Entretanto o atrator também possui caráter instável,

no sentido em que existem objetos instáveis imersos no atrator caótico que são transversalmente repelentes. Ou seja, têm expoente de Lyapunov positivo para perturbações transversas a superfície invariante. Em consequência, pequenas mudanças na dinâmica do sistema, causadas por desajuste de parâmetros (Gauthier & Bienfang 1996, Cavalcante *et al.* 2013) ou adição de ruído (Heagy *et al.* 1995), provocam sequenciadas fugas da variedade estável, não importando quão pequeno seja o desajuste de parâmetros ou o nível do ruído. De modo que a frequência dessas “fugas”, eventos de dessincronização, vai a zero a medida que o desajuste de parâmetros ou o ruído também vão a zero (Venkataramani *et al.* 1996). Shankar C. Venkataramani e colaboradores (Venkataramani *et al.* 1996) calcularam a amplitude máxima que eventos de dessincronização exibiam estudando dois sistemas particulares e caracterizando dois tipos de transições para o borbulhamento de atratores: (i) uma transição “dura”, em que o sistema exhibe abruptamente grandes eventos de dessincronização e (ii) uma transição “mole”, em que a amplitude dos eventos de dessincronização cresce continuamente a partir de zero, como no sistema B-G.

Podemos construir uma variável para medir, em tempo real, o quão sincronizados os sistemas estão ou, dito de outro modo, podemos medir o tamanho do erro de sincronização entre os sistemas, visto que se ambos estiverem completamente sincronizados o erro entre eles é, por definição, zero. Assim, quando realizamos o acoplamento na configuração que exhibe acoplamento intermitente causado pelo estado do borbulhamento de atratores, este sinal de erro será visto como zero ou próximo de zero quando houver sincronismo temporário e exibirá, valores muito grandes, na escala do sistema, quando o sincronismo for momentaneamente quebrado. Essas rupturas do estado sincronizado, nós chamamos de eventos de dessincronização, que são tipicamente breves e possuem amplitudes variadas.

Ao realizarmos a análise deste sincronismo intermitente através dos máximos de cada evento de dessincronização, observamos que estes máximos possuem uma distribuição estatística bem definida e bem diferente de uma distribuição normal.

3.1 Distribuições estatísticas

3.1.1 Distribuição normal

Em teoria das probabilidades a distribuição normal é a mais familiar das distribuições de probabilidade e também uma das mais importantes em estatística. Uma variável aleatória que segue distribuição normal, como por exemplo a altura de indivíduos em uma determinada região, exibe uma forma funcional do tipo:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.2)$$

onde μ é o valor médio da distribuição, σ é o desvio-padrão e σ^2 é sua variância. O fator $1/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ serve para fazer com que a área abaixo da curva $f(x)$ seja igual a 1, permitindo uma interpretação probabilística. A distribuição é simétrica em relação à sua média μ . A forma da distribuição normal (gaussiana) é a de uma curva em forma de sino, em que valores de x que ocorrem dentro da distância de $\mu \pm \sigma$ correspondem a cerca de 68% dos eventos enquanto que valores fora do intervalo $\mu \pm 3\sigma$ (ou seja, que estão nas caudas da distribuição) representam menos de 1% dos eventos.

A média de uma distribuição é também conhecida como primeiro momento e a sua variância, obtida a partir do segundo momento da distribuição $\sigma^2 = p_2 - (p_1)^2$. De modo geral, o momento de ordem k de uma distribuição é dado pela expressão:

$$p_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx, \quad (3.3)$$

em que $f(x)$ é a forma da distribuição que no caso da normal é dada pela Eq. 3.2. Os momentos superiores que a variância, ou seja, do terceiro momento em diante são iguais a zero para a distribuição normal.

Um importante teorema relacionado a distribuições normais é o Teorema Central do Limite (TCL) que nos diz que se tomarmos uma dada variável aleatória x que pode ter uma distribuição qualquer (normal, uniforme, assimétrica, entre outras), com média μ e desvio-padrão σ e se ao invés de tomarmos uma única amostra (100 coletas, por exemplo), tirarmos

“ m ” várias amostras de tamanho “ n ” (20 amostras compostas de 5 coletas, $20 \times 5 = 100$ coletas) e analisarmos a distribuição das médias de cada amostra de tamanho “ n ”, observaremos que: (i) quanto maior o “ n ” da amostra, mais a distribuição das médias amostrais tende a uma distribuição normal; (ii) a média das médias amostrais será média populacional $\mu = \bar{\bar{x}} = (\sum \bar{x})/m$; e (iii) o desvio-padrão das médias amostrais será $\sigma/\sqrt{n}$. Quanto maior o tamanho das amostras, mais a distribuição das médias será próxima de uma distribuição normal. Para $n > 30$, a distribuição das médias amostrais pode ser aproximada satisfatoriamente por uma distribuição normal e se a distribuição da variável “ x ” for originalmente uma distribuição normal, então a distribuição das médias amostrais terá distribuição normal para qualquer tamanho amostral “ n ”.

3.1.2 Distribuição lei de potência

Vários fenômenos, como a ocorrência de terremotos, surgimento das crateras lunares e erupções solares, desviam-se de um comportamento de estatística normal (gaussiana) e apresentam, por exemplo, comportamento denominado de leis de potência (Newman 2005). Ou seja, as caudas das distribuições não decaem exponencialmente, mas decaem de acordo com alguma lei de escala. Dessa forma valores distantes do centro da distribuição são estatisticamente muito mais significantes do que no caso da distribuição normal. Um exemplo de distribuição não-normal é a lei de potência, dada pela expressão:

$$f(x, \alpha) = Cx^{-\alpha}, \quad (3.4)$$

sendo C o fator de normalização da distribuição e α o expoente da lei de potência. A distribuição lei de potência tem a forma de uma linha reta em um gráfico cujos eixos estão em escala logarítmica. Distribuições lei de potência tem um limite inferior para variável x , digamos x_{min} (Newman 2005).

Calculando o primeiro momento (média) da distribuição temos:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mu = \int_{x_{min}}^{\infty} xf(x)dx = C \int_{x_{min}}^{\infty} x^{1-\alpha} dx \\ &= \frac{C}{2-\alpha} [x^{-\alpha+2}]_{x_{min}}^{\infty}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Essa integral é finita apenas para $-\alpha + 2 < 0$, ou seja, $\alpha > 2$. Já o segundo momento pode ser calculado fazendo:

$$\begin{aligned} p_2 &= \int_{x_{min}}^{\infty} x^2 f(x) dx = C \int_{x_{min}}^{\infty} x^{2-\alpha} dx \\ &= \frac{C}{3-\alpha} [x^{-\alpha+3}]_{x_{min}}^{\infty}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

que só é finito para $\alpha > 3$. Assim, a variância, $\sigma^2 = p_2 - (p_1)^2$, também só é finita para $\alpha > 3$. De modo análogo, momentos de ordem superiores podem ser calculados.

Duas características importantes de leis de potência são: (i) a invariância de escala, em que se temos uma distribuição $f(x) = Cx^{-\alpha}$, podemos implementar um fator de escala a na distribuição e esta sofrerá apenas um escalonamento do tipo $f(ax) = C(ax)^{-\alpha} = a^{-\alpha}f(x)$ e (ii) a universalidade, em que vários fenômenos diferentes apresentam a mesma potência da distribuição como podemos encontrar na termodinâmica, quando estudamos transições de fases. A esses expoentes das distribuições damos o nome de expoentes críticos.

3.1.3 Eventos dragões-rei

Alguns sistemas possuem variáveis que apresentam uma distribuição estatística que é composta por uma lei de potência e, em sua cauda, um desvio positivo, que foge completamente de uma extrapolação por lei de potência. Esses eventos extremos foram denominados dragões-rei (Sornette 2009), pois fogem completamente da distribuição lei de potência, contribuindo significativamente para a distribuição. O termo “rei” veio do fato de que a fortuna de um rei foge completamente da lei de distribuição de fortunas do resto de sua população, como Rei Buhimol Adulyadej (Tailândia), Xeiue Mohammed Bin Rashid al-Maktoum (Dubai), Príncipe Albert II (Monaco), entre outros (Serafin 20 aug. 2008). O termo “dragão” vem do fato que dragões seriam completamente diferentes dos outros animais, com características extraordinárias e se presentes na distribuição de animais exerceriam significativa contribuição.

Os mecanismos que levam a formação de eventos dragões-rei são diferentes dos mecanismos formadores de eventos de outras distribuições, como lei de potência. Por exemplo, a relação de cidades de um país em função do seu número de habitantes, segue uma lei de potências. Entretanto grandes cidades, como Paris e Londres que tem vários milhões de

habitantes cada uma, fogem completamente da distribuição lei de potências, resultado de algum mecanismo diferente que originou essa diferenciação.

Eventos dragões-rei podem ser causados, por exemplo, por realimentação positiva, como quando uma grande compra de ações na bolsa de valores desencadeia uma sucessão de outras compras de ações ou quando em uma multidão, algumas pessoas começam a correr, induz que outras pessoas corram também até se sentirem seguras ou entenderem o que aconteceu. Outro mecanismo de formação de dragões-rei é o borbulhamento de atratores, quando a instabilidade de objetos instáveis imersos em atratores caóticos de sistemas acoplados (com desajuste de parâmetros ou adição de ruído) geram eventos de dessincronização com grandes amplitudes. Sistemas de controle e intervenção também podem gerar dragões-rei. Em uma floresta é natural a ocorrência de incêndios, entretanto sempre que um é iniciado, trabalhamos para extingui-lo. Evitando-se, por longos períodos que incêndios aconteçam, a floresta irá acumular bastante madeira morta. Esse acúmulo pode atingir um valor crítico, tal que, se um incêndio ocorrer ele vai se alastrar rapidamente alimentado pelo excesso de madeira morta e dificilmente poderá ser controlado, podendo ser considerado um evento do tipo dragão-rei. Portanto, permitir pequenos incêndios, ou realizar alguns de forma controlada, pode evitar a ocorrência de incêndios gigantescos. Esses pequenos exemplos de sistemas sociais, econômicos e naturais com possibilidade de eventos extremos servem como motivação para estudos de sistemas simples com distribuições contendo eventos dragões-rei.

O sistema B-G exibe uma função de distribuição de probabilidades (PDF) que é uma soma de duas contribuições bem conhecidas, uma parte seguindo uma lei de potência (Newman 2005) e uma outra com eventos do tipo dragões-rei, como denominada por Didier Sornette (Sornette 2009, Sornette & Ouillon 2012). Distribuições do tipo (lei de potência) são ditas livre de escala, ou seja, não podemos distinguir entre os mecanismos responsáveis pelos eventos grandes, médios ou pequenos. Desta forma, PDFs que obedecem lei de potência nos impossibilitam a previsão do tamanho do evento que acontecerá. Por sua vez, eventos dragões-rei podem ser previstos, como veremos adiante neste capítulo. Esta diferença distingue dragões rei de eventos pertencentes a leis de potência, e permite previsão e controle ativo da ocorrência destes eventos extremos, através de um sistema de controle apropriado, como demonstrado tanto experimentalmente, com circuitos eletrônicos, e numericamente,

em modelos destes sistemas (Cavalcante *et al.* 2013, Zamora-Munt *et al.* 2014). Entender os processos de formação de eventos extremos e as circunstâncias que levam a distribuições lei de potência ou dragões rei é uma questão aberta cuja resposta pode ajudar a acessar se eventos extremos ocorrerão mais do que o esperado em um sistema específico.

Outra motivação para se estudar um sistema dinâmico não-linear caótico que apresenta “attractor bubbling” e, por consequência, sincronismo intermitente, é comparar os eventos de dessincronização, que possuem distribuição estatística de máximos do tipo não-normal, com eventos extremos que acontecem em sistemas complexos, tais quais, mercado financeiro, terremotos e redes neurais. Estes eventos extremos que ocorrem em sistemas complexos são objeto de estudo teórico e análise estatística (Sornette & Ouillon 2012). Como a realização de experimentos em tais sistemas complexos, como os citados acima, pode ser bastante complicada, é possível considerar sistemas análogos, como circuitos eletrônicos, que possam ser controlados em laboratório e usados para estudos de suas instabilidades e dos mecanismos que levam a eventos extremos. Este é o caso de sistemas dinâmicos não-lineares caóticos, posto que os eventos de dessincronização em sistemas como o B-G seguem uma distribuição que é a soma de duas distribuições citadas acima, a lei de potências e a dragões-rei. A distribuição dos tamanhos dos eventos de dessincronização têm parâmetros característicos similares aos observados em eventos extremos que ocorrem em outros sistemas complexos (Bak 1999, Cavalcante *et al.* 2013). Esta similaridade sugere que nós podemos usar osciladores caóticos acoplados como um meio para o estudo de eventos extremos em sistemas complexos, motivados pelo problema do comportamento catastrófico de muitos sistemas artificiais e naturais (Bak *et al.* 1987, Bak 1999, White & Fornberg 1998, Solli *et al.* 2007, Bonatto *et al.* 2011). As variáveis de sistemas complexos geralmente seguem distribuições estatísticas não-normais, cujo comportamento assintótico, associado aos eventos de grandes amplitudes, pode ser uma lei de potência ou outra distribuição de cauda longa (Estoup 1916, Willis & Yule 1922, Mercadier *et al.* 2009, Newman 2005, Sornette 1998).

3.2 O Sistema de Bienfang-Gauthier

O sistema B-G que utilizamos como plataforma para o estudo sobre eventos extremos que acontecem em sistemas complexos é descrito nesta seção. O sistema B-G é um sistema não-linear, autônomo e é descrito pelo conjuntos de equações diferenciais a seguir (Gauthier & Bienfang 1996):

$$\dot{V}_1 = \frac{V_1}{R_1} - g[V_1 - V_2], \quad (3.7)$$

$$\dot{V}_2 = g[V_1 - V_2] - I, \quad (3.8)$$

$$\dot{I} = V_2 - R_4 I, \quad (3.9)$$

onde $g[v] = \frac{v}{R_2} + I_M[\exp(\alpha_r v) - \exp(-\alpha_r v)]$ é o responsável pela não-linearidade do sistema.

Para analisar o comportamento deste sistema, escolhemos os valores fixos de alguns parâmetros: $R_2 = 3,440$, $R_4 = 0,193$, $I_M = 22,5 \times 10^{-6}$, $\alpha_f = 11,60$ e $\alpha_r = 11,57$. Podemos, então, explorar as diferentes soluções do sistema utilizando diferentes valores para o parâmetro R_1 . Realizando integrações numéricas das equações diferenciais ordinárias que descrevem o sistema B-G utilizando os valores de $R_1 \in \{1,298; 1,42; 1,44; 1,52; 1,73; 1,86\}$ obtemos os seguintes estados dinâmicos exibidos na Fig. 3.1:

Na Fig. 3.2 temos o expoente de Lyapunov máximo, λ_{max} , do sistema B-G em função de R_1 . Quando λ_{max} é positivo o sistema exibe comportamento caótico, quando ele é zero, comportamento periódico e quando é negativo temos ponto fixo como solução do sistema.

O sistema B-G apresenta como solução do tipo ponto fixo no seu espaço de fase, o ponto $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$, para quaisquer valores de parâmetros, como podemos verificar substituindo $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$ nas Eqs. 3.7-3.9. Para os valores de parâmetro $R_1 = 1,298$, $R_2 = 3,44$, $R_4 = 0,193$, $I_M = 22,5 \times 10^{-6}$, $\alpha_f = 11,60$ e $\alpha_r = 11,57$ temos um estado caótico como solução para as trajetórias do sistema e o ponto fixo $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$ neste caso é instável. De fato, fazendo a linearização em torno de $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$ e calculando os autovalores da matriz jacobiana do sistema para os valores de parâmetros citados, obtemos: $0,518$; $-0,261 + 0.970j$; $-0.261 - 0.970j$, ou seja, esse ponto é um ponto de sela que apresenta duas variedades estáveis e uma variedade instável. Como veremos

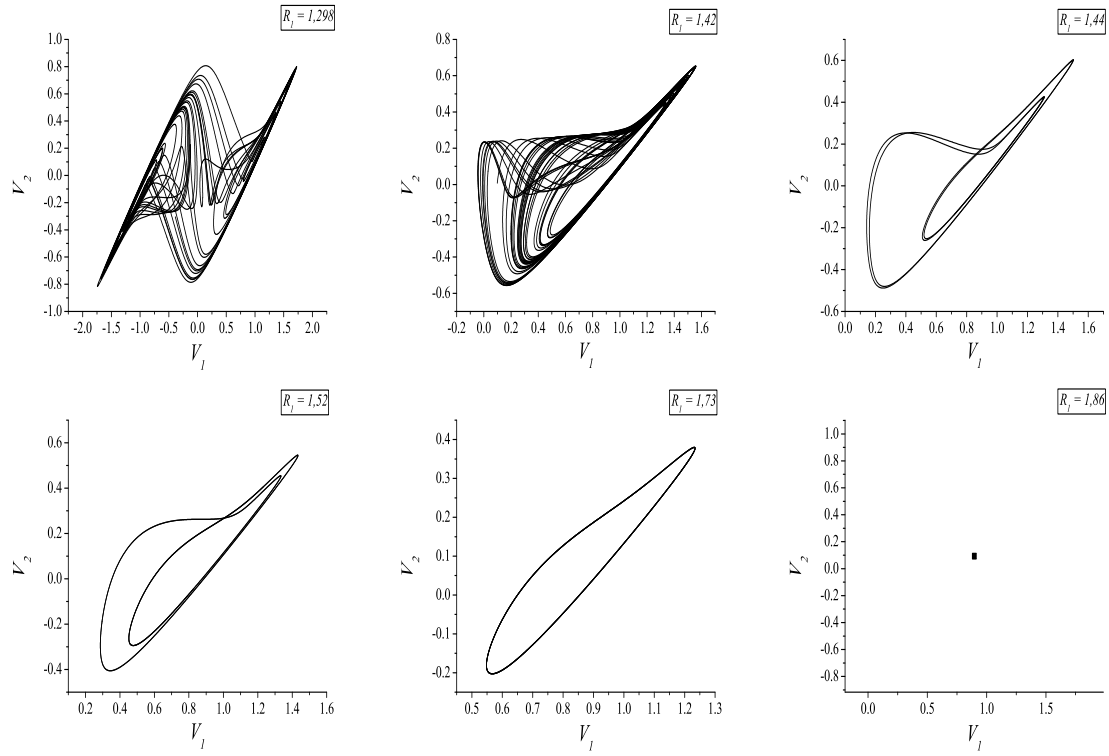


Figura 3.1 – Projeções bidimensionais no plano (V_1, V_2) do sistema B-G para diferentes valores de $R_1 \in \{1,298; 1,42; 1,44; 1,52; 1,73; 1,86\}$ a partir de simulações numéricas das Eqs. 3.7-3.9. Observamos estados caóticos para $R_1 = 1,298$ e $R_1 = 1,42$; para $R_1 = 1,44$, $R_1 = 1,52$ e $R_1 = 1,73$, estados periódicos e ponto fixo para $R_1 = 1,86$.

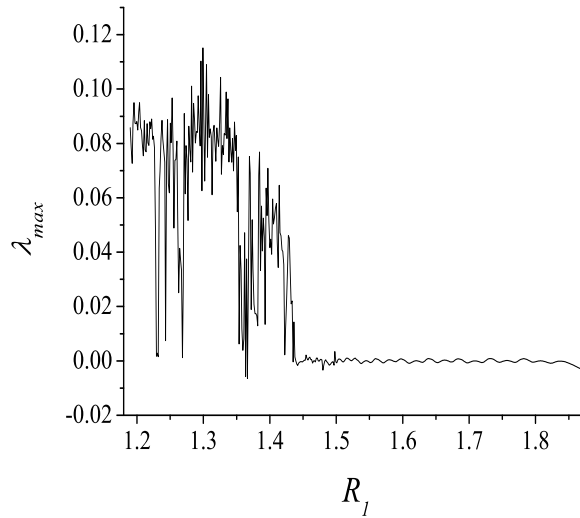


Figura 3.2 – Expoente de Lyapunov máximo do sistema B-G em função de R_1 , construído a partir de simulações numéricas. Os valores dos outros parâmetros das Eqs. 3.7-3.9 são $R_2 = 3,44$, $R_4 = 0,193$, $I_M = 22,5 \times 10^{-6}$, $\alpha_f = 11,60$ e $\alpha_r = 11,57$.

adiante, é devido a esse ponto fixo de sela, localizado no centro de atrator caótico que o sistema B-G exibe sincronismo intermitente.

3.3 Acoplamento entre dois sistemas B-G

Nesta seção vamos estudar o acoplamento unidirecional via realimentação negativa, na configuração piloto-resposta, entre dois sistemas de B-G quase-idênticos, ambos oscilando em regime caótico. Na prática realizaremos esse acoplamento em duas configurações diferentes. Primeiro através das variáveis V_1 dos dois osciladores e depois através das variáveis V_2 . Embora em ambas as configurações o maior expoente de Lyapunov transversal se torne negativo a partir de um valor crítico da intensidade do acoplamento sistema, indicando sincronismo completo como esperado através do critério (Fujisaka & Yamada 1983, Yamada & Fujisaka 1983, Yamada & Fujisaka 1984), observam-se dois tipos de comportamento, totalmente diferentes, exibidos pelo sistema acoplado: no primeiro caso (acoplamento via V_1) obtemos sincronismo completo, como esperado, enquanto que no segundo caso (acoplamento via V_2) obtemos sincronismo intermitente, quebrando o critério para sincronismo completo. Para obter esses resultados utilizamos no sistema piloto os seguintes parâmetros: $R_{1m} = 1,298$, $R_{2m} = 3,440$, $R_{4m} = 0,193$, $I_M = 22,5 \times 10^{-6}$, $\alpha_{fm} = 11,60$, $\alpha_{rm} = 11,57$. Com esses valores obtemos um estado caótico, exibido na Fig. 3.1. Em nossas simulações numéricas utilizamos um desajuste de parâmetro entre os sistemas piloto e resposta menor que 1%. Os eventos de dessincronização que ocorrem devidos ao estado de borbulhamento de atratores são causados por este desajuste de parâmetros, ou por ruído que perturba as trajetórias do sistema quando se aproximam dos objetos instáveis imersos no atrator caótico, que no caso do sistema B-G é o ponto fixo de sela, $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$, na origem de seu espaço de fase. Esta diferença de parâmetros é feita para simular experimentos, como nos circuitos eletrônicos utilizados para implementar as Eqs. 3.7-3.9. Note que por mais parecidos que sejam dois componentes, como por exemplo, as resistências de dois resistores ou as capacitâncias de dois capacitores, eles nunca são exatamente iguais, sempre há uma tolerância, uma diferença entre seus valores. Fazemos o desajuste de parâmetros pequeno para garantir que o estado dinâmico do

sistema resposta seja idêntico ao do piloto. Outra forma de realizar as simulações numéricas e obter os mesmos resultados é fazer os parâmetros iguais para o sistema piloto e para o sistema resposta, adicionando-se ruído na integração numérica das equações diferenciais que descrevem a dinâmica de um sistema, com desvio-padrão muito menor que o desvio-padrão das variáveis V_1 e V_2 (Heagy *et al.* 1995). O interesse de tal configuração está na possibilidade de sincronização entre circuitos remotos cujo canal de comunicação seja susceptível a ruídos.

O acoplamento entre dois sistemas B-G, na configuração piloto e resposta, é descrito pelo conjunto de 6 equações diferenciais ordinárias a seguir:

$$\dot{V}_{1d} = \frac{V_{1d}}{R_{1d}} - g[V_{1d} - V_{2d}], \quad (3.10)$$

$$\dot{V}_{2d} = g[V_{1d} - V_{2d}] - I_d, \quad (3.11)$$

$$\dot{I}_d = V_{2d} - R_{4d}I_d, \quad (3.12)$$

$$\dot{V}_{1r} = \frac{V_{1r}}{R_{1r}} - g[V_{1r} - V_{2r}] + c_{11}(V_{1d} - V_{1r}), \quad (3.13)$$

$$\dot{V}_{2r} = g[V_{1r} - V_{2r}] - I_r + c_{22}(V_{2d} - V_{2r}), \quad (3.14)$$

$$\dot{I}_r = V_{2r} - R_{4r}I_r. \quad (3.15)$$

Enquanto as Eqs. 3.10 - 3.12 representam o sistema piloto, as Eqs. 3.13 - 3.15 representam o resposta. Aqui apenas o sistema resposta sofre influência do sistema piloto, através de $\dot{V}_{1r}$ sendo corrigido por $V_{1d} - V_{1r}$ e em $\dot{V}_{2r}$ por $V_{2d} - V_{2r}$, como vemos nas Eqs. 3.13 e 3.14. Nessa análise vamos considerar o caso em que o acoplamento é unidirecional e se dá através de apenas uma variável.

Podemos escrever as equações dinâmicas do sistema diferença para o sistema B-G acoplado através das Eqs. 3.10 - 3.12. A partir desse conjunto de equações dinâmicas que dependem do acoplamento do sistema, calculamos o maior expoente de Lyapunov transversal ($\lambda_{\perp}^1$) em função do parâmetro de acoplamento c_{11} , Fig. 3.3, e em função do do parâmetro de acoplamento c_{22} , Fig. 3.4, observando que em ambos os casos $\lambda_{\perp}^1$ torna-se negativo após um valor crítico de acoplamento.

Para facilitar a análise do estado de sincronismo do sistema acoplado vamos analisar o estado de sincronismo do sistema acoplado através de uma variável que meça a separação das trajetórias. Definimos então um sinal de erro,

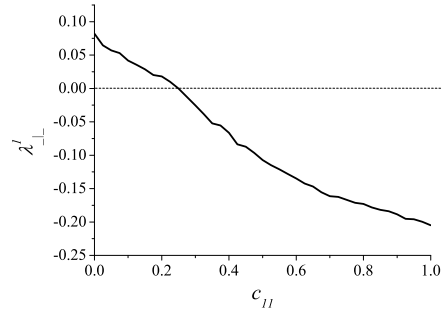


Figura 3.3 – Maior expoente de Lyapunov transverso ($\lambda_{\perp}^1$) do sistema B-G em função do parâmetro de acoplamento c_{11} .

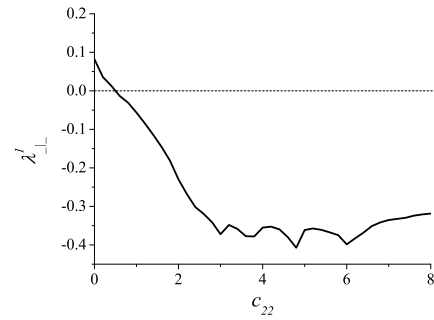


Figura 3.4 – Maior expoente de Lyapunov transverso ($\lambda_{\perp}^1$) do sistema B-G em função do parâmetro de acoplamento c_{22} .

$$|x_{\perp}| = |V_{1d} - V_{1r}| + |V_{2d} - V_{2r}| + |I_d - I_r|. \quad (3.16)$$

Se o sistema estiver sincronizado completamente as trajetórias do piloto e do resposta são iguais e, por definição, $V_{1d} = V_{1r}$, $V_{2d} = V_{2r}$ e $I_d = I_r$, logo $|x_{\perp}| = 0$. Observamos, por outro lado, que se o sistema estiver sincronizado intermitentemente ele apresentará momentaneamente um sinal de erro com valores próximos a zero, indicando o sincronismo temporário com a ocorrência de breves eventos de dessincronização, em que a amplitude $|x_{\perp}|$ apresenta picos de amplitudes variadas. Além disso, quanto menos sincronizado o sistema estiver, maior será $|x_{\perp}|$.

3.3.1 Acoplamento unidirecional gerando sincronismo completo

Nesta subseção analisamos o caso em que $c_{11} \neq 0$ e $c_{22} = 0$ (ver Eqs. 3.13 e 3.14). Ou

seja, quando o acoplamento unidirecional se dá através das variáveis V_1 do piloto e do resposta. Com esta configuração, um par de sistemas B-G acoplados sincroniza completamente a partir de um valor mínimo do parâmetro de acoplamento c_{11} . Neste processo, analisamos séries temporais de $|x_\perp|$, apresentadas na Fig. 3.5, construídas a partir de simulações numéricas para quatro valores de c_{11} (0, 0; 0, 25; 0, 50; 0, 75) passando do estado desacoplado (consequentemente dessincronizado) até o estado de sincronismo completo.

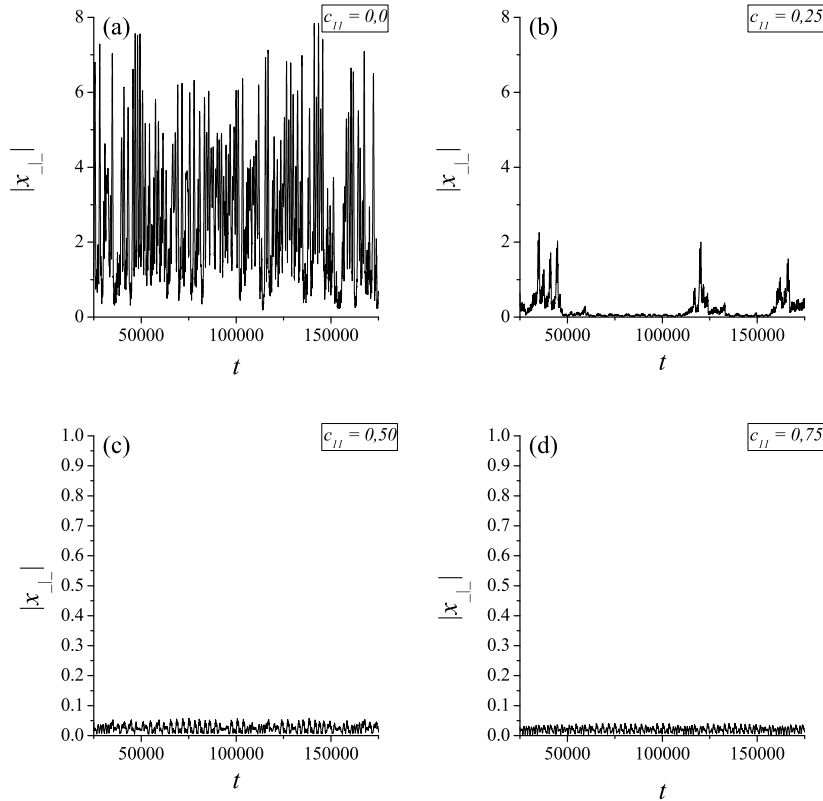


Figura 3.5 – Sinal de erro $|x_\perp|$ para o sistema acoplado unidirecionalmente através das variáveis V_1 com nível de acoplamento $c_{11} =$ (a) 0, 0, (b) 0, 25, (c) 0, 50, (d) 0, 75. Em (a) não há acoplamento e o sinal de erro do sistema é máximo, quando (b) ligamos o acoplamos e ajustamos $c_{11} = 0, 25$ o sinal de erro tem sua intensidade diminuída, mas o sistema ainda não está sincronizado. Em (c) $c_{11} = 0, 50$ e em (d) $c_{11} = 0, 55$, note que a escala do gráfico é menor que em (a) e (b). Podemos então observar que $|x_\perp|$ está próximo de zero tanto em (c) quanto em (d). Consideramos, na prática, que obtemos sincronismo quando $|x_\perp| < 3\%$ de $x = |V_1| + |V_2| + |I|$. Neste caso, o sistema já está sincronizado a partir de $c_{11} = 0, 50$.

Como esperado, quando $c_{11} = 0$, Fig. 3.5(a) o sistema está desacoplado e portanto piloto e resposta que operam em estado caótico estão descorrelacionados e o erro entre ambos é máximo. À medida que aumentamos c_{11} os subsistemas piloto e resposta ficam mais

parecidos, como podemos observar na Fig. 3.5(b) com $c_{11} = 0,25$, em que o sinal de erro é menor mas piloto e resposta ainda não estão sincronizados. Note a diferença de escala entre as Figs. 3.5(a)-(b) das Figs. 3.5(c)-(d). Tanto para $c_{11} = 0,50$, Fig. 3.5(c), quanto para $c_{11} = 0,75$, Fig. 3.5(d), o sistema está sincronizado, pois $|x_{\perp}|$ está próximo de zero. Consideramos, na prática, que obtemos sincronismo quando $|x_{\perp}| < 3\%$ de $x = |V_1| + |V_2| + |I|$. Neste caso, para $|x_{\perp}| < 0,15$, consideremos que o sistema está sincronizado.

Na Fig. 3.6 exibimos o valor rms ($|x_{\perp}|_{rms} = \sqrt{\langle |x_{\perp}|^2 \rangle}$, onde $\langle \rangle$ significa média), do sinal de erro do sistema $|x_{\perp}|$ para valores de c_{11} varindo de 0 até 1. No mesmo gráfico exibimos o maior valor instantâneo do sinal de erro, $|x_{\perp}|_{max}$. Com estes gráficos podemos observar quando em média o sistema está sincronizado, $|x_{\perp}|_{rms} = 0$, e se há algum evento de dessincronização que aumenta momentaneamente $|x_{\perp}|$, caso não existam grandes eventos de dessincronização, $|x_{\perp}|_{max} \rightarrow 0$. Vemos que os valores tanto de $|x_{\perp}|_{rms}$ como $|x_{\perp}|_{max}$ caem à medida que aumentamos c_{11} . Embora, $|x_{\perp}|_{rms} = 0$ a partir de $c_{11} = 0,2$, o sistema não está sincronizado, pois ainda existem grandes eventos de dessincronização quebrando o estado sincronizado. Apenas a partir de $c_{11} = 0,4$, $|x_{\perp}|_{max} = 0$ e o sistema está sincronizado.

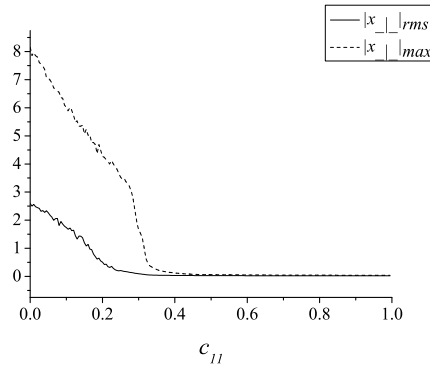


Figura 3.6 – Valor rms do sinal de erro, $|x_{\perp}|_{rms}$, e maior valor instantâneo do sinal de erro, $|x_{\perp}|_{max}$, em função do nível de acoplamento para o sistema acoplado unidirecionalmente através das variáveis V_1 .

3.3.2 Acoplamento unidirecional gerando sincronismo intermitente

Analisemos agora o caso $c_{11} = 0$ e $c_{22} \neq 0$, ou seja, quando o acoplamento unidirecional se dá através das variáveis V_2 do piloto e do resposta (ver Eqs. 3.13 e 3.14). Com esta

configuração não obtemos mais sincronismo completo, apenas sincronismo intermitente. Na Fig. 3.7 apresentamos séries temporais de $|x_{\perp}|$ construídas a partir de simulações numéricas para quatro valores de c_{22} , que são 0,5; 1,0; 2,0; 3,0. Note que o intervalo de valores do parâmetro de acoplamento c_{22} que estamos utilizando é maior do que o utilizado na subseção anterior para o c_{11} .

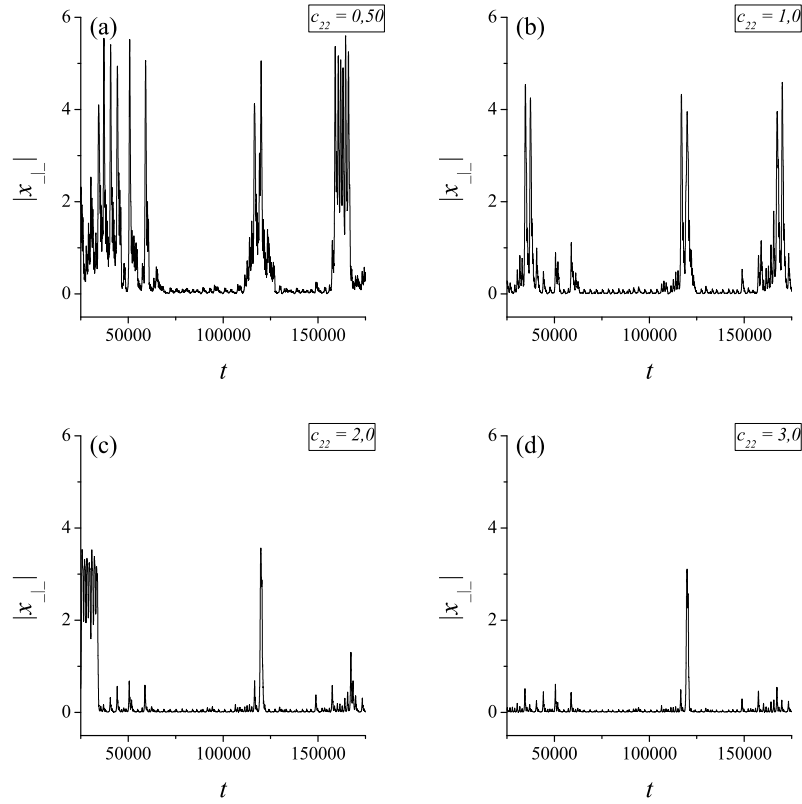


Figura 3.7 – Sinal de erro $|x_{\perp}|$ para o sistema acoplado unidirecionalmente através das variáveis V_2 com nível de acoplamento $c_{22} =$ (a) 0,5, (b) 1,0, (c) 2,0, (d) 3,0. À medida que aumentamos o nível de acoplamento c_{22} o sinal de erro vai diminuindo mas mesmo para (d) $c_{22} = 3$ não temos sincronismo completo, existem vários eventos de dessincronização. Diferentemente do caso anterior que já para $c_{11} = 0,4$ tínhamos sincronismo completo, a partir de (b) $c_{22} = 1$, $|x_{\perp}|$ passa alguns momentos próximo a zero, mostrando um sincronismo temporário quebrado por vários eventos de dessincronização, breves e com diferentes amplitudes.

Observamos que quando o acoplamento é feito através das variáveis V_2 do piloto e do resposta, mesmo para grandes níveis de acoplamento $c_{22} = 3$ o sistema não consegue sincronizar, diferente do caso anterior quando $c_{22} = 0$ e $c_{11} = 0,4$ quando o sistema já estava sincronizado. A partir de $c_{22} = 1$, Fig. 3.7(b), $|x_{\perp}|$ passa alguns momentos próximo a zero, apresentando um sincronismo temporário quebrado por eventos intermitentes de dessincronização, breves

e com amplitudes arbitrárias.

Na Fig. 3.8 estão as curvas de $|x_{\perp}|_{rms}$ e $|x_{\perp}|_{max}$ em função do parâmetro de acoplamento c_{22} indo de 0 até 8. Observamos que $|x_{\perp}|_{rms}$ se aproxima de 0 para valores $c_{22} \geq 1$, indicando sincronismo intermitente no sistema. Chegando a $|x_{\perp}|_{rms} = 0$ apenas a partir de $c_{22} = 2,5$ mas $|x_{\perp}|_{max}$ não vai a zero mesmo para $c_{22} = 8$, o sistema não sincroniza completamente mesmo para um valor de acoplamento oito vezes maior do que o máximo valor de c_{11} utilizado na subseção anterior. O fato de $|x_{\perp}|_{max}$ não ir a zero nos diz que ainda existem grandes eventos de dessincronização ocorrendo no sistema, apesar de serem breves e não contribuírem significativamente para $|x_{\perp}|_{rms}$, visto que este é zero para $c_{22} \geq 2,5$.

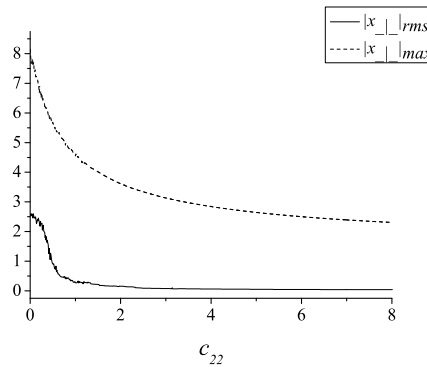


Figura 3.8 – Valor rms do sinal de erro, $|x_{\perp}|_{rms}$, e maior valor instantâneo do sinal de erro, $|x_{\perp}|_{max}$, em função do nível de acoplamento para o sistema acoplado unidirecionalmente através das variáveis V_2 .

3.4 Sincronização parcial e sua estatística

Como já discutido, quando no sistema B-G os seus parâmetros estão ajustados para exibirem comportamento caótico, a solução do tipo ponto fixo, $(V_1^*, V_2^*, I^*) = (0, 0, 0)$, é um ponto de sela. Ou seja, é um objeto de instabilidade e está imerso no atrator caótico formado no espaço de fase. Na seção anterior, discutimos uma configuração de acoplamento entre dois sistemas B-G quase-idênticos que gera sincronismo intermitente, caracterizado por breves eventos de dessincronização causados pela presença de um objeto instável no espaço de fase do sistema, que no caso é o ponto fixo de sela. Este ponto fixo de sela possui duas variedades de estabilidade no espaço de fases e uma terceira variedade de instabilidade.

O sistema acoplado tende a sincronizar a trajetória no espaço de fase do resposta com a do piloto. Se sobrepusermos os espaço de fase do sistema piloto e do sistema resposta, as trajetórias de ambos serão vistas como apenas uma, visto que o sistema acoplado está sincronizado. No espaço de fase tanto do piloto quanto do resposta existe um ponto fixo instável imerso no atrator caótico. Quando as trajetórias do piloto e do resposta se aproximam de suas origens nos espaços de fase, a instabilidade do ponto fixo de sela (objeto instável), aliada ao desajuste de parâmetros no sistema, faz com que as trajetórias se afastem deste objeto instável percorrendo caminhos diferentes com probabilidade diferente de zero, perdendo, então, o sincronismo momentaneamente. Este processo que gera eventos de dessincronização ocorre indefinidamente. Entretanto, ao acoplarmos o sistema através das variáveis V_1 , o estado sincronizado é mais forte que a instabilidade do ponto de sela, presente tanto no piloto como no resposta. Quando realizamos o acoplamento por V_2 , o estado sincronizado perde estabilidade e os eventos de dessincronização ocorrem. Na verdade, o atrator caótico é composto por uma grande quantidade de objetos instáveis, como pontos fixos instáveis ou órbitas periódicas instáveis (Ott 2002). Entretanto, como mostrado por J. Bienfang e D. Gauthier, algum desses objetos pode se sobressair e ser de fato um impedimento para obtenção do estado de sincronismo completo em sistemas caóticos acoplados (Gauthier & Bienfang 1996, Cavalcante *et al.* 2013).

3.4.1 Análise estatística dos eventos de dessincronização

A partir de uma série temporal do sinal de erro $|x_\perp|$ com intensidade de acoplamento $c_{22} = 4,6$ construímos um histograma de máximos dos eventos de dessincronização do sistema acoplado. A Fig. 3.9 foi gerada ao tomarmos um milhão de máximos locais de uma série temporal do sinal de erro do sistema, $|x_\perp|$ e em seguida construído o histograma a partir desses máximos locais do sinal de erro, $|x_\perp|_n$. Neste histograma percebemos que os máximos dos eventos de dessincronização seguem uma distribuição estatística que é uma soma de duas distribuições não-normais, uma do tipo lei de potências onde em sua cauda existe um desvio positivo da lei de potências, caracterizando dragões-reis (Sornette 2009, Sornette & Ouillon 2012), como podemos ver na Fig. 3.9.

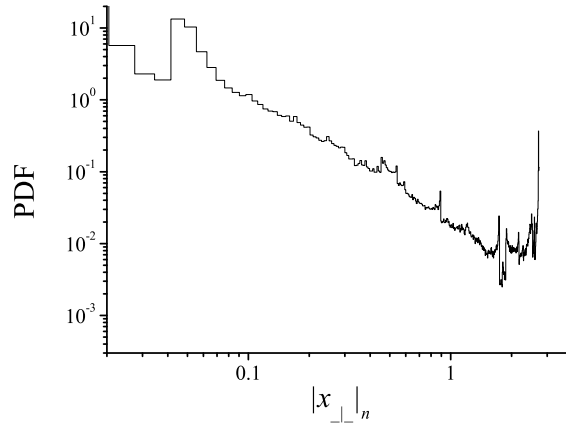


Figura 3.9 – Histograma dos máximos do sinal de erro, $|x_{\perp}|_n$, com $c_{22} = 4, 6$. Observamos que os eventos de dessincronização seguem uma lei de potência e exibem na cauda da distribuição um desvio positivo, caracterizando Dragões-reis.

Buscando confirmar a origem dos eventos de dessincronização Hugo Cavalcante *et al.* (Cavalcante *et al.* 2013) analisaram séries temporais da trajetória do piloto, $|x_d| = |V_{1d}| + |V_{2d}| + |I_d|$, já que o sistema está momentaneamente sincronizado a trajetória do sistema resposta é igual ao do piloto. Quando a trajetória do piloto se aproxima suficientemente da origem, observa-se em seguida um evento de dessincronização do sistema como exibido na Fig. 3.10. Na prática, consideramos o limiar de aproximação da origem, que gera eventos extremos, após $|x_d|$ cruzar o valor $x_{th} = 0,32$. Quanto mais $|x_d|$ se aproximar da origem maior é a probabilidade de se ter um evento de dessincronização, pois a trajetória estará mais próxima da instabilidade do ponto de sela. Com esta análise vemos que os eventos que conseguimos prever fazem parte dos maiores eventos de dessincronização, os eventos dragões-rei que não seguem a distribuição lei de potência.

3.4.2 Previsibilidade e controle dos eventos de dessincronização

Uma vez que consegue-se prever a ocorrência desses maiores eventos de dessincronização, a possibilidade de impedir suas existências foi considerada. Como discutimos anteriormente, no sistema B-G o acoplamento pode ser feito através das variáveis V_1 e V_2 , a primeira permitindo obter sincronismo completo com V_1 . Desta forma, podemos ligar o acoplamento por

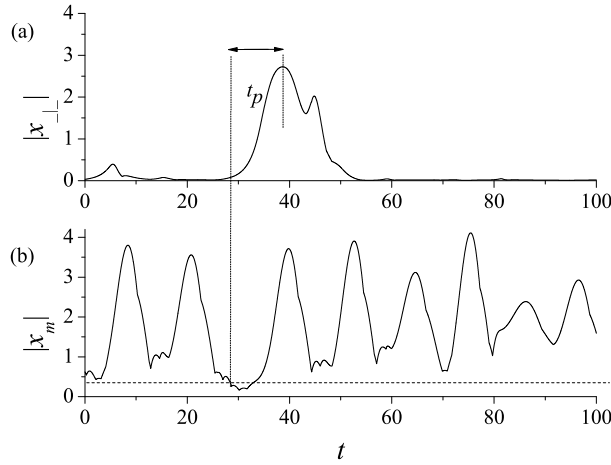


Figura 3.10 – (a) Série temporal de $|x_{\perp}|$ exibindo um grande evento de dessincronização pouco tempo após o piloto se aproximar do ponto de sela na origem do espaço de fases. (b) Série temporal do piloto, $|x_d|$, cruzando o limiar $x_{th} = 0,32$, para uma intensidade de acoplamento $c_{22} = 4,6$.

V_1 todas as vezes que $|x_d|$ cruzar o limiar $x_{th} = 0,32$. Realizando esta operação enquanto a trajetória do piloto estiver próxima do ponto de sela, o acoplamento que permite o sincronismo completo domina a dinâmica do sistema nesta região, impedindo que eventos de dessincronização do tipo dragões-rei ocorram.

A seguir escrevemos as equações diferenciais dos sistemas piloto e resposta acoplado por V_2 , incluindo o termo de prevenção contra eventos dragões-rei na equação de $\dot{V}_{1r}$:

$$\dot{V}_{1d} = \frac{V_{1d}}{R_{1d}} - g[V_{1d} - V_{2d}], \quad (3.17)$$

$$\dot{V}_{2d} = g[V_{1d} - V_{2d}] - I_d, \quad (3.18)$$

$$\dot{I}_d = V_{2d} - R_{4d}I_d, \quad (3.19)$$

$$\dot{V}_{1r} = \frac{V_{1r}}{R_{1r}} - g[V_{1r} - V_{2r}] + [1 - \theta(|x_d| - x_{th})]c_{DK}(V_{1d} - V_{1r}), \quad (3.20)$$

$$\dot{V}_{2r} = g[V_{1r} - V_{2r}] - I_r + c_{22}(V_{2d} - V_{2r}), \quad (3.21)$$

$$\dot{I}_r = V_{2r} - R_{4r}I_r, \quad (3.22)$$

na Eq. 3.20, θ é a função de Heaviside, $c_{DK} = 0,55$ é o nível de acoplamento utilizado para prevenir os eventos tipo Dragões-rei. Como este sistema caótico é usado como análogo de sistemas complexos, o acoplamento para eliminar eventos do tipo dragões-rei apenas é ligado quando o sistema de controle, definido por $|x_d|$ cruzar o limiar $x_{th} = 0,32$. Desta forma a

intervenção é pontual, evitando-se gasto desnecessário de energia.

Na Fig. 3.11 observamos novamente uma série temporal do piloto, $|x_d|$, cruzando o limiar x_{th} quando o sistema de controle está ligado. Na série temporal de $|x_\perp|$ observamos então a ausência de eventos tipo dragão-rei devido a ativação desse sistema de controle. Para confirmar que realmente o mecanismo usado para eliminar os eventos de dessincronização do tipo dragões-rei é efetivo, calculamos novamente uma série temporal longa de $|x_\perp|$, quando o mecanismo está ativo. Calculamos os máximos do sinal de erro, $|x_\perp|_n$, construindo o histograma exibido na Fig. 3.12. Comparamos o histograma dos máximos do sinal de erro com o sistema de controle desligado com outro histograma para o sistema de controle ligado, em que observamos que os eventos do tipo dragões-rei realmente são eliminados. Note-se, no entanto, que parte dos eventos que seguem a lei de potência também são eliminados. Podemos controlar quanto afetamos a lei de potência controlando o valor do limiar x_{th} , entretanto não conseguimos destruir apenas os eventos dragões-rei, afetando também os eventos de dessincronização que seguem a lei de potência.

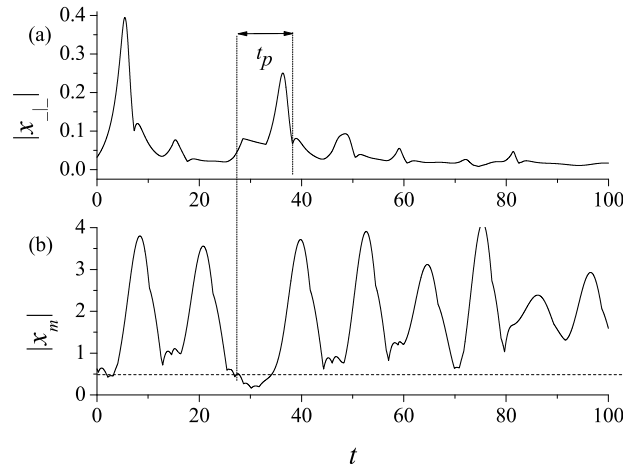


Figura 3.11 – (a) Série temporal de $|x_\perp|$ sem grandes eventos de dessincronização pouco tempo após o piloto se aproximar do ponto de sela na origem do espaço de fases. (b) Série temporal do piloto, $|x_d|$, cruzando o limiar $x_{th} = 0,32$, para intensidade de acoplamento $c_{22} = 4,6$.

Cavalcante e colaboradores (Cavalcante *et al.* 2013) mostraram que (i) um sistema simples mas não-trivial (sistema equivalente ao B-G) pode apresentar eventos do tipo dragões-rei; (ii) que é possível prever a sua ocorrência ao analisarmos a evolução de $|x_\perp|_n$ quando o sistema piloto se aproxima do objeto instável que domina a dinâmica no espaço de fase.

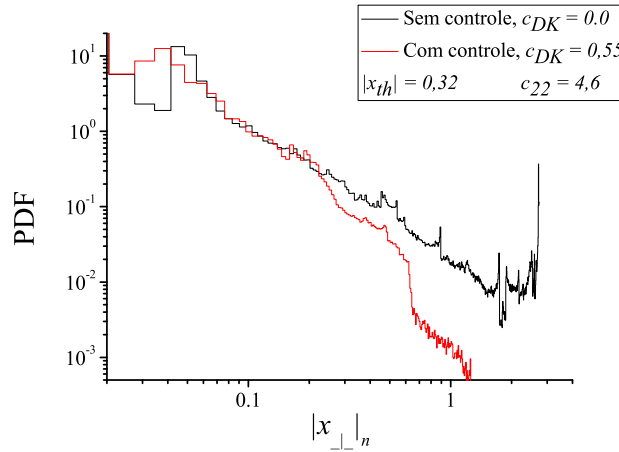


Figura 3.12 – Histograma dos máximos do sinal de erro, $|x_{\perp}|_n$, sem e com o sistema de controle ligado.

Para isso é necessário conhecer esse objeto do espaço de fase, que pode ser um ponto fixo, ou uma órbita periódica (Heagy *et al.* 1995, de Oliveira Jr *et al.* 2014, de Oliveira Jr *et al.* 2015); e (iii) que a partir dessa previsão dos maiores eventos de dessincronização pode-se adotar medidas para prevenir suas ocorrências. Apesar do sucesso dessa intervenção, apresentado na Fig. 3.12, conseguir separar estritamente os eventos que seguem a distribuição lei de potências dos eventos dragões-rei ainda é uma questão em aberto. Outro aspecto geral dessa problemática, a ser aprofundado, é saber se é possível identificar objetos instáveis em qualquer sistema que exiba o estado de borbulhamento de atratores, caracterizado pelos eventos de dessincronização no sincronismo intermitente. A partir de tal diagnóstico em um sistema com eventos extremos seria possível desenvolver técnicas que sejam efetivas para identificar os eventos dragões-rei e desenvolver mecanismos para evitá-los.

No próximo capítulo, analisaremos um sistema não-autônomo que é composto por dois osciladores caóticos e detalharemos nossos resultados do estudo de eventos de dessincronização para este sistema, onde o objeto instável diferentemente do sistema B-G é uma órbita. Um segundo sistema, também não-autônomo, mas com diferente “topologia” do atrator caótico, também é estudado. Estudamos a estatística de eventos de dessincronização em dois sistemas não-autônomos específicos e analisamos como podemos controlar a ocorrência dos grandes eventos.

CAPÍTULO 4

SINCRONIZAÇÃO COM CIRCUITOS NÃO-AUTÔNOMOS

Através do acoplamento entre dois osciladores caóticos de Bienfang-Gauthier (B-G) quase-idênticos, estudado no capítulo anterior, podemos observar um estado de sincronização com falhas intermitentes de amplitudes variadas. Lembramos que esses eventos de dessincronização produzem uma distribuição de probabilidades para os máximos do sinal de erro do sistema que é a soma de duas contribuições estatísticas: uma lei de potência, e para os valores extremos da distribuição existe um desvio positivo, contribuição denominada de dragões-reis.

Neste capítulo, estudamos a estatística de eventos de dessincronização em um sistema não-linear que é não-autônomo, que nós construímos em duas configurações que permitem explorar diferentes comportamentos e diferentemente do sistema B-G, que é não-linear autônomo. Esse sistema não-autônomo é composto por um par quase-idêntico de circuitos eletrônicos de segunda ordem com bombeio externo. Realizamos a descrição experimental desse circuito eletrônico e a descrição numérica para as equações diferenciais ordinárias que regem a evolução de suas variáveis. Ajustando apenas um parâmetro, observamos a existência de diversos estados dinâmicos, entre órbitas periódicas e atratores caóticos, que são possíveis soluções para esse sistema. Após descrevermos a dinâmica de um circuito, descrevemos o

acoplamento entre os osciladores, tanto experimentalmente quanto numericamente. Com o par de circuitos acoplados podemos estudar sua sincronização e dessincronização, analisando a estatística desses eventos de dessincronização do sistema.

Na primeira configuração do sistema não-autônomo estudado neste capítulo, realizamos um acoplamento unidirecional entre os circuitos e estudamos o nível de sincronização em função do parâmetro de acoplamento. Esta sincronização evolue do estado dessincronizado até o estado de sincronização completa, passando por um nível intermediário em que observamos borbulhamento de atratores, caracterizado por eventos de dessincronização com amplitudes diferentes e arbitrárias. Esses eventos de dessincronização seguem uma distribuição de probabilidade de máximos do tipo lei de potências. Uma diferença importante entre o sistema B-G e a primeira configuração do sistema não-autônomo é que não temos eventos dragões-rei como eventos de dessincronização, diferentemente do que ocorre no sistema B-G. Além disso, o objeto instável que domina a dinâmica no sistema B-G é um ponto fixo de sela na origem de seu espaço de fase enquanto que nosso sistema não possui pontos fixos (devido a presença do bombeio externo dependente do tempo) e temos como objeto instável órbitas periódicas instáveis. Na primeira configuração do sistema, essas órbitas periódicas afetam o estado sincronizado de modo a gerar eventos de dessincronização seguindo uma distribuição do tipo lei de potência, mas eventos extremos como tipo dragões-rei, não ocorrem em nosso sistema.

O fenômeno de sincronização é largamente estudado em muitos sistemas reais e idealizados, tais como circuitos eletrônicos (Cuomo & Oppenheim 1993, Kim *et al.* 2006, Senthilkumar *et al.* 2010), lasers (Zamora-Munt *et al.* 2010, Nixon *et al.* 2011, DeShazer *et al.* 2001), e mapas (Maritan & Banavar 1994, Pyragas 1996, Herzel & Freund 1995, Masoller *et al.* 2001). Enquanto frequentemente estuda-se a sincronização de sistemas dinâmicos não-lineares em estados periódicos (Acebrón *et al.* 2005), a sincronização de sistemas caóticos é de fato mais interessante, devido ao efeito contraintuitivo da sincronização entre dois sistemas cujas trajetórias são exponencialmente sensíveis a perturbações no espaço de fase (Boccaletti *et al.* 2002). Tais estudos são também motivados pelas aplicações potenciais, tais como comunicações mascaradas (Pecora & Carroll 1990, Cuomo & Oppenheim 1993). Além da sincronização completa, pode-se fazer generalizações ao conceito, explorando outros sincro-

nismos como, de fase (Rosenblum *et al.* 1996) e generalizado (Rulkov *et al.* 1995, Kocarev & Parlitz 1996).

Quando sujeitos a um acoplamento genérico, muitos sistemas escaparão intermitentemente do estado sincronizado devido a desajuste de parâmetros ou presença de ruído, caracterizando o borbulhamento de atratores (*attractor bubbling*) (Ashwin *et al.* 1994, Heagy *et al.* 1995, Ashwin *et al.* 1996, Gauthier & Bienfang 1996, Venkataramani *et al.* 1996, Krawiecki *et al.* 2002, Flunkert *et al.* 2009, Krawiecki 2009).

A distribuição dos tamanhos dos eventos de dessincronização têm parâmetros característicos similares aos observados em eventos extremos que ocorrem em sistemas complexos (Bak 1999, Cavalcante *et al.* 2013). Esta similaridade sugere que nós podemos usar osciladores caóticos acoplados como plataforma para o estudo de eventos extremos em sistemas complexos. Motivados pelo problema do comportamento catastrófico de muitos sistemas artificiais e naturais (Bak *et al.* 1987, Bak 1999, White & Fornberg 1998, Solli *et al.* 2007, Bonatto *et al.* 2011) a reprodução em laboratório de comportamentos semelhantes ajuda na identificação de mecanismos universais. As variáveis de sistemas complexos geralmente apresentam distribuições estatísticas não-normais em que amplitudes de eventos com grandes valores estão associadas ao comportamento assintótico da distribuição, que pode ser uma lei de potência ou outra distribuição de cauda longa (Estoup 1916, Willis & Yule 1922, Mercadier *et al.* 2009, Newman 2005, Sornette 1998). O valor do expoente da lei de potência pode revelar informação sobre o mecanismo que produz os eventos de dessincronização. Sistemas complexos tipicamente seguem leis de potência do tipo $P(x) = Cx^{-\alpha}$ com um expoente característico α que em uma gráfico com escalas logarítmicas determina a inclinação do mesmo. Por exemplo, tem sido observado $\alpha = 1,5$ em sistemas neurológicos (Klaus *et al.* 2011), ou $\alpha = 2,0$, em dessincronização de osciladores acoplados (Cavalcante *et al.* 2013), ou ainda $\alpha = 1,0$ em análises de terremotos (Christensen *et al.* 2002).

Note-se que distribuições do tipo lei de potência com expoentes $\alpha > 3$ têm primeiro e segundo momentos finitos (média e variância, respectivamente), enquanto que para $3 \geq \alpha > 1$ o segundo momento (variância) não existe, e para $2 \geq \alpha > 1$ mesmo o primeiro momento (média) é divergente (ver Capítulo 3). Aqui nós mostramos que, além da análise das probabilidades de eventos de tamanhos diferentes é possível sintonizar o expoente da

lei de potência, fato que tem como consequência a mudança do valor do evento de maior amplitude, esperado ocorrer durante um dado tempo de observação. É sabido que variáveis de muitos sistemas complexos, incluindo certos sistemas caóticos e sistemas na beira do caos (Bak 1999), seguem estatística de lei de potência. Entender os mecanismos físicos que dão origem a distribuições de cauda longa para o tamanho de eventos em um sistema complexo específico pode dar informações importantes sobre este sistema. Ademais é válido ressaltar que leis de potência são livres de escalas, implicando que todos os eventos de tamanho grande, médio e pequenos compartilham de mecanismos de formação semelhantes. Tal falta de distinção entre eventos de diferentes amplitudes afeta a previsibilidade de grandes eventos, pois eles não são discerníveis dos eventos menores nos seus estágios iniciais de formação.

A primeira configuração do sistema não-autônomo exibe três comportamentos qualitativamente diferentes quando variamos o nível de acoplamento: para acoplamento forte observamos sincronização perfeita (ou de alta qualidade); para acoplamento fraco ou negligível, os dois subsistemas são independentes, enquanto para faixas intermediárias do nível de acoplamento a distribuição dos tamanhos dos eventos de dessincronização tem cauda longa, com eventos grandes tornando-se cada vez mais raros, como por exemplo em distribuições de lei de potência (Pareto) encontradas em sistemas com voos de Lévy (Lévy 1937, Mandelbrot 1982, Shlesinger *et al.* 1993).

Utilizando esta primeira configuração do sistema de osciladores caóticos acoplados, obtemos dois resultados importantes: (i) para um determinado estado caótico do sistema, o sinal de erro entre os circuitos acoplados em regime intermediário segue uma distribuição do tipo lei de potência cujo coeficiente varia com o nível de acoplamento dos circuitos (de Oliveira Jr *et al.* 2014) e (ii) em regime intermediário de acoplamento, aumentamos a ocorrência de eventos de dessincronização com grandes amplitudes ao variarmos a forma do atrator caótico, indo de um estado com menor taxa de visitação a região de instabilidade no espaço de fases a um outro estado com uma maior taxa de visitação (de Oliveira Jr *et al.* 2015). Estes resultados estão descritos em detalhes neste capítulo.

Esse segundo resultado, que consiste em controlarmos a estabilidade do estado sincronizado na primeira configuração do sistema, modificando a taxa de visitas de trajetórias a região de instabilidade no espaço de fase, nos fez realizar uma modificação no termo não-linear

do sistema ao redor da origem do espaço de fase, que chamamos de segunda configuração do sistema não-autônomo (de Oliveira Jr *et al.* 2016). Com essa modificação no termo não-linear esperamos aumentar a instabilidade do sistema e potencializarmos os eventos de dessincronização. De fato, utilizando essa segunda configuração de nosso sistema não-autônomo e realizando nossos estudos sobre eventos de dessincronização observamos que esses eventos seguem uma distribuição lei de potência com eventos dragões-rei em sua cauda, diferentemente do que ocorre utilizando a primeira configuração do sistema em que os eventos seguem apenas uma distribuição do tipo lei de potência. Esse resultado e a segunda configuração de nosso sistema não-linear, não autônomo também estão descritos em detalhes no final deste capítulo.

4.1 Descrição de um sistema não-autônomo

O diagrama esquemático do circuito que nós usamos como um dos osciladores caóticos (o sistema *piloto*) é mostrado na Fig. 4.1. Ele é composto de resistores, capacitores, diodos e amplificadores operacionais comerciais. Os valores dos componentes no circuito piloto são: $R_1 = 46,50 \text{ k}\Omega$, $R = 14,86 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 14,85 \text{ k}\Omega$, $R_E = 14,86 \text{ k}\Omega$, $R_L = 512 \text{ }\Omega$, $R_3 = 14,85 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 14,73 \text{ nF}$, $C_2 = 14,83 \text{ nF}$, $C_3 = 14,83 \text{ nF}$. D_1 e D_2 são diodos, modelo 2N4148, e os amplificadores operacionais OP1 e OP2 são do modelo LF411CN.

A análise das leis de Kirchhoff revela que o estado dinâmico do circuito pode ser expressado em termo das voltagens V_{1d} , V_{2d} e $V_E(t)$, que obedecem a duas equações diferenciais de primeira ordem com bombeamento externo quando $R_2 = R_3$ e $C_2 = C_3$ (Gonçalves & Neto 2011). Analisando a Fig. 4.1 observamos que podemos escrever a soma das correntes que chegam e saem através do amplificador operacional OP1: a corrente gerada pelo gerador de funções (que nos dá uma corrente senoidal); a corrente que atravessa o resistor R_1 ; a que atravessa o capacitor C_1 e a que vem do par de diodos anti-paralelos. Com essa soma de correntes elétricas obtemos a equação diferencial ordinária para a variável dinâmica V_{1d} . O amplificador operacional OP2 atua como integrador, no caso relacionando as tensões elétricas V_{1d} e V_{2d} .

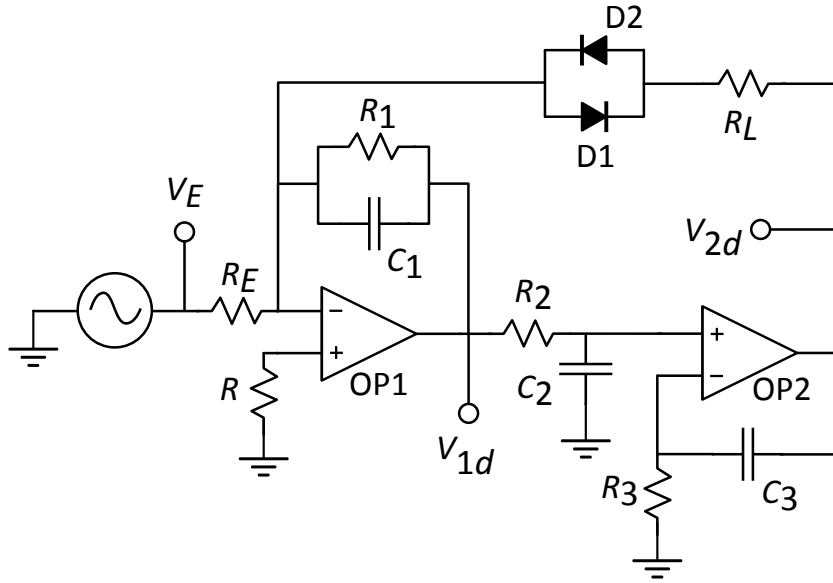


Figura 4.1 – Diagrama esquemático do circuito eletrônico para o oscilador caótico piloto. Este circuito implementa duas equações diferenciais de primeira ordem para as voltagens V_{1d} e V_{2d} excitadas pelo sinal senoidal externo V_E . Os círculos pequenos conectados aos fios indicam os pontos de medida de V_E , V_{1d} e V_{2d} .

A seguir escrevemos as duas equações diferenciais de primeira ordem que descrevem a dinâmica do circuito apresentado na Fig. 4.1:

$$\dot{V}_{1d} = -\gamma V_{1d} - \alpha I(V_{2d}) - \beta V_E, \quad (4.1)$$

$$\dot{V}_{2d} = \theta V_{1d}, \quad (4.2)$$

onde $\gamma = 1/(R_1 C_1)$, $\alpha = 1/C_1$, $\beta = 1/(R_E C_1)$, $\theta = 1/(R_2 C_2)$. A escala de tempo característica da evolução de nosso sistema é $1/\theta$, dada por $R_2 C_2 = 220,2 \mu s$. V_{1d} e V_{2d} são as voltagens nas saídas de OP1 e OP2, respectivamente; $V_E = A \sin(2\pi f t)$ é a voltagem de bombeamento externo com amplitude A e frequência f ; e $I(V_{2d})$ é a corrente passando através dos diodos D1 e D2 e indo para a entrada inversora de OP1, aproximadamente dada por

$$I(V_{2d}) = \begin{cases} (V_{2d} + 0,7)/R_L, & \text{se } V_{2d} < -0,7, \\ 0, & \text{se } -0,7 \leq V_{2d} \leq 0,7, \\ (V_{2d} - 0,7)/R_L, & \text{se } V_{2d} > 0,7, \end{cases} \quad (4.3)$$

e mostrada na Fig. 4.2. Note que uma corrente elétrica atravessando um diodo tem um comportamento exponencial, entretanto a curva exibida na Fig. 4.19 e descrita pela Eq. 4.11

é uma boa aproximação da curva real da corrente elétrica que atravessa os diodos D1 e D2. O modelo que usamos para os diodos é um retificador simples, que é conhecido como um modelo simplificado para diodos. Uma melhor relação $I - V$ para um diodo é dada pelo modelo Shockley: $I(V) = I_s [\exp(V/V_T) - 1]$, e mais importante, o diodo tem uma capacitância fortemente não-linear, que é conhecida por produzir efeitos não-lineares fortes na dinâmica de circuitos simples (Linsay 1981, Testa *et al.* 1982). Se considerássemos a capacitância dos diodos nós precisaríamos adicionar outra equação diferencial, aumentando a dimensionalidade do sistema. Assim, escolhemos o modelo mais simples, suficiente para simplificar a discussão e as equações, ainda capturando o essencial do comportamento dinâmico do sistema¹.

Devemos nos recordar que, para um sistema autônomo e contínuo ser caótico sua dinâmica precisa (i) estar embebida em, pelo menos, um espaço de fases tridimensional (3D) (Strogatz 1994), e (ii) ter um termo não-linear. Nosso sistema tem uma não-linearidade na corrente da Eq. (4.3), e a fase do termo de excitação externa pode ser tomada com uma variável dinâmica que gera a terceira dimensão do sistema (Strogatz 1994), como discutido no Cap. 1.

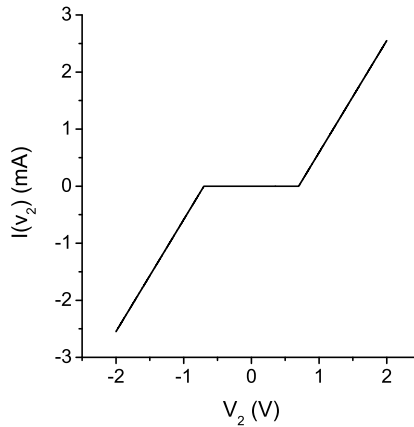


Figura 4.2 – Corrente não-linear através de um par de diodos anti-paralelos, tais como D_1 e D_2 na Fig. 4.1. Esta é uma corrente linear por partes idealizada a partir da Eq. (4.3).

Modificando os valores da frequência e da amplitude do sinal de bombeamento externo podemos sintonizar o sistema para produzir estados caóticos ou periódicos. Esse controle

¹Usando um simulador de circuitos SPICE, que usa um modelo mais refinado para diodos, nós geramos séries temporais com os mesmos parâmetros medidos no experimento, resultando em uma melhora na semelhança entre forma e tamanho dos atratores do experimento e da simulação.

do estado dinâmico do sistema pode ser feito tanto experimentalmente, através do circuito elétrico (Fig. 4.1) ou numericamente, através do modelo numérico que descreve o circuito elétrico (Eqs. 4.4 e 4.5). Como nós usamos um modelo simplificado para descrever o circuito da Fig. 4.1, nós precisamos fazer uns poucos ajustes sobre os parâmetros amplitude e frequência da voltagem de bombeio externo V_E nas simulações para obtermos um comportamento dinâmico similar ao observado no experimento. Nós somos capazes de reproduzir, no modelo, todos os regimes oscilatórios observados, caótico ou periódico, com valores dos parâmetros f e A ligeiramente diferentes dos respectivos usados no experimento. Os valores dos resistores e capacitores são os mesmos no experimento e nas integrações numéricas.

Na Fig. 4.3 temos projeções no plano (V_1, V_2) do espaço de fases do sistema obtidas a partir de séries temporais experimentais para vários valores da frequência f ((a) 755, (b) 775, (c) 795, (d) 850, (e) 970 e (f) 1000 Hz) do sinal do bombeio externo do circuito, em que vemos estados periódicos e caóticos. Também podemos realizar essa análise de estados do sistema ao variarmos f ((a) 720, (b) 830, (c) 840, (d) 870, (e) 960 e (f) 980 Hz) em integrações numéricas realizadas a partir das Eqs. 4.4 e 4.5 (ver Fig. 4.4). Observamos na Fig. 4.3 que ocorre uma alternância entre periodicidade e caos à medida que aumentamos f e, como já discutido anteriormente nesta tese, esta característica é comum a vários sistemas dinâmicos, como por exemplo, nos sistemas de Lorenz e de Rössler, apresentados no Capítulo 1. Nosso sistema não-autônomo exibe diversos atratores periódicos e caóticos. Por exemplo, na Fig. 4.3(c) para $f = 795$ Hz temos um atrator caótico cujas trajetórias preenchem todo seu interior. Na Fig. 4.3(e) para $f = 970$ Hz, temos no entanto um atrator caótico cujas trajetórias não preenchem todo seu interior. Ele exibe uma região sem visitas de trajetórias próximas ao centro de seu espaço de fase. Já na Fig. 4.4 observamos uma rota de dobramentos de períodos invertida para os atratores periódicos com (d) $f = 870$, (e) $f = 960$ e (f) $f = 980$ Hz. Atratores caóticos com seu interior completamente preenchido, ou não, por suas trajetórias características e rotas de dobramento de período são observados em nosso sistema, seja no circuito elétrico experimental, seja em nossas simulações numéricas.

Na Fig. 4.5 temos o máximo expoente de Lyapunov calculado numericamente variando-se o parâmetro f de 600 Hz a 1000 Hz e mantendo-se $A = 3.0$ V. Nesse gráfico observamos regiões caóticas, $\lambda_{max} > 0$, e periódicas, $\lambda_{max} < 0$, do sistema. Note que o sistema tem um

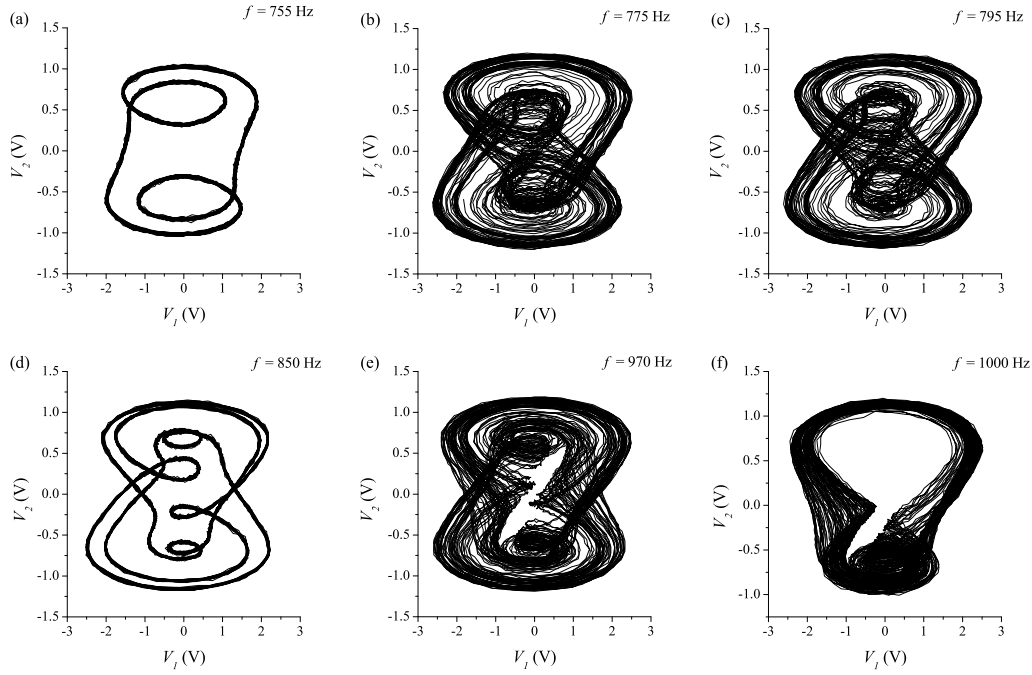


Figura 4.3 – Projeções dos atratores no plano (V_1, V_2) obtidos a partir de séries temporais experimentais. Em todos os casos temos $A = 4$ V. Os valores de f utilizados para gerar cada atrator são (a) 755, (b) 775, (c) 795, (d) 850, (e) 970 e (f) 1000 Hz. Os valores de todos os outros parâmetros do sistema estão citados no texto.

termo de forçamento externo, $V_E = A \sin(2\pi ft)$ que é periódico e responsável por aumentar a dimensionalidade do sistema (o sistema é não-autônomo). Esse forçamento externo faz com que o sistema tenha três expoentes de Lyapunov, sendo o associado ao termo periódico de forçamento externo sempre igual a zero, assim quando temos $\lambda_{max} < 0$ na Fig. 4.5 o sistema exibe comportamento periódico e não ponto fixo. O sistema exibe comportamento periódico para $600 < f < 675$ Hz. Para $675 < f < 960$ Hz temos uma banda caótica com algumas janelas periódicas em seu interior como, por exemplo, para $759 < f < 768$ Hz e $840 < f < 842$ Hz. Temos outra banda periódica para $960 < f < 1000$ Hz.

4.2 Acoplamento entre dois sistemas não-autônomos quase-idênticos

Caracterizamos o comportamento dinâmico de um sistema não-autônomo, tanto experimentalmente (através de circuitos eletrônicos) quanto numericamente (através de suas equa-

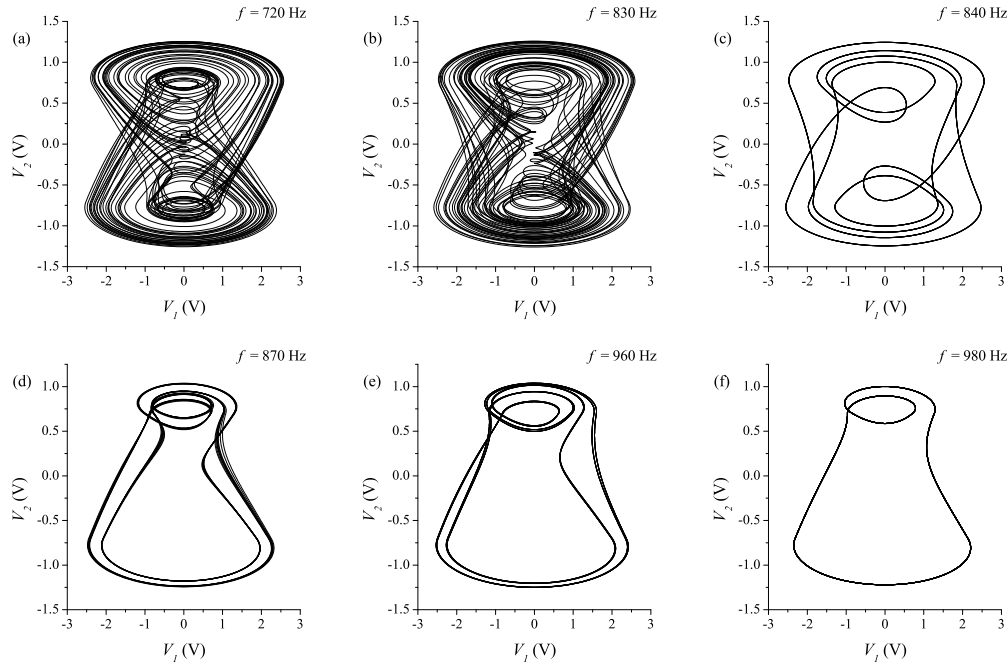


Figura 4.4 – Projeções dos atratores no plano (V_1, V_2) obtidos a partir de séries temporais numéricas. Em todos os casos temos $A = 3$ V. Os valores de f utilizados para gerar cada atrator são (a) 720, (b) 830, (c) 840, (d) 870, (e) 960 e (f) 980 Hz que qualitativamente reproduzem os resultados experimentais, apresentados na Fig. 4.3. Os valores de todos os outros parâmetros do sistema estão citados no texto.

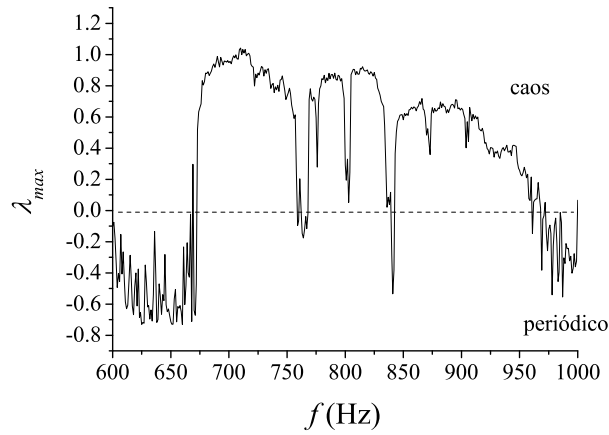


Figura 4.5 – Máximo expoente de Lyapunov calculado numericamente variando o parâmetro f de 600 Hz a 900 Hz e mantendo $A = 3$ V.

ções diferenciais ordinárias), explorando estados periódicos e caóticos. Nesta seção discutiremos como realizamos o acoplamento entre dois desses sistemas não-autônomos, quase-idênticos. O acoplamento é unidirecional, na configuração piloto-resposta, feito tanto experimentalmente entre um par de circuitos eletrônicos quase-idênticos, quanto numericamente,

através das equações diferenciais que regem os sistemas.

Ajustamos os parâmetros dos osciladores quase-idênticos para que cada um evolua independente do outro em regime caótico. O acoplamento via realimentação negativa é realizado utilizando um circuito extra de realimentação, através do qual a voltagem V_{1r} do circuito resposta é reinjetada junto com um termo corretivo em relação a voltagem V_{1d} do circuito piloto. Na Fig. 4.6 nós mostramos o circuito resposta, destacando o circuito de realimentação, um subtrator (amplificador operacional OP3) onde o sinal de realimentação é produzido e cujas voltagens de entrada são V_{1d} e V_{1r} e a voltagem de saída é proporcional a $V_{1d} - V_{1r}$. Este sinal de realimentação é adicionado à dinâmica do subsistema resposta, produzindo o acoplamento entre o piloto e o resposta.

Os valores dos componentes do circuito resposta são escolhidos para serem tão próximos quanto possível ao seus respectivos no circuito piloto, dentro de uma margem de tolerância de 0,5%. Assim, os componentes R_1 , R , R_2 , R_E , R_3 e C_1 , tem os mesmos valores nominais nos circuitos piloto e resposta, enquanto $C_2 = 14,87$ nF, $C_3 = 14,87$ nF, $R_L = 511$ Ω tem valores mensuravelmente diferentes nos circuitos piloto e resposta. Os componentes do circuito subtrator são: $R_4 = 14,85$ k Ω , $R_5 = 14,85$ k Ω , $R_6 = 14,85$ k Ω e $R_7 = 14,85$ k Ω . Os respectivos componentes no circuito resposta para D_1 , D_2 , OP1 and OP2 são também dos mesmos modelos dos utilizados no circuito piloto, e o amplificador operacional OP3 é do modelo LF411CN. Esse desajuste de parâmetro também é implementado em nossas simulações, visando nos permitir observar eventos de dessincronização. R_{RE} é o resistor variável colocado na saída do subtrator OP3 e é responsável pelo acoplamento entre piloto e resposta. Por simplicidade, utilizamos apenas um gerador de sinal para fornecer o sinal senoidal V_E para ambos os sistemas piloto e resposta. Como V_E é um sinal externo aos sistemas, ou seja, não sofre influência devida a dinâmica do sistema, se utilizarmos dois geradores de função, um para o piloto e outro para o resposta, os sinais V_{Ed} e V_{Er} poderão ter tanto fases diferentes, como frequências e amplitudes ligeiramente diferentes, o que dificultaria bastante a sincronização entre os sistemas ou mesmo a impossibilitaria, dependendo da diferença de parâmetros entre os geradores, V_E .

As equações dinâmicas são as mesmas para ambos os circuitos, exceto pelo termo de acoplamento, que está presente apenas no circuito resposta:

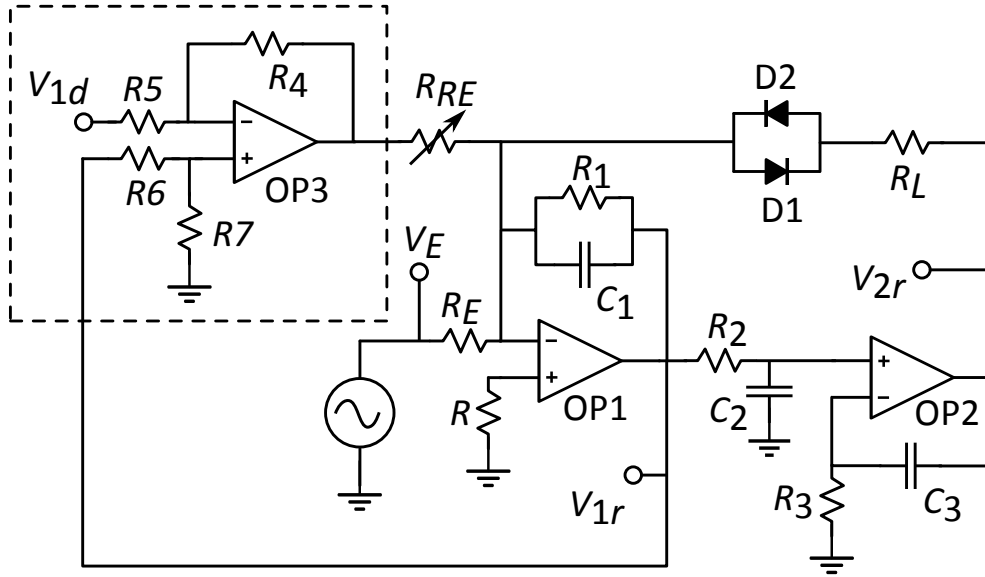


Figura 4.6 – Diagrama esquemático do sistema resposta. O retângulo tracejado destaca o circuito de realimentação que acopla o sistema resposta ao piloto.

$$\dot{V}_{1d} = -\gamma_d V_{1d} - \alpha_d I(V_{2d}) - \beta_d V_E, \quad (4.4)$$

$$\dot{V}_{2d} = \theta_d V_{1d}, \quad (4.5)$$

$$\dot{V}_{1r} = -\gamma_r V_{1r} + \alpha_r I(V_{2r}) - \beta_r V_E + \frac{\epsilon}{R_2 C_1} (V_{1d} - V_{1r}), \quad (4.6)$$

$$\dot{V}_{2r} = \theta_r V_{1r}, \quad (4.7)$$

onde $\epsilon = R_2/R_{RE}$ é o parâmetro adimensional que mede o nível de acoplamento entre os sistemas piloto e resposta.

Com o acoplamento entre dois sistemas não-autônomos quase-idênticos descrito, nas próximas duas seções mostramos nossos dois resultados importantes obtidos com esse sistema: (i) que o sinal de erro entre os circuitos acoplados em regime intermediário segue uma distribuição do tipo lei de potência cujo coeficiente varia com o nível de acoplamento; e (ii) que aumentamos a instabilidade do estado sincronizado ao modificarmos a forma do atrator caótico, indo de um estado com menor visitação a região com um objeto instável no espaço de fases a outro estado mais instável, com uma maior visitação do objeto instável.

4.3 Lei de potência sintonizável em eventos de dessincronização de circuitos eletrônicos caóticos

Nesta seção mostramos que nosso sistema dinâmico não-linear não-autônomo formado por um par de osciladores caóticos acoplados, tem sua distribuição estatística dos máximos do sinal de erro (variável que descreve o estado de sincronismo deste sistema) apresentando um comportamento de cauda longa e tem uma propriedade interessante: ela pode evoluir através de uma faixa larga de expoentes de lei de potência, que pode ser ajustada através de um parâmetro de controle. Sistemas com uma lei de potência de expoente ajustável não ocorrem muito frequentemente na Natureza. Portanto encontrar um exemplo de um sistema simples e bastante genérico pode fornecer informações sobre como o expoente pode ser controlado em outros sistemas, onde o controle dos grandes eventos seja importante.

Para determinar que distribuição estatística que os eventos de dessincronização seguem, ajustamos, experimentalmente e numericamente, os sistemas piloto e resposta para exibirem o mesmo estado caótico. À esquerda na Fig. 4.7 temos o atrator caótico experimental, construído a partir de séries temporais experimentais e à direita, o atrator caótico numérico construído a partir das simulações numéricas. Os sistemas piloto e resposta tem seus estados caóticos previamente ajustados quando estão desacoplados. No experimento utilizamos $A = 4$ V e $f = 770$ Hz e na simulação numérica $A = 3$ V e $f = 720$ Hz.

Após ajustarmos os sistemas, os circuitos foram então acoplados e nós usamos um osciloscópio digital para adquirir séries temporais das diferenças $V_{1d} - V_{1r}$ and $V_{2d} - V_{2r}$. A partir destes sinais nós obtivemos a distância $|x_{\perp}|$ entre os sistemas piloto e resposta no espaço de fases 3-D. Para facilitar o cálculo analógico da distância nós utilizamos a norma L-1 para definir esta distância como $|x_{\perp}| = |V_{1d} - V_{1r}| + |V_{2d} - V_{2r}|$ ². Séries temporais de $|x_{\perp}|$ são mostradas na Fig. 4.8 para diferentes valores do parâmetro de acoplamento ϵ . Note que a terceira dimensão não contribui para a distância, pois ambos osciladores compartilham o mesmo valor de V_E (o sistema completo é na verdade 5-D, não 6-D). Para comparar os

²Na norma L-1 a distância entre dois pontos arbitrários, $\vec{x}_a = (x_{a1}, x_{a2}, x_{a3})$ e $\vec{x}_b = (x_{b1}, x_{b2}, x_{b3})$, é dada por $d = |x_{a1} - x_{b1}| + |x_{a2} - x_{b2}| + |x_{a3} - x_{b3}|$, ao invés da raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças, usual na norma L-2.

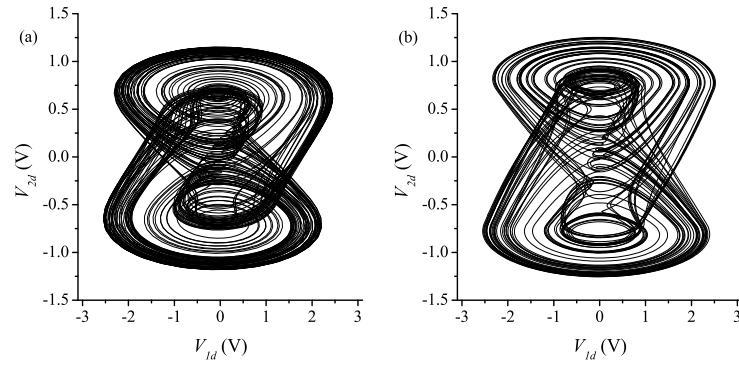


Figura 4.7 – Uma trajetória caótica projetada no plano (V_1, V_2) é traçada (a) a partir de dados experimentais obtidos com bombeamento externo $A = 4$ V e $f = 770$ Hz e (b) a partir de dados numéricos obtidos através de integração das Eqs. (4.4) and (4.5) usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, com bombeamento externo $A = 3$ V e $f = 720$ Hz. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

resultados experimentais e numéricos nós usamos o mesmo procedimento em nossas integrações: nós calculamos as séries temporais de V_{1d} , V_{2d} , V_{1r} e V_{2r} e então a distância, $|x_{\perp}|$, entre os sistema piloto e resposta. A variável $|x_{\perp}|$ é usada para fazer a análise estatística das amplitudes dos escapes de dessincronização.

Nós adquirimos séries temporais experimentais de $|x_{\perp}|$ com 10^7 pontos a uma taxa de amostragem de 100 kHz (tempo de amostragem 10 μ s, duração das séries 100 s). Para definir um tamanho de escape, nós primeiro eliminamos flutuações de alta frequência (ruído) aplicando uma média móvel de 9 pontos para as séries temporais de $|x_{\perp}|$ e construímos uma sequência temporal de máximos locais $|x_{\perp}|_n$ do sinal de erro. Um máximo é detectado comparando um valor de $|x_{\perp}|$, acima de um limiar de 0,05 V, com seus 8 vizinhos mais próximos em ambos os lados. A média móvel previne a detecção de características de alta-frequência indesejadas no sinal de erro (falsos máximos causados por ruído). Como a janela móvel é mais curta do que a escala de tempo característica da dinâmica do sistema a média não elimina pulsos verdadeiramente originados pela dinâmica caótica do sistema. O limiar nos valores dos máximos aceitos elimina máximos que são pequenos e estão abaixo do limite inferior das leis de potência. As distribuições de máximos são mostradas na Fig. 4.9 para diferentes valores do acoplamento ϵ . Estas distribuições empíricas são obtidas como histogramas normalizados que tem área unitária em uma escala linear. As distribuições de máximos experimentais e numéricas apresentam o mesmo comportamento geral, como nós

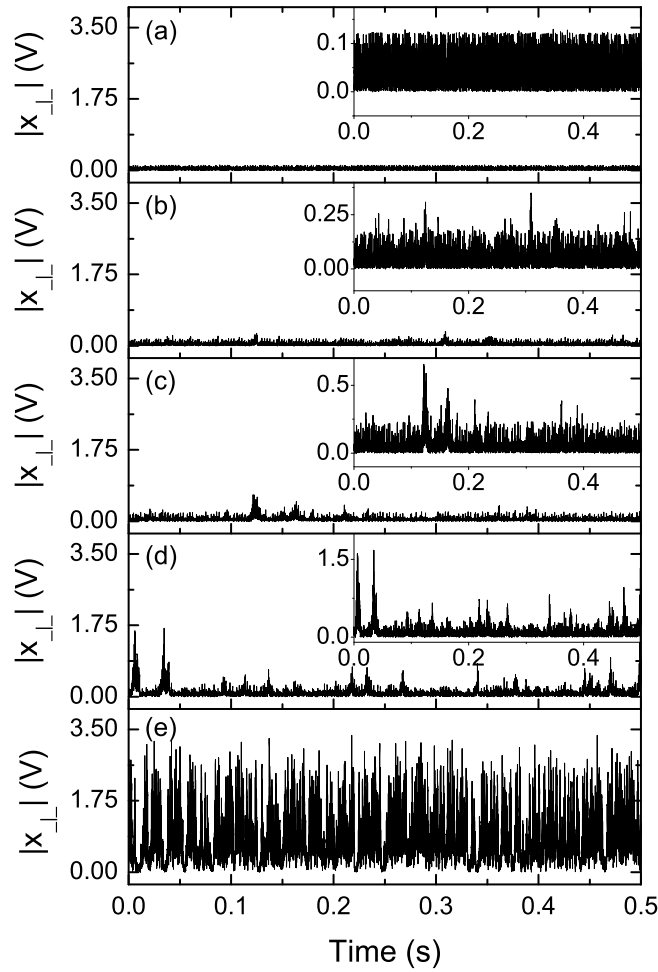


Figura 4.8 – Pequenos segmentos de séries temporais experimentais do sinal de erro ($|x_{\perp}| = |V_{1d} - V_{1r}| + |V_{2d} - V_{2r}|$) para os circuitos acoplados com bombeamento externo $A = 4$ V e $f = 770$ Hz, para diferentes níveis de acoplamentos: (a) $\epsilon = 1$, (b) $\epsilon = 0,7$, (c) $\epsilon = 0,6$, (d) $\epsilon = 0,5$, (e) $\epsilon = 0$. Os gráficos inseridos em (a), (b), (c) e (d) mostram as mesmas séries temporais em uma escala amplificada para exibir detalhes dos escapes nas séries temporais experimental do sinal de erro.

podemos ver nas Figs. 4.9(a) e 4.9(b). Os histogramas mostram uma mudança qualitativa entre três regimes quando o nível de acoplamento é variado a partir de 0 até 1. Para acoplamento fraco ($\epsilon < 0,5$) os sistemas piloto e resposta permanecem independentes, e as formas dos histogramas refletem as estruturas na função de densidade de probabilidade (PDF) dos dois atratores caóticos, projetados ao longo da variável observada; para acoplamento forte ($\epsilon > 0,8$) existe sincronização de alta qualidade, com a distância entre os sistemas flutuando ao redor da origem. Quando nós ajustamos a força de acoplamento a partir de um estado (completamente) dessincronizado até um estado altamente sincronizado, $0,5 \leq \epsilon < 0,8$, o

sistema exibe borbulhamento de atratores (*attractor bubbling*), caracterizado pela ocorrência de breves escapes a partir do estado de sincronização de alta qualidade e por uma distribuição de cauda longa para $|x_{\perp}|_n$.

Neste regime de acoplamento moderado, as distribuições são visualmente similares a leis de potência. Elas seguem praticamente uma linha reta em escala log-log (gráficos cujos eixos estão em escala logarítmica), ao menos para uma certa faixa de valores de tamanhos dos escapes. Note que muitos sistemas físicos tem limites para o tamanho máximo (e mínimo) produzido por suas variáveis, ou para os tamanhos que podem ser observados experimentalmente (Klaus *et al.* 2011), portanto é comum encontrar leis de potência truncadas, tanto no limite de observáveis grandes quanto pequenos. Nós usamos distribuições de lei de potência truncada da forma $P(x) = Cx^{-\alpha}e^{-\lambda x}$, para ajustar nossos dados em escala log-log, deixando dois parâmetros livres: o expoente da lei de potência α e o coeficiente do decaimento exponencial λ . A escolha da distribuição é baseada na qualidade dos ajustes dos histogramas, comparada a distribuições alternativas, como lei de potência pura $P(x) = Cx^{-\alpha}$, e a exponencial pura $P(x) = Ce^{-\lambda x}$. A qualidade do ajuste para diferentes distribuições pode ser acessada quantitativamente pelo cálculo de χ^2 reduzido (quadrado dos resíduos relativos acumulados, dividido pelo número de graus de liberdade)

$$\chi^2 = \frac{1}{N - p - 1} \sum_{i=1}^N \frac{(P_T(x_i) - P_O(x_i))^2}{P_T(x_i)}, \quad (4.8)$$

onde $P_T(x)$ é o histograma teórico, $P_O(x)$ é o histograma medido, N é o número de pontos onde as distribuições são calculadas (bins do histograma), e p é o número de parâmetros livres no ajuste de curva. A Tabela 4.1 mostra os valores de χ^2 para as diferentes distribuições que testamos. Em cada caso a lei de potência truncada exibe os menores valores do resíduo acumulado para o melhor ajuste. Os valores dos parâmetros α e λ obtidos para diferentes valores do parâmetro de acoplamento ϵ são listados na Tabela 4.2. Note ainda que os valores de α , que correspondem aproximadamente a inclinação dos ajustes de linhas retas na Fig. 4.9, mudam com ϵ , indicando que pode ser facilmente sintonizada. O valor de λ , que é teoricamente proporcional ao inverso do tamanho do maior evento de dessincronização, também cresce com ϵ . As barras de erro nesta tabela apenas medem a incerteza na inclinação do ajuste linear ótimo (em escala log-log), não o erro verdadeiro no valor de α ,

Tabela 4.1 – Valores de χ^2 reduzido para os ajustes (lei de potência, lei de potência truncada, exponencial) das curvas experimentais e numéricas mostradas na Fig. 4.9.

	ii _{Exp}	iii _{Exp}	iv _{Exp}
Lei de			
potência	$2,56 \times 10^{-4}$	$3,85 \times 10^{-5}$	$4,99 \times 10^{-4}$
Lei de pot.			
truncada	$2,56 \times 10^{-4}$	$3,84 \times 10^{-5}$	$4,96 \times 10^{-4}$
Exponencial	$2,75 \times 10^{-4}$	$4,36 \times 10^{-5}$	$8,18 \times 10^{-4}$
	ii _{Num}	iii _{Num}	iv _{Num}
Lei de			
potência	$2,66 \times 10^{-4}$	$5,12 \times 10^{-4}$	$2,31 \times 10^{-5}$
Lei de pot.			
truncada	$2,67 \times 10^{-4}$	$5,09 \times 10^{-4}$	$2,08 \times 10^{-5}$
Exponencial	$2,78 \times 10^{-4}$	$7,86 \times 10^{-4}$	$2,70 \times 10^{-5}$

Tabela 4.2 – Valores dos expoentes das leis de potência α para os ajustes de curvas experimentais e numéricas mostradas na Fig. 4.9.

ϵ	α_{Exp}	λ_{Exp}	α_{Num}	λ_{Num}
0,5	$2,86 \pm 0,07$	$0,33 \pm 0,18$	$1,85 \pm 0,13$	$1,00 \pm 0,20$
0,6	$3,30 \pm 0,33$	$0,97 \pm 0,79$	$3,75 \pm 0,24$	$2,05 \pm 1,50$
0,7	$5,09 \pm 1,07$	$3,21 \pm 4,42$	$4,74 \pm 1,30$	$2,37 \pm 6,70$

que nós estimamos ser da ordem de 15%. É importante destacar que, para ϵ entre 0,5 e 0,6 o sistema cruza o valor crítico do expoente $\alpha = 3$, que para lei de potência pura implica na divergência do segundo momento da distribuição. No entanto no nosso sistema a lei de potência é truncada, pois existe um valor máximo de $|x_{\perp}|_n$.

A variação dos expoentes das leis de potência com o nível de acoplamento é confirmado pelo modelo numérico. Entretanto, devido a simplicidade de nosso modelo, os parâmetros A e f (amplitude e frequência do bombeamento externo, respectivamente) necessitam ser ajustados para se obter a melhor concordância entre as distribuições experimental e numérica. Como nós podemos ver a partir das Fig. 4.9(a), 4.9(b) e da Tabela 4.2, modificando o valor

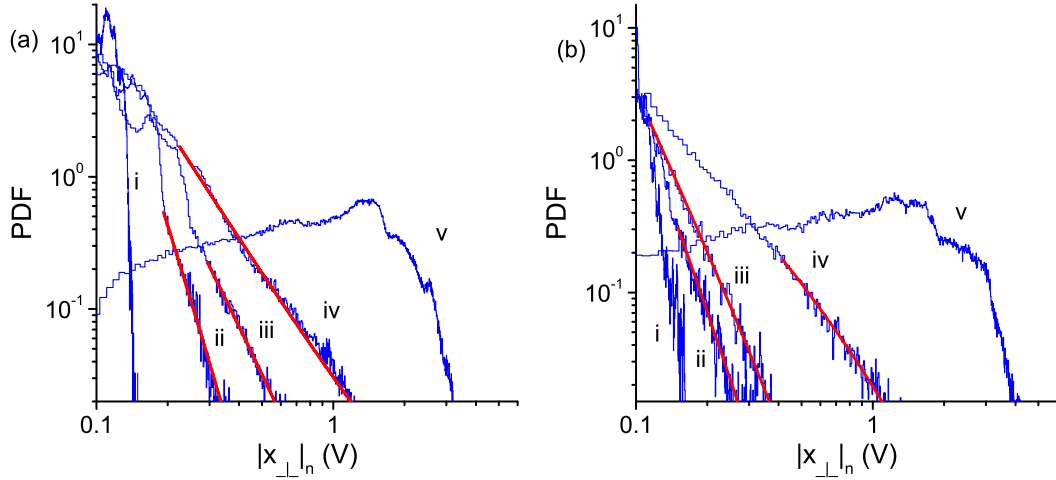


Figura 4.9 – Distribuições log-log das voltagens obtidas a partir dos máximos $|x_{\perp}|_n$ para diferentes níveis de acoplamento ϵ com (i) $\epsilon = 1$, (ii) $\epsilon = 0,7$, (iii) $\epsilon = 0,6$, (iv) $\epsilon = 0,5$, (v) $\epsilon = 0$: (a) resultados experimentais e (b) resultados numéricos. Os valores dos expoentes das leis de potência são mostrados na Tabela 4.2.

de ϵ no regime de acoplamento moderado nós somos capazes de controlar a derivada das distribuições das leis de potência das séries de máximos $|x_{\perp}|_n$ tanto no circuito experimental quanto no modelo numérico simplificado. Em outras palavras, nós sintonizamos o valor médio de $|x_{\perp}|_n$, e o alcance máximo da distribuição desta variável, tornando o sistema controlavelmente mais ou menos instável.

4.4 Efeito do atrator sobre eventos de dessincronização em circuitos caóticos acoplados

Nesta seção apresentamos o nosso segundo importante resultado realizado com um sistema formado por um par de circuitos eletrônicos caóticos acoplados. Este sistema apresenta, particularmente, uma forma do atrator caótico modificável que nós exploramos para investigar os efeitos da proximidade de trajetórias caóticas para objetos instáveis no espaço de fases. Nós observamos que a probabilidade de escapes do estado sincronizado e o tamanho desses eventos de dessincronização crescem quando os atratores são tais que permitem que as trajetórias caóticas visitem mais frequentemente a região de forte instabilidade.

O impacto de órbitas periódicas instáveis na dessincronização de osciladores acoplados tem sido investigado, particularmente em osciladores tipo Rössler (Heagy *et al.* 1995).

No nosso sistema somos capazes de ajustar diferentes atratores caóticos para os circuitos variando a frequência f do bombeamento externo. Como mostramos nas Fig. 4.10 e Fig. 4.11, respectivamente para dados experimentais e simulações numéricas, o caminho típico seguido pelas trajetórias caóticas muda, passando menos vezes e mais longe da região instável no centro do espaço de fases do sistema com o aumento de f . A Fig. 4.10 mostra algumas trajetórias caóticas no plano (V_1, V_2) obtidas a partir de dados experimentais com $A = 4$ V e diferentes valores de f . A Fig. 4.11 mostra trajetórias similares calculadas a partir de simulações numéricas do modelo de equações diferenciais, fazendo $A = 3$ V para diferentes valores de f . Atribuímos a diferença entre experimento e simulação a simplicidade de nosso modelo, que não incorpora todos os detalhes dos componentes eletrônicos presentes no circuito. Não obstante, o comportamento qualitativo de nosso modelo concorda bem com as observação experimentais.

Os atratores mostrados na sequência da Fig. 4.10 (e Fig. 4.11) exibem um “vazio” crescente na densidade de trajetórias próximas a região instável central. O aparecimento desta redução na densidade de trajetórias no centro do atrator e o fato que sua largura é controlada por um único parâmetro, a frequência f , é uma característica particular de nosso sistema. Nós exploramos esta propriedade para investigar o efeito que o aumento do espaço vazio produz na distribuição de eventos de dessincronização.

Baseado na idéia de que existe um objeto instável na origem do espaço de fases cuja instabilidade causa as dessincronizações, deveríamos esperar que trajetórias contidas em atratores que evitam a região central são menos suscetíveis a dessincronizar. Procurando verificar esta idéia nós precisamos quantificar a tendência das trajetórias visitarem o centro do espaço de fases e correlacionar com sua tendência para deixar o estado sincronizado.

Para quantificar a modificação na densidade de trajetórias próximas ao centro do espaço de fases nós produzimos uma média ponderada contando o número de visitas de uma trajetória na região central. Pesos são usados nesta média para levar em conta a distância relativa dos pontos da trajetória ao objeto instável na origem do espaço de fases. A forma inclinada do espaço vazio nos sugere que contemos pontos dentro de uma região alongada próxima ao

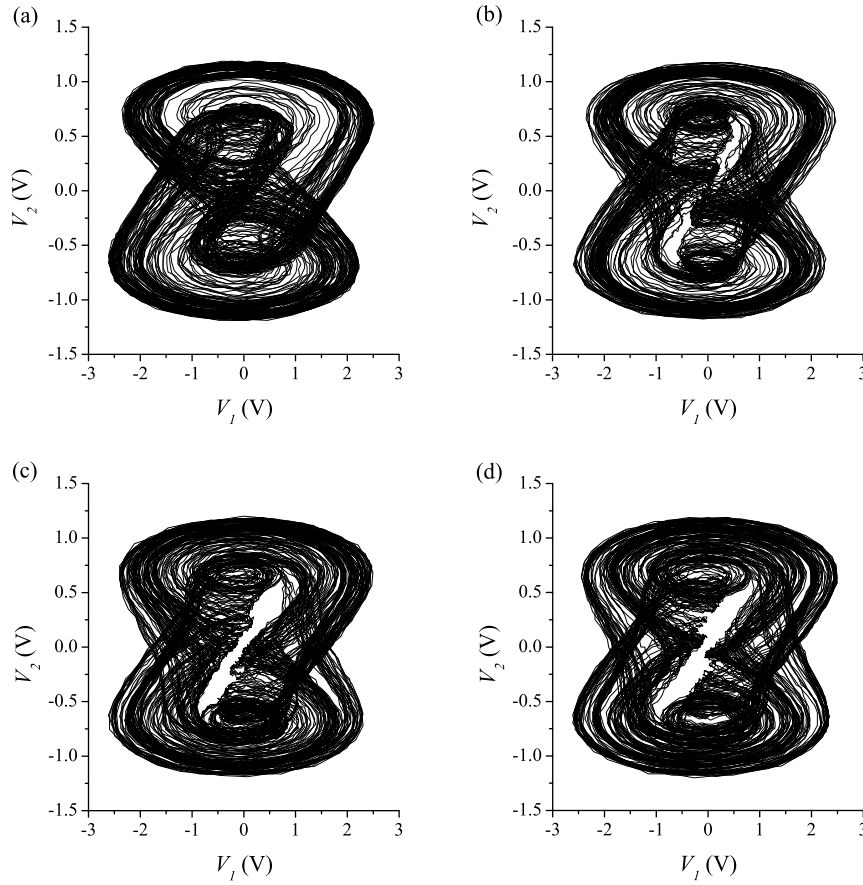


Figura 4.10 – Trajetórias caóticas no plano (V_1, V_2) obtidas a partir de séries temporais experimentais com $A = 4$ V e (a) $f = 770$ Hz, (b) $f = 886$ Hz, (c) $f = 950$ Hz, (d) $f = 980$ Hz. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

centro do espaço de fases. Por simplicidade escolhemos um paralelogramo, mostrado na Fig. 4.12, com uma forma fixa definida por $-0,5 < V_1 < 0,5$ e $0,7V_1 - 0,3 < V_2 < 0,7V_1 + 0,3$. Uma escolha de pesos para a média é a seguinte: quando um ponto na trajetória está dentro do paralelogramo definido acima é contado com um peso linearmente proporcional a distância vertical (ao longo da direção V_2) ao centro do paralelogramo. Com esta escolha um ponto na lateral superior ou inferior tem peso zero. Por outro lado, um ponto pertencente a linha central do paralelogramo, paralela as laterais superior e inferior, tem peso um. A contagem ponderada é então dividida pelo número total de pontos na série temporal. Nós denominamos esta quantidade de *razão de visitação ponderada* (RVP). Na Fig. 4.13 fazemos um gráfico de RVP como função de f em que observamos que à medida em que aumentamos a frequência f da excitação externa do sistema, RVP diminui, exaltando a boa correspondência entre experimento e modelo. Todas as séries temporais usadas para os diferentes atratores

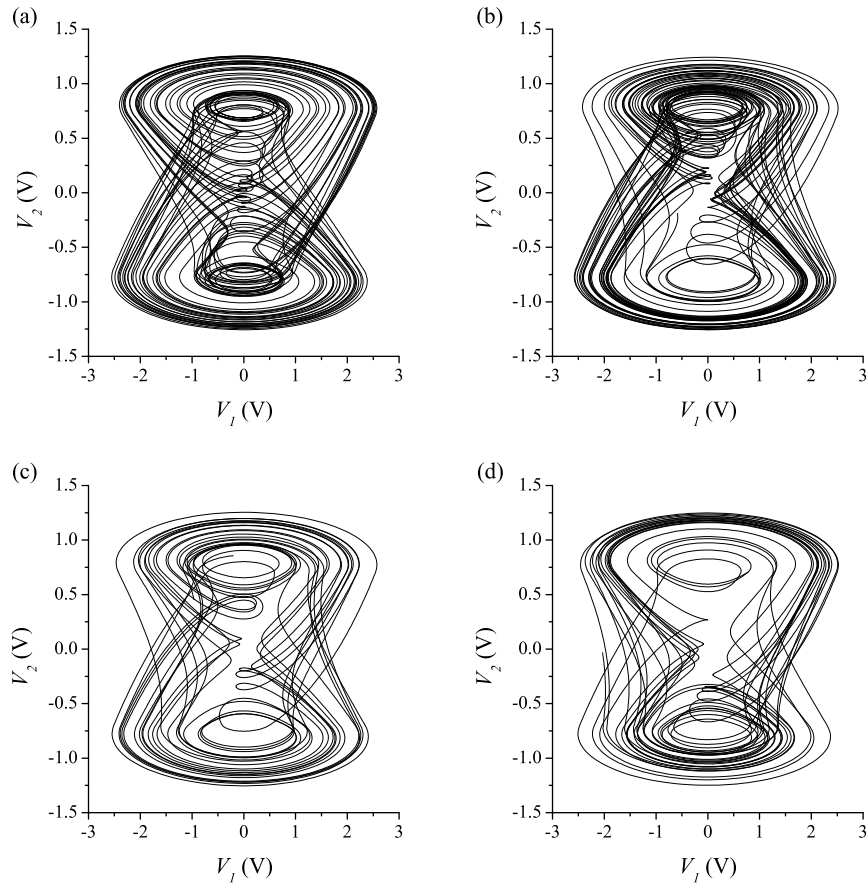


Figura 4.11 – Trajetórias caóticas no plano (V_1, V_2) obtidas a partir de séries temporais numéricas com $A = 3$ V e (a) $f = 720$ Hz, (b) $f = 820$ Hz, (c) $f = 850$ Hz, (d) $f = 890$ Hz. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

tem o mesmo número de pontos e o mesmo período de amostragem.

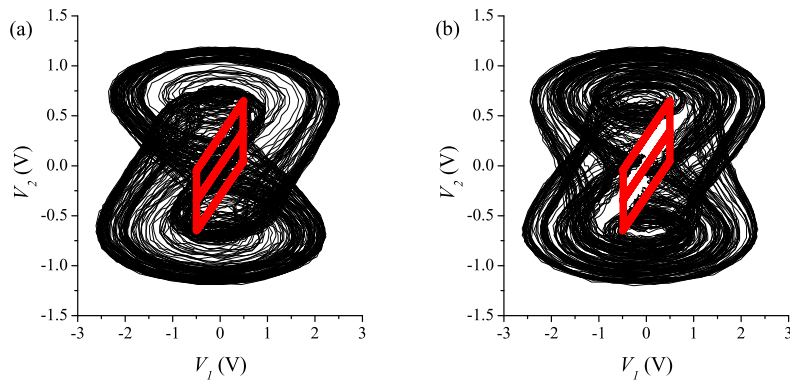


Figura 4.12 – Trajetórias caóticas experimentais projetadas no plano (V_{1d}, V_{2d}) , com (a) $f = 770$ Hz e (b) $f = 980$ Hz. O paralelogramo e a linha central usadas para contar o RVP também são mostrados.

Usando este procedimento de contagem ponderada uma série temporal sem pontos dentro

do paralelograma tem $RVP = 0$; uma série temporal hipotética onde todos os pontos visitam o paralelograma passando através da linha central tem uma razão de visitação ponderada igual a razão de tempo que uma trajetória gasta dentro do paralelograma; e uma típica trajetória verdadeira, tal qual as mostradas nas Figs. 4.10 and 4.11, tem um valor intermediário entre os casos anteriores, de modo que trajetórias visitando a região central mais frequente e próxima a origem exibem grandes valores de RVP.

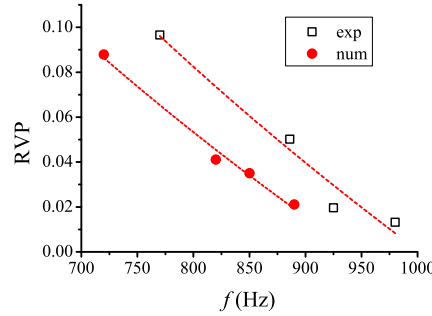


Figura 4.13 – Razão de visitação ponderada (RVP) medindo a proporção de tempo gasto pelas trajetórias próximo ao centro de plano (V_1, V_2) para cada um dos atratores das Figs. 4.10 (experimental) e 4.11 (numérica).

Para associar a RVP a modificações de número de grandes eventos, adquirimos séries temporais de $V_{1d} - V_{1r}$ e $V_{2d} - V_{2r}$, calculando em seguida a distância $|x_{\perp}|$, como na seção anterior. Nossas séries temporais do sinal de erro $|x_{\perp}|$ tem 10^7 pontos a uma taxa de amostragem de 100 kHz e duração de 100 s. A partir desses dados calculamos o valor médio quadrático (rms) do sinal de erro com uma medida da dessincronização em tempo contínuo além das distribuições dos tamanhos dos escapes.

Procedemos como na seção anterior, adquirindo séries temporais das diferenças $V_{1d} - V_{1r}$ e $V_{2d} - V_{2r}$, experimentalmente e numericamente. Em seguida construímos o sinal de erro $|x_{\perp}|$ e calculamos seus máximos, $|x_{\perp}|_n$.

A função de distribuição de probabilidade empírica (PDF) dos tamanhos dos eventos de dessincronização é obtida a partir de histogramas bem resolvidos de $|x_{\perp}|_n$ construídos para diferentes valores do parâmetro de acoplamento ϵ . Um PDF de alta resolução apenas é possível graças a uma grande quantidade de pontos. As Figs. 4.14 e 4.15 mostram estes histogramas de $|x_{\perp}|_n$ construídos para cada um dos atratores das Figs. 4.10 e 4.11, respectivamente. Nas Figs. 4.14(a) e 4.15(a) nós usamos um fraco nível de acoplamento,

com $\epsilon = 0,35$, de modo que o oscilador resposta não está sincronizado ao piloto. As Figs. 4.14(b) e 4.15(b) correspondem a um nível de acoplamento intermediário, com $\epsilon = 0,50$ e os sistemas exibem sincronização intermitente com distribuições de cauda longa, consistente com borbulhamento de atratores. Finalmente, as Figs. 4.14(c) e 4.15(c) tem acoplamento forte, com $\epsilon = 0,65$, e os sistemas estão quase sincronizados, mas ainda no regime de sincronização de “baixa qualidade”, também característica de sistemas com borbulhamento de atratores sob regime de forte acoplamento (Gauthier & Bienfang 1996).

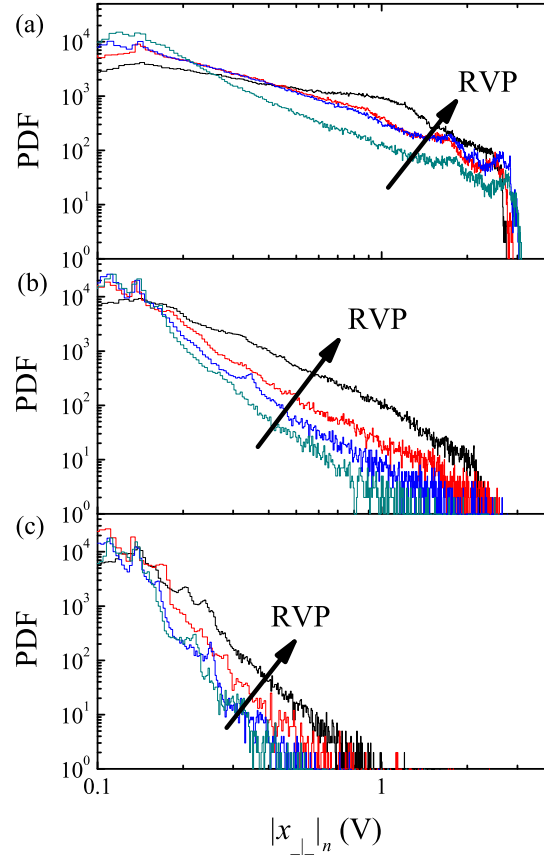


Figura 4.14 – Distribuição experimental dos máximos do sinal de erro $|x_{\perp}|_n$ em escala log-log com níveis de acoplamento (a) $\epsilon = 0,35$, (b) $\epsilon = 0,50$, (c) $\epsilon = 0,65$. As curvas preta, vermelha, azul e verde, aparecem nesta sequência de cima para baixo em todos os gráficos, correspondem aos atratores mostrados na Fig. 4.10(a) até a Fig. 4.10(d), respectivamente.

Inspecionando os PDFs nas Figs. 4.14 e 4.15, indo de (a) até (c), vemos que um valor maior de ϵ corresponde a uma probabilidade menor de eventos de dessincronização com grande amplitude, como esperado. Observando as curvas apresentadas em cada figura também percebemos que quando comparamos diferentes atratores com o mesmo valor fixo de ϵ , os

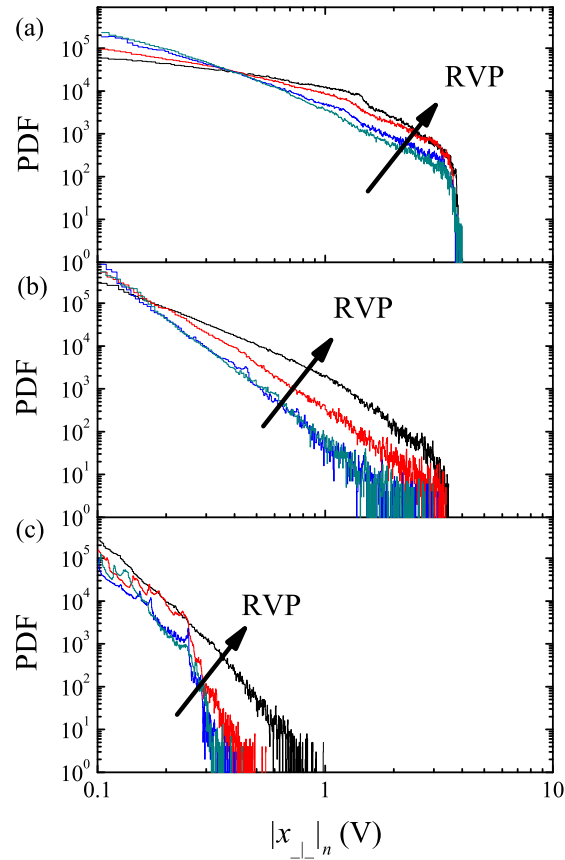


Figura 4.15 – Distribuição numérica de $|x_{\perp}|_n$ em escala log-log com (a) $\epsilon = 0,35$, (b) $\epsilon = 0,50$, (c) $\epsilon = 0,65$. As curvas preta, vermelha, azul e verde, aparecem nesta sequência de cima para baixo em todos os gráficos, correspondem aos atratores mostrados na Fig. 4.11(a) até a Fig. 4.11(d), respectivamente.

atratores com menor taxa de visitação ao centro de espaço de fases também mostram uma probabilidade menor de eventos de dessincronização grandes.

Para deixar esta última característica mais clara, nós vamos investigar como a densidade de trajetórias visitando o centro do espaço de fases, medida por RVP, afeta a instabilidade dos atratores, o qual é medido pelo valor rms do sinal de erro. Essa medida é feita para vários níveis de acoplamento ϵ . A Fig. 4.16 mostra um gráfico do erro rms em tempo contínuo versus ϵ para os diferentes atratores. Em todos os casos o valor rms do erro diminui monotonicamente com ϵ . No caso desacoplado e para acoplamento muito pequeno ($\epsilon < 0,2$, no experimento e $\epsilon < 0,1$, na simulação numérica) os valores rms são maiores para os menores RVP. Isto acontece porque os atratores com grande vazão no centro exibem grande variância de suas variáveis, V_1 e V_2 , e então maiores valores de $|x_{\perp}|$ quando o acoplamento é insuficiente

para sincronizar. Para grandes acoplamentos, $\epsilon > 0,7$, o sistema é sincronizado e para todos os atratores, o valor rms é próximo a zero.

Para o caso de $0,2 < \epsilon < 0,7$, a visitação na região de instabilidade ao redor do centro do espaço de fases dos atratores tem um efeito visível no valor rms de $|x_{\perp}|$. Quando os osciladores piloto e resposta exibem o atrator com maior valor de RVP, mais trajetórias passam através da região central do espaço de fases. Então estas trajetórias são repelidas pelo objeto instável, com uma probabilidade diferente de zero das trajetórias dos osciladores do piloto e do resposta serem separadas, ocorrendo um evento de dessincronização. Assim, o atrator com maior valor de RVP é menos suscetível ao aumento em ϵ , porque passando mais vezes próximo ao objeto instável existe uma grande probabilidade de ocorrer um evento de dessincronização, aumentando o $|x_{\perp}|_{rms}$ e fazendo com que o sistema precise de um maior acoplamento para sincronizar. Deste modo, na faixa intermediária de ϵ podemos observar nas curvas do erro rms vs ϵ para diferentes atratores que o valor $|x_{\perp}|_{rms}$ é maior para o atrator com o maior valor de RVP, e $|x_{\perp}|_{rms}$ é menor para o atrator com o menor RVP. Isto é consistente com nossa interpretação de que RVP determina uma instabilidade efetiva, como ela se opõe ao efeito do acoplamento. Assim, o comportamento geral explicado acima acontece tanto nas observações experimentais quanto nas simulações numéricas. Pequenas diferenças entre os resultados experimentais e numéricos são explicadas pela simplicidade de nosso modelo.

4.5 Efeito da instabilidade local na formação de eventos de dessincronização

No sistema não-autônomo (Gonçalves & Neto 2011, de Oliveira Jr *et al.* 2014, de Oliveira Jr *et al.* 2015), estudado neste capítulo, mostramos que o estado de sincronismo é quebrado por eventos de dessincronização, cujo histograma segue uma distribuição de máximos do tipo lei de potência. Além disso, mostramos que podemos ajustar o expoente da lei de potência via parâmetro de acoplamento e, como consequência, mudar a faixa e a probabilidade dos grandes eventos.

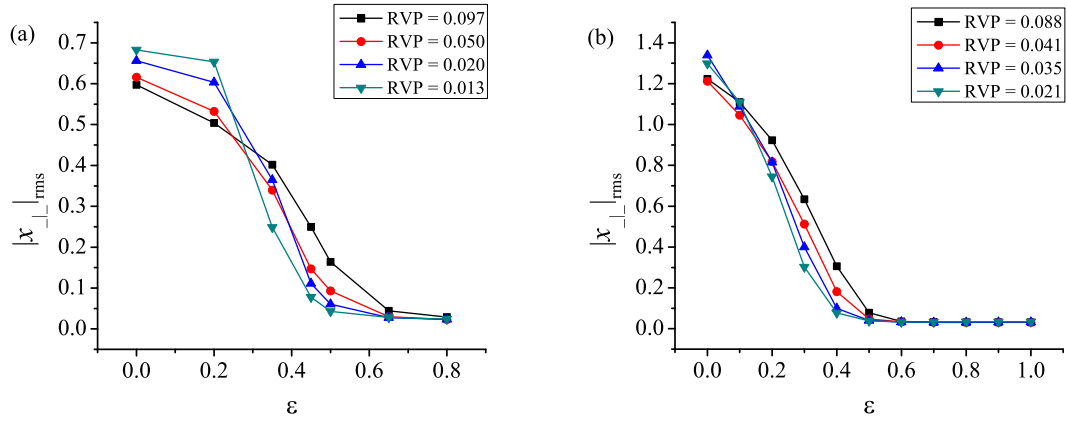


Figura 4.16 – Raiz do valor quadrático médio (rms) do sinal de erro vs ϵ (força de acoplamento) para cada um dos atratores das (a) Figs. 4.10 (experimentais) e (b) Figs. 4.11 (numéricas), com seus respectivos valores da razão de visitação ponderada: ■ para $RVP = 0,097$ (exp) e $RVP = 0,088$ (num), ○ para $RVP = 0,050$ (exp) e $RVP = 0,041$ (num), ★ para $RVP = 0,020$ (exp) e $RVP = 0,035$ (num), ⊕ para $RVP = 0,013$ (exp) e $RVP = 0,021$ (num).

Também mostramos que podemos controlar eventos de dessincronização controlando a visitação de trajetórias a região de instabilidade no espaço de fase de alguns atratores caóticos que o sistema pode exibir. A diferença em visitar mais ou menos a região central do espaço de fases do sistema, significa modificar a estabilidade do estado sincronizado e assim, temos um aumento da ocorrência dos eventos de maiores amplitudes.

Esse segundo resultado obtido com o sistema não-autônomo, que consiste em controlar-mos a estabilidade do estado sincronizado em nosso sistema, modificando a taxa de visitas de trajetórias a região de instabilidade no espaço de fase, nos fez realizar uma modificação no termo não-linear ao sistema não-autônomo utilizado até então neste capítulo (Fig. 4.17). No sistema que passamos a analisar (Fig. 4.17) modificamos a resposta não-linear da corrente em função da tensão V_2 . Na região de baixa tensão, onde a corrente é praticamente nula ($|V_2| < 0,7V$), passamos a ter uma corrente diferente de zero, linear, porém com derivada oposta a das partes laterais ($|V_2| > 0,7V$).

Desta forma, objetivamos aumentar a instabilidade do sistema ao redor da origem do espaço de fases. Utilizamos um sistema composto por dois osciladores caóticos quase-idênticos que fogem do estado sincronizado quando acoplados, um fenômeno chamado borbulhamento

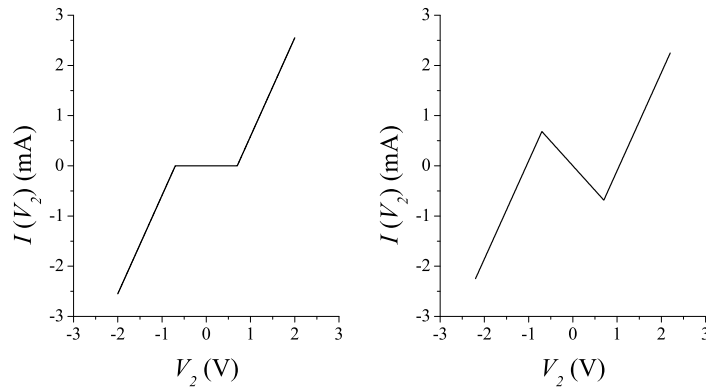


Figura 4.17 – À esquerda temos a corrente não-linear com derivada nula na região central.

À direita, a corrente não-linear com derivada negativa na região central.

de atratores (*attractor bubbling*). Em seguida, construímos a estatística de eventos de dessincronização e encontramos que, diminuindo a derivada da corrente não-linear dos circuitos, um parâmetro que, como mostrado adiante, está associado a instabilidade local responsável pela perda de estado sincronizado, diminuimos a taxa de ocorrência de eventos dragões-rei. Nestas condições preserva-se a distribuição de lei de potências para eventos de tamanho intermediários e pequenos. Enquanto esses eventos dragões-rei ocorrem nesta segunda configuração do sistema autônomo, utilizando a primeira configuração temos apenas eventos de dessincronização, cujo histograma segue uma distribuição do tipo lei de potência sem eventos dragões-rei. Eventos dragões-rei são caracterizados por serem os maiores eventos e fazem a distribuição desviar da lei de potência no final de sua cauda. Nossos resultados reforçam a hipótese de que dragões-rei são causados por instabilidades locais no espaço de fases. Tal análise das instabilidades locais pode também permitir alguém acessar a ocorrência de dragões-rei em mais sistemas complexos.

Novamente, os tamanhos dos eventos são definidos e observados a partir de séries temporais do *signal de erro de sincronização* – a diferença entre as variáveis equivalentes dos osciladores – que usamos para construir histogramas. Este histogramas mostram que, no regime de borbulhamento de atratores, os escapes do estado de sincronização seguem aproximadamente uma distribuição de lei de potência truncada com um desvio positivo na sua cauda, caracterizando eventos dragões-rei. Nós analisamos como essas distribuições são afetadas pela mudança em dois parâmetros: (i) o valor do parâmetro de acoplamento entre os osciladores e (ii) o valor da resistência diferencial negativa. Essa última grandeza será

definida adiante.

4.5.1 Descrição do sistema não-autônomo modificado

O diagrama esquemático dos circuitos elétricos que usamos como osciladores caóticos (sistema *piloto* e sistema *resposta* acoplados através do circuito subtrator), são mostrados na Fig. 4.18 e são semelhantes aos apresentados nas Figs. 4.1 e 4.6, com exceção da modificação da corrente não-linear em função de V_2 . Eles são compostos por resistores, capacitores, diodos e amplificadores operacionais. Os valores dos componentes usados no circuito piloto são: $R_1 = 46.5 \text{ k}\Omega$, $R = R_2 = R_E = R_3 = R_5 = R_6 = R_7 = R_9 = 14.9 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 514 \text{ }\Omega$, $R_8 = 10.0 \text{ k}\Omega$, $C_1 = 14.7 \text{ nF}$, $C_2 = 14.8 \text{ nF}$, D_1 e D_2 são diodos 2N4148 e os amplificadores operacionais OP1, OP2, OP3 e OP4 são do modelo LF411CN. Os componentes do circuito resposta são escolhidos para terem valores tão próximos quanto possível de seus respectivos no circuito piloto, com uma tolerância de 0,5%. Os componentes R_1 , R , R_2 , R_E , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 , R_7 , R_8 , R_9 , C_1 tem os mesmos valores nominais em ambos circuitos enquanto os valores de $C_2 = C_3 = 14.9 \text{ nF}$ no sistema resposta são ligeiramente diferentes dos valores utilizados no circuito piloto. Os valores dos componentes do circuito subtrator são: $R_{10} = R_{11} = R_{12} = R_{13} = 14.9 \text{ k}\Omega$, tal que a sua saída é $V_{1d} - V_{1r}$. O amplificador operacional OP5 é também do modelo LF411CN. Os valores dos resistores R_L são mantidos os mesmos nos circuitos piloto e resposta, e este é o parâmetro que nós mudamos para aumentar ou diminuir a instabilidade do sistema.

No sistema as voltagens V_1 e V_2 são as variáveis dinâmicas. $V_E(t) = A \sin(2\pi ft)$ é a voltagem de forçamento externo, com amplitude A e frequência f , produzida por um gerador de funções. A voltagem V_1 é a saída do amplificador operacional OP1. Esta voltagem é proporcional a integral negativa da soma de todas as correntes que chegam ao capacitor C_1 . Estas são 3 correntes no circuito piloto: a corrente de R_1 , do forçamento externo e $I(V_{2i})$, que é a corrente vindo para entrada inversora de OP1 a partir do resistor R_L . No circuito resposta existe uma quarta corrente chegando a C_1 , a corrente a partir do bloco de acoplamento. A soma destas correntes é expressa na equação diferencial Eq. 4.9, onde o último termo é a corrente a partir do resistor R_{RE} , que existe apenas no circuito resposta.

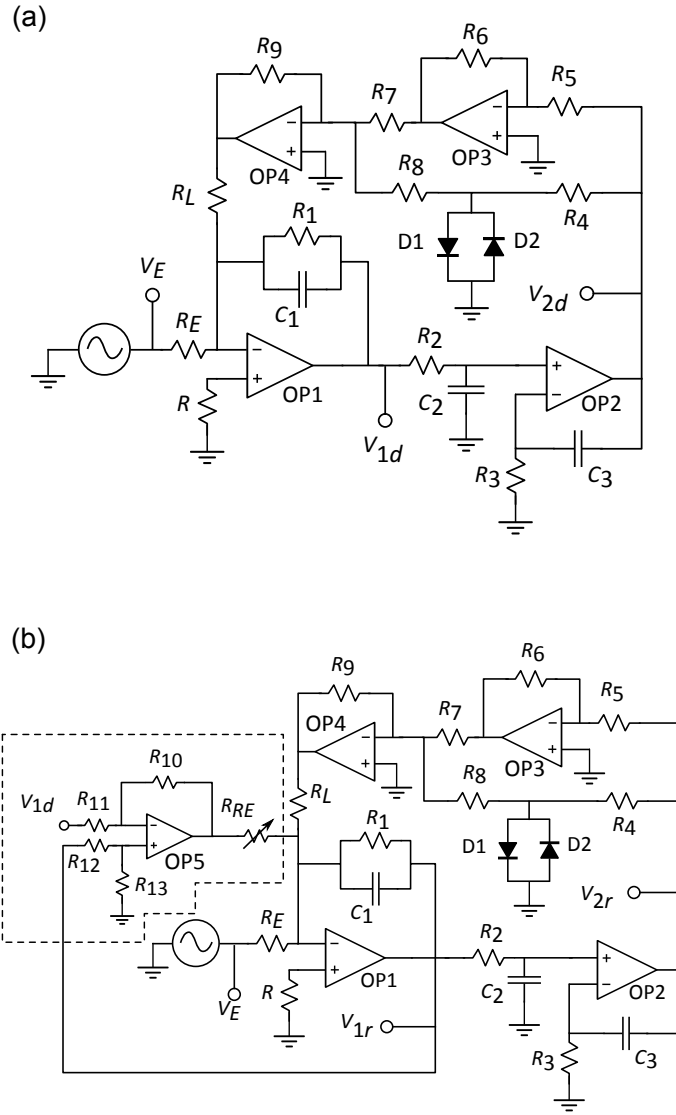


Figura 4.18 – Diagrama esquemático dos circuitos elétricos para os osciladores caóticos (a) piloto e (b) resposta. Ambos circuitos implementam uma equação diferencial de segunda-ordem para a voltagem V_2 excitados externamente pelo sinal senoidal V_E . Pequenos círculos conectados aos fios indicam pontos de medida de V_E , V_1 e V_2 . A linha tracejada indica o circuito subtrator, que gera o sinal de realimentação e acopla o sistema resposta ao sistema piloto.

A voltagem V_2 é proporcional a integral de V_1 e é a saída do amplificador operacional OP2 quando $R_2 = R_3$ e $C_2 = C_3$, como expressa na Eq. 4.10. As duas equações de primeira ordem que descrevem a evolução temporal do sistema são:

$$\dot{V}_{1i} = -\gamma V_{1i} - \alpha I(V_{2i}) - \beta V_E + \frac{\epsilon \delta_{ir}}{R_2 C_1} (V_{1d} - V_{1r}), \quad (4.9)$$

$$\dot{V}_{2i} = \theta V_{1i}, \quad (4.10)$$

onde $\gamma = 1/(R_1 C_1)$, $\alpha = 1/C_1$, $\beta = 1/(R_E C_1)$, $\theta = 1/(R_2 C_2)$, $\delta_{ir} = 0$ se $i = d$ (circuito

piloto) ou $\delta_{ir} = 1$ se $i = r$ (circuito resposta). A escala de tempo característica da evolução de nosso sistema é $1/\theta$ que é $R_2 C_2 = 220 \mu s$.

A corrente não-linear $I(V_{2i})$ é aproximadamente dada por

$$I(V_{2i}) = \begin{cases} (V_{2i} + 1,05)/R_L, & \text{se } V_{2i} < -0,7, \\ (-0,5V_{2i})/R_L, & \text{se } |V_{2i}| \leq 0,7, \\ (V_{2i} - 1,05)/R_L, & \text{se } V_{2i} > 0,7, \end{cases} \quad (4.11)$$

e é mostrada na Fig. 4.19 para diferentes valores de R_L .

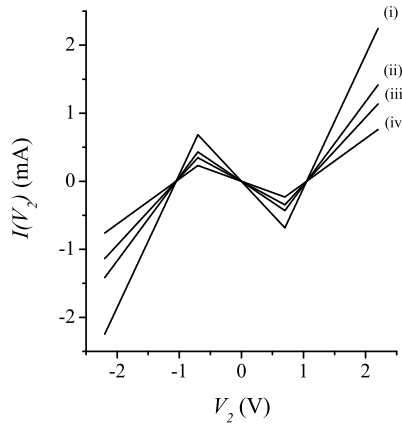


Figura 4.19 – Corrente não-linear através de um bloco com par de diodos anti-paralelos. Esta é uma corrente linear-por-partes dada pela Eq. (4.11), onde $R_L =$ (i) 512Ω , (ii) 812Ω , (iii) 1012Ω and (iv) 1512Ω .

Ajustando a resistência R_L , a amplitude A e frequência f do bombeio externo senoidal, somos capazes de conseguir diferentes estados dinâmicos para os circuitos. A Fig. 4.20 mostra algumas trajetórias caóticas no plano (V_1, V_2) a partir de dados experimentais obtidos com bombeio externo com $A = 4 \text{ V}$ e diferentes combinações de f e do parâmetro adimensional $l = R_2/R_L$. Esse parâmetro adimensional mede a inclinação da curva da corrente não-linear no gráfico $I \text{ vs. } V_2$, ver Fig. 4.19. A idéia é que a instabilidade efetiva do estado sincronizado do sistema cresce quando l é aumentado, ou seja, quando a inclinação da curva da corrente não-linear aumenta, como veremos adiante. Isto permite usar l como um coeficiente de instabilidade efetivo.

Para variar este parâmetro e observar como a instabilidade afeta a estatística dos eventos de dessincronização, nós mudamos a resistência em série R_L em ambos circuitos. A resistência corresponde a derivada da curva da voltagem *vs* corrente $V_2(I)$ (Fig. 4.19), e mudando-a

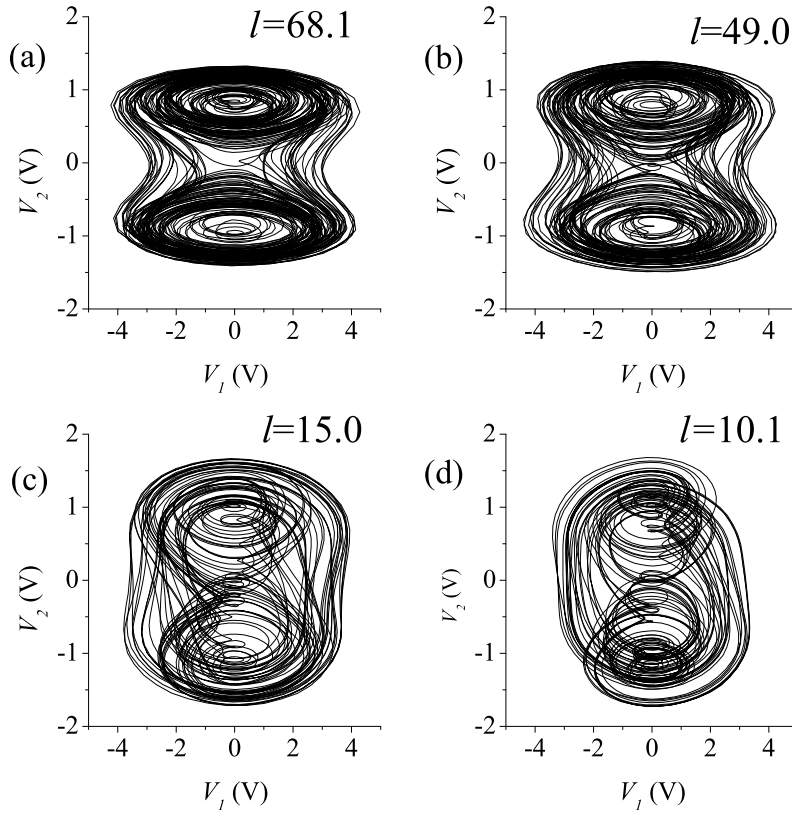


Figura 4.20 – Trajetórias caóticas no plano (V_1, V_2) construídas a partir de dados experimentais obtidos com bombeio externo com $A = 4,0$ V e (a) $f = 4,23$ kHz e $l = 68,1$, (b) $f = 3,60$ kHz e $l = 49,0$, (c) $f = 2,70$ kHz e $l = 15,0$, (d) $f = 2,70$ kHz e $l = 10,1$. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

resulta em uma modificação indireta da instabilidade do sistema, especialmente próximo a origem do espaço de fase.

Entretanto, quando nós mudamos o valor da resistência R_L (coeficiente de instabilidade l) o estado dinâmico do sistema pode mudar consideravelmente, até mesmo saindo de um estado caótico para um estado não-caótico. Desta forma, variamos além de R_L (l), a frequência f do bombeio externo para mantermos o sistema exibindo comportamento caótico. Esta análise do comportamento dinâmico do sistema como função dos parâmetros f e R_L pode ser apreciada na Fig. 4.21, onde exibimos o valor do maior expoente de Lyapunov, λ_1 , calculado a partir de integrações numéricas das Eqs. (4.9-4.10). A Fig. 4.21 mostra “ilhas” de comportamento caótico (cores quentes) separadas por janelas não-caóticas.

A partir deste diagrama do maior expoente de Lyapunov, λ_1 , escolhemos valores de f e de R_L para manter o sistema em um regime caótico. Escolhemos pares dos parâmetros

f e R_L para os quais os expoentes de Lyapunov permanecem aproximadamente constantes, para analisar a estatística dos eventos de dessincronização e encontrar os objetos instáveis que provocam esses eventos no sistema. Os valores de l e f escolhidos para analisar a distribuição de eventos de dessincronização são mostrados na Fig. 4.20.

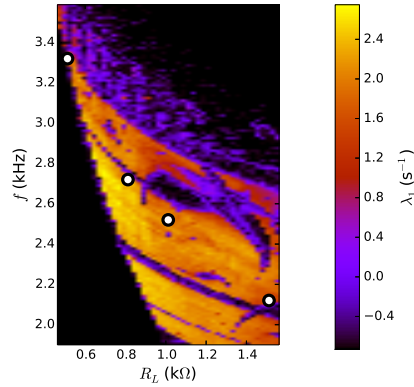


Figura 4.21 – Maior expoente de Lyapunov λ_1 calculado para trajetórias típicas em diferentes posições do espaço de fases (f, R_L) . Valores positivos indicam caos. Os pontos marcados indicam as posições usadas para análise da distribuição de eventos de dessincronização. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

4.6 Caracterização dos circuitos acoplados

Para mostrar como l está relacionado a instabilidade local nos circuitos acoplados, calculamos o expoente de Lyapunov transversal de algumas órbitas periódicas instáveis (UPOs) imersas no atrator caótico, e procuramos objetos instáveis que dominem a dinâmica por ter um expoente transversal positivo $\lambda_\perp^1$ muito maior do que os de outros objetos próximos. Repetimos esta análise para alguns valores de $l = (29, 0; 18, 3; 14, 7; 9, 85)$, indo de um atrator caótico com alto valor de l para um atrator caótico com baixo valor de l , de modo a identificarmos como uma variação em l modifica a estatística dos eventos de dessincronização. Para tanto devemos calcular algumas órbitas periódicas instáveis imersas em um atrator caótico, lembrando que por ser instável, toda condição inicial evoluirá para uma trajetória que irá se afastar desta órbita instável, com exceção de trajetória calculada a partir de uma condição inicial que estiver contida na órbita instável.

Assim, realizamos o seguinte procedimento: tomamos um conjunto de condições iniciais no plano (V_1, V_2) , aproximadamente 10000 condições iniciais, e evoluímos cada uma por um tempo igual a um múltiplo do período $T = 1/f$ do sinal do bombeio externo. Escolhemos esse tempo de integração por supormos que as órbitas periódicas instáveis em nosso sistema tem períodos relacionados ao do bombeio externo. Depois de calcular a evolução das trajetórias para cada condição inicial, calculamos a diferença entre seu estado final com o inicial. Em seguida refinamos nosso conjunto de condições iniciais ao redor do ponto cuja diferença entre o estado final e o inicial é mínima. Repetimos esse procedimento até que a diferença entre os estado final e inicial de uma determinada condição inicial seja menor que 10^{-7} . Assim, dizemos que encontramos uma órbita periódica instável de período $T_{upo} = kT$, onde k é um número natural. Realizamos esse procedimento para $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$. Mostramos apenas algumas dessas órbitas a seguir, particularmente para $k = 1$.

A Figura 4.22 mostra algumas órbitas periódicas instáveis (UPOs) imersas no atrator caótico do sistema no plano (V_1, V_2) para $l = 29.0$.

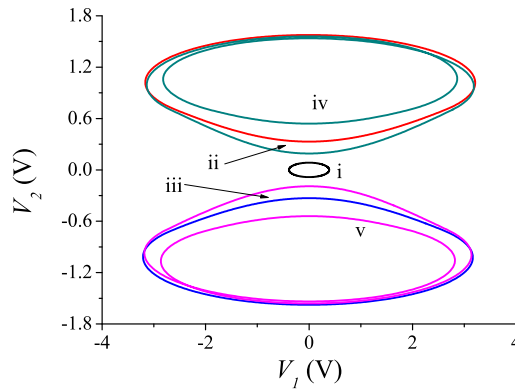


Figura 4.22 – Órbitas periódicas instáveis (UPOs) imersas no atrator caótico no plano (V_1, V_2) . Aqui, $R_L = 0.512\Omega$, e $f = 3320$ Hz. Os valores dos outros parâmetros são dados no texto.

Nós checamos, sistematicamente, os valores de $\lambda_{\perp}^1$ para ao menos três UPOs a cada valor de l . Calculamos $\lambda_{\perp}^1$ como função do parâmetro de acoplamento ϵ . Na Fig. 4.23 nós mostramos que algumas UPOs têm $\lambda_{\perp}^1$ positivo mesmo para grandes valores de ϵ . A pequena UPO (i) próxima a origem sempre exhibe o maior $\lambda_{\perp}^1$ no intervalo inteiro de valores do parâmetro de acoplamento, enquanto o expoente de Lyapunov transversal global, calculado

para uma órbita caótica longa, torna-se negativo acima de um valor crítico de ϵ . Estas duas condições ocorrendo simultaneamente caracteriza o estado de borbulhamento de atratores. A dominância da UPO (i) é observada para todos os valores de l usados aqui. Além disso, o valor do expoente de Lyapunov transversal de (i) aumenta com l , como mostrado em Fig. 4.24 para $\epsilon = 1.5$, corroborando nosso argumento que l pode ser usado como um coeficiente de instabilidade efetivo do sistema.

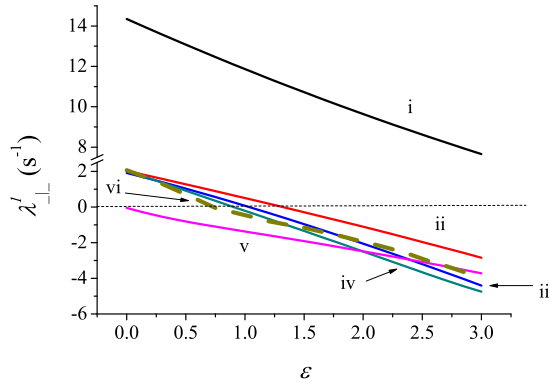


Figura 4.23 – Maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\perp}^1$ calculado para cinco órbitas periódicas instáveis (i–v) mostradas na Fig. 4.22 e para uma órbita caótica (vi), como função de ϵ . Note que a pequena UPO (i) próxima ao centro do plano (V_1, V_2) tem um maior $\lambda_{\perp}^1$ do que as UPOs ao redor, então argumentamos que (i) domina a dinâmica de dessincronização.

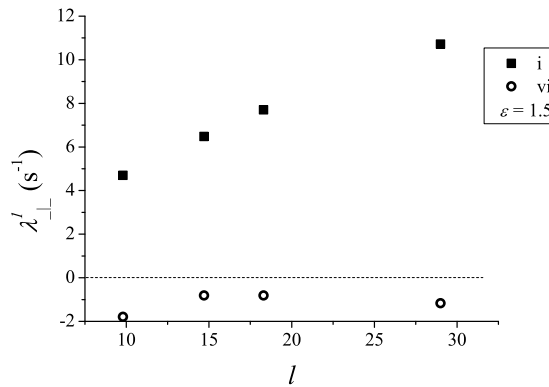


Figura 4.24 – Maior expoente de Lyapunov transversal $\lambda_{\perp}^1$ calculado para UPO (i), mostrada na Fig. 4.22, e para uma órbita caótica (vi) com $\epsilon = 1.5$.

A seguir apresentamos os efeitos de l sobre a distribuição dos eventos de dessincronização entre os circuitos piloto e resposta.

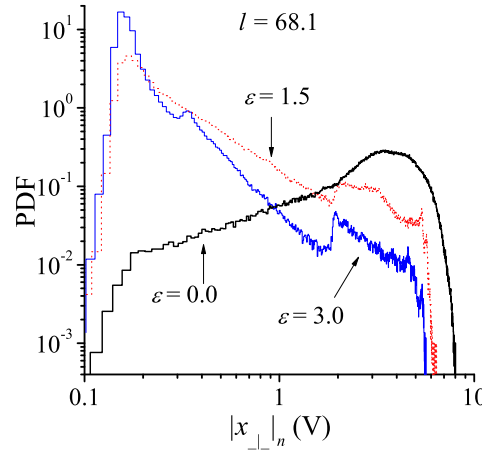


Figura 4.25 – Distribuição log-log experimental dos máximos do sinal de erro $|x_{\perp}|_n$ com nível de instabilidade $l=68,1$ e para valores diferentes de acoplamento: $\epsilon = 0; 1,5; 3,0$.

4.6.1 Análise estatística dos eventos de dessincronização

Procedemos como antes, adquirindo séries temporais das diferenças $V_{1d} - V_{1r}$ e $V_{2d} - V_{2r}$, experimentalmente e numericamente. Em seguida construímos o sinal de erro $|x_{\perp}|$ e calculamos seus máximos, $|x_{\perp}|_n$.

Para níveis de acoplamento intermediários e pequenos ($\epsilon > 0,3$) o sistema exhibe borbulhamento de atratores, caracterizado pela ocorrência de escapes breves do estado de sincronização completa e por uma distribuição de cauda-longa para $|x_{\perp}|_n$, como mostrado na Fig. 4.25. Quando os dois circuitos estão desacoplados ($\epsilon = 0$) o sistema está completamente dessincronizado, os máximos do sinal de erro $|x_{\perp}|_n$ são aproximadamente uniformemente distribuídos de zero até um valor máximo com alguma predileção para altos valores.

Para $\epsilon > 0,3$ o sistema sincroniza intermitentemente. Não existe um claro limiar para sincronização, tal que aumentando ϵ a sincronização é sempre imperfeita e existe sempre uma probabilidade finita de observar um grande evento de dessincronização. Portanto o valor rms do erro de sincronização decai monotonicamente com ϵ . Isto é uma característica de estado de borbulhamento de atratores (Gauthier & Bienfang 1996). Para um valor fixo de ϵ o valor rms do sinal de erro aumenta com o valor da instabilidade l , outra evidência do efeito da instabilidade na sincronização. Na Fig. 4.25 nós mostramos a distribuição do $|x_{\perp}|_n$ para $\epsilon = 1,5$ e $\epsilon = 3,0$. Em uma faixa de valores positivos de ϵ o comportamento

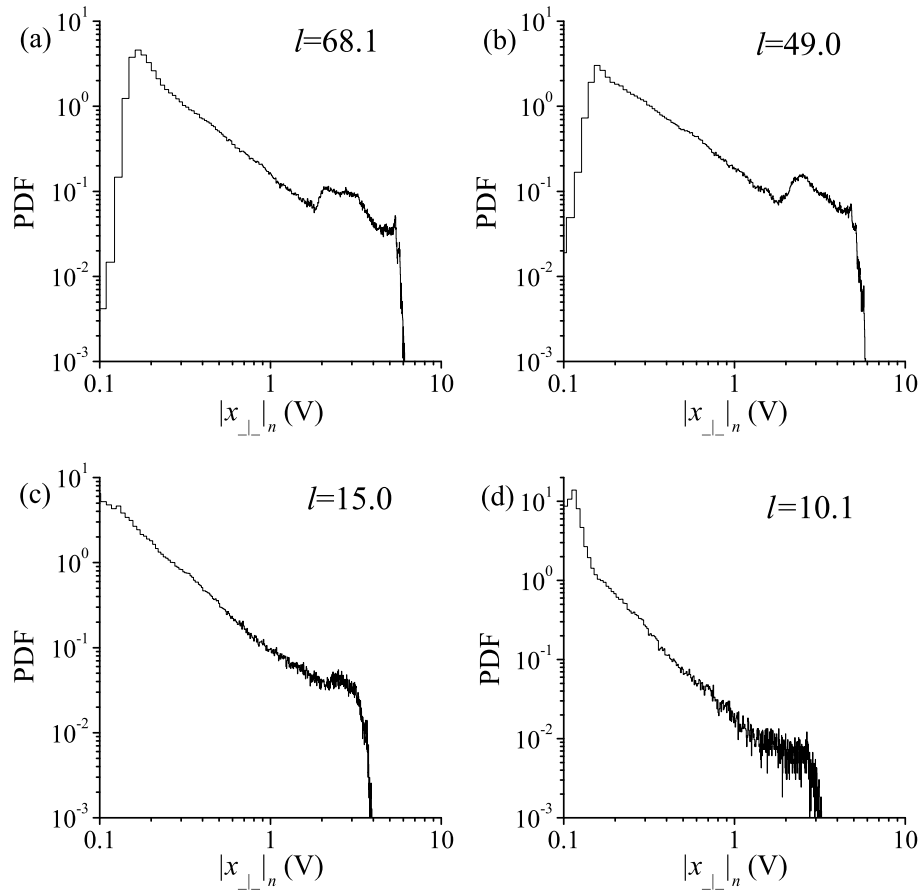


Figura 4.26 – Distribuição experimental dos máximos do sinal de error $|x_{\perp}|_n$ em escala log-log com nível de acoplamento $\epsilon = 1,5$ para os diferentes níveis de instabilidade: (a) $l = 68,1$, (b) $l = 49,0$, (c) $l = 15,0$ e (d) $l = 10,1$.

da distribuição é próximo de uma lei de potência para tamanhos pequenos de eventos mas desvia positivamente a partir de grandes eventos. Os histogramas normalizados mostrados na Figs. 4.14 (experimental) e 4.15 (numérica) correspondem a distribuições de $|x_{\perp}|_n$ para valor de acoplamento fixo $\epsilon = 1,5$. As distribuições experimentais e numéricas de $|x_{\perp}|_n$ apresentam o mesmo comportamento geral, como nós podemos ver nas Figs. 4.14(a)–(d) e 4.15(a)–(d). Os valores de l , f e A aparecem nas Figs. 4.14(a)–(d) são os mesmos usados em cada painel da Fig. 4.20. Aumentando o valor absoluto da derivada corrente não-linear $I(V_2)$ aumenta-se a instabilidade do sistema e maiores eventos de dessincronização ocorrem mais frequentemente do que o esperado para uma distribuição lei de potência (ver Figs. 4.26(a), (b) e Figs. 4.27(a), (b)), pois o sistema torna-se mais instável na vizinhança do centro do atrator. Quanto maior a instabilidade (l), maior a divergência das trajetórias dos sistemas piloto e resposta quando elas passam através ou próximas a região instável,

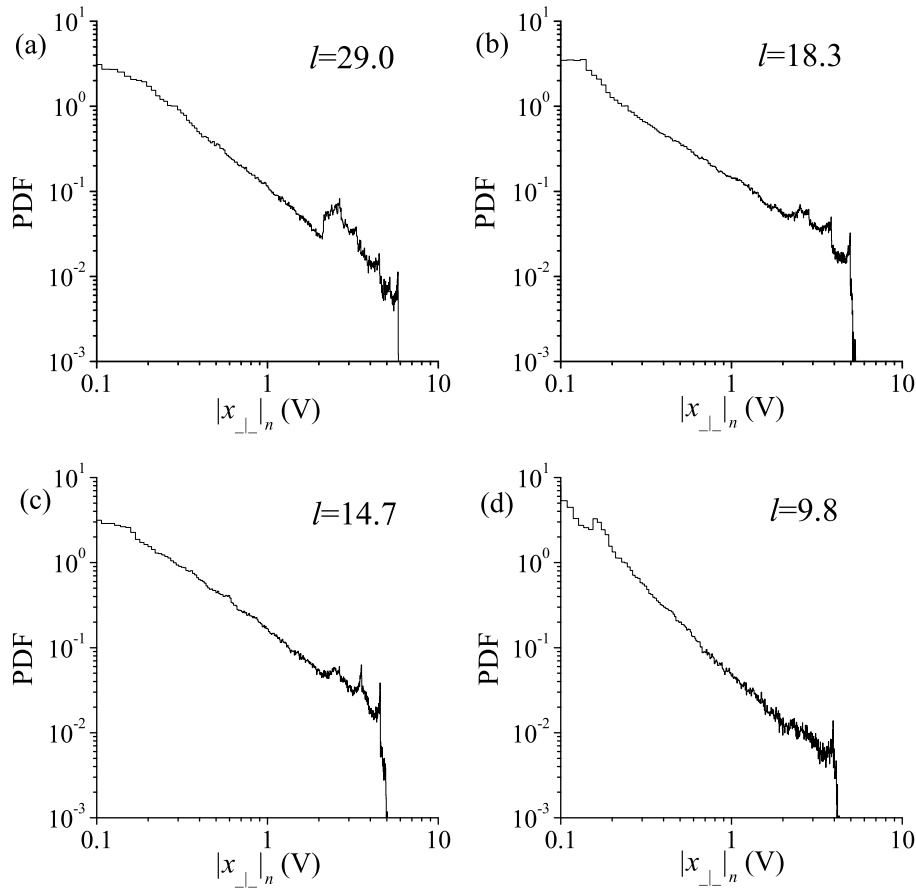


Figura 4.27 – Distribuição numérica dos máximos do sinal de error $|x_{\perp}|_n$ em escala log-log com $\epsilon = 1,5$, $A = 3,0$ V para diferentes níveis de instabilidade: (a) $l = 29,0$ e $f = 3,32$ kHz, (b) $l = 18,3$ e $f = 2,72$ kHz, (c) $l = 14,7$ e $f = 2,52$ kHz e (d) $l = 9,85$ e $f = 2,12$ kHz.

gerando os maiores eventos de dessincronização. Os maiores eventos de dessincronização são manifestados como uma estrutura que desvia positivamente da distribuição lei de potência, caracterizando dragões-rei. O desvio positivo no fim da distribuição diminui gradualmente à medida que l diminui. Note que, no caso limite $l \rightarrow 0$, nosso sistema torna-se similar ao da primeira configuração de sistema não-autônomo apresentada neste capítulo (de Oliveira Jr *et al.* 2014), onde a derivada da parte central de $I(V_2)$ é zero, a probabilidade de eventos dragões-rei é zero e a distribuição de tamanhos é uma lei de potência truncada com expoente variável. Nos estudos dos sistemas autônomos B-G do Capítulo 3, similares aos circuitos não-autônomos estudados neste capítulo, a instabilidade no centro foi devida a um ponto fixo fortemente instável na origem do espaço de fases (Gauthier & Bienfang 1996, Cavalcante *et al.* 2013). No sistema estudado aqui, não-autônomo, o bombeio externo exclui a existência de pontos fixos, e o ponto fixo central torna-se a órbita instável mostrada (i) na Fig. 4.22. A

análise apresentada aqui indica que a probabilidade da ocorrência de eventos dragões-rei está correlacionada com a instabilidade do objeto instável próximo ao centro do espaço de fase. Nossos resultados experimentais e numéricos estão em concordância qualitativa, exibindo a mesma correlação entre eventos dragões-rei e objetos instáveis no centro do espaço de fase do sistema.

Neste capítulo estudamos experimentalmente e numericamente a estatística de eventos de dessincronização que ocorrem em um sistema composto por um par de osciladores não-autônomos caóticos. Na primeira configuração a distribuição estatística dos máximos dos eventos de dessincronização mostra uma distribuição de cauda longa para um nível de acoplamento intermediário entre o estado descorrelacionado e o estado completamente sincronizado, similar as leis de potência truncadas que aparecem em muitos sistemas complexos. Mais interessante ainda, nós somos capazes de ajustar o expoente da lei de potência via parâmetro de acoplamento e, como consequência, mudar a faixa e a probabilidade dos grandes eventos. Até onde nós conhecemos na literatura não existe outro sistema apresentando tal propriedade. Os mecanismos responsáveis pela ocorrência dos grandes eventos e a variação do expoente da lei de potência tem implicações sobre a previsibilidade de eventos extremos ocorrendo em sistemas complexos. Em outras palavras, este simples sistema é um ponto de partida na busca de propriedades e características que permitam guiar o estudo de instabilidades de outros sistemas mais complicados, naturais ou artificiais. Também mostramos que nesse sistema é possível modificarmos a forma do atrator caótico exibido por cada um dos dois osciladores, e assim termos mais trajetórias próximas a região central de seus espaços de fase e consequentemente o sistema acoplado exibe mais eventos de dessincronização de grandes amplitudes, ou seja, aumenta-se a instabilidade “sentida” pelo sistema.

Utilizando uma segunda configuração para o sistema não-autônomo apresentado neste capítulo, que é ligeiramente modificado em relação a primeira configuração, objetivamos estudar a relação entre o parâmetro que controla a sua não-linearidade com a instabilidade do mesmo. Aumentando a derivada na curva da corrente não-linear em ambos circuitos, nós controlamos a instabilidade na região do centro do atrator. Histogramas do sinal de erro em um regime de picos de dessincronização produz distribuições lei de potência para os tamanhos dos eventos de dessincronização com níveis intermediários de acoplamento (pequenas deriva-

das), enquanto que instabilidade alta (grandes derivadas) produz eventos do tipo Dragão-rei em nossos experimentos e em nossas simulações numéricas. Então, nós somos capazes de controlar a existência (ou ausência) de eventos dragões-rei, que nesse sistema simples é obtido através do ajuste de um parâmetro do sistema, e associamos claramente a ocorrência de dragões-rei com a presença de uma instabilidade local no espaço de fases dos circuitos acoplados.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese de doutorado apresentamos nossos resultados experimentais e numéricos da caracterização e uso de sistemas não-lineares não-autônomos que implementamos em circuitos eletrônicos de segunda ordem com forçamento externo. Nesses sistemas observamos diversos estados de oscilação em regime periódico e caótico. Utilizando pares de circuitos quase-idênticos, acoplados unidirecionalmente via realimentação negativa, analisamos as condições de sincronização e, operando particularmente em regime de sincronismo intermitente, fizemos estudos das propriedades estatísticas dos eventos de dessincronização.

Usando osciladores não-lineares bastante simples como partes de um sistema complexo com elementos acoplados, analisamos o comportamento estatístico das perdas de sincronização. Identificamos que esses eventos de dessincronização fogem de um comportamento de estatística normal (gaussiana), seguindo distribuições do tipo lei de potência. Observamos que o expoente característico da lei de potência varia em função do parâmetro de acoplamento do sistema e analisamos como controlar a qualidade dos eventos em função de uma intervenção no sistema. Também neste sistema, caracterizamos a estatística dos eventos de dessincronização variando o atrator caótico exibido por cada um dos osciladores acoplados. Tais atratores diferem na taxa de visitação a região central do espaço de fase, de modo que quanto maior essa taxa de visitação, maior a ocorrência dos eventos de dessincronização de maiores amplitudes. Este efeito indica que a região central possui instabilidades que influ-

enciam no estado de sincronismo do sistema, e quanto mais visitada, mais provoca grandes eventos de dessincronização.

A partir dos resultados anteriores, realizamos uma modificação no sistema não-autônomo que estudamos, alterando o seu comportamento da não-linearidade para pequenos valores de uma de suas variáveis. Com essa modificação, observamos que a instabilidade do sistema fica afetada, uma vez que eventos de dessincronização passaram a seguir uma nova distribuição não-normal composta por uma distribuição mais complexa, com parte seguindo lei de potência e com eventos que desviam dessa lei de potencia em sua cauda, os eventos de maiores amplitudes, chamados dragões-rei. Nesse sistema mostramos que é possível, através de uma modificação seletiva dos osciladores gerar novas distribuições de probabilidade para esses eventos.

Estes três resultados, analisados nesses osciladores caóticos simples, ajudam a entendermos melhor as causas dos eventos de dessincronização que ocorrem em sistemas caóticos acoplados, indicando o papel das instabilidades na geração de grandes eventos. De forma mais específica podemos aprofundar essas investigações no sentido de separar efetivamente os eventos que seguem uma lei de potência dos eventos de maiores amplitudes, os dragões-rei (Cavalcante *et al.* 2013). Esses resultados indicam direções para novos estudos sobre eventos de dessincronização em sistemas mais complexos. Por exemplo, em sistemas compostos por três ou mais osciladores caóticos podemos estudar eventos de dessincronização que ocorrem em um estado de sincronismo intermitente controlando a instabilidade em alguns dos osciladores, visando controlar ou estimular os eventos de dessincronização.

REFERÊNCIAS

- Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., Ritort, F. & Spigler, R. (2005). The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena, *Reviews of modern physics* **77**(1): 137.
- Ambika, G. & Amritkar, R. (2009). Anticipatory synchronization with variable time delay and reset, *Phys. Rev. E* **79**(5): 056206.
- Ashwin, P., Buescu, J. & Stewart, I. (1994). Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators, *Phys. Lett. A* **193**(2): 126–139.
- Ashwin, P., Buescu, J. & Stewart, I. (1996). From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability, *Nonlinearity* **9**(3): 703.
- Avila, J. F. M., Cavalcante, H. L. d. S. & Leite, J. R. (2004). Experimental deterministic coherence resonance, *Phys. Rev. Lett.* **93**(14): 144101.
- Bak, P. (1999). *How nature works: the science of self-organized criticality*, Copernicus, New York.
- Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. (1987). Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise, *Phys. Rev. Lett.* **59**: 381–384.

- Bhowmick, S. K., Pal, P., Roy, P. K. & Dana, S. K. (2012). Lag synchronization and scaling of chaotic attractor in coupled system, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **22**(2): 023151.
- Bjørnstad, O. N., Ims, R. A. & Lambin, X. (1999). Spatial population dynamics: analyzing patterns and processes of population synchrony, *Trends in Ecology & Evolution* **14**(11): 427–432.
- Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D. & Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems, *Physics Reports* **366**(1): 1–101.
- Bonatto, C., Feyereisen, M., Barland, S. *et al.* (2011). Deterministic optical rogue waves, *Phys. Rev. Lett.* **107**: 053901.
- Carroll, T. L. & Pecora, L. M. (1991). Synchronizing chaotic circuits, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on* **38**(4): 453–456.
- Cavalcante, H. L. d. S., Oriá, M., Sornette, D., Ott, E. & Gauthier, D. J. (2013). Predictability and suppression of extreme events in a chaotic system, *Phys. Rev. Lett.* **111**(19): 198701.
- Christensen, K., Danon, L., Scanlon, T. & Bak, P. (2002). Unified scaling law for earthquakes, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **99**: 2509–2513.
- Cuomo, K. M. & Oppenheim, A. V. (1993). Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications, *Phys. Rev. Lett.* **71**(1): 65–68.
- de Oliveira Jr, G. F., Chevrollier, M., de Silans, T. P., Oriá, M. & de Souza Cavalcante, H. L. (2015). Trajectory-probed instability and statistics of desynchronization events in coupled chaotic systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **25**(11): 113107.
- de Oliveira Jr, G. F., de Souza Cavalcante, H. L., di Lorenzo, O., Chevrollier, M., de Silans, T. P. & Oriá, M. (2014). Tunable power law in the desynchronization events of coupled chaotic electronic circuits, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **24**(1): 013105.

- de Oliveira Jr, G. F., di Lorenzo, O., Chevrollier, M., de Silans, T. P., Oriá, M. & de Souza Cavalcante, H. L. (2016). Local instability driving extreme events in a pair of coupled chaotic electronic circuits, *Aceito para publicação no Phys. Rev. E*.
- de San Roman, F., Boccaletti, S., Maza, D. & Mancini, H. (1998). Weak synchronization of chaotic coupled map lattices, *Phys. Rev. Lett.* **81**(17): 3639.
- DeShazer, D. J., Breban, R., Ott, E. & Roy, R. (2001). Detecting phase synchronization in a chaotic laser array, *Phys. Rev. Lett.* **87**(4): 044101.
- Estoup, J.-B. (1916). *Gammes Sténographiques*, Institut Sténographique de France, Paris.
- Farmer, J. D. (1982). Chaotic attractors of an infinite-dimensional dynamical system, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **4**(3): 366–393.
- Fischer, I., Vicente, R., Buldú, J. M., Peil, M., Mirasso, C. R., Torrent, M. & García-Ojalvo, J. (2006). Zero-lag long-range synchronization via dynamical relaying, *Phys. Rev. Lett.* **97**(12): 123902.
- Flunkert, V., D’Huys, O., Danckaert, J., Fischer, I. & Schöll, E. (2009). Bubbling in delay-coupled lasers, *Phys. Rev. E* **79**(6): 065201.
- Fujisaka, H. & Yamada, T. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, *Progress of Theoretical Physics* **69**(1): 32–47.
- Gabor, D. (1946). Theory of communication. part 1: The analysis of information, *Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering* **93**(26): 429–441.
- Gammaitoni, L., Hänggi, P., Jung, P. & Marchesoni, F. (1998). Stochastic resonance, *Reviews of modern physics* **70**(1): 223.
- Gauthier, D. J. & Bienfang, J. C. (1996). Intermittent loss of synchronization in coupled chaotic oscillators: Toward a new criterion for high-quality synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **77**(9): 1751–1754.

- Gonçalves, C. & Neto, L. (2011). Electrical implementation of a complete synchronization dynamic system, *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 285, IOP, IOP Publishing, p. 012013.
- Harrison, R. G. & Biswas, D. J. (1986). Chaos in light.
- Haykin, S. & Principe, J. (1998). Making sense of a complex world [chaotic events modeling], *Signal Processing Magazine, IEEE* **15**(3): 66–81.
- Heagy, J. F., Carroll, T. L. & Pecora, L. M. (1995). Desynchronization by periodic orbits, *Phys. Rev. E* **52**(2): R1253–R1256.
- Herzel, H. & Freund, J. (1995). Chaos, noise, and synchronization reconsidered, *Phys. Rev. E* **52**: 3238–3241.
- Hilborn, R. (1994). Chaos and nonlinear dynamics.
- Horowitz, P., Hill, W. & Hayes, T. C. (1989). *The art of electronics*, Vol. 2, Cambridge university press Cambridge.
- Hudson, P. J. & Cattadori, I. M. (1999). The moran effect: a cause of population synchrony, *Trends in ecology & evolution* **14**(1): 1–2.
- J Eckmann, S Kamphorst, D. R. & Ciliberto, S. (1986). *Phys. Rev. A* .
- Kim, M.-Y., Sramek, C., Uchida, A. & Roy, R. (2006). Synchronization of unidirectionally coupled Mackey-Glass analog circuits with frequency bandwidth limitations, *Phys. Rev. E* **74**(1): 016211.
- Klaus, A., Yu, S. & Plenz, D. (2011). Statistical analyses support power law distributions found in neuronal avalanches, *PLoS One* **6**(5): e19779.
- Kocarev, L. & Parlitz, U. (1996). Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems, *Phys. Rev. Lett.* **76**: 1816–1819.
- Kocarev, L. & Parlitz, U. (1995). General approach for chaotic synchronization with applications to communications, *Phys. Rev. Lett.* **74**(25): 5028–5031.

- Krawiecki, A. (2009). Microscopic spin model for the stock market with attractor bubbling on scale-free networks, *J. Econ. Interac. Coord.* **4**(2): 213–220.
- Krawiecki, A., Hołyst, J. & Helbing, D. (2002). Volatility clustering and scaling for financial time series due to attractor bubbling, *Phys. Rev. Lett.* **89**(15): 158701.
- Lévy, P. (1937). *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris.
- Linsay, P. S. (1981). Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Physical Review Letters* **47**(19): 1349.
- Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the atmospheric sciences* **20**(2): 130–141.
- Mainen, Z. F. & Sejnowski, T. J. (1995). Reliability of spike timing in neocortical neurons, *Science* **268**(5216): 1503–1506.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York.
- Maritan, A. & Banavar, J. R. (1994). Chaos, noise, and synchronization, *Phys. Rev. Lett.* **72**: 1451–1454.
- Masoller, C., Cavalcante, H. L. D. S. & Rios Leite, J. R. (2001). Delayed coupling of logistic maps, *Phys. Rev. E* **64**(3): 037202.
- May, R. M. & Anderson, R. M. (1987). Transmission dynamics of hiv infection, *Nature* **326**: 137.
- Mercadier, N., Guerin, W., Chevrolier, M. & Kaiser, R. (2009). Lévy flights of photons in hot atomic vapours, *Nature Physics* **5**(8): 602–605.
- Monteiro, L. H. A. (2011). *Sistemas dinâmicos*, Editora Livraria da Física.
- Moon, F. & Holmes, P. J. (1979). A magnetoelastic strange attractor, *Journal of Sound and Vibration* **65**(2): 275–296.
- Mormann, F., Lehnertz, K., David, P. & Elger, C. E. (2000). Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the eeg of epilepsy patients, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **144**(3): 358–369.

- Newman, M. E. (2005). Power laws, pareto distributions and Zipf's law, *Contemp. Phys.* **46**(5): 323–351.
- Nixon, M., Friedman, M., Ronen, E., Friesem, A. A., Davidson, N. & Kanter, I. (2011). Synchronized cluster formation in coupled laser networks, *Phys. Rev. Lett.* **106**(22): 223901.
- Oppenheim Alan, V., Willsky Alan, S. & Nawab, S. H. (1996). Signals and systems.
- Osipov, G. V., Hu, B., Zhou, C., Ivanchenko, M. V. & Kurths, J. (2003). Three types of transitions to phase synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **91**(2): 024101.
- Ott, E. (2002). *Chaos in dynamical systems*, Cambridge university press.
- PALUŠ, M., Kurths, J., Schwarz, U., Novotna, D. & Charvatova, I. (2000). Is the solar activity cycle synchronized with the solar inertial motion?, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **10**(11): 2519–2526.
- Pecora, L. M. & Carroll, T. L. (1990). Synchronization in chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* **64**: 821–824.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M. & Kurths, J. (1996). Synchronization in a population of globally coupled chaotic oscillators, *EPL (Europhysics Letters)* **34**(3): 165.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. & Hilborn, R. C. (2002). Synchronization: a universal concept in nonlinear science, *American Journal of Physics* **70**(6).
- Pikovsky, A. S. & Kurths, J. (1997). Coherence resonance in a noise-driven excitable system, *Phys. Rev. Lett.* **78**(5): 775.
- Pompe, B. (1993). Measuring statistical dependences in a time series, *Journal of Statistical Physics* **73**(3): 587–610.
- Pyragas, K. (1996). Weak and strong synchronization of chaos, *Phys. Rev. E* **54**: R4508–R4511.

- Radhakrishna, R., Dutt, D. N. & Yeragani, V. K. (2000). Nonlinear measures of heart rate time series: influence of posture and controlled breathing, *Autonomic Neuroscience* **83**(3): 148–158.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. & Kurths, J. (1996). Phase synchronization of chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **76**: 1804–1807.
- Rosenblum, M. G., Pikovsky, A. S. & Kurths, J. (1997). From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **78**(22): 4193.
- Rössler, O. E. (1976). An equation for continuous chaos, *Phys. Lett. A* **57**(5): 397–398.
- Rulkov, N. F., Sushchik, M. M. & Tsimring, L. S. (1995). Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* **51**: 980–994.
- Sagués, F., Sancho, J. M. & García-Ojalvo, J. (2007). Spatiotemporal order out of noise, *Reviews of Modern Physics* **79**(3): 829.
- Schmitz, R., Graziani, K. & Hudson, J. (1977). Experimental evidence of chaotic states in the belousov–zhabotinskii reaction, *The Journal of Chemical Physics* **67**(7): 3040–3044.
- Schnitzler, A., Gross, J. & Timmermann, L. (2000). Synchronised oscillations of the human sensorimotor cortex, *Acta neurobiologiae experimentalis* **60**(2): 271–288.
- Schwartz, I. B. (1988). Sequential horseshoe formation in the birth and death of chaotic attractors, *Phys. Rev. Lett.* **60**(14): 1359.
- Senthilkumar, D. & Lakshmanan, M. (2005). Transition from anticipatory to lag synchronization via complete synchronization in time-delay systems, *Phys. Rev. E* **71**(1): 016211.
- Senthilkumar, D., Srinivasan, K., Murali, K., Lakshmanan, M. & Kurths, J. (2010). Experimental confirmation of chaotic phase synchronization in coupled time-delayed electronic circuits, *Phys. Rev. E* **82**(6): 065201.
- Serafin, T. (20 aug. 2008). The world’s richest royals, *Forbes.com* .
- Shlesinger, M. F., Zaslavsky, G. M. & Klafter, J. (1993). Strange kinetics, *Nature* **363**: 31–37.

- Solli, D. R., Ropers, C., Koonath, P. & Jalali, B. (2007). Optical rogue waves, *Nature* **450**: 1054–1057.
- Sornette, D. (1998). Multiplicative processes and power laws, *Phys. Rev. E* **57**(4): 4811.
- Sornette, D. (2009). Dragon-kings, *Black Swans and the Prediction of Crises*, in press in the *International Journal of Terraspace Science and Engineering* **2**(1).
- Sornette, D. & Ouillon, G. (2012). Dragon-kings: Mechanisms, statistical methods and empirical evidence, *The European Physical Journal Special Topics* **205**(1): 1–26.
- Strogatz, S. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Perseus Books, Cambridge, Massachusetts.
- Strogatz, S. H., Mirollo, R. E. & Matthews, P. C. (1992). Coupled nonlinear oscillators below the synchronization threshold: relaxation by generalized landau damping, *Phys. Rev. Lett.* **68**(18): 2730.
- Testa, J., Pérez, J. & Jeffries, C. (1982). Evidence for universal chaotic behavior of a driven nonlinear oscillator, *Physical Review Letters* **48**(11): 714.
- Toral, R., Mirasso, C. R., Hernández-García, E. & Piro, O. (2001). Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* **11**(3): 665–673.
- VanWiggeren, G. D. & Roy, R. (1998). Communication with chaotic lasers, *Science* **279**(5354): 1198–1200.
- Venkataramani, S. C., Hunt, B. R., Ott, E., Gauthier, D. J. & Bienfang, J. C. (1996). Transitions to bubbling of chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* **77**(27): 5361–5364.
- Wagemakers, A., Buldú, J. & Sanjuán, M. (2008). Experimental demonstration of bidirectional chaotic communication by means of isochronal synchronization, *EPL (Europhysics Letters)* **81**(4): 40005.

- Wang, R. & Shen, K. (2001). Synchronization of chaotic erbium-doped fiber dual-ring lasers by using the method of another chaotic system to drive them, *Phys. Rev. E* **65**(1): 016207.
- Weiss, C., Abraham, N. & Hübner, U. (1988). Homoclinic and heteroclinic chaos in a single-mode laser, *Phys. Rev. Lett.* **61**(14): 1587.
- White, B. S. & Fornberg, B. (1998). On the chance of freak waves at sea, *J. of Fluid Mech.* **355**: 113–138.
- Willis, J. & Yule, G. U. (1922). Some statistics of evolution and geographical distribution in plants and animals, and their significance, *Nature* **109**(2728): 177–179.
- Winful, H. G. & Rahman, L. (1990). Synchronized chaos and spatiotemporal chaos in arrays of coupled lasers, *Phys. Rev. Lett.* **65**(13): 1575.
- Witkowski, F. X., Kavanagh, K. M., Penkoske, P. A., Plonsey, R., Spano, M. L., Ditto, W. L. & Kaplan, D. T. (1995). Evidence for determinism in ventricular fibrillation, *Phys. Rev. Lett.* **75**(6): 1230.
- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. & Vastano, J. A. (1985). Determining lyapunov exponents from a time series, *Physica D: Nonlinear Phenomena* **16**(3): 285–317.
- Yamada, T. & Fujisaka, H. (1983). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. ii the mapping approach, *Progress of Theoretical Physics* **70**(5): 1240–1248.
- Yamada, T. & Fujisaka, H. (1984). Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. iii mapping model for continuous system, *Progress of theoretical physics* **72**(5): 885–894.
- Zamora-Munt, J., Masoller, C., Garcia-Ojalvo, J. & Roy, R. (2010). Crowd synchrony and quorum sensing in delay-coupled lasers, *Phys. Rev. Lett.* **105**(26): 264101.
- Zamora-Munt, J., Mirasso, C. R. & Toral, R. (2014). Suppression of deterministic and stochastic extreme desynchronization events using anticipated synchronization, *Phys. Rev. E* **89**(1): 012921.

- Zanette, D. (1997). Dynamics of globally coupled bistable elements, *Phys. Rev. E* **55**(5): 5315.
- Zhou, C., Kurths, J. & Hu, B. (2001). Array-enhanced coherence resonance: nontrivial effects of heterogeneity and spatial independence of noise, *Phys. Rev. Lett.* **87**(9): 098101.

Apêndice

APÊNDICE A

ESPECTRO DE FOURIER DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

A técnica de análise de sinais por transformada de Fourier é bastante útil na determinação das frequências de oscilação de sistemas e para realizar "misturas" de sinais: convoluções e multiplicações de sinais (Hilborn 1994, Oppenheim Alan *et al.* 1996). Sistemas não-lineares em regime caótico apresentam banda de frequência larga e contínua, então realizar esta medida espectral é uma das primeiras análises que fazemos para diferenciar um estado periódico, de um quaseperiódico e de um caótico.

Utilizamos a transformada de Fourier para levar um sinal temporal para o domínio de frequência. Se depois fizermos o módulo quadrado do sinal no domínio de frequências, $|F(f)|^2$, chamamos a essa função de espectro de potência. As expressões para transformada de Fourier para as variáveis tempo e frequência são, respectivamente, a transformada da função temporal,

$$TF(G(t)) = F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \exp(-i2\pi ft) dt. \quad (\text{A.1})$$

A transformada da função espectral é dada por:

$$TF(F(f)) = G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \exp(i2\pi ft) df. \quad (\text{A.2})$$

Podemos determinar se o sistema é periódico ou não, através da análise do seu espectro de frequências.

Sinais periódicos exibem espectros formados por picos discretos de frequência. Sinais caóticos exibem espectros compostos por faixas contínuas de frequência. Um sinal periódico é caracterizado por se repetir a cada passagem de tempo T (período do sinal). Assim se é um sinal periódico, então $G(t) = G(t + T)$.

Podemos representar um sinal periódico através de uma série de Fourier da seguinte forma:

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in2\pi f_0 t), \quad (\text{A.3})$$

$$C_n = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} G(t) \exp(-in2\pi f_0 t) dt, \quad (\text{A.4})$$

Assim, a transformada de Fourier $F(f)$ do sinal periódico $G(t)$ é dado por:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(in2\pi f_0 t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (\text{A.5})$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C_n \exp(in2\pi f_0 t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (\text{A.6})$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(in2\pi f_0 t) \exp(-i2\pi ft) dt \quad (\text{A.7})$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-in2\pi(f - f_0)t) dt \quad (\text{A.8})$$

$$F(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(f - f_0). \quad (\text{A.9})$$

Assim constatamos que o espectro de um sinal periódico é constituído de impulsos igualmente espaçados por nf_0 . De fato, sinais periódicos e quasiperiódicos exibem um espectro de Fourier composto por suas frequências fundamentais, seus harmônicos e frequências que são somas e diferenças das frequências fundamentais como é discutido no Apêndice A do

livro de Hilborn (Hilborn 1994). Quando a razão entre as frequências fundamentais do sinal é racional, temos um sinal periódico, caso contrário, se a razão é irracional, temos um sinal quasiperiódico.

Sinais caóticos por sua vez são aperiódicos, desta forma não apresentam componentes discretas de frequência como os sinais periódicos. De fato, espectros de sinais caóticos são compostos por bandas contínuas de frequências, formando não mais picos discretos e sim uma larga faixa de frequências.

Entretanto a análise de sinais experimentais quando o sistema possui várias frequências de oscilação, ou quando é caótico, é complicada devido à presença de ruído, presente em qualquer sistema experimental. O ruído branco é definido por possuir valor médio igual a zero e sua função de autocorrelação igual a uma delta de Dirac, além de conter todas as componentes de frequências e assim possuir um espectro contínuo, em que todas as componentes de frequência contribuem da mesma forma. Enquanto que em um sinal caótico cada componente de sua banda contínua de frequência contribui com pesos diferentes para formar o largo pico que se observa em seu espectro. Ainda assim, o ruído mistura-se com o sinal do sistema e pode complicar a análise de seu espectro de potência. Ou seja, é preciso na análise de um sinal experimental ter resolução em frequência suficiente para distinguir espectros contínuos de espectros discretos contaminados por ruído (Hilborn 1994).

APÊNDICE B

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA DE QUARTA ORDEM

A evolução temporal de sistemas dinâmicos é descrita por equações diferenciais ordinárias, que geralmente não podem ser resolvidas através de integrações analíticas. Assim, necessitamos de métodos iterativos de integração para conseguir prever o comportamento futuro de um sistema dinâmico, como por exemplo, o método de Euler e os métodos de Runge-Kutta.

Com esses métodos iterativos, ou simulações numéricas, calcularemos um estado futuro de um dado sistema, $y[n + 1]$ a partir do estado atual $y[n]$, onde n é o tempo discretizado, uma vez que a solução de uma simulação numérica de equações diferenciais ordinárias é, de fato, uma série temporal discretizada.

Iremos calcular o estado futuro utilizando expansões em série de Taylor das equações do sistema. No método de Runge-Kutta de quarta-ordem calculamos as derivadas do sistema quatro vezes, como mostrado a seguir, e então o próximo estado (Strogatz 1994).

Seja a equação diferencial ordinária de primeira ordem, $y'(x) = f(x, y)$, com condição inicial $y(x_0) = x_0$. Vamos expandir $y(x_0 + h)$ em torno de x_0 e onde h é o passo da integração. Assim,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{h}{1!} + \dots + y^{(k)}(x_0)\frac{h^k}{k!} + O[h^{(k+1)}] \quad (\text{B.1})$$

em que k é a ordem do método de Runge-Kutta, que no nosso caso é $k = 4$. Assim,

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)\frac{h}{1!} + y''(x_0)\frac{h^2}{2!} + y'''(x_0)\frac{h^3}{(3)!} + y^{(4)}(x_0)\frac{h^4}{(4)!} + O[h^5] \quad (\text{B.2})$$

O método de Runge-Kutta consiste em tomar derivadas em pontos intermediários entre x_0 e $x_0 + h$, de modo a minimizar o erro da integração, assim temos:

$$y_{n+1} = y_n + ak_1 + bk_2 + ck_3 + dk_4, \quad (\text{B.3})$$

com

$$k_1 = hf(x_n, y_n), \quad (\text{B.4})$$

$$k_2 = hf(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 k_1), \quad (\text{B.5})$$

$$k_3 = hf(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 k_1 + \beta_3 k_2), \quad (\text{B.6})$$

$$k_4 = hf(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 k_1 + \beta_5 k_2 + \beta_6 k_3). \quad (\text{B.7})$$

Onde $a, b, c, d, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5$ e β_6 são constantes a determinar. Expandindo essas quatro equações e substituindo na Eq. B.3 e comparando as Eqs. B.2 com B.3 ($y(x_0 + h) = y_{n+1}$) temos um conjunto de 10 equações e 13 incógnitas, possuindo infinitas soluções. Entretanto, existe uma solução bastante utilizada que considera como os quatro pontos para os cálculos das derivadas que vão corrigir o passo da integração numérica, o ponto inicial, o ponto médio do passo duas vezes, e o ponto final do passo. Desta forma, obtemos:

$$y[n+1] = y[n] + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6, \quad (\text{B.8})$$

$$k_1 = hf(x[n], y[n]), \quad (\text{B.9})$$

$$k_3 = hf(x[n] + h/2, y[n] + k_1/2), \quad (\text{B.10})$$

$$k_3 = hf(x[n] + h/2, y[n] + k_2/2), \quad (\text{B.11})$$

$$k_4 = hf(x[n] + h, y[n] + k_3). \quad (\text{B.12})$$

Como consideramos, neste método, a expansão até a quarta ordem de $y(x_0 + h)$, o erro que cometemos a cada passo é proporcional a h^5 . Na prática, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem é o mais utilizado em integrações numéricas de equações diferenciais ordinárias. Quanto maior a ordem do método mais preciso ele é, entretanto como temos que calcular mais passos intermediários o método torna-se lento. Neste sentido, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem permite um cálculo com boa precisão sem torná-lo lento e é o método utilizado nesta Tese para os estudos numéricos de diversos sistemas.

APÊNDICE C

CIRCUITOS ELETRÔNICOS PARA SIMULAR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Diversos sistemas podem e são representados e estudados através de circuitos eletrônicos. Neste anexo tratamos de algumas características dos componentes eletrônicos utilizados nos circuitos estudados nessa Tese. São resistores, capacitores, indutores, amplificadores operacionais e diodos (Horowitz *et al.* 1989). Escolhemos trabalhar com circuitos eletrônicos devido a relativa simplicidade e ao baixo custo dos componentes comparados a montagem de sistemas óticos com laser de diodo (Fischer *et al.* 2006, Nixon *et al.* 2011).

O resistor, Fig. C.1, é um componente capaz de transformar energia elétrica em energia térmica, através do efeito Joule, $P = Ri^2$, onde P é a potência dissipada, R é a sua resistência (inverso da condutância) e i a corrente que o atravessa. Entre os terminais de um resistor existe uma diferença de potencial, $V_A - V_B$, medida em volts (V) que é relacionada com a corrente que o atravessa e com sua resistência através da equação linear entre i e $V_A - V_B$:

$$R = \frac{V_A - V_B}{i} \quad (\text{C.1})$$

Capacitor, Fig. C.2, é um componente capaz de acumular carga elétrica, q , medida em

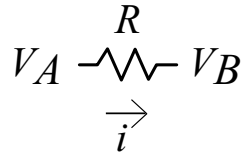


Figura C.1 – Símbolo de um resistor.

Coulombs (C). Entre seus terminais também existe uma diferença de potencial, que depende da carga armazenada em seu interior e da sua capacitância, C . A variação da carga elétrica com o passar do tempo gera uma corrente elétrica. Assim:

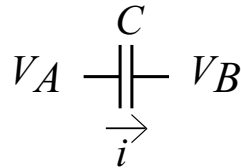


Figura C.2 – Símbolo de um capacitor.

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{d(V_A - V_B)}{dt}. \quad (\text{C.2})$$

O indutor, Fig. C.3, armazena energia na forma de campo magnético. A relação entre sua indutância e a diferença de potencial entre seus terminais é dada pela equação linear:

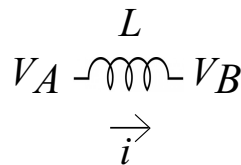


Figura C.3 – Símbolo de um indutor.

$$V_A - V_B = L \frac{di}{dt} \quad (\text{C.3})$$

Amplificadores operacionais são muito utilizados em circuitos eletrônicos devido á variedade de funções que podem desempenhar. Nos circuitos apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4, os utilizamos como subtrator, inversor, integrador, somador, entre outros. Utilizamos amplificadores operacionais do modelo 741, Fig. C.4. Este modelo apresenta oito pinos, dos quais utilizamos apenas 5. Especificamente utilizamos os pinos 2, 3, 4, 6 e 7. Chamamos o

pino 2 de entrada negativa e o 3 de entrada positiva, são os pinos em que introduzimos sinais. Os pinos 4 e 7 servem para alimentação do amplificador, tensão negativa no 4 e positiva no 7. Isto quer dizer que a tensão de saída do operacional é menor que a tensão aplicada no pino 7 e maior que a tensão aplicada no pino 4. O pino 6 é a saída, o sinal resposta. Quando não há alimentação nos pinos 4 e 7 a tensão de saída, pino 6, é sempre zero. Além disso, deve-se tomar cuidado para que a tensão de saída sempre tenha valores dentro do limite estipulados pelas alimentações positiva e negativa do operacional para que sua saída não fique saturada, caso contrário o sinal do pino 6 apresentará falhas, comprometendo a análise do sistema.

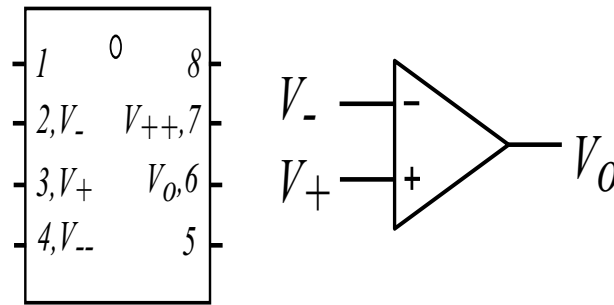


Figura C.4 – Diagrama de um amplificador operacional típico. Do lado esquerdo, temos as indicações das conexões físicas de um operacional, indicando a numeração da pinagem e suas funções. Do lado direito, o desenho esquemático de um operacional, tal como é utilizado no decorrer desta tese.

Em geral, podemos relacionar a tensão de saída com as tensões de entrada, positiva e negativa, da seguinte forma:

$$V_{out} = A(V_+ - V_-) \quad (C.4)$$

onde A é o ganho de malha aberta do amplificador operacional, ou seja, quando não estabelecemos uma conexão física entre o pino de saída e o pino de entrada negativa ou o pino de entrada positiva. Usualmente $A \sim 10^5$.

Podemos, por exemplo, reinjetar a tensão de saída do amplificador operacional V_o , pino 6, na entrada negativa V_- , pino 2. Quando realizamos esta conexão, temos uma realimentação negativa, que pode ser realizada através de um simples fio, por um resistor ou um capacitor, como nas Figs. C.5 - C.9. De fato, em geral se utiliza amplificadores operacionais com realimentação da saída em algum pino de entrada. Quando implementamos a realimentação

negativa em amplificadores operacionais, suas estruturas internas trabalham para que as tensões nas entradas negativa e positiva se igualem e assim podemos utilizar uma nova regra, dita regra de ouro:

$$V_+ = V_- \quad (\text{C.5})$$

Além desta regra, devemos notar que amplificadores operacionais são projetados para que não haja entrada de corrente elétrica nos pinos 2 e 3.

A seguir apresentamos as várias montagens para os amplificadores operacionais utilizadas nos circuitos estudados nesta Tese, relacionando as tensões de entrada, V_- e V_+ , com a de saída, V_o . Apresentamos montagens para amplificadores operacionais como amplificador, somador, subtrator e integrador não-inversor.

Muitas vezes é conveniente isolar uma parte A de um circuito eletrônico de outra B, de modo que B pode utilizar informações de A mas sem drenar corrente ou seja, sem afetar seu funcionamento. Um modo conveniente de realizar isto é exibido na Fig. C.5:

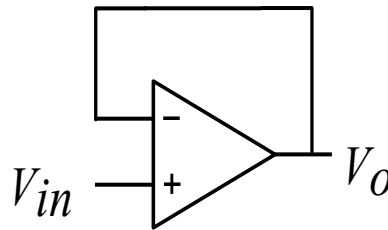


Figura C.5 – Diagrama de um amplificar operacional funcionando como tampão, isolando partes de um circuito eletrônico.

Como há realimentação negativa, $V_+ = V_-$. Neste caso $V_+ = V_{in}$ e $V_- = V_o$. Desta forma, $V_o = V_{in}$, ou seja, a tensão de saída é igual a de entrada.

Na Fig. C.6 temos o amplificador operacional como amplificador inversor:

Analisando a corrente que atravessa o circuito demonstramos a propriedade amplificadora desta configuração.

$$i = \frac{V_{in} - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_o}{R_2} \quad (\text{C.6})$$

Como $V_- = V_+$, regra C.5, e neste caso $V_+ = 0$, assim $V_- = 0$.

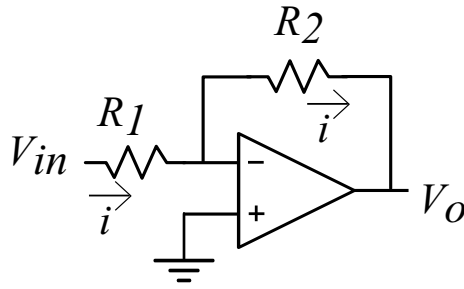


Figura C.6 – Amplificador operacional como amplificador inversor.

$$V_o = -\frac{R_2}{R_1}V_{in} \quad (\text{C.7})$$

Da mesma forma, podemos acrescentar outras tensões de entrada para realizarmos um somador, como vemos na Fig. C.7. A diferença é que temos um somatório das correntes de entrada.

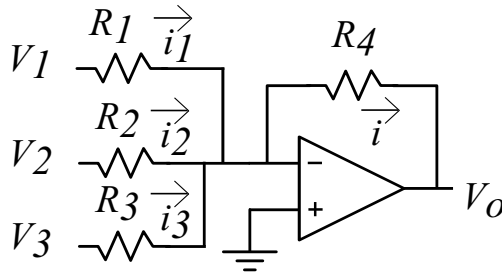


Figura C.7 – Amplificador operacional como somador inversor.

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = \frac{V_1 - V_-}{R_1} + \frac{V_2 - V_-}{R_2} + \frac{V_3 - V_-}{R_3} = \frac{V_- - V_o}{R_4} \quad (\text{C.8})$$

Como $V_- = V_+$ e neste caso $V_+ = 0$, assim $V_- = 0$.

$$V_o = -\frac{R_4}{R_1}V_1 - \frac{R_4}{R_2}V_2 - \frac{R_4}{R_3}V_3 \quad (\text{C.9})$$

O amplificador operacional também pode ser utilizado na função de subtrator, como vemos na Fig. C.8.

$$i_1 = \frac{V_1 - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_o}{R_4} \quad (\text{C.10})$$

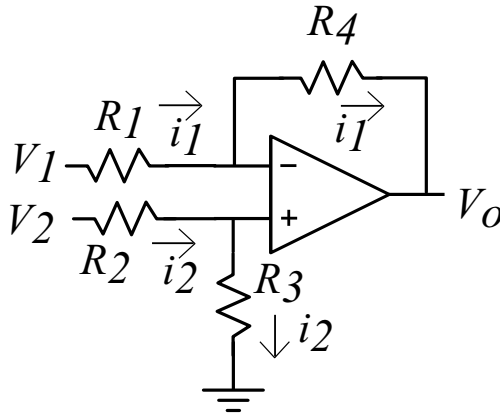


Figura C.8 – Amplificador operacional como subtrator inversor.

Na entrada positiva temos um divisor de tensão, desta forma $V_+ = \frac{R_3}{R_2+R_3}V_2$. Tomando $R_2 = R_3$, temos $V_+ = \frac{V_2}{2}$. Devido a realimentação negativa, $V_- = V_+ = \frac{V_2}{2}$. Assim,

$$V_o = \frac{R_4 + R_1}{R_1} \frac{V_2}{2} - \frac{R_4}{R_1} V_1 \quad (\text{C.11})$$

Se fizermos também $R_1 = R_4$ temos que $V_o = V_2 - V_1$.

Podemos utilizar o amplificador operacional também como integrador realizando, por exemplo, a seguinte montagem:

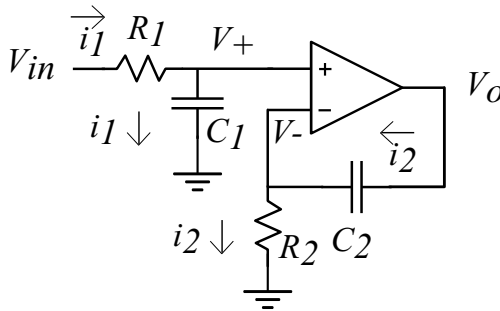


Figura C.9 – Amplificador operacional como integrador.

Como nas entradas positiva e negativa não entra corrente elétrica, a corrente i_1 passa pelo resistor R_1 , depois pelo capacitor C_1 e vai para o terra. Enquanto que a corrente i_2 gerada na saída do operacional passa pelo capacitor C_2 , pelo resistor R_2 e vai para o terra. Assim, calculando as correntes i_1 e i_2 , temos:

$$i_1 = \frac{V_{in} - V_+}{R_1} = C_1 \frac{d(V_+ - 0)}{dt} \quad (C.12)$$

$$i_2 = C_2 \frac{d(V_o - V_-)}{dt} = \frac{V_- - 0}{R_2} \quad (C.13)$$

Como $V_- = V_+$. Assim:

$$C_1 \frac{dV_+}{dt} + \frac{V_+}{R_1} = \frac{V_{in}}{R_1} \quad (C.14)$$

$$C_2 \frac{dV_+}{dt} + \frac{V_+}{R_2} = C_2 \frac{dV_o}{dt} \quad (C.15)$$

Fazendo $C_1 = C_2 = C$ e $R_1 = R_2 = R$, obtemos:

$$\frac{dV_o}{dt} = \frac{V_{in}}{RC} \quad (C.16)$$

A tensão de saída V_o é a integral da entrada V_{in} .

Diodos, Fig. C.10, são componentes eletrônicos que permitem a passagem de corrente elétrica em apenas um sentido. O seu funcionamento é aqui detalhado devido ao seu importante papel nos circuitos, garantindo a natureza não-linear do comportamento do sistema.

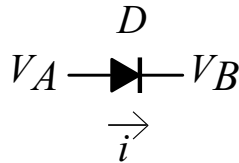


Figura C.10 – Símbolo de um diodo.

$$i = i_d e^{\alpha(V_A - V_B)} \quad (C.17)$$

Diodos funcionam como válvulas unidirecionais, pois só permite passagem significativa de corrente elétrica quando é aplicado um limiar de diferença de tensão entre seus terminais, $V_A - V_B > 0.7$ para diodos do tipo 1N414. A partir desse "limiar" o diodo trabalha para aumentar o nível de corrente elétrica que o atravessa e manter a diferença de tensão entre seus terminais constante. Desta forma, podemos utilizar pares opostos de diodos em circuitos

eletrônicos para gerar correntes lineares-por-partes, ou seja, correntes não-lineares, fazendo com que o circuito seja regido por uma equação não-linear (Horowitz *et al.* 1989, Senthilkumar *et al.* 2010).

Artigos publicados

Tunable power law in the desynchronization events of coupled chaotic electronic circuits

Gilson F. de Oliveira, Jr.,^{1,a)} Hugo L. D. de Souza Cavalcante,² Orlando di Lorenzo,¹ Martine Chevrollier,¹ Thierry Passerat de Silans,¹ and Marcos Oriá¹

¹Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900 João Pessoa, PB, Brazil

²Departamento de Informática, Universidade Federal da Paraíba, 58051-900 João Pessoa, PB, Brazil

(Received 10 September 2013; accepted 30 December 2013; published online 13 January 2014)

We study the statistics of the amplitude of the synchronization error in chaotic electronic circuits coupled through linear feedback. Depending on the coupling strength, our system exhibits three qualitatively different regimes of synchronization: weak coupling yields independent oscillations; moderate to strong coupling produces a regime of intermittent synchronization known as attractor bubbling; and stronger coupling produces complete synchronization. In the regime of moderate coupling, the probability distribution for the sizes of desynchronization events follows a power law, with an exponent that can be adjusted by changing the coupling strength. Such power-law distributions are interesting, as they appear in many complex systems. However, most of the systems with such a behavior have a fixed value for the exponent of the power law, while here we present an example of a system where the exponent of the power law is easily tuned in real time. © 2014 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4861815>]

Since the discovery that chaotic systems may synchronize their trajectories in spite of the sensitive dependence to perturbations in each system,¹ the subject of chaos synchronization has attracted the attention of many researchers, both from the fundamental and applied point of view, and many different forms of synchronization have been reported under diverse conditions. Likewise, the statistics of large events whose size-distribution follows power laws or other heavy-tailed models in complex systems has attracted the attention of multidisciplinary research. One of the difficulties arising in the study of many complex systems is the lack of reproducibility of the experiments under controlled conditions, issuing from the very complex nature of these usually large systems. Here we use imperfect chaos synchronization to generate rare events and further develop an analogy between heavy-tailed distributions appearing in complex systems and the statistics of desynchronization events in simple coupled chaotic systems.²

communications.^{1,3} Besides complete synchronization, one can find other generalizations to the concept, such as phase-synchronization¹⁷ and generalized synchronization.^{18,19} When subject to a generic coupling, most systems will wander off the synchronized state because of noise or mismatched parameters. This is often the case of generic feedback-coupled nonlinear oscillators in which there are riddled basins of attraction^{20–22} that give rise to a phenomenon called attractor bubbling.^{21,23–29} As a consequence of attractor bubbling, the difference between the state variables, observed in the coupled elements (which we refer to as an error signal), shows long intervals of low values interspersed with sudden and brief departures to large values, which we call bubbles, bursts, or desynchronization events.

The distribution of sizes of these bursts has characteristic parameters similar to the ones observed in extreme events that occur in complex systems.^{2,30} This similarity suggests that we can use coupled chaotic oscillators as a proxy for the study of extreme events in complex systems, motivated by the problem of catastrophic behavior of many natural and artificial systems.^{30–34} Such complex system variables usually present non-normal statistical distributions with large values of event sizes associated to the asymptotic behavior of the distribution, which can be a power law or other heavy-tailed distribution.^{35–39} The value of this slope can reveal information about the mechanism producing the bursts. Complex systems typically follow power laws $P(x) = Cx^{-\alpha}$ with a characteristic exponent α . For instance, $\alpha = 1.5$ in neurological systems,⁴⁰ or $\alpha = 2.0$, in coupled oscillators desynchronization,² or $\alpha = 1.0$ in earthquakes analysis.⁴¹ Power-law distributions with exponents $\alpha > 3$ have finite first and second moments (average and variance, respectively), while for $3 \geq \alpha > 1$ the second moment (variance) does not exist, and for $2 \geq \alpha > 1$ even the first moment (average) is infinite. Here we show that, beyond the analysis of the

I. INTRODUCTION

Synchronization phenomena are widely studied in many real and idealized systems, such as electronic circuits,^{3–7} lasers,^{8–10} and maps.^{11–14} While one often studies the synchronization of nonlinear dynamical systems in periodic states,¹⁵ the synchronization of chaotic systems is even more interesting, due to the counterintuitive effect of synchronization between two systems whose trajectories are exponentially sensitive to perturbations in phase-space,¹⁶ and also due to potential applications, such as masked

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed. Electronic mail: gilson@otica.ufpb.br

Trajectory-probed instability and statistics of desynchronization events in coupled chaotic systems

Gilson F. de Oliveira, Jr.,^{1,a)} Martine Chevrollier,¹ Thierry Passerat de Silans,^{1,2} Marcos Oriá,¹ and Hugo L. D. de Souza Cavalcante³

¹*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-900 João Pessoa-PB, Brazil*

²*UAF, Universidade Federal de Campina Grande, 58429-900 Campina Grande, PB, Brazil*

³*Departamento de Informática, Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba, Av. dos Escoteiros s/n, Mangabeira VII, 58055-000 João Pessoa, PB, Brazil*

(Received 29 June 2015; accepted 22 October 2015; published online 9 November 2015)

Complex systems, such as financial markets, earthquakes, and neurological networks, exhibit extreme events whose mechanisms of formation are not still completely understood. These mechanisms may be identified and better studied in simpler systems with dynamical features similar to the ones encountered in the complex system of interest. For instance, sudden and brief departures from the synchronized state observed in coupled chaotic systems were shown to display non-normal statistical distributions similar to events observed in the complex systems cited above. The current hypothesis accepted is that these desynchronization events are influenced by the presence of unstable object(s) in the phase space of the system. Here, we present further evidence that the occurrence of large events is triggered by the visitation of the system's phase-space trajectory to the vicinity of these unstable objects. In the system studied here, this visitation is controlled by a single parameter, and we exploit this feature to observe the effect of the visitation rate in the overall instability of the synchronized state. We find that the probability of escapes from the synchronized state and the size of those desynchronization events are enhanced in attractors whose shapes permit the chaotic trajectories to approach the region of strong instability. This result shows that the occurrence of large events requires not only a large local instability to amplify noise, or to amplify the effect of parameter mismatch between the coupled subsystems, but also that the trajectories of the system wander close to this local instability. © 2015 AIP Publishing LLC. [<http://dx.doi.org/10.1063/1.4935408>]

Plate tectonics, neuronal activity, and financial markets are examples of complex systems where large events are the subject of recent theoretical and statistical studies.¹ In recent works, it was shown that the occurrence of the largest events is governed by distinct mechanisms of formation, which may help in the prediction and control of such largest events.² The difficulty of experimentation in such large complex systems is circumvented by using analogous systems, which display some behavior similar to the original system. The analogous system may be a pair of coupled chaotic electronic circuits that exhibit imperfect synchronization, such as in the regime known as attractor bubbling.²⁻⁴ In this regime, the size of the desynchronization events plays the role of the variable presenting extreme events in other complex systems. We built a system comprised of a pair of coupled chaotic electronic circuits exhibiting a changeable attractor shape that we exploit to investigate the effects of the proximity of the chaotic trajectory to the unstable objects in phase space. We find that both the probability of escapes from the synchronized state and the size of those desynchronization events are enhanced in attractors where the chaotic trajectories pass more often through the region of strong instability.

I. INTRODUCTION

An important aspect of the complex systems displaying extreme events is that they present distributions of event sizes that do not follow normal (Gaussian) statistics, but rather a power-law probability, particularly for events of large sizes⁵⁻¹² and sometimes more exotic distributions.^{1,2} Such power-law or heavy-tailed distributions are difficult to study because of the decreasing but finite probability of observing events with very large sizes, which often results in diverging statistical momenta. An analogous system supposed to act as a proxy for a complex system of interest should, then, exhibit events with a non-normal probability distribution, resembling the one observed in the original complex system.

Coupled chaotic systems were used to study and understand large events. We use the expression "large event" to name the events belonging to the tail of a heavy-tailed distribution, which may be a power law or more exotic distributions. In our system, these events are not necessarily the extreme events appearing in Ref. 2. Despite the sensitive dependence to perturbations in each system, coupled chaotic oscillators may synchronize their trajectories.¹³ However, depending on the presence of noise, heterogeneity, and topology of the network of coupled nonlinear elements, these oscillators can exhibit events of desynchronization, also called *bubbles* or *bursts*. These bursts are a characteristic of

^{a)}Author to whom correspondence should be addressed. Electronic mail: gilson@otica.ufpb.br



Characterization of diffusion processes: Normal and anomalous regimes



Samuel B. Alves^a, Gilson F. de Oliveira Jr.^a, Luimar C. de Oliveira^a,
Thierry Passerat de Silans^{a,b}, Martine Chevrollier^a, Marcos Oriá^a,
Hugo L.D. de S. Cavalcante^{c,*}

^a Departamento de Física/CCEN, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-900, João Pessoa, PB, Brazil

^b Unidade Acadêmica de Física, Universidade Federal de Campina Grande, Caixa Postal 10071, 58109-970 Campina Grande, PB, Brazil

^c Departamento de Informática, Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba, Av. dos Escoteiros s/n, Mangabeira VII, 58055-000, João Pessoa, PB, Brazil

HIGHLIGHTS

- We use the evolution of distributions to characterize normal or anomalous diffusion.
- We considered space and time dynamics to test different regimes of diffusion.
- The width of the distribution is related to the parameters of the random walk.
- This analysis is independent of the mechanism responsible for the diffusion.
- The technique is specially useful in superdiffusion, where the variance diverges.

ARTICLE INFO

Article history:

Received 29 July 2015

Received in revised form 20 October 2015

Available online 23 December 2015

Keywords:

Anomalous diffusion

Lévy flights

Subdiffusion and superdiffusion

ABSTRACT

Many man-made and natural processes involve the diffusion of microscopic particles subject to random or chaotic, random-like movements. Besides the normal diffusion characterized by a Gaussian probability density function, whose variance increases linearly in time, so-called anomalous-diffusion regimes can also take place. They are characterized by a variance growing slower (subdiffusive) or faster (superdiffusive) than normal. In fact, many different underlying processes can lead to anomalous diffusion, with qualitative differences between mechanisms producing subdiffusion and mechanisms resulting in superdiffusion. Thus, a general description, encompassing all three regimes and where the specific mechanisms of each system are not explicit, is desirable. Here, our goal is to present a simple method of data analysis that enables one to characterize a model-less diffusion process from data observation, by observing the temporal evolution of the particle spread. To generate diffusive processes in different regimes, we use a Monte-Carlo routine in which both the step-size and the time-delay of the diffusing particles follow Pareto (inverse-power law) distributions, with either finite or diverging statistical momenta. We discuss on the application of this method to real systems.

© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

* Corresponding author.

E-mail addresses: samuel@otica.ufpb.br (S.B. Alves), gilson@otica.ufpb.br (G.F. de Oliveira Jr.), thierry@otica.ufpb.br (T. Passerat de Silans), martine@otica.ufpb.br (M. Chevrollier), oria@otica.ufpb.br (M. Oriá), hugo.cavalcante@ci.ufpb.br (H.L.D. de S. Cavalcante).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.049>

0378-4371/© 2015 Elsevier B.V. All rights reserved.

Local instability driving extreme events in a pair of coupled chaotic electronic circuits

Gilson F. de Oliveira, Jr.,^{*} Orlando Di Lorenzo, Thierry Passerat de Silans, Martine Chevrollier, and Marcos Oriá
Departamento de Física/CCEN, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-900, João Pessoa–PB, Brazil

Hugo L. D. de Souza Cavalcante

Departamento de Informática, Centro de Informática, Universidade Federal da Paraíba, Av. dos Escoteiros s/n, Mangabeira VII, 58055-000, João Pessoa–PB, Brazil

(Received 14 January 2016; revised manuscript received 18 April 2016; published 13 June 2016)

For a long time, extreme events happening in complex systems, such as financial markets, earthquakes, and neurological networks, were thought to follow power-law size distributions. More recently, evidence suggests that in many systems the largest and rarest events differ from the other ones. They are *dragon kings*, outliers that make the distribution deviate from a power law in the tail. Understanding the processes of formation of extreme events and what circumstances lead to dragon kings or to a power-law distribution is an open question and it is a very important one to assess whether extreme events will occur too often in a specific system. In the particular system studied in this paper, we show that the rate of occurrence of dragon kings is controlled by the value of a parameter. The system under study here is composed of two nearly identical chaotic oscillators which fail to remain in a permanently synchronized state when coupled. We analyze the statistics of the desynchronization events in this specific example of two coupled chaotic electronic circuits and find that modifying a parameter associated to the local instability responsible for the loss of synchronization reduces the occurrence of dragon kings, while preserving the power-law distribution of small- to intermediate-size events with the same scaling exponent. Our results support the hypothesis that the dragon kings are caused by local instabilities in the phase space.

DOI: [10.1103/PhysRevE.93.062209](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.062209)

I. INTRODUCTION

Coupled chaotic systems have been used to study and understand both extreme and collective events [1–4] encountered in nature and in human activities, like earthquakes, neuronal spikes and financial crises. Depending on the presence of noise, heterogeneity, and topology of the network of coupled nonlinear elements, these oscillators can exhibit bursts of desynchronization. In a regime called *attractor bubbling* [5–8] these bursts are brief and have varying amplitudes. Such desynchronization events are usually thought to exhibit power-law distributions of sizes, as in electronic circuits [9,10], systems on the edge of chaos [11], neurological systems, earthquakes, and others [1,12–18]. Because power laws are scale free, it is expected that one cannot anticipate the final size of a starting event. During their early stage of formation, large, medium, and small events all share the same formation processes and appear to be identical, thus rendering big events unpredictable [19]. The attractor bubbling regime can also exhibit *dragon king* (DK) events [19,20], that are extreme ones, characterized by a positive deviation in the tail of the distribution of a dynamical variable and having a different formation process from power-law events [19,20]. This difference distinguishes dragon kings from events belonging to a power law and enables forecasting and control, as demonstrated both experimentally, with chaotic electronic circuits, and numerically, in models of these systems [1,21]. Understanding the processes of formation of extreme events and the circumstances that lead to dragon kings or to a power-law distribution is an open question whose answer may help to assess whether extreme events will occur more often than expected in a specific system.

Large events of desynchronization in attractor bubbling are believed to be caused by the instability of invariant objects embedded in the unstable manifold of the system phase space, such as unstable invariant points or unstable invariant orbits [22]. Attractor bubbling happens when the system trajectory jumps from the stable manifold to the unstable manifold, due to the effect of noise or parameter mismatch [1,5]. The study of this situation is greatly simplified when one of these unstable objects, such as a saddle-type fixed point [1,5] or saddle orbit [9,10], is much more unstable than the others and hence dominates the local dynamics. The amount of instability is quantified by the local positive Lyapunov exponents of this unstable object. Thus, one should expect to observe a strong relation between the distribution of large events and the value of the positive local Lyapunov exponent(s) of the dominating unstable object(s).

Unfortunately, the calculation of such local Lyapunov exponents is difficult in practice, and most authors resort to equivalent quantifiers of local instability, such as short-time Lyapunov exponents [1,23] or the Lyapunov exponents calculated for a few unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractor [22].

The goal of this article is to demonstrate the effect of the local instability of one of such dominating unstable object in the formation of extreme events in a specific system. We use a pair of identical electronic circuits unidirectionally coupled via feedback signal in a regime of incomplete synchronization (attractor bubbling). Our circuit is a modification of a driven, second-order circuit studied before [9,10,24] in which we made the relation between voltage and current in the nonlinear block of the circuit to assume a piecewise linear dependence with a negative differential resistance (slope of the v - i curve) for small voltages. This slope corresponds to the strength of a locally repulsive force acting on trajectories

^{*}Corresponding author: gilson@otica.ufpb.br