

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

**Análise do Movimento Quântico de
Partículas Relativísticas sob Ação de
Potenciais Vetoriais e Escalares**

Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros

Dissertação de Mestrado

João Pessoa
26 de fevereiro de 2010

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros

**Análise do Movimento Quântico de Partículas Relativísticas
sob Ação de Potenciais Vetoriais e Escalares**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Física do Departamento de Física da Universidade Federal
da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau
de Mestre em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello*

João Pessoa
26 de fevereiro de 2010

M488a Medeiros, Eduardo Rafael Figueiredo.
 Análise do movimento quântico de partículas relativísticas
 sob ação de potenciais vetoriais e escalares / Eduardo Rafael
 Figueiredo Medeiros.- João Pessoa, 2010.
 75f.
 Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello
 Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Potencial escalar. 3. Potencial vetorial.
 4. Corda cósmica. 5. Campo magnético primordial.
 6. Potenciais centrais.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno
Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros,
candidato ao Título de Mestre em Física
na Área de Concentração Cosmologia e
Gravitação.

Aos **quinze dias do mês de abril do ano de dois mil e dez**, às **15:00**, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Cosmologia e Gravitação, o Sr. **Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, --- (---), co-orientador, *Valdir Barbosa Bezerra* (DF/UFPB) e *Geusa de Araújo Marques* (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado “*Análise do movimento quântico de partículas relativísticas sob ação de potenciais vetoriais e escalares*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, 15 de abril de 2010.

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador -DF/ UFPB

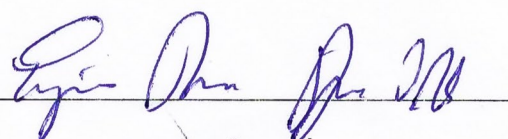
Prof. Dr. ---

Co-orientador - ---

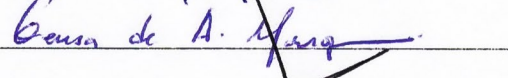
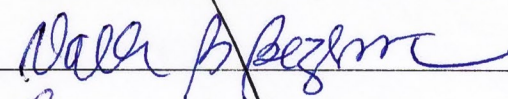
Prof. Dr. *Valdir Barbosa Bezerra*
DF/UFPB

Prof^a. Dr^a. *Geusa de Araújo Marques*
UFCG

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário



NÃO HÁ



Dedico esta dissertação à minha filha Laura, à minha esposa Angélica e ao magnífico universo do qual somos uma pequena parte, cujas existências são a razão pela qual eu persisto no caminho árduo da ciência e cujas indescritíveis belezas foram suficientes para que eu nunca sentisse a necessidade de acreditar em divindades. Que este e futuros trabalhos lhes sejam dignos.

Agradecimentos

Agradeço à minha filha Laura, por ter sempre um abraço, um sorriso e um comentário gentil a me oferecer, me fazendo esquecer de quaisquer dificuldades.

À minha amada esposa e melhor amiga Angélica, pelos anos de companhia, apoio e inspiração, por todas as memórias felizes que criamos juntos e todas as que ainda vamos criar.

Aos meus pais, por razões que nenhum filho, por mais que tente, é capaz de descrever com justiça.

Ao meu orientador, Prof. Eugênio, pela paciência infinita, profissionalismo impecável e competência admirável.

Aos meus irmãos, em especial Elvio, por ser sempre um cientista a um telefonema de distância e um exemplo em quem me espelhar, me familiarizando com as regras da vida acadêmica e sempre disponível para uma cerveja; e Allan, por ter despertado meu interesse pela física quando eu ainda era criança, respondendo pacientemente intermináveis perguntas sobre velocidade da luz, gravidade, eletromagnetismo etc.

Aos amigos que me acompanham desde a adolescência: os confrades dos Quatro Elementos Alexandre, Emmerson e Waltécio, além do meu colega de graduação Gabriel; cujas longas conversas reforçaram ainda mais a importância do rigor científico e da formação intelectual completa do cientista, que jamais deve se tornar um ignorante esclarecido, que conhece apenas o campo de estudo no qual ele se especializa, mas ignora a grande diversidade de contribuições filosóficas e artísticas da humanidade.

Agradeço também ao Conselho Nacional para o Desenvolvimento Científico (CNPq) pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento desta Dissertação.

*It pained him that he did not know well what politics meant and that he did
not know where the universe ended. He felt small and weak.*

—JAMES JOYCE, *A PORTRAIT OF THE ARTIST AS A YOUNG MAN* (1916)

In my entire scientific life, extending over forty-five years, the most shattering experience has been the realisation that an exact solution of Einstein's equations of general relativity, discovered by the New Zealand mathematician Roy Kerr, provides the absolutely exact representation of untold numbers of massive black holes that populate the universe. This 'shuddering before the beautiful', this incredible fact that a discovery motivated by a search after the beautiful in mathematics should find its exact replica in Nature, persuades me to say that beauty is that to which the human mind responds at its deepest and most profound.

—SUBRAHMANYAN CHANDRASEKHAR (1975)

Resumo

Apresentamos uma revisão sobre a origem e a natureza dos defeitos topológicos, que surgem a partir de transições de fase que podem ter ocorrido no início do processo de formação do universo; sobre a mecânica quântica não-relativística e relativística; e sobre as auto-forças gravitacional e eletrostática que emergem da topologia cônica do espaço-tempo gerado pela corda cósmica. Utilizando estas ferramentas, estudamos o movimento de uma partícula carregada na presença de uma corda cósmica, paralela a um campo magnético uniforme, de magnitude constante, que poderia servir de modelo para um campo magnético primordial. Também consideramos a geometria anti-cônica de uma desclinação negativa, defeito topológico análogo à corda cósmica estudado em matéria condensada. Calculamos, exatamente, a influência da topologia e do campo magnético no espectro de energia da partícula e encontramos o ângulo de mudança de fase para seus estados espalhados. No espaço-tempo plano, estudamos sistemas com simetria esférica e investigamos a dinâmica de uma partícula escalar, resolvendo, exatamente, as equações de Klein-Gordon e Dirac, considerando potenciais centrais.

Palavras-chave: potencial escalar, potencial vetorial, corda cósmica, desclinação, auto-interação, campo magnético primordial, potenciais centrais

Abstract

It is presented a review on three subjects: the origin and nature of topological defects, the non-relativistic and relativistic quantum mechanics, and the gravitational and eletrostatic self-forces that emerge from a conical spacetime surrounding a cosmic string. After setting up this theoretical framework, it is studied the behavior of a charged particle in the presence of a cosmic string, parallel to an uniform, constant magnetic field, which may be used as a model to a primordial large-scale magnetic field that permeates the universe. The geometry of a negative disclination is taken into account, this being a typically condensed matter physics topological defect equivalent to a cosmic string, where a wedge of material is inserted into the lattice. We computed exactly, the topological and electrostatic influences on the particles energy spectrum, and the phase shift for the charged scalar particle scattered states. Switching to a flat-spacetime context, spherically symmetric systems were studied, solving exactly, Klein-Gordon and Dirac equations which describe a scalar particle subject to a Coulomb vector potential and scalar central potentials.

Keywords: scalar potential, vector potential, cosmic string, disclination, self-force, primordial magnetic field, central forces

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Da Simetria	1
1.2	Da Quebra de Simetria	3
1.3	Além da Cosmologia	5
1.4	Sistema de Unidades	5
2	Defeitos Topológicos	7
2.1	Quebra Espontânea de Simetria	7
2.2	Modelo de Goldstone	8
2.3	Cordas Cósmicas	9
2.4	Efeitos Gravitacionais	11
2.5	Função de Green	12
2.6	Auto-interações	14
3	Mecânica Quântica	16
3.1	Equação de Schrödinger	17
3.1.1	Interpretação Estatística	18
3.1.2	Normalização	19
3.1.3	Equação de Schrödinger no Espaço Curvo	20
3.2	Equação de Klein-Gordon	21
3.2.1	Normalização	21
3.2.2	Equação de Klein-Gordon no Espaço Curvo	22
3.3	Equação de Dirac	22
3.3.1	Normalização	24
3.3.2	Equação de Dirac no Espaço Curvo	24
4	Análise Quântica no Espaço-Tempo da Corda Cósmica	26
4.1	Equação de Klein-Gordon com Potencial Escalar	27

4.2	Considerando um Campo Magnético Uniforme	28
4.3	Soluções Particulares da Equação Radial	30
4.3.1	Desprezando a Auto-interação	30
4.3.2	Desligando o Campo Magnético	33
4.3.3	Desclinação Positiva ($\alpha < 1$): Estados Espalhados	33
4.3.4	Desclinação Negativa ($\alpha > 1$): Estados Ligados e Espalhados	34
4.4	Solução Geral da Equação Radial	35
4.5	Normalização da Auto-função de Klein-Gordon	37
5	Potencial Escalar e Coulombiano em um Sistema com Simetria Esférica	39
5.1	Equação de Klein-Gordon para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$	40
5.1.1	Estados Ligados	41
5.1.2	Estados Espalhados	42
5.2	Equação de Klein-Gordon para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \eta_L r$	42
5.3	Normalização	44
5.4	Equação de Dirac para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$	45
5.4.1	Estados Ligados	46
5.4.2	Estados Espalhados	47
6	Conclusões	49
A	Funções de Bessel Modificadas	51
B	Equações de Maxwell no Espaço Curvo	53
C	Funções Hipergeométricas Confluentes	56

Lista de Figuras

2.1	Potencial de quebra de simetria $U(1)$: $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi - \eta^2)^2$.	9
2.2	Espaço-tempo cônico externo à uma corda retilínea infinita.	11
2.3	Coeficiente $\kappa(p)$ relacionado à função de Green renormalizada da equação de Poisson no espaço-tempo cônico.	15

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Da Simetria

A palavra *simetria* deriva do grego *sun* (que significa “com”, ou “junto”) e *metron* (“medida”), formando *summetria*, que originalmente denotava uma relação de comensurabilidade (significado usado por Euclides nos *Elementos*, e.g.). Rapidamente o termo adquiriu o sentido mais geral e abrangente de uma relação de proporção baseada nos números inteiros com a função de harmonizar diferentes elementos em um todo. Desde o princípio, a simetria esteve fortemente relacionada com a harmonia, a beleza e a unidade. E isso foi prova decisiva do seu papel nas teorias da Natureza. No *Timaeus* de Platão, por exemplo, os poliedros regulares ocuparam lugar central na doutrina dos elementos naturais, as proporções que eles contêm e a beleza das suas formas: o fogo tem a forma do tetraedro regular, a terra tem a forma do cubo, o ar tem a forma do octaedro regular, a água tem a forma do icosaedro e o dodecaedro regular representa a forma de todo o universo. A história da ciência também fornece outro exemplo paradigmático do uso dessas figuras como elementos básicos da descrição física: o *Mysterium Cosmographicum* de Johannes Kepler apresenta uma arquitetura planetária baseada em cinco sólidos regulares.

De uma perspectiva moderna, as figuras regulares usadas na física de Platão e Kepler pelas proporções matemáticas e harmonias que elas contêm (e as propriedades e beleza relacionadas à sua forma), são também simétricas num outro sentido que não tem a ver com suas proporções. Na linguagem da ciência moderna, a simetria de figuras geométricas — como a dos polígonos e poliedros regulares — é definida em termos da sua invariância sob grupos específicos de rotações e reflexões. Além da antiga noção de simetria usada pelos gregos e romanos (até o final da Renascença), uma noção diferente de simetria emergiu no século XVII, baseada não em proporções, mas em uma relação de equivalência entre elementos opostos, como as partes esquerda e direita de uma figura. Essencialmente, as partes são permutáveis com respeito ao todo, preservando a figura original. Essa noção posterior se desenvolveu, após muitas etapas, até o conceito encontrado hoje na ciência. Uma etapa crucial foi a introdução de operações matemáticas específicas, como as reflexões, rotações e translações, usadas para descrever as si-

metrias de maneira sistemática. Como resultado, chegamos a uma definição da simetria de uma figura geométrica em termos de sua invariância quando operações específicas atuam sobre suas partes. Então, quando as duas metades de uma figura bilateralmente simétrica trocam de lugar, recupera-se a figura original e a figura é dita invariante sob reflexão. Isso é conhecido como *noção cristalográfica de simetria*, pois foi no contexto do desenvolvimento da cristalografia que a simetria foi, pela primeira vez, definida e aplicada¹. O próximo passo foi a generalização dessa idéia através da definição da teoria de grupos, que surgiu seguindo o desenvolvimento do conceito algébrico de grupo ao longo do século XIX, e o fato de que as transformações de simetria constituem um grupo. Por exemplo, a simetria de reflexão tem agora a definição precisa em termos da invariância sob transformações do grupo de reflexões. Finalmente, há uma relação íntima entre a noção de simetria, equivalência e grupo — um grupo simétrico induz uma divisão entre classes equivalentes. Os elementos que são permutados pelas transformações de simetria são conectados por uma relação de equivalência, formando, então, uma *classe de equivalência*.

A noção teórica e abstrata dos grupos de simetria é a que obteve mais sucesso na ciência moderna. Perceba-se, contudo, que a simetria permanece ligada à beleza (regularidade) e à unidade: por meio de transformações de simetria, elementos distintos (mas “iguais”, ou de modo mais geral “equivalentes”) se relacionam entre si e com o todo, formando então uma “unidade” regular. A forma como a regularidade do todo surge, é ditada pela natureza do grupo de transformações em questão. Resumindo, uma unidade de elementos diferentes e equivalentes é sempre associada com simetria, seja no sentido moderno ou antigo; a forma como essa unidade é entendida e como os diferentes e equivalentes elementos são escolhidos, determinam a simetria resultante e em que ela consiste.

A definição de simetria como invariância sob um grupo específico de transformações permitiu que o conceito fosse aplicado de forma muito mais abrangente, não apenas em figuras geométricas, mas também em objetos abstratos como expressões matemáticas.

Mais especificamente, uma transformação de simetria é uma mudança de referencial ou de ponto de vista que não muda a forma como se vê um sistema físico. Se dois observadores O e

¹Considerações acerca da simetria foram usadas por R.J. Haüy para caracterizar e classificar estruturas cristalinas (1801, *Traité de minéralogie*, Volume 1), e com isso a cristalografia emergiu como uma disciplina distinta da mineralogia. É perfeitamente aceitável imaginar que o estudo sistemático da simetria tenha surgido no campo da cristalografia, uma vez que poucas entidades na Natureza apresentam conjuntos mais exuberantes de simetria do que os cristais.

O' olharem para um mesmo sistema em estados R e R' , observarão as mesmas propriedades

$$P(R \longrightarrow R_n) = P(R' \longrightarrow R'_n). \quad (1.1)$$

Esta é apenas uma propriedade necessária das transformações, mas elas também seguem as propriedades de grupo² [1, 2].

A natureza é uma fonte rica de simetrias. Algumas de suas simetrias (aproximadas) são óbvias: a simetria bilateral do corpo humano (e, em geral, dos animais), a simetria pentagonal frequentemente encontrada nas flores, a simetria hexagonal das células que formam as colméias, a simetria translacional de plantas e animais como a lagarta etc. As simetrias da Natureza aparecem em escalas que variam do extremamente grande (a escala cosmológica) ao extremamente pequeno (a escala subnuclear das partículas elementares) [3, 4].

O entendimento e apreciação da maneira como a Natureza expressa suas simetrias não serve aos físicos apenas como satisfação intelectual. Na verdade, o estudo da simetria, principalmente das simetrias que o universo apresentava nos seus primeiros instantes, deve despertar a curiosidade em entender a maneira como essas simetrias foram quebradas, transformando um universo primordialmente homogêneo em um universo de grande diversidade e heterogeneidade da qual nós, os seres humanos, somos fruto.

A próxima seção trata de uma das consequências dessas quebras de simetria: um defeito na topologia do universo que, já se acreditou, poderia ser a razão pela qual a matéria distribuída uniformemente se agrupou e formou as estruturas que vemos hoje.

1.2 Da Quebra de Simetria

Talvez a primeira referência a um conceito semelhante a uma “corda cósmica” seja a que aparece na teoria cosmológica de Descartes [5], onde ele descreve um vórtex linear que arrasta os planetas do sistema solar através do espaço. Apesar de ter sido um modelo com surpreendente aceitação na Europa, foi duramente criticado por Newton [6], que em 1713 afirmou, sobre o trabalho de Descartes, que “a hipótese de vórtices é empurrada à força, de maneira desajeitada”.

Dois séculos e meio depois, na década de 60, surgiram as primeiras soluções do tipo defeito topológico tridimensional em uma teoria de campo não-linear [7] que assumiram o papel de

²Um grupo G é definido como sendo um conjunto G , junto com uma operação $(\cdot)$, tal que para cada elemento g_1 e g_2 de G , $g_1 \cdot g_2$ pertence a G ; a operação é associativa, o grupo contém o elemento identidade e para cada elemento existe um inverso.

sub-produto de *quebras espontâneas de simetria*, já que delas, geralmente, surge um conjunto de vácuos degenerados com topologia não-trivial. Ainda nos anos 60, antecipou-se também o papel dos defeitos topológicos na teoria quântica de campos, e foi prevista sua importância na cosmologia [8].

Na década de 70, sugeriu-se que simetrias espontaneamente quebradas poderiam ser recuperadas em temperaturas suficientemente altas, como acontece em sistemas de matéria condensada [9, 10]. Posteriormente, Weinberg [11] notou a possibilidade da formação de paredes de domínio em transições de fase no universo jovem. T. Kibble [12] propôs pela primeira vez a existência de cordas cósmicas no sentido moderno. Ele se inspirou na teoria de vórtices lineares em supercondutores e imaginou a formação de estruturas similares enquanto o universo se expandia e se resfriava nos estágios iniciais do *Big Bang*. Em seguida demonstrou que a existência de defeitos topológicos tais como: cordas cósmicas, paredes de domínio, monopolos e texturas; depende da variedade.

O estudo das cordas cósmicas foi muito popular durante os anos 80 e parte dos anos 90. A principal razão para esse interesse era o fato de que as cordas ofereciam uma explicação plausível e elegante para a formação de estruturas, causando as flutuações de densidade que “semearam” o surgimento das galáxias [13].

Dados observacionais posteriores, por outro lado, vieram indicar, sem margem para dúvida, que as cordas cósmicas ou outros defeitos topológicos não poderiam ser responsáveis pela grande quantidade de flutuações na densidade média do universo das quais as galáxias evoluíram: na melhor das hipóteses, seriam a causa de uma pequena fração destas flutuações [14, 15]. Sabe-se ainda que a ausência de curvatura ao redor de uma corda cósmica determina que nenhuma força gravitacional é exercida nesta região, então não se espera o agrupamento de galáxias nas vizinhanças de cordas cósmicas longas e retilíneas, apesar da sua enorme massa [16].

Mesmo que não sejam a fonte das perturbações iniciais na densidade do universo [17], as cordas cósmicas permanecem como principais candidatas, entre os defeitos topológicos, a ser observadas, levando assim, a recentes tentativas inovadoras de observar os seus efeitos [18, 19]. Em se tratando de tentativas de observar os efeitos das cordas cósmicas, é importante mencionar o caso do objeto CSL-1 (*Capodimonte-Sternberg-Lens Candidate no. 1*), descoberto em 2003 [20], que chamou a atenção da comunidade científica, pois sua morfologia e características espectrais davam fortes indícios de que se tratava da primeira observação do efeito de lente gravitacional provocado por uma corda cósmica [21]. No entanto, a busca por outras evidências

de lente gravitacional próximas ao CSL-1 mostrou-se infrutífera [22] e finalmente, no início de 2006, o telescópio espacial Hubble voltou suas lentes para o curioso objeto e suas imagens de alta resolução mostraram que o objeto CSL-1 é, na verdade, um par de galáxias elípticas gigantes interagindo entre si. Apesar das fortes semelhanças na energia, distribuição de luz e velocidade radial dos seus dois componentes, CSL-1 não é o efeito de lente causado por uma corda cósmica [23, 24].

1.3 Além da Cosmologia

O defeito cônico também é de importância fundamental, no estudo da matéria condensada, que fornece excelentes experimentos análogos aos fenômenos possivelmente ocorridos no universo em formação. Um detalhe importante é o fato de que teorias de formação de defeitos topológicos exóticos, como as cordas cósmicas, podem ser testadas [25, 26, 27] em sistemas de matéria condensada como redes de grafeno [28, 29, 30], cristais líquidos [31], hélio superfluido [32, 33] e supercondutores [34].

O estudo de sistemas quânticos em um contexto gravitacional não-trivial, como o espaço-tempo gerado pela corda cósmica, pode ajudar a esclarecer problemas que surgem das tentativas de se combinar a mecânica quântica e a relatividade geral. No contexto da teoria de supercordas, ou teoria M, acredita-se que redes de supercordas cósmicas poderiam surgir naturalmente da aniquilação entre brana e anti-brana [35, 36, 37, 38]. Estes modelos recentes encorajam a hipótese de que as cordas cósmicas tiveram um papel na formação do universo. De modo geral, existem excelentes razões para que se dê continuidade à procura e ao estudo das cordas cósmicas.

1.4 Sistema de Unidades

Exceto quando especificado em contrário, o sistema de unidades que será empregado ao longo desta Dissertação é o sistema de unidades naturais ou fundamentais; as seguintes constantes fundamentais são definidas como a unidade

$$\hbar = c = 1$$

Todas as dimensões nesse sistema são expressas em termos de uma unidade básica — a energia — que usualmente é dada em $\text{GeV} = 10^9 \text{ eV}$, ou seja

$$[\text{Energia}] = [\text{Massa}] = [\text{Comprimento}]^{-1} = [\text{Tempo}]^{-1}$$

Em adição a esta convenção, adotaremos nesta Dissertação a assinatura -2 para o tensor métrico.

Defeitos Topológicos

2.1 Quebra Espontânea de Simetria

A quebra espontânea de simetria é uma idéia que se originou na física da matéria condensada. Ela ocorre quando um sistema, que é inicialmente simétrico com respeito a algum grupo de simetria, vai para um estado de vácuo que não é simétrico. Quando isto ocorre, o sistema não mais se comporta de acordo com sua simetria original. O grupo de simetria inicial do sistema pode ser discreto, como o grupo espacial de um cristal; ou contínuo, como o grupo de simetria rotacional, cujas transformações mantêm o cilindro, por exemplo, invariante.

Um exemplo comum que ajuda a explicar o fenômeno de quebra espontânea de simetria é uma bola colocada no topo de uma colina. A bola está num estado completamente simétrico, no entanto, instável. A menor perturbação fará com que a bola role em alguma direção. Neste ponto a simetria foi quebrada porque a bola escolheu uma direção particular, que pode ser diferenciada das demais (o sistema escolheu um estado de vácuo).

O resultado da quebra de alguns tipos de simetria presentes em sistemas físicos são os defeitos topológicos. Eles podem aparecer, notadamente, em sistemas de matéria condensada ou no contexto cosmológico, como defeitos na estrutura homogênea do espaço-tempo em alguma região do universo.

Os defeitos topológicos assumem papéis importantes no contexto das teorias de grande unificação (GUT) das partículas elementares. A premissa básica da grande unificação é que as simetrias conhecidas das partículas elementares são vestígios de um grupo maior de simetria G , após sucessivas quebras espontâneas de simetria:

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \longrightarrow SU_C(3) \times U_{EM}(1). \quad (2.1)$$

Isto implica que, na sua fase inicial, o universo passou por um número de transições de fase com um ou vários tipos de defeitos topológicos sendo deixados pelo caminho. Apesar da abordagem deste cenário exigir uma quantidade saudável de ceticismo, a questão da formação e evolução de defeitos merece uma investigação séria.

Nas teorias modernas de partículas elementares, a quebra de simetria é descrita em termos de campos escalares chamados campos de Higgs. O estado fundamental da teoria não exibe as mesmas simetrias da hamiltoniana e é caracterizado por um valor esperado não-nulo do campo de Higgs. As propriedades essenciais da quebra espontânea de simetria podem ser ilustradas em um modelo simples estudado por Goldstone em 1961 [39, 40].

2.2 Modelo de Goldstone

Considere a densidade lagrangeana clássica

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.2)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo e o potencial $V(\phi)$ é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (2.3)$$

sendo λ e η constantes (ver Figura 2.1). O modelo é invariante sob o grupo $U(1)$ de transformações de fases globais:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x). \quad (2.4)$$

Para $\eta^2 > 0$, os mínimos do potencial (2.3) formam um círculo $|\phi| = \eta$ e o estado fundamental (o vácuo) da teoria é caracterizado por um valor esperado não-nulo

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \eta e^{i\theta}, \quad (2.5)$$

onde θ é uma fase arbitrária. A transformação de fase (2.4) leva θ em $\theta + \alpha$, então o estado de vácuo $|0\rangle$ não é invariante sob (2.4) e a simetria é espontaneamente quebrada. O estado anterior à quebra de simetria, com $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$, corresponde a um máximo local de $V(\phi)$. Pequenas perturbações ao redor deste estado são descritas pela densidade lagrangeana (2.2) com o potencial

$$V(\phi) \approx -\frac{1}{2} \lambda \eta^2 \phi^* \phi + \text{const.} \quad (2.6)$$

O sinal negativo no termo de massa indica a instabilidade do caso simétrico. Os vácuos da simetria quebrada para diferentes valores de θ são equivalentes. Escolhendo o vácuo para $\theta = 0$, podemos representar ϕ como

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.7)$$

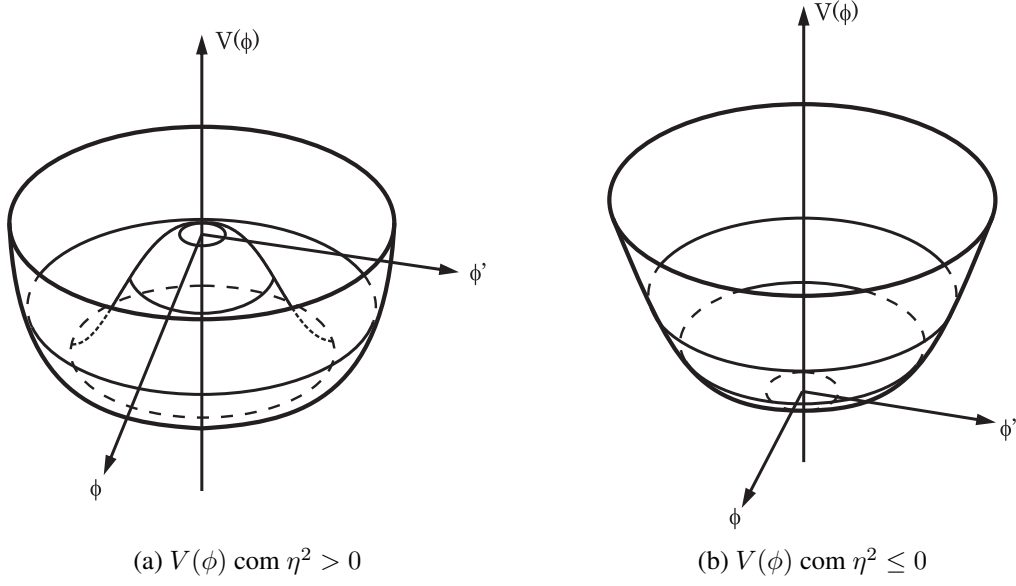


Figura 2.1: Potencial de quebra de simetria $U(1)$: $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi^*\phi - \eta^2)^2$.

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos reais com valores esperados no vácuo nulos. Substituindo a equação (2.7) na densidade lagrangeana (2.2), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi_1^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.8)$$

onde o termo de interação $\mathcal{L}_{\text{int}}$ inclui termos de ordem mais alta em ϕ_1 e ϕ_2 . Podemos ver que ϕ_1 representa uma partícula com massa positiva $\mu = \sqrt{\lambda}\eta$, enquanto ϕ_2 não possui massa. A razão para isso é que ϕ_1 está associado às oscilações radiais sobre um ponto no círculo $|\phi| = \eta$, enquanto ϕ_2 corresponde ao movimento sobre o círculo. O aparecimento de partículas escalares sem massa, chamadas bósons de Goldstone, é uma característica geral da quebra espontânea de simetrias globais. Na seção seguinte estudaremos um caso particular de defeito topológico formado pela quebra de simetria.

2.3 Cordas Cósmicas

Cordas cósmicas são defeitos topológicos unidimensionais, hipoteticamente formadas quando o universo era jovem, pela quebra espontânea da simetria $U(1)$. Caso elas existam, devem ser extremamente finas e densas — para cordas com densidade linear de massa μ , resultantes de quebra de simetria em uma escala de energia η , temos que $\mu \sim \eta^2$. As cordas, para um teoria de grande unificação típica, com $\eta \sim 10^{16}$ GeV, possuem $G\mu \sim 10^{-6}$ ou $\mu \sim 10^{22}$ g/cm, onde

G é a constante da gravitação universal [16].

A métrica gerada por uma corda cósmica é a solução não-trivial mais simples das equações de campo de Einstein. A corda cósmica mais simples possível é infinita, fina, retilínea e estática. Tal corda possui alto grau de simetria — azimutal, invariância translacional e perante boosts de Lorentz ao longo da corda. A solução para campos fracos (que é praticamente idêntica à solução geral) foi encontrada pela primeira vez em 1981 por A. Vilenkin [41]. A métrica geral foi descoberta independentemente por J.R. Gott [42] e W. Hiscock [43] em 1985.

A solução de Hiscock-Gott é construída assumindo um elemento de linha estático com simetria cilíndrica [44]. Ignorando a micro-estrutura das cordas cósmicas, e tratando-as como objetos essencialmente unidimensionais, podemos caracterizá-las por um único parâmetro μ — sua massa por unidade de comprimento. Em resumo, admitindo que a corda esteja ao longo do eixo z e usando o sistema de coordenadas cilíndricas, a solução obtida é

$$ds^2 = dt^2 - dz^2 - dr^2 - (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\phi^2, \quad (2.9)$$

onde $r \geq 0$ e $\phi = [0, 2\pi]$. O elemento de linha (2.9) possui uma interpretação geométrica bastante simples. É possível reescrevê-lo como elemento de linha de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - dz^2, \quad (2.10)$$

se definirmos a coordenada angular $\theta = (1 - 4G\mu)\phi$ de modo que

$$0 \leq \theta < 2\pi(1 - 4G\mu) \equiv \frac{2\pi}{p}. \quad (2.11)$$

Em outras palavras, a presença da corda introduz um déficit de ângulo azimutal $8\pi G\mu$ resultando em uma hipersuperfície com a geometria de um cone para t e z constantes (ver Figura 2.2). O espaço-tempo cônico é localmente plano exceto em um ponto, onde a curvatura apresenta uma singularidade do tipo delta de Dirac e o escalar de curvatura é dado por

$$R = 4\pi(p - 1)\delta^{(2)}(\vec{r}), \quad (2.12)$$

portanto o espaço-tempo não é globalmente plano. O caso em que $\mu = 0$ corresponde a $p = 1$ e ao espaço-tempo de Minkowski. Quando $G\mu \rightarrow \frac{1}{4}$ o ângulo planar ocupa toda a área azimutal ao redor da corda e $p \rightarrow \infty$. Para $G\mu \geq \frac{1}{4}$ a métrica não serve mais para descrever uma corda. Por outro lado, se considerarmos $\mu < 0$, então $0 < p < 1$ e temos um “excesso” de ângulo azimutal. Em matéria condensada, defeitos do tipo declinações são descritos geometricamente através de um tensor métrico análogo ao de uma corda cósmica. É possível que estas estruturas demonstrem comportamento correspondente ao caso $0 < p < 1$. Neste caso o defeito apresenta curvatura negativa e o excesso de ângulo planar corresponde a um espaço-tempo anti-cônico.

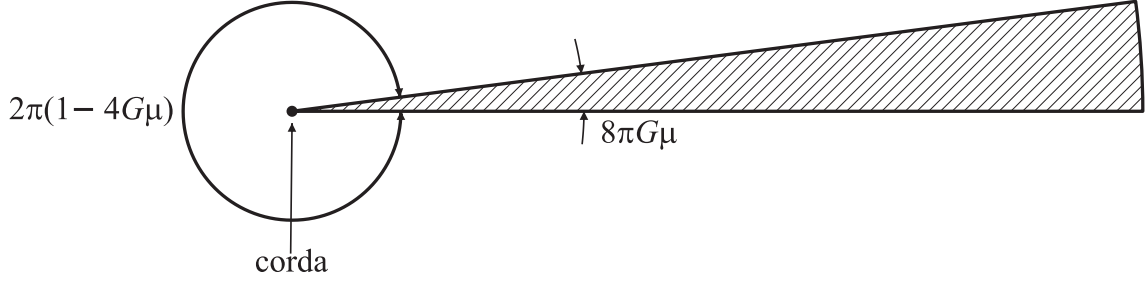


Figura 2.2: Espaço-tempo cônico externo à uma corda retilínea infinita.

2.4 Efeitos Gravitacionais

Como o espaço-tempo ao redor da corda é localmente plano, nenhuma força gravitacional é exercida em uma partícula nas proximidades. No entanto o próprio campo gravitacional ou eletromagnético de uma partícula colocada na sua vizinhança é distorcido pela corda e exerce nela uma auto-força (campos são sensíveis às propriedades globais do espaço-tempo, portanto os efeitos podem surgir mesmo na ausência de curvatura local).

Na vizinhança da corda, o potencial gravitacional ϕ_{grav} gerado por uma partícula (distribuição pontual) de massa m na posição $\vec{x}'$ satisfaz

$$\nabla^2 \phi_{\text{grav}}(\vec{x}) = 4\pi G m \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.13)$$

De modo similar, o potencial eletrostático ϕ_{elett} devido à uma partícula de carga q na posição $\vec{x}'$ nas proximidades da corda cósmica¹ satisfaz

$$\nabla^2 \phi_{\text{elett}}(\vec{x}) = -4\pi q \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (2.14)$$

É possível, então, construir uma função de Green $G_p(\vec{x}, \vec{x}')$ para a equação de Poisson no espaço-tempo cônico e calcular as auto-forças a partir dela [16]

$$\nabla^2 G_p(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.15)$$

onde ∇^2 é o laplaciano usual no espaço-tempo plano. No entanto, $G_p(\vec{x}, \vec{x}')$ deve ter periodicidade $\frac{2\pi}{p}$ em θ e θ' para que os potenciais estejam unicamente definidos em cada ponto. Esta mudança na periodicidade azimutal torna anisotrópico o campo próximo à partícula e produz

¹Os fundamentos da teoria eletromagnética de Maxwell no espaço curvo podem ser encontrados no Apêndice B.

a auto-interação. É nosso objetivo neste capítulo fazer uma breve revisão do fenômeno da auto-interação. Sendo assim, na próxima seção, analisaremos o cálculo da função de Green associada à equação (2.15).

2.5 Função de Green

Em coordenadas cilíndricas a equação (2.15) fica expressa por

$$\left(\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \partial_z^2 \right) G_p(r, \theta, z; r', \theta', z') = -\frac{4\pi}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(z - z'). \quad (2.16)$$

Podemos representar as funções delta de Dirac nas variáveis θ e z como

$$\delta(\theta - \theta') = \frac{p}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ipm(\theta - \theta')}, \quad (2.17a)$$

$$\delta(z - z') = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos k(z - z'). \quad (2.17b)$$

Isto sugere a expansão da função de Green na forma

$$G_p(r, \theta, z; r', \theta', z') = \frac{p}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ipm(\theta - \theta')} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos k(z - z') g_{m,k}(r, r'). \quad (2.18)$$

Substituindo as equações (2.18) e (2.17) em (2.16), encontramos que a função desconhecida $g_{m,k}$ satisfaz a seguinte equação diferencial não-homogênea:

$$(r \partial_r (r \partial_r) - p^2 m^2 - k^2 r^2) g_{m,k}(r, r') = -4\pi r \delta(r - r'), \quad (2.19)$$

que é a equação de Bessel modificada² para $r \neq r'$. Para $r < r'$ devemos adotar a solução $I_{p|m|}(kr)$ que é regular quando $r \rightarrow 0$; para $r > r'$ a solução que é regular em $r \rightarrow \infty$ é $K_{p|m|}(kr)$. Impondo a continuidade de $g_{m,k}$ em $r = r'$, temos

$$g_{m,k}(r, r') = A_{m,k} I_{p|m|}(kr_<) K_{p|m|}(kr_>), \quad (2.20)$$

onde $r_<$ é a região em que $r < r'$ e $r_>$ é a região em que $r > r'$. O coeficiente $A_{m,k}$ pode ser determinado se calcularmos a descontinuidade da derivada³ de $g_{m,k}$ em $r = r'$. Integrando a equação (2.19) em torno de r' temos

$$\left[\frac{\partial g_{m,k}}{\partial r} \right]_{r=r'+\epsilon} - \left[\frac{\partial g_{m,k}}{\partial r} \right]_{r=r'-\epsilon} = -\frac{4\pi}{r'}. \quad (2.21)$$

²As principais propriedades das funções de Bessel modificadas estão listadas no Apêndice A.

³Uma análise detalhada sobre o método de funções de Green em três dimensões e em coordenadas cilíndricas pode ser encontrada em G.B. Arfken e H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* [45].

Substituindo a equação (2.20) em (2.21) encontramos

$$A_{m,k} [I_{p|m|}(x)K'_{p|m|}(x) - I'_{p|m|}(x)K_{p|m|}(x)] = -\frac{4\pi}{x}, \quad (2.22)$$

onde $x \equiv kr'$. Usando a fórmula do wronskiano associado às funções de Bessel modificadas (A.9), encontramos $A_{m,k} = 4\pi$. Portanto, a função de Green é representada por

$$G_p(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{2p}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ipm(\theta-\theta')} \int_0^{\infty} dk \cos k(z-z') I_{p|m|}(kr_{<}) K_{p|m|}(kr_{>}). \quad (2.23)$$

A integral na variável k resulta em uma função de Legendre do segundo tipo [46] e o que resta é uma representação em série de Fourier

$$G_p(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{p}{\pi(r r')^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{ipm(\theta-\theta')} Q_{p|m|-\frac{1}{2}}(\cosh u_0), \quad (2.24)$$

onde $u_0(\vec{x}, \vec{x}')$ é definida através de

$$\cosh u_0 = \frac{r^2 + r'^2 + (z-z')^2}{2rr'}. \quad (2.25)$$

Usando a representação integral da função de Legendre [46]

$$Q_{\nu}(z) = 2^{-\frac{1}{2}} \int_{\cosh^{-1} z}^{\infty} du (\cosh u - z)^{-\frac{1}{2}} e^{-(\nu+\frac{1}{2})u}, \quad (2.26)$$

podemos calcular a soma sobre o índice m como uma série geométrica

$$G_p(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{p}{\pi(2rr')^{\frac{1}{2}}} \int_{u_0}^{\infty} du (\cosh u - \cosh u_0)^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-p|m|u+ipm(\theta-\theta')}. \quad (2.27)$$

Obtem-se, então, a representação integral da função de Green para a equação de Poisson no espaço-tempo cônico

$$G_p(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{\pi(2rr')^{\frac{1}{2}}} \int_{u_0}^{\infty} du \frac{du}{(\cosh u - \cosh u_0)^{\frac{1}{2}}} \frac{p \sinh pu}{\cosh pu - \cos p(\theta - \theta')}. \quad (2.28)$$

Um caso especial deste resultado é $p = 1$, ou seja, na ausência da corda (espaço-tempo de Minkowski), a integral (2.28) pode ser calculada e o resultado já era esperado:

$$G_1(\vec{x}, \vec{x}') = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta') + (z - z')^2]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}. \quad (2.29)$$

2.6 Auto-interações

De posse da função de Green podemos calcular as “auto-energias” para uma distribuição de massa ρ_m e carga ρ_q próxima à corda cósmica:

$$U_{\text{grav}} = -\frac{1}{2}G \iint \rho_m(\vec{x}') G_p(\vec{x}', \vec{x}'') \rho_m(\vec{x}'') d^3x' d^3x'', \quad (2.30a)$$

$$U_{\text{elett}} = \frac{1}{2} \iint \rho_q(\vec{x}') G_p(\vec{x}', \vec{x}'') \rho_q(\vec{x}'') d^3x' d^3x''. \quad (2.30b)$$

Para uma partícula em $\vec{x}$ com massa m e/ou carga q temos:

$$\rho_m(\vec{x}) = m\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}), \quad (2.31a)$$

$$\rho_q(\vec{x}) = q\delta^3(\vec{x}' - \vec{x}). \quad (2.31b)$$

Substituindo (2.31a) e (2.31b) em (2.30a) e (2.30b), respectivamente, encontramos

$$U_{\text{grav}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2}Gm^2 G_p(\vec{x}, \vec{x}), \quad (2.32a)$$

$$U_{\text{elett}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}q^2 G_p(\vec{x}, \vec{x}). \quad (2.32b)$$

Entretanto, o valor da função de Green (2.28) no limite de coincidência, ou seja, $G_p(\vec{x}, \vec{x})$, fornece um resultado divergente para as respectivas auto-energias. Portanto, para encontrar um valor finito e fisicamente bem definido, é necessário adotar algum procedimento de renormalização. Aqui adotaremos o de *separação de pontos*. A idéia básica deste método consiste em analisar o comportamento da função de Green no limite de coincidência e subtrair dela as suas contribuições divergentes. Neste caso, isto pode ser feito da maneira padrão, subtraindo da função de Green sua correspondente no espaço de Minkowski (2.29). Definindo, então, a função de Green renormalizada como sendo

$$G_{\text{ren}}(\vec{x}, \vec{x}') \equiv G_p(\vec{x}, \vec{x}') - G_{p=1}(\vec{x}, \vec{x}'). \quad (2.33)$$

o resultado encontrado para as auto-interações renormalizadas é

$$U_{\text{grav}}(\vec{x}) = -\frac{1}{2}Gm^2 G_{\text{ren}}(\vec{x}, \vec{x}), \quad (2.34a)$$

$$U_{\text{elett}}(\vec{x}) = \frac{1}{2}q^2 G_{\text{ren}}(\vec{x}, \vec{x}). \quad (2.34b)$$

O valor da função de Green quando as posições $\vec{x}$ e $\vec{x}'$ coincidem é calculado através do limite

$$G_{\text{ren}}(\vec{x}, \vec{x}) = \lim_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} [G_p(\vec{x}, \vec{x}') - G_1(\vec{x}, \vec{x}')] = \frac{\kappa(p)}{r}, \quad (2.35)$$

onde o coeficiente $\kappa(p)$ é dado pela integral convergente

$$\kappa(p) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p \coth px - \coth x}{\sinh x} dx. \quad (2.36)$$

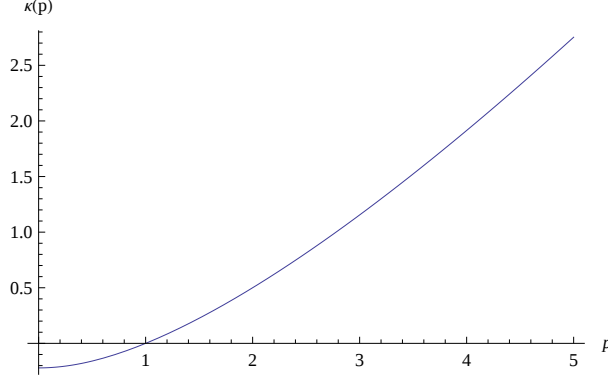


Figura 2.3: Coeficiente $\kappa(p)$ relacionado à função de Green renormalizada da equação de Poisson no espaço-tempo cônico.

Portanto, as auto-energias das partículas são

$$U_{\text{grav}}(\vec{x}) = -\frac{Gm^2\kappa(p)}{2r} < 0, \quad (2.37a)$$

$$U_{\text{elet}}(\vec{x}) = \frac{q^2\kappa(p)}{2r} > 0. \quad (2.37b)$$

As auto-forças podem ser calculadas diretamente a partir de (2.37)

$$\vec{F}_{\text{grav}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U_{\text{grav}}(\vec{x}) = -\frac{Gm^2\kappa(p)}{2r^2}\hat{r}, \quad (2.38a)$$

$$\vec{F}_{\text{elet}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U_{\text{elet}}(\vec{x}) = \frac{q^2\kappa(p)}{2r^2}\hat{r}. \quad (2.38b)$$

Podemos ver que a auto-interação eletrostática é sempre positiva, enquanto a gravitacional é negativa, portanto, a força gravitacional é atrativa e a eletrostática é repulsiva. No Capítulo 4 utilizaremos estes resultados para descrever o movimento de um bóson sujeito a auto-interações gravitacionais e eletromagnéticas na vizinhança da corda cósmica.

CAPÍTULO 3

Mecânica Quântica

D.J. Griffiths inicia o prefácio de um livro-texto [47] muito popular entre os estudantes de física com este excelente resumo da teoria quântica:

Ao contrário da mecânica de Newton ou da eletrodinâmica de Maxwell ou ainda da relatividade de Einstein, a teoria quântica não foi criada (nem ao menos reformulada de uma maneira definitiva) por um único indivíduo e conserva até hoje as cicatrizes da sua juventude estimulante, no entanto traumática. Não existe um consenso geral sobre quais são seus princípios fundamentais, como ela deve ser ensinada, ou o que ela realmente “significa”. Todo físico competente “sabe” mecânica quântica, mas as histórias que contamos a nós mesmos sobre o que estamos fazendo são tão variadas e quase tão implausíveis quanto os contos de Sherazade. Richard Feynman (um dos seus maiores praticantes) afirmou: “Eu acho que posso dizer com segurança que ninguém entende a mecânica quântica”.

A história da mecânica quântica [48] começou, essencialmente, com a descoberta dos raios catódicos por Michael Faraday em 1838, a formulação do problema da radiação do corpo negro por Gustav Kirchhoff em 1859, a sugestão de Ludwig Boltzmann em 1877 de que os estados de energia de um sistema físico poderiam ser discretos e, em 1900, a hipótese quântica de Max Planck de que qualquer energia é emitida e absorvida em pacotes, ou *quanta*, cuja energia E é proporcional à sua frequência ν , portanto, a energia do oscilador em um corpo negro é quantizada. Este *postulado* permitiu a dedução da fórmula para o espectro de radiação emitido pelo corpo negro [49]. Em 1905, Albert Einstein adaptou o postulado de Planck para explicar o efeito fotoelétrico [50], propondo que a energia dos fótons era quantizada e que a quantização não era um fenômeno exclusivo dos osciladores microscópicos.

Na década de 20, o desenvolvimento da mecânica quântica fez com que ela se tornasse a teoria fundamental dos fenômenos atômicos. No verão de 1925, Bohr e Heisenberg publicaram resultados que concluíram a construção da *velha teoria quântica*. Quanta de luz vieram a ser chamados de fótons. Da formulação simples de Einstein nasceu uma torrente de debates, teorias, testes e todo o campo da física quântica, culminando na sua ampla aceitação em

1927, durante a *Fifth Solvay International Conference on Electrons and Photons*, em Bruxelas, quando os físicos mais eminentes de todo o mundo (dezessete dos vinte e nove participantes eram ou se tornariam ganhadores do prêmio Nobel) se juntaram para discutir a interpretação de Copenhagen.

Os dados experimentais nos quais se baseia a mecânica quântica derivam de eventos físicos que acontecem quase completamente além dos limites da nossa percepção direta. Não é de se surpreender, portanto, que a teoria envolva conceitos estranhos à experiência cotidiana. Estes conceitos não apareceriam no desenvolvimento histórico da mecânica quântica até que um formalismo matemático completo evoluísse. A necessidade por resultados teóricos que concorrassem com observações em laboratório, que são o teste final para qualquer teoria física, neste caso, levou primeiro à construção de um formalismo e, só depois, à interpretação dos resultados físicos.

A *nova teoria quântica* começa com a mecânica matricial de Werner Heisenberg, que foi o ponto de partida essencial. Independentemente surgiu a mecânica ondulatória de Erwin Schrödinger, que propôs uma equação para a onda associada ao elétron em um átomo, de acordo com o modelo de De Broglie.

3.1 Equação de Schrödinger

Um sistema físico pode ser descrito através do seus estados quânticos, seus observáveis e sua dinâmica (ou lei de evolução temporal): de maneira mais geral, através do grupo de simetrias físicas. Na formulação de Schrödinger da mecânica quântica, o estado quântico do sistema é descrito por um vetor Ψ do espaço de Hilbert, chamado *função de onda*, que é a solução da equação de Schrödinger. Para uma partícula de massa m , sujeita à uma força $F(x, t) = -\frac{\partial V}{\partial t}$, podemos escrever

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t)\Psi(x, t), \quad (3.1)$$

onde $\hbar$ é a constante de proporcionalidade do postulado de Planck dividida por 2π . De agora em diante, de acordo com o sistema de unidades adotado nesta Dissertação, consideraremos $\hbar = 1$.

A equação de Schrödinger tem um papel análogo ao da segunda lei de Newton: dadas as condições iniciais ($\Psi(x, 0)$, geralmente), a equação de Schrödinger determina $\Psi(x, t)$, assim como na mecânica clássica a equação de Newton determina a função posição $x(t)$, fornecendo

assim uma descrição completa do sistema.

3.1.1 Interpretação Estatística

A interpretação estatística de Max Born explica como o estado de uma partícula, uma entidade localizada por natureza, pode ser descrito por uma função de onda que se estende por todo o espaço. Segundo esta interpretação, $|\Psi(x, t)|^2$ fornece a densidade de probabilidade de uma partícula ser observada entre x e $x + dx$ no tempo t .

A interpretação estatística introduz um tipo de indeterminação na mecânica quântica, pois mesmo que conheçamos tudo que a teoria pode dizer sobre uma partícula, ainda assim, não é possível prever com certeza o resultado de um simples experimento para medir sua posição. Esta indeterminação tem sido profundamente perturbadora para físicos e filósofos.

Se, efetivamente, realizamos o experimento e encontramos a partícula num determinado ponto P , é possível descobrir onde a partícula estava antes da medição? Existem três respostas plausíveis para esta pergunta e elas caracterizam as principais escolas de pensamento a respeito da indeterminação quântica¹:

Segundo a *posição realista*, a partícula já estava no ponto P no momento anterior à medida. Esta resposta parece razoável e era defendida por Einstein, mas percebe-se que, se for verdadeira, então a mecânica quântica deve ser uma teoria incompleta, pois a partícula realmente estava em P , mas a mecânica quântica não foi capaz de afirmar isso. Para o realista, a indeterminação não é uma característica da natureza, mas um reflexo da nossa ignorância. Consequentemente, Ψ não fornece uma descrição completa da partícula, então existe alguma informação adicional conhecida como *variável escondida*.

A *posição ortodoxa* afirma que a partícula não estava em lugar algum, foi o ato de realizar a medida que forçou a partícula a tomar uma decisão (apesar de não sabermos por que razões ela escolhe o ponto P em particular), ajudando a criar um atributo que não existia previamente. Este ponto de vista, conhecido como *interpretação de Copenhaga*, é creditado a Bohr e seus seguidores. Entre os físicos, é a posição mais aceita. Contudo, é importante perceber que se esta interpretação estiver correta, existe algo de muito peculiar no ato de realizar uma observação, fato que tem sido alvo de debates infrutíferos há mais de 80 anos.

A terceira escola de pensamento adota a *posição agnóstica*² que, em resumo, não busca

¹Existem outras formulações, tais como a *interpretação dos muitos mundos*, que não serão discutidas aqui.

²Mesmo sabendo que a escola de pensamento agnóstica (“a-”, o prefixo de negação ou privação, anteposto a “gnostos” que significa saber, conhecimento) na mecânica quântica é apenas um pequeno subgrupo da doutrina

afirmar nada sobre a posição da partícula antes da medida, já que, por definição, uma quantidade que se quer conhecer antes que seja feita a sua medição, não pode ser obtida através de experimentos, portanto não está de acordo com o método científico. Para citar novamente D.J. Griffiths:

É metafísica (no sentido pejorativo da palavra) se preocupar com algo que não pode, por sua própria natureza, ser testado.

Por décadas este foi o posicionamento de muitos físicos, mas em 1964, John Bell mostrou que o fato de a partícula ter ou não uma posição definida antes da medida interfere de maneira observável no resultado da medição [53]. A descoberta de Bell eliminou o agnosticismo como opção viável e formulou como questão experimental qual das outras duas escolas de pensamento seria correta.

Uma segunda medição da posição da partícula, no entanto, retornaria sempre o mesmo resultado: ela seria encontrada no ponto P . Segundo a interpretação ortodoxa, a primeira medição altera radicalmente a função de onda: dizemos que ela colapsa.

3.1.2 Normalização

Se definirmos $\rho(x)$ como a densidade de probabilidade, de tal forma que a probabilidade de x estar entre a e b seja dada pela integral

$$P_{ab} = \int_a^b \rho(x) dx, \quad (3.2)$$

então, a probabilidade de encontrarmos uma partícula no ponto x e no tempo t é dada por

$$P_x(t) = \int_x^{x+dx} |\Psi(x, t)|^2 dx. \quad (3.3)$$

Se a partícula existe, no entanto, ela deve ser encontrada em algum lugar do espaço, então devemos escrever

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (3.4)$$

de outra forma, a interpretação estatística não faria sentido. A equação (3.4), portanto, é a condição de normalização da função de onda. É importante mencionar que se a função de onda filosófica defendida por Thomas Huxley [51], sinto-me na obrigação de mencionar que sua utilização, comum entre os puristas da filosofia da ciência, vem sendo criticada e substituída por um posicionamento mais ativo por parte da ciência em quaisquer teorias cosmológicas ou da natureza [52].

normalizada no instante $t = 0$ é conhecida, pode-se afirmar que ela permanecerá normalizada à medida que o tempo evolui, ou esta função de onda não seria uma solução apropriada da equação de Schrödinger [47]. Em outras palavras, podemos escrever

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0. \quad (3.5)$$

3.1.3 Equação de Schrödinger no Espaço Curvo

A equação de Schrödinger estendida é bem definida em um *espaço-tempo estático* [54], representado por uma métrica com $t \equiv x^0$ tipo tempo, onde $g_{\mu\nu}(x)$ é independente de t e $g_{0j}(x) = 0$, para $j = 1, 2, 3$ [55]. Em outras palavras, existe um campo vetorial de Killing tipo tempo³ e existe uma família de hipersuperfícies tipo espaço ortogonais ao vetor de Killing (foliações com $t = \text{constante}$). A solução exterior de Schwarzschild e os espaços-tempos de De Sitter e Reissner-Nordström são exemplos de métricas estáticas. A métrica estática é dita *ultra-estática* se $g_{00}(x) = 1, \forall x$.

Neste contexto, na ausência de forças externas podemos escrever

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi, \quad (3.6)$$

onde $\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{g^{(3)}}} \partial_i \left(\sqrt{g^{(3)}} g^{ij} \partial_j \right)$ é o operador de Laplace-Beltrami, $g^{(3)} = \det(g_{ij})$ e o tempo é um parâmetro. Podemos então afirmar que a equação de Schrödinger no espaço-tempo estático é idêntica à equação de Schrödinger em coordenadas curvilíneas.

Se desejamos considerar a influência eletromagnética causada por um quadri-potencial $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ no movimento de uma partícula carregada, devemos reescrever a derivada de acordo com o gauge

$$\partial_i \longrightarrow \partial_i - ieA_i \equiv D_i. \quad (3.7)$$

Então, a equação de Schrödinger mais geral em um espaço-tempo estático é

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m \sqrt{g^{(3)}}} D_i (\sqrt{g^{(3)}} g^{ij} D_j) \Psi + e\phi \Psi, \quad (3.8)$$

sendo e a constante de acoplamento eletromagnético.

³Um campo vetorial em uma métrica riemanniana é um *campo de Killing* se o fluxo que ele gera consiste em isometrias.

3.2 Equação de Klein-Gordon

Quando a mecânica quântica de partículas surgiu, na década de 20, seus próprios inventores perceberam que a teoria não era fisicamente adequada, por várias razões: os estados descreviam apenas números fixos de partículas, portanto, a teoria não poderia descrever processos em que partículas são criadas ou destruídas; os protagonistas nas teorias eletromagnética e gravitacional são campos e não partículas; finalmente, a teoria quântica era não-relativística.

As primeiras tentativas de fundir a teoria da relatividade com a mecânica quântica envolviam generalizações relativísticas da equação de Schrödinger que se aplicariam a uma única partícula. O próprio Schrödinger obteve uma equação relativística [56] antes de escrever sua famosa equação de onda não-relativística. A equação que ele obteve foi descoberta posteriormente de maneira independente por Oskar Klein e Walter Gordon e é agora conhecida como equação de Klein-Gordon. Schrödinger acabou descartando a equação de Klein-Gordon como a equação correta para a mecânica quântica por três razões principais: parecia ter soluções com energia negativa, parecia levar a uma distribuição de probabilidade negativa e, por fim, a equação fornecia um espectro incorreto para o átomo de hidrogênio.

A equação de Schrödinger no contexto não-relativístico pode ser obtida através da relação $E = \frac{p^2}{2m}$, se reescrevemos o momento e a energia como operadores da maneira usual. De modo análogo, a equação de Klein-Gordon, no caso relativístico, pode ser obtida facilmente a partir da quantização do momento e da energia em $E^2 = p^2 + m^2$. De maneira simples, podemos escrever então

$$(\square - m^2)\phi(x, t) = 0, \quad (3.9)$$

onde $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ é o operador d'Alembertiano. Na presença de campos eletromagnéticos, utilizamos a derivada covariante de gauge

$$D_\mu D^\mu \phi = (\partial_t - ieA_0)^2 \phi - (\partial_i - ieA_i)^2 \phi = m^2 \phi. \quad (3.10)$$

3.2.1 Normalização

Se quisermos interpretar ϕ como uma função de onda, devemos encontrar uma norma não-negativa, conservada ao longo da evolução temporal [57]. Existe, de fato uma equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \equiv \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (3.11)$$

onde o quadri-vetor $J^\mu \equiv (\rho, J^i)$ é definido como

$$\rho = \frac{i}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \phi \right), \quad (3.12)$$

$$\vec{J} = \frac{1}{2im} \left[\phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi)^* \phi \right]. \quad (3.13)$$

Contudo, a densidade ρ não é positiva definida. Deve ser, portanto, considerada como a densidade de uma quantidade conservada (a carga elétrica, por exemplo), mas não como uma probabilidade.

3.2.2 Equação de Klein-Gordon no Espaço Curvo

De acordo com os princípios da equivalência e da covariância geral, podemos escrever a generalização natural da equação de Klein-Gordon para o caso do espaço curvo, na seguinte forma

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) \phi - m^2 \sqrt{-g} \phi = 0. \quad (3.14)$$

Como ϕ é uma função escalar, podemos substituir a derivada parcial pela derivada covariante, onde $\nabla^\mu \phi = g^{\mu\nu} \nabla_\nu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$. Reescrevemos, então, a equação (3.14) na forma

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi - m^2 \phi = \square \phi - m^2 \phi = g^{\mu\nu} (\partial_\mu \nabla_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \nabla_\rho \phi) - m^2 \phi = 0, \quad (3.15)$$

onde $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ é o operador d'Alembertiano covariante (análogo ao operador de Laplace-Beltrami para uma métrica qualquer).

Outra generalização covariante da equação de Klein-Gordon para uma variedade pseudo-riemanniana que se reduz à equação (3.9) quando a métrica é plana, emerge do funcional

$$L = \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2], \quad (3.16)$$

onde ξ é uma constante adimensional, e está associada a um *acoplamento não-mínimo* do campo escalar com a geometria, sendo R o escalar de curvatura da variedade (o traço do tensor de Ricci). A equação de Euler-Lagrange associada à equação (3.16) é

$$\square \phi + (m^2 + \xi R) \phi = 0. \quad (3.17)$$

3.3 Equação de Dirac

Além da densidade de probabilidade negativa, a equação de Klein-Gordon apresenta um segundo “problema”: a existência de soluções com energia negativa. Esta é uma grave dificul-

dade, pois o espectro de energia deixa de ser limitado inferiormente, como se uma quantidade ilimitada de energia pudesse ser retirada do sistema.

Estas razões levaram Dirac a formular outra equação. Apesar de apresentar norma positiva, a equação de Dirac também fornece soluções com energia negativa. Neste ponto, devemos reinterpretar a equação de Klein-Gordon e reformular a nossa mecânica quântica relativística como uma teoria de muitos corpos, onde os estados com energia negativa podem ser interpretados em termos de *anti-partículas*. A equação que Dirac construiu é

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{i}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right) \psi, \quad (3.18)$$

onde ψ é um *spinor* de quatro componentes, α_i e β são matrizes hermitianas que obedecem

$$\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0, \quad i \neq k \quad (3.19)$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (3.20)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = I, \quad (3.21)$$

sendo I a matriz identidade. Podemos introduzir uma nova notação em termos das matrizes γ^μ :

$$\gamma^0 = \beta \quad (3.22a)$$

$$\gamma^i = \beta\alpha^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.22b)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (3.22c)$$

Utilizando também a notação *slash* de Feynman, ou seja, $\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$, é possível reescrever a equação de Dirac de maneira compacta

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \equiv (i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (3.23)$$

As matrizes α^i e β têm auto-valor ± 1 ; para $i \neq j$, $\det \alpha^i \alpha^j = (-1)^d \det \alpha^i \alpha^j$, portanto, sua dimensão d deve ser par. Para $d = 2$, existem apenas três matrizes hermitianas que anti-comutam: as matrizes de Pauli. Devemos, então, ter que $d \geq 4$. Uma possível forma de escrever as matrizes de Dirac é através das matrizes de Pauli σ_k :

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.24a)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (3.24b)$$

Considerando este conjunto de matrizes, podemos escrever a equação de Dirac na forma de equações acopladas envolvendo spinores de duas componentes

$$\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Encontramos na diagonal a massa de repouso da partícula. Fazendo o momento igual a zero (ou seja, trazendo a partícula para o repouso), temos

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

As equações para os spinores se desacoplam e verificamos que os spinores *up* e *down* são auto-funções da energia com autovalores mais e menos a energia de repouso, respectivamente.

Na presença de um campo eletromagnético, a equação de Dirac é escrita na forma

$$i\partial_t\psi = \vec{\alpha} \cdot \hat{\pi}\psi + \beta m\psi + V\psi, \quad (3.27)$$

onde $\hat{\pi} \equiv \vec{p} - e\vec{A}$ e $V = e\phi$ é o potencial eletrostático.

3.3.1 Normalização

A equação de continuidade para a formulação de Dirac é $\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$, onde $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$. Temos então que $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, e portanto

$$\rho = J^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi, \quad (3.28)$$

$$\vec{J} = \bar{\psi}\gamma\psi = \psi^\dagger\vec{\alpha}\psi. \quad (3.29)$$

A densidade ρ é positiva.

3.3.2 Equação de Dirac no Espaço Curvo

A equação de Dirac covariante [58] possui a forma

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi - m\psi = 0. \quad (3.30)$$

Ou, usando uma base tetrada⁴, a equação de Dirac no espaço curvo toma a seguinte forma

$$-i\gamma^{(a)}e_{(a)}^\mu D_\mu\psi + m\psi = 0, \quad (3.31)$$

⁴A base tetrada (ou simplesmente “tetrada”) descreve um referencial local que permite definir as matrizes de Dirac em cada ponto, em um espaço curvo: $\gamma^\mu(x) = e_{(a)}^\mu(x)\gamma^{(a)}$.

onde $e_{(a)}^\mu$ é tetrada e D_μ é a derivada covariante para campos fermiônicos, definida da seguinte maneira

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{4} \eta_{ac} \omega_{b\mu}^c \sigma^{ab}, \quad (3.32)$$

onde η_{ac} é a métrica lorentziana, $\sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b]$ é o comutador das matrizes de Dirac e $\omega_{b\mu}^c = e_\nu^c \partial_\mu e_b^\nu + e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ é a conexão de spin. É importante ressaltar que os índices latinos são lorentzianos e os índices gregos são riemannianos.

Análise Quântica no Espaço-Tempo da Corda Cósmica

A teoria da relatividade geral descreve a gravitação através da curvatura do espaço-tempo, que é caracterizada pelo tensor de curvatura de Riemann. A influência de espaços-tempo com curvatura não-trivial em sistemas quânticos é discutida na área de física de partículas. O átomo de hidrogênio, por exemplo, foi estudado sob a ação de diferentes campos gravitacionais [59, 60, 61, 62]. Estas análises consideraram um problema que sugere efeitos do campo gravitacional observáveis ao nível atômico e mostraram que um átomo colocado em um campo gravitacional é influenciado por sua interação com a curvatura local, assim como com a topologia do espaço-tempo. Como consequência, ocorre um deslocamento na energia de cada nível atômico, que depende das características do espaço-tempo. Determinar as mudanças das propriedades quânticas de um sistema sob influência do campo gravitacional é um problema de interesse teórico e observacional.

Sabemos que a geometria do espaço está relacionada às suas propriedades topológicas, logo, não é possível descrever completamente a física de um dado sistema apenas através da geometria local do espaço-tempo onde ele se encontra. É necessário, portanto, investigar os efeitos da topologia do espaço-tempo no sistema em questão, e assim, para encontrar a forma como suas características quânticas são perturbadas por um campo gravitacional, devemos levar em consideração as características topológicas e geométricas do espaço-tempo [63].

Como exemplos da influência da topologia em um sistema quântico, podemos mencionar os estudos da mecânica quântica em um cone [64, 65, 66, 67, 68], da interação entre sistemas quânticos e espaços-tempos gerados por defeitos topológicos [69, 70] e da influência do campo gravitacional de uma corda cósmica nos níveis de energia do átomo de hidrogênio [71].

Como mencionado no Capítulo 2, o espaço-tempo gerado pela corda cósmica é localmente plano, exceto no eixo de simetria. O campo gravitacional externo à corda cósmica pode ser descrito através de uma geometria cônica. Como consequência, uma partícula colocada em repouso na vizinhança de uma corda cósmica não será atraída, portanto, não há gravidade local

no espaço que cerca a corda.

4.1 Equação de Klein-Gordon com Potencial Escalar

Nesta seção, consideraremos os efeitos da topologia não-trivial do espaço-tempo gerado pela corda cósmica no movimento quântico de uma partícula escalar discutidos anteriormente e estudaremos a equação de Klein-Gordon descrevendo uma partícula sob ação de um campo magnético uniforme alinhado à corda. A maneira usual de introduzir um quadri-potencial A_μ nas equações de Dirac e Klein-Gordon é através do *acoplamento mínimo*. Por esse método, o quadri-vetor operador diferencial $P_\mu = i\partial_\mu$ é modificado de modo que $P_\mu \longrightarrow P_\mu - eA_\mu$, portanto $P_\mu = i\partial_\mu - eA_\mu = i(\partial_\mu + ieA_\mu) \equiv iD_\mu$. Vários anos atrás, Dosch, Jansen e Müller [72] apontaram que o acoplamento mínimo não é a única maneira de introduzir um potencial nas equações de Dirac e Klein-Gordon. Foi sugerido que um potencial de natureza diferente da eletromagnética poderia ser levado em consideração fazendo-se uma modificação no termo de massa, da forma $M \longrightarrow M + S(\vec{r}, t)$, com $S(\vec{r}, t)$ sendo o chamado *potencial escalar*. Fazendo estas modificações na equação de Klein-Gordon (3.17), obtemos

$$(\mathcal{D}^2 + (M + S)^2 - \xi R) \Phi(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{D}^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu)$, sendo $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ e $g = \det g_{\mu\nu}$. Para prosseguir, utilizaremos a métrica da corda cósmica (2.9), renomeando $\alpha \equiv 1 - 4G\mu$, ou seja

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2 - dz^2. \quad (4.2)$$

Conforme análise feita no Capítulo 2, uma partícula carregada, colocada em repouso no espaço-tempo da corda cósmica, fica submetida à ação de uma auto-interação, tal que, para $p \equiv \frac{1}{\alpha}$, no caso em que $\alpha < 1$, teremos que $\kappa(\alpha) > 0$, onde $\kappa(\alpha)$ é o coeficiente definido em (2.36). Analogamente, para $\alpha > 1$, temos $\kappa(\alpha) < 0$. De modo geral, iremos introduzir na equação de Klein-Gordon, os potenciais das auto-interações descritas nas equações (2.38), através do potencial escalar

$$S(r) \equiv \frac{K}{r}, \quad (4.3)$$

onde K é uma constante positiva ou negativa, determinando se o potencial escalar refere-se ao potencial da auto-interação eletrostática ou gravitacional, respectivamente (em concordância

com o par de equações (2.37)). Explicitamente, escrevemos

$$K_{\text{grav}} \equiv -\frac{Gm^2\kappa(\alpha)}{2}, \quad (4.4)$$

$$K_{\text{eletr}} \equiv \frac{q^2\kappa(\alpha)}{2}. \quad (4.5)$$

4.2 Considerando um Campo Magnético Uniforme

O modelo padrão sugere que, após seu surgimento, o universo passou por três *eras*, onde sua dinâmica era determinada por diferentes entidades físicas. A primeira era começou aproximadamente dez segundos após criação do universo — quando sua densidade de energia era muito alta — e era dominada pela radiação, que se refere, de maneira geral, aos constituintes do universo que se movem relativisticamente. Em seguida, quando o universo tinha aproximadamente 10^5 anos de idade e já começava a esfriar, veio a era dominada pela matéria, onde a densidade de matéria era maior do que a densidade de radiação no universo [73, 74].

Durante a era da radiação, o universo apresentava inomogeneidades caóticas que, se sobreviveram ao universo extremamente jovem, podem ter gerado um estado de turbulência primordial. No início dos anos 70, propôs-se que essa turbulência formaria campos magnéticos relativamente intensos [75, 76, 77].

A possível existência desses *campos magnéticos primordiais* é uma consideração importante para a cosmologia moderna. Nós assumimos, então, a existência de um campo magnético homogêneo, sem fontes, e estudamos o movimento quântico de uma partícula carregada, no espaço-tempo de uma corda cósmica paralela ao campo magnético, ou seja $\vec{B} = B_0\hat{k}$, onde B_0 é uma constante. Para encontrar a forma funcional do potencial vetor, partimos do princípio de que podemos determinar o campo magnético a partir do rotacional em coordenadas curvilíneas [45] do potencial vetor: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0\hat{k}$. Em coordenadas cilíndricas, esta condição implica que $\vec{A} = f(r)\hat{\phi}$, sendo $\hat{\phi}$ o versor do ângulo polar. Consideramos ainda o gauge de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ e fazemos uma análise dimensional do potencial vetor, encontrando então, como possível solução, $f(r) = -\frac{1}{2}\alpha B_0 r^2$. Então temos, em coordenadas cilíndricas

$$\vec{A} = (0, A_\phi, 0), \quad (4.6a)$$

$$A_\phi = -\frac{1}{2}\alpha B_0 r^2, \quad (4.6b)$$

$$A_0 = 0. \quad (4.6c)$$

Estamos agora em condições de reescrever o operador d'Alembertiano

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu + ieA_\mu)(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\nu + ieA_\nu)), \quad (4.7)$$

utilizando o potencial vetor descrito em (4.6) e o tensor métrico da corda cósmica (4.2). Desenvolvendo estas substituições, obtemos

$$\mathcal{D}^2 = \partial_t^2 - \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) - \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2} \partial_\phi^2 - ie \frac{B_0}{2\alpha} \partial_\phi \right) - \partial_z^2 + \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2. \quad (4.8)$$

Além do campo magnético primordial, como discutimos anteriormente, consideramos também o efeito da auto-interação gerada pela topologia cônica. Assim, se desconsiderarmos o acoplamento não-mínimo, fazendo $\xi = 0$, podemos substituir as equações (4.8) e (4.3) em (4.1), encontrando

$$\left[-\partial_t^2 + \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) + \left(\frac{1}{\alpha^2 r^2} \partial_\phi^2 - ie \frac{B_0}{2\alpha} \partial_\phi \right) + \partial_z^2 - \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2 - \left(M + \frac{K}{r} \right)^2 \right] \Phi(t, r, \phi, z) = 0. \quad (4.9)$$

Estudaremos, então, estados estacionários $\Phi(t, r, \phi, z) = e^{-iEt} \varphi(r, \phi, z)$, com

$$\varphi(r, \phi, z) = e^{ikz} e^{im\phi} R(r), \quad (4.10)$$

sendo m o número quântico associado ao operador $L_z = -i\partial_\phi$ e k o número quântico associado ao termo cinético na direção z . A simetria do sistema impõe a periodicidade do ângulo polar, ou seja, a física observada deve ser a mesma quando o sistema sofre uma transformação do tipo $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$, e portanto m deve ser um número inteiro. Substituindo $\Phi(t, r, \phi, z) = e^{-iEt} e^{ikz} e^{im\phi} R(r)$ na equação (4.9), é possível obter uma *equação radial* envolvendo apenas a função $R(r)$:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) R(r) + \left[E^2 - k^2 - M^2 + \frac{emB_0}{2\alpha} - \frac{2MK}{r} - \left(K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2 \right] R(r) = 0. \quad (4.11)$$

Nosso objetivo no restante deste capítulo será determinar a auto-função de Klein-Gordon, primeiro considerando alguns casos particulares da equação radial (4.11): inicialmente desprezando o potencial escalar (seção 4.3.1); em seguida, considerando a auto-interação escalar, mas desligando o campo magnético (seção 4.3.2). Por fim, estudaremos o caso mais geral.

4.3 Soluções Particulares da Equação Radial

4.3.1 Desprezando a Auto-interação

Estudaremos o movimento quântico, desprezando a auto-interação¹, ou seja, fazendo $K = 0$. A equação (4.11) se resume a

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) R(r) + \left[E^2 - k^2 - M^2 + \frac{emB_0}{2\alpha} - \frac{m^2}{\alpha^2} \frac{1}{r^2} - \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2 \right] R(r) = 0. \quad (4.12)$$

É possível reescrever esta equação e se livrar do termo com derivada de primeira ordem, redefinindo a função radial da forma

$$R(r) \equiv \frac{u(r)}{\sqrt{r}}, \quad (4.13)$$

Em termos da nova função radial $u(r)$, a equação (4.12) se escreve de maneira simplificada

$$\frac{d^2}{dr^2} u(r) + \left[E^2 - k^2 - M^2 + \frac{eB_0 m}{2\alpha} - \left(\frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} - \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2 \right] u(r) = 0. \quad (4.14)$$

Antes de encontrar a solução exata, analisamos o limite assintótico tomando $r \rightarrow \infty$. Dessa forma, a equação (4.14) se reduz a

$$\frac{d^2}{dr^2} u - \frac{e^2 B_0^2}{4} r^2 u \approx 0. \quad (4.15)$$

Se reescrevermos a equação acima em termos da variável adimensional

$$x \equiv \sqrt{\frac{eB_0}{2}} r, \quad (4.16)$$

obtemos uma equação conhecida

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x) - x^2 u(x) \approx 0, \quad (4.17)$$

com soluções [78] do tipo

$$u(x) \approx e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (4.18)$$

De posse da nova variável adimensional x , podemos reescrever a equação radial (4.14) de maneira bastante compacta

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{\gamma}{x^2} + \lambda - x^2 \right) u = 0, \quad (4.19)$$

¹Fazer $K = 0$ implica desprezar o *potencial escalar*, aqui tratado como auto-interação.

onde γ e λ são constantes tais que

$$\gamma \equiv \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\alpha^2}, \quad (4.20a)$$

$$\lambda \equiv \frac{m}{\alpha} + \frac{2}{eB_0}(E^2 - k^2 - M^2). \quad (4.20b)$$

No limite assintótico em que $x \rightarrow 0$, a equação (4.19) se comporta da seguinte maneira

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\gamma}{x^2}u \approx 0, \quad (4.21)$$

com soluções [78] do tipo

$$u(x) \approx x^\beta. \quad (4.22)$$

Substituindo a solução (4.22) na equação (4.21), encontramos $\beta = \frac{1}{2} \pm \frac{|m|}{\alpha}$, mas o sinal negativo deve ser descartado, para garantir que $u(x)$ seja finita em $x = 0$. Então, temos

$$\beta = \frac{1}{2} + \frac{|m|}{\alpha}. \quad (4.23)$$

Agora que conhecemos o comportamento assintótico de $u(x)$ para x muito grande e para x muito pequeno, buscaremos soluções para a equação radial (4.19) na forma

$$u(x) = x^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} F(x). \quad (4.24)$$

Substituindo (4.24) em (4.19), chegamos à equação

$$x \frac{d^2F}{dx^2} + (2\beta - 2x^2) \frac{dF}{dx} + (\lambda - 2\beta - 1)x F = 0. \quad (4.25)$$

É necessário agora fazer uma segunda mudança de variáveis

$$y \equiv x^2, \quad (4.26)$$

de modo que a equação (4.25) se transforma em

$$y \frac{d^2F}{dy^2} + (c - y) \frac{dF}{dy} - aF = 0, \quad (4.27)$$

onde

$$c \equiv \frac{|m|}{\alpha} + 1, \quad (4.28)$$

$$a \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{|m|}{\alpha} + 1 \right) - \frac{\lambda}{4}. \quad (4.29)$$

A equação (4.27) é conhecida como equação diferencial hipergeométrica confluyente, ou equação diferencial de Kummer [78], cuja solução é

$$F(y) = {}_1F_1\left(\frac{\lambda}{4} - \frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \frac{|m|}{\alpha} + 1; y\right). \quad (4.30)$$

Consequentemente, a solução da equação radial (4.12) é

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{2}} r \right)^{\frac{1}{2} + \frac{|m|}{\alpha}} e^{-\frac{M\omega}{4} r^2} {}_1F_1\left(\frac{\lambda}{4} - \frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2}, \frac{|m|}{\alpha} + 1; \frac{M\omega}{2} r^2\right), \quad (4.31)$$

onde $\omega \equiv \frac{eB_0}{M}$ é a chamada *frequência de ciclotron*. O comportamento da função hipergeométrica ${}_1F_1$ para $|y| \rightarrow \infty$ é da forma²

$${}_1F_1(a, c; y) \approx \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} y^{a-c} e^y, \quad (4.32)$$

onde $\Gamma(k)$ é a função conhecida como fatorial generalizado, de modo que a solução radial (4.31) para grandes argumentos é

$$R(r) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{2}} r \right)^{\frac{1}{2} + \frac{|m|}{\alpha}} e^{\frac{M\omega}{4} r^2} \frac{\Gamma\left(\frac{|m|}{\alpha} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{4} - \frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{M\omega}{2} r^2 \right)^{\frac{\lambda}{4} - \frac{3}{2}\left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{3}{2}\right)}, \quad (4.33)$$

que é divergente. Então, a solução normalizável para estados ligados só pode ser obtida se obrigarmos que a solução seja polinomial. Para isso, usamos a propriedade $\Gamma(-n) \rightarrow \infty$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Fazemos então

$$\frac{\lambda}{4} - \frac{|m|}{2\alpha} + \frac{1}{2} = -n. \quad (4.34)$$

As equações (4.20b) e (4.34) fornecem uma condição de quantização para o espectro de energia da partícula, que pode ser escrito da seguinte maneira

$$E_{n,m} = \pm \left\{ M\omega \left[2n + 1 + \frac{1}{2\alpha}(2|m| - m) \right] + k^2 + M^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.35)$$

É importante ressaltar que tanto o sinal positivo quanto o sinal negativo da energia devem ser considerados. Não há nenhuma condição que limite a energia da partícula para um sinal particular.

²As principais propriedades da função hipergeométrica confluyente podem ser encontradas no Apêndice C.

4.3.2 Desligando o Campo Magnético

Estudaremos agora a equação radial (4.11) considerando a auto-interação da partícula através do potencial escalar (4.3), mas sem a presença do campo magnético uniforme considerado na seção anterior, assumindo $B_0 = 0$. Para este sistema a equação radial é

$$\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) R(r) + \left[E^2 - k^2 - M^2 - \frac{2MK}{r} - \left(K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{r^2} \right] R(r) = 0. \quad (4.36)$$

Neste caso, o sistema pode ter estados ligados e espalhados. Aplicaremos o mesmo método utilizado na seção anterior para estudá-los.

4.3.3 Desclinação Positiva ($\alpha < 1$): Estados Espalhados

Conforme já mencionado no Capítulo 2, em matéria condensada, a desclinação é o defeito topológico análogo à corda cósmica. A desclinação pode ser obtida removendo-se uma fatia de material em uma rede, sendo chamada de *desclinação positiva*, que pode ser descrita geometricamente através de uma métrica semelhante à gerada pela corda cósmica. Também podemos obter uma desclinação inserindo uma fatia de material no meio cristalino, formando uma *desclinação negativa*. Neste caso, a métrica que descreve o defeito é análoga àquela que representa um espaço-tempo anti-cônico, onde se verifica que $\alpha > 1$. Um estudo detalhado das declinações pode ser encontrado em [79].

O sistema apresentará estados espalhados quando $E^2 > M^2 + k^2$, se $\alpha < 1$ e $K > 0$. A solução radial, $R(r)$, para ondas que se afastam do centro espalhador será

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{i\epsilon r} (-2i\epsilon r)^{\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}} \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} + \frac{iMK}{\epsilon}, 1 + 2\sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}; -2i\epsilon r \right), \quad (4.37)$$

onde $\epsilon^2 \equiv E^2 - k^2 - M^2 > 0$. Para argumentos puramente imaginários, a função hipergeométrica com $|y| \rightarrow \infty$ pode ser aproximada [80] por

$${}_1F_1(a, b; y) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} |y|^{-a} e^{ia\frac{\pi}{2}} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} |y|^{a-b} e^{i\frac{\pi}{2}(a-b)} e^y. \quad (4.38)$$

Tomando a forma assintótica (4.38) em (4.37) encontramos

$$R(r) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \left[\theta_m + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{MK}{\epsilon} \ln(2\epsilon r) + \epsilon r \right], \quad (4.39)$$

onde $\theta_m = \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{iMK}{\sqrt{E^2 - M^2 - k^2}} \right)$. Comparando a equação (4.39) com a solução radial aproximada do problema sem o centro espalhador (ou seja, com $K = 0$ e $\alpha = 1$)

$$\tilde{R}(r) \approx \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}|m| + \varepsilon r \right], \quad (4.40)$$

encontramos o ângulo de espalhamento³

$$\delta_m = \theta_m + \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - |m| \right). \quad (4.41)$$

Podemos ver, então, que o ângulo de espalhamento é composto de duas contribuições:

1. Fazendo $K = 0$ em (4.41), encontramos o ângulo do espalhamento causado pela geometria do espaço-tempo da corda cósmica

$$\delta_m^{\text{geom}} = \frac{\pi}{2}|m| \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right); \quad (4.42)$$

2. Tomando $\alpha = 1$ em (4.41), encontramos o ângulo do espalhamento causado pelo potencial escalar

$$\delta_m^{\text{ai}} = \bar{\theta}_m + \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{K^2 + m^2} - |m| \right), \quad (4.43)$$

onde $\bar{\theta}_m \equiv \arg \Gamma \left(\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + m^2} - \frac{iMK}{\sqrt{E^2 - M^2 - k^2}} \right)$.

4.3.4 Desclinação Negativa ($\alpha > 1$): Estados Ligados e Espalhados

A possibilidade de estados ligados surge no caso em que $\alpha > 1$, consequentemente $K = -|K| < 0$. Além disso, temos que escolher os estados onde $E^2 < M^2 + k^2$. Neste caso, a solução radial é

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\varepsilon r} (2\varepsilon r)^{\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}} \times {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{M|K|}{\varepsilon}, 1 + 2\sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}; 2\varepsilon r \right). \quad (4.44)$$

³O termo logarítmico em (4.39) é consequência da interação de longa distância dos potenciais eletrostático e escalar. Como ele varia lentamente com a distância, não pode ser considerado como contribuição para o ângulo de espalhamento [81, 80].

onde $\epsilon \equiv M^2 + k^2 - E^2 > 0$. Como no caso estudado na seção 4.3.1, para termos estados ligados, devemos impor a condição de quantização que, para este caso, é da seguinte forma

$$\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{M|K|}{\epsilon} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.45)$$

O espectro de energia que encontramos é

$$E_{n,m} = \pm \left[M^2 + k^2 - \frac{M|K|}{\frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} + n} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

O caso em que $\alpha > 1$, além de estados ligados, possui estados espalhados semelhantes aos encontrados para $\alpha < 1$. Para encontrar a solução radial nesta situação basta fazer $K \rightarrow -|K|$ em (4.37), (4.39) e (4.41).

4.4 Solução Geral da Equação Radial

Consideraremos, agora, o caso mais geral, envolvendo a auto-interação e o campo magnético primordial alinhado à corda cósmica. A equação (4.11) pode ser reescrita da maneira simplificada

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\Gamma}{x^2} + \frac{\Delta}{x} + \Lambda - x^2 \right] u = 0, \quad (4.47)$$

onde redefinimos a função radial de modo que $u(r) \equiv \sqrt{r} R(r)$, realizamos a mudança de variável $x \equiv \sqrt{\frac{M\omega}{2}} r$ e definimos as constantes

$$\Gamma \equiv \frac{1}{4} - K^2 - \frac{m^2}{\alpha^2}, \quad (4.48)$$

$$\Delta \equiv -2M\sqrt{\frac{2}{M\omega}} K, \quad (4.49)$$

$$\Lambda \equiv \frac{m}{\alpha} + \frac{2}{M\omega}(E^2 - M^2 - k^2). \quad (4.50)$$

Para investigar as soluções da equação diferencial (4.47), é importante analisar o comportamento da função $u(x)$ nas regiões $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$, como fizemos nos casos particulares. Fazendo isso, verificamos que a solução apresenta a forma geral

$$u(x) = x^B e^{-\frac{x^2}{2}} G(x), \quad (4.51)$$

onde $B = \frac{1}{2} + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}$. Substituindo a equação (4.51) em (4.47), encontramos

$$x \frac{d^2 G}{dx^2} + (2B - 2x^2) \frac{dG}{dx} + [\Delta + (\Lambda - 2B - 1)x] G = 0. \quad (4.52)$$

Soluções exatas de (4.52) podem ser obtidas admitindo uma expansão em série da função desconhecida

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n. \quad (4.53)$$

Substituímos a série acima em (4.52). O resultado é um par de relações de recorrência envolvendo os coeficientes C_n

$$C_1 = -\frac{\Delta}{2B} C_0, \quad (4.54a)$$

$$C_{n+2} = \frac{(2B - \Lambda + 2n + 1)C_n - \Delta C_{n+1}}{(n+2)(2B + n + 1)}. \quad (4.54b)$$

A análise de uma equação diferencial similar a (4.52) foi realizada por Verçin [82], ao investigar o movimento planar quântico de dois ânions com interação coulombiana entre eles e na presença de um campo magnético uniforme externo. Neste artigo, o autor encontrou exatamente o espectro de energia, impondo condições específicas na função de onda. Ademais, uma equação semelhante também foi obtida [79], analisando-se o espectro de energia de um elétron na presença de um campo magnético no contexto da teoria de defeitos de Katanaev e Volovich [83], bem como ao se analisar o problema não-relativístico de duas partículas carregadas em um cone na presença de um campo magnético uniforme estático [84].

Tipos especiais de soluções exatas que representam estados ligados, podem ser obtidas se buscarmos expressões polinomiais para $G(x)$. Sendo n a ordem desse polinômio, duas condições devem ser satisfeitas simultaneamente

$$2n = \Lambda - 2B - 1, \quad (4.55)$$

$$C_{n+1} = 0. \quad (4.56)$$

Dessa forma temos $C_{n+2} = C_{n+3} = \dots = 0$. A condição $2n = \Lambda - 2B - 1$ fornece o espectro de energia da partícula

$$E_{n,m} = \pm \left\{ M^2 + k^2 + \frac{M\omega}{2} \left[2(n+1) + 2\sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{m}{\alpha} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (4.57)$$

onde $n = 1, 2, \dots$ e $m \in \mathbb{Z}$. Por outro lado, a condição $C_{n+1} = 0$ fornece uma equação algébrica que relaciona os parâmetros B_0 e α , definindo as limitações às quais o campo magnético deve ser submetido para que $G(x)$ seja polinomial.

A seguir, consideraremos os dois casos mais simples onde a função G é um polinômio de primeira ordem ($n = 1$), em seguida, um polinômio de segunda ordem ($n = 2$).

1. Inicialmente, no caso em que $G(x) = C_0 + C_1x = 1 - \frac{\Delta}{2B}x$, ou seja, para $n = 1 \Rightarrow C_2 = 0$, admitindo $C_0 = 1$ e usando (4.54b) e (4.54a)

$$C_2 = \frac{\Delta^2 + 2B(2B + 1 - \Lambda)}{4B(2B + 1)} = 0, \quad (4.58)$$

encontramos

$$(B_0)_{n=1,m} = \frac{4M^2K^2(\alpha)}{e \left(1 + 2\sqrt{K^2(\alpha) + \frac{m^2}{\alpha^2}} \right)}, \quad (4.59)$$

e ainda

$$E_{1,m} = \pm \left\{ M^2 + k^2 + M\omega \left[2 + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{m}{\alpha} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.60)$$

2. Considerando, agora, $G(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 = 1 - \frac{\Delta}{2B}x + \frac{\Delta^2 + 2B(2B + 1 - \Lambda)}{4B(2B + 1)}x^2$, sendo agora $n = 2 \Rightarrow C_3 = 0$, ou seja, com o auxílio de (4.54b) e (4.54a)

$$C_3 = -\frac{\Delta}{6B(2B + 2)} \left[\frac{\Delta^2 + 2B(2B - \Lambda + 1)}{2(2B + 1)} + 2B - \Lambda + 3 \right] = 0 \quad (4.61)$$

encontramos

$$(B_0)_{n=2,m} = \frac{M^2K}{e \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} \right)}, \quad (4.62)$$

e o espectro de energia

$$E_{2,m} = \pm \left\{ M^2 + k^2 + M\omega \left[3 + \sqrt{K^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} - \frac{m}{\alpha} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.63)$$

Em todos os resultados, é importante salientar, novamente, que tanto energias positivas quanto negativas são permitidas para este sistema.

4.5 Normalização da Auto-função de Klein-Gordon

No Capítulo 3, discutimos brevemente a forma como a densidade de probabilidade deve ser conservada na equação de Klein-Gordon. Com base na fórmula desta densidade, apresentada

na equação (3.12), escrevemos a equação de normalização para as auto-funções da equação de Klein-Gordon

$$-i \int d^3x \sqrt{-g} g^{00} [\Phi_\sigma \partial_t \Phi_{\sigma'}^* - \Phi_{\sigma'}^* \partial_t \Phi_\sigma] = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (4.64)$$

onde $\sqrt{-g} = \alpha r$, $g^{00} = 1$, $\sigma = (k, m, n)$ e $\Phi_\sigma = C_\sigma e^{-iE_n t} e^{ikz} e^{im\phi} R_n(r)$, usando C_σ como constante de normalização e, também, as formas integrais [45] do delta de Kronecker e de Dirac

$$\delta_{m, m'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\phi} d\phi, \quad (4.65)$$

$$\delta(k - k') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')z} dz. \quad (4.66)$$

Dessa forma é possível calcular a constante C_σ de normalização

$$|C_\sigma|^2 = \left[2\alpha(2\pi)^2 E_n \int_0^\infty r R_n^2 dr \right]^{-1}. \quad (4.67)$$

Desenvolvendo a integral acima para

$$R_{n=1} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{2}} r \right)^B e^{\frac{M\omega r^2}{4}} \left(1 - \frac{\Delta}{2B} \sqrt{\frac{M\omega}{2}} r \right), \quad (4.68)$$

encontramos

$$|C_{k,m,1}|^2 = \left[2\alpha(2\pi)^2 E_{n=1} \left\{ \frac{1}{2} (2M\omega)^{-(B+\frac{1}{2})} \times \left[\Gamma\left(B + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta^2}{4B^2} \Gamma\left(B + \frac{3}{2}\right) - \frac{\Delta}{2} \Gamma(B) \right] \right\} \right]^{-1}. \quad (4.69)$$

De maneira análoga, para $n = 2$, onde

$$R_{n=2} = \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\sqrt{\frac{M\omega}{2}} r \right)^B e^{\frac{M\omega r^2}{4}} \left(1 - \frac{\Delta}{2B} \sqrt{\frac{M\omega}{2}} r + \frac{M\omega [\Delta^2 + 2B(2B + 1 - \Lambda)]}{8B(2B + 1)} r^2 \right), \quad (4.70)$$

a constante de normalização encontrada será

$$|C_{k,m,2}|^2 = \left[2\alpha(2\pi)^2 E_{n=2} \left\{ \frac{1}{2} (2M\omega)^{-(B+\frac{1}{2})} \left[Y\Gamma\left(B + \frac{1}{2}\right) - W\Gamma(B) \right] \right\} \right]^{-1}, \quad (4.71)$$

onde usamos as seguintes definições:

$$W \equiv \frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta\xi(B+1)}{4(2B+1)}, \quad (4.72)$$

$$Y \equiv 1 + \left[\left(\frac{\xi}{2B+1} + \frac{\Delta}{4B} \right) + \frac{\xi^2}{4(2B+1)^2} \left(B + \frac{3}{2} \right) \right] \left(B + \frac{1}{2} \right), \quad (4.73)$$

$$\xi \equiv \frac{M\omega}{2B} (\Delta^2 + 2B(2B - \Lambda + 1)). \quad (4.74)$$

Potencial Escalar e Coulombiano em um Sistema com Simetria Esférica

O sucesso da mecânica quântica na descrição do mundo atômico e sub-microscópico é inegável. Quando suplementada com a relatividade especial, a mecânica quântica se torna uma das teorias físicas mais precisas da história recente. Um exemplo é a eletrodinâmica quântica: a teoria que descreve a interação de partículas carregadas, e a altas velocidades, com a radiação eletromagnética ou com acoplamento forte.

As equações de Dirac e Klein-Gordon são as equações de onda mais frequentemente usadas para descrever a dinâmica de partículas na mecânica quântica relativística. O fato de que estas duas equações, para partículas livres, são construídas usando dois objetos — o quadri-vetor operador momento linear $P_\mu = i\partial_\mu$ e a massa de repouso escalar M — permite que sejam introduzidos dois tipos de acoplamento potencial. Como já foi mencionado nos capítulos anteriores, um deles é o acoplamento invariante de gauge com o quadri-vetor potencial $A_\mu(t, \vec{r})$, introduzido através da substituição $P_\mu \rightarrow P_\mu - eA_\mu$, onde e é um parâmetro real de acoplamento; o outro é um acoplamento adicional ao potencial escalar¹ $S(t, \vec{r})$, introduzido pela substituição $M \rightarrow M + S$.

A invariância de gauge do acoplamento vetorial permite escolher e eliminar os gauges não-físicos sem alterar o conteúdo físico do problema. Existem várias escolhas de gauge que podem ser adotadas, os gauges de Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, e de Coulomb, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, são duas das condições mais usadas. Contudo, para simplificar a solução do problema, é comum adotar-se $\vec{A} = 0$. Se complementarmos esta escolha escrevendo a componente temporal do quadri-vetor como $eA_0 = V(t, \vec{r})$, então ficamos com duas funções potenciais independentes nas equações de Dirac e Klein-Gordon: o potencial vetor V e o potencial escalar S .

Em unidades relativísticas, no espaço-tempo plano, as equações de Klein-Gordon e Dirac livres estão escritas nas equações (3.9) e (3.23), respectivamente. A convenção de soma sobre

¹Os termos “quadri-vetor” e “escalar” se referem à representação unitária e irredutível do grupo de Poincaré de simetria do espaço-tempo correspondente (o grupo de rotações e translações no espaço-tempo de Minkowski em $(3 + 1)$ dimensões).

índices repetidos é usada. Para partículas de spin $\frac{1}{2}$, as matrizes γ^μ são matrizes constantes, 4×4 , que obedecem à álgebra de Clifford da equação (3.22c), e cuja representação padrão pode ser encontrada nas equações (3.24). Os acoplamentos vetorial e escalar, mencionados anteriormente, introduzem interações potenciais nas equações de Klein-Gordon e Dirac, respectivamente, da seguinte maneira

$$\left\{ - \left[i \frac{\partial}{\partial t} - V(r) \right]^2 - \vec{\nabla}^2 + [S(r) + M]^2 \right\} \Psi_{\text{K-G}}(t, \vec{r}) = 0, \quad (5.1a)$$

$$\left\{ \gamma^0 \left[i \frac{\partial}{\partial t} - V(r) \right] + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - M - S(r) \right\} \Psi_{\text{Dirac}}(t, \vec{r}) = 0. \quad (5.1b)$$

Recentemente, alguma atenção tem sido direcionada para encontrar-se soluções exatas das equação de Dirac com potenciais centrais de interesse físico [85, 86, 87, 88]. Então, neste capítulo, iniciaremos o estudo do movimento quântico de uma partícula escalar encontrando soluções exatas, considerando potenciais centrais, sendo o potencial vetor do tipo coulombiano e o potencial escalar do tipo $\frac{\eta_C}{r}$ ou $\eta_L r$. Em seguida, após este estudo preparatório, voltaremos nossa atenção para a equação de Dirac, para a qual encontraremos soluções exatas, considerando o potencial vetor coulombiano e o potencial escalar do tipo $\frac{\eta_C}{r}$.

5.1 Equação de Klein-Gordon para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$

Estudaremos, nesta seção, a equação de Klein-Gordon (5.1a), para potenciais independentes do tempo e com simetria esférica: razão pela qual podemos escrever

$$\Psi_{\text{K-G}}(t, \vec{r}) = e^{-iEt} Y_l^m(\theta, \phi) R(r), \quad (5.2)$$

sendo E a auto-energia da partícula e Y_l^m os *harmônicos esféricos* [45]. Substituindo (5.2) em (5.1a) e considerando os acoplamentos $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$, obtemos a equação radial

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + E^2 - M^2 - \frac{\eta_C^2 - \zeta^2 + \lambda}{r^2} - 2 \frac{E\zeta + M\eta_C}{r} \right] R(r) = 0, \quad (5.3)$$

onde $\lambda \equiv l(l+1)$ é uma constante usada para separar variáveis [89] na equação original (5.1a) e l é o número quântico associado ao momento angular da partícula ($l \geq 0$).

5.1.1 Estados Ligados

Buscaremos, inicialmente, soluções para estados ligados, onde $|E| < M$. Para este caso, o comportamento assintótico da função radial, $R(r)$, na região em que $r \rightarrow \infty$ é da forma

$$R(r) \approx e^{-\beta r}, \quad (5.4)$$

sendo $\beta \equiv \sqrt{M^2 - E^2}$. Para r muito pequeno, a função radial regular na origem se comporta da seguinte maneira

$$R(r) \approx r^{\mu_l + \frac{1}{2}}, \quad (5.5)$$

onde $\mu_l \equiv \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 + \eta_C^2}$. A solução da equação radial é, portanto

$$R(r) = (2\beta r)^{\mu_l + \frac{1}{2}} e^{-\beta r} {}_1F_1\left(\mu_l + \frac{1}{2} + \frac{E\zeta + M\eta_C}{\beta}, 2\mu_l + 1; 2\beta r\right). \quad (5.6)$$

Como fizemos na Seção 4.3.1, usaremos as equações (4.32) e (5.6) para encontrar uma relação de quantização que defina o espectro de energia da partícula. Neste caso obtemos

$$\mu_l + \frac{1}{2} + \frac{E\zeta + M\eta_C}{\sqrt{M^2 - E^2}} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

O espectro de energia resultante é

$$E_{n,l} = \frac{M\zeta\eta_C}{\zeta^2 + \nu_{n,l}^2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{(\eta_C^2 - \nu_{n,l}^2)(\zeta^2 + \nu_{n,l}^2)}{\zeta^2\eta_C^2}} \right]. \quad (5.8)$$

onde $\nu_{n,l} \equiv \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 + \eta_C^2} + n + \frac{1}{2}$. Caso o termo dentro da raiz seja menor que a unidade, temos $E_{n,l} \geq 0$. É possível descrever alguns casos particulares do espectro de energia, fazendo considerações acerca das constantes ζ e η_C na equação (5.7):

1. Fazendo $\zeta = 0$, o espectro da partícula pode ser escrito de maneira simplificada

$$E_{n,l} = \pm M \left\{ 1 - \eta_C^2 \left[\sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta_C^2} + n + \frac{1}{2} \right]^{-2} \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.9)$$

A partícula pode ter tanto energia positiva, quanto negativa.

2. Fazendo $\eta_C = 0$, obtemos

$$E_{n,l} = M \left\{ 1 + \zeta^2 \left[\sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2} + n + \frac{1}{2} \right]^{-2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.10)$$

Neste caso o sinal negativo da energia é descartado porque a energia negativa não satisfaz a condição de quantização expressa pela equação (5.7).

3. No caso em que o potencial coulombiano é idêntico ao escalar, ou seja, $\zeta = \eta_C$, temos

$$E_{n,l} = M \left[1 - \frac{2\zeta^2}{\zeta^2 + N^2} \right], \quad (5.11)$$

onde $N \equiv n + l + 1 \geq 1$.

4. Por fim, considerando $\zeta = -\eta_C$, obtemos

$$E_{n,l} = M \left[\frac{\zeta^2 \pm n^2}{\zeta^2 + n^2} \right]. \quad (5.12)$$

5.1.2 Estados Espalhados

A solução radial para estados espalhados, ou seja, estados em que $|E| > M$, é da forma

$$R(r) = (-2i\beta r)^{\mu_l + \frac{1}{2}} e^{i\beta r} {}_1F_1 \left(\mu_l + \frac{1}{2} + \frac{E\zeta + M\eta_C}{i\beta}, 2\mu_l + 1; -2i\beta r \right). \quad (5.13)$$

Como fizemos na seção 4.3.2, para encontrar o ângulo de mudança de fase, devemos tomar o limite assintótico de (5.13) em que $\beta r \gg 1$. Utilizamos a equação (4.38) para escrever a solução radial (5.13) de maneira aproximada

$$R(r) \approx C_{E,l} \cos \left(\sigma_l + \beta r - \frac{E\zeta + M\eta_C}{\beta} \ln(2\beta r) - \frac{\pi}{2} \left(\mu_l + \frac{1}{2} \right) \right), \quad (5.14)$$

onde $\sigma_l \equiv \arg \Gamma \left(\mu_l + \frac{1}{2} + \frac{E\zeta + M\eta_C}{i\beta} \right)$ e $C_{E,l}$ independe da coordenada radial. O ângulo de espalhamento encontrado para este problema, possui contribuições do potencial escalar e do potencial vetor; explicitamente, temos

$$\delta_l = \sigma_l - \frac{\pi}{2} \left(\mu_l - l + \frac{1}{2} \right). \quad (5.15)$$

Vemos que a influência dos potenciais aparece através das constantes ζ e η_C nos termos σ_l e μ_l .

5.2 Equação de Klein-Gordon para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \eta_L r$

Nesta seção, encontraremos as soluções da equação (5.1a), considerando um potencial vetor coulombiano e um confinamento linear. Separando variáveis, como fizemos na seção anterior, onde consideramos $\Psi_{K-G}(t, \vec{r}) = e^{-iEt} Y_l^m(\theta, \phi) R(r)$, obtemos uma equação para a parte

radial da auto-função de Klein-Gordon,

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + E^2 - M^2 + \frac{\zeta^2 - \lambda}{r^2} - \frac{2E\zeta}{r} - 2M\eta_L r - \eta_L^2 r^2 \right] R(r) = 0, \quad (5.16)$$

lembrando que $\lambda \equiv l(l+1)$ é a constante que surge do processo de separação de variáveis. O estudo do comportamento de $R(r)$ nas regiões onde r é muito pequeno ou muito grande mostra que podemos escrever

$$\begin{cases} R(r) \approx r^{\mu_l} & \text{para } r \rightarrow 0, \\ R(r) \approx e^{-\frac{r(r+c)}{2}} & \text{para } r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.17)$$

sendo $\mu_l \equiv \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4[\zeta^2 - l(l+1)]}}{2}$ e $c \equiv \frac{2M}{\sqrt{\eta_L}}$. Para encontrar a auto-função, definimos uma nova variável

$$z \equiv \sqrt{\eta_L} r \quad (5.18)$$

e substituímos, na equação (5.16), o seguinte *ansatz*

$$R(z) = z^{\mu_l} e^{-\frac{z(z+c)}{2}} F(z). \quad (5.19)$$

Como resultado chegamos à equação diferencial abaixo

$$\frac{z}{2} \frac{d^2 F}{dz^2} + \left(\mu_l - \frac{M}{\sqrt{\eta_L}} z - z^2 \right) \frac{dF}{dz} - \left[\frac{M\mu_l + E\zeta}{\sqrt{\eta_L}} + \left(\mu_l - \frac{E^2}{2\eta_L} \right) z \right] F = 0. \quad (5.20)$$

Soluções exatas de (5.20) podem ser obtidas através do método de séries de potências, fazendo

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) em (5.20), encontramos uma relação de recorrência entre os coeficientes da expansão

$$C_{n+2} = \frac{[2\eta_L(n + \mu_l) - E^2] C_n + 4M(n+1)(M\mu_l + E\zeta)C_{n+1}}{\eta_L(n+2)(n+2\mu_l+1)}. \quad (5.22)$$

Admitindo que $C_0 = 1$, encontramos

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\eta_L}} \left(M + \frac{E\zeta}{\mu_l} \right), \quad (5.23)$$

$$C_2 = \frac{M(M\mu_l + E\zeta) + (M\mu_l + E\zeta)^2}{\eta_L \mu_l (2\mu_l + 1)}. \quad (5.24)$$

Novamente, é possível encontrar soluções polinomiais, se cortarmos a série que compõe a função F , fazendo $C_{n+2} = C_{n+3} = \dots = 0$. Para que isto ocorra, duas condições devem ser satisfeitas

$$2\eta_L(n + \mu_l) - E^2 = 0, \quad (5.25a)$$

$$C_{n+1} = 0. \quad (5.25b)$$

Dessa forma, garantimos que $F(z)$ é um polinômio de grau n .

O espectro de energia da partícula, portanto, é

$$E_{n,l} = \pm \sqrt{2\eta_L(\mu_l + n)}, \quad (5.26)$$

onde $n = 1, 2, \dots$. Podemos estudar o caso mais simples, onde a função F é um polinômio de primeira ordem ($n = 1$), ou seja, $F(z) = C_0 + C_1 z = 1 + \frac{1}{\sqrt{\eta_L}} \left(M + \frac{E\zeta}{\mu_l} \right) z$. Neste caso, o par de condições (5.25) fornece $E_{1,l} = \pm \sqrt{2\eta_L(\mu_l + 1)}$ e, além disso, define a limitação que deve ser imposta à constante de acoplamento do potencial escalar, para que a função F seja um polinômio de primeiro grau

$$\eta_L^{(\pm)} = \frac{M^2}{2} \left[\frac{\zeta^2(2\mu_l + 2) + 2\mu_l^2 \pm \zeta(2\mu_l + 1)\sqrt{2(\zeta^2 + 4\mu_l^2)}}{(2\zeta^2(\mu_l + 1) - \mu_l)^2} \right]. \quad (5.27)$$

Dois valores para η_L são permitidos caso ambos sejam positivos.

5.3 Normalização

A integral de normalização da auto-função de Klein-Gordon pode ser escrita a partir da densidade de probabilidade mencionada na equação (3.12). Para este caso, temos, em coordenadas esféricas,

$$-i \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty [\Phi_\sigma \partial_t \Phi_{\sigma'}^* - \Phi_{\sigma'}^* \partial_t \Phi_\sigma] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \delta_{\sigma,\sigma'}, \quad (5.28)$$

onde $\Phi_\sigma = C_\sigma e^{-iE_n t} Y_l^m(\theta, \phi) R_n(r)$ e $\sigma = (n, l, m)$. Dessa forma, obtemos a constante de normalização

$$|C_\sigma|^2 = \left[2E_n \int_0^\infty r^2 R_n^2 dr \right]^{-1}. \quad (5.29)$$

5.4 Equação de Dirac para $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$

Para concluir esta Dissertação, estudaremos a equação de Dirac com potenciais centrais, como fizemos para a equação de Klein-Gordon. Encontraremos suas soluções considerando um potencial misto, consistindo em um potencial escalar e um potencial coulombiano. Substituindo, então, $V = \frac{\zeta}{r}$ e $S = \frac{\eta_C}{r}$ em (5.1b), denotando as auto-funções correspondentes por

$$\Psi_{\text{Dirac}} = \begin{pmatrix} \phi_{j,m}(\vec{r}, t) \\ \chi_{j,m}(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

e fazendo uso das equações (3.22) e (3.24), chegamos à equação matricial

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\frac{\zeta+\eta_C}{r} + M - E] \phi \\ [\frac{\zeta-\eta_C}{r} - M - E] \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (5.31)$$

Usaremos o seguinte *ansatz*

$$\phi_{j,m} \longrightarrow i \frac{G(r)}{r} \varphi_{j,m}^{(+)}, \quad (5.32)$$

$$\chi_{j,m} \longrightarrow -\frac{F(r)}{r} \varphi_{j,m}^{(-)}, \quad (5.33)$$

onde $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ e $\varphi_{j,m}^{(\pm)}$ são os *harmônicos esféricos espinoriais* [90], que obedecem às relações

$$\varphi_{j,m}^{(+)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = l + \frac{1}{2}, \quad (5.34)$$

$$\varphi_{j,m}^{(-)} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}-m}{2l+1}} Y_l^{m-\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{l+\frac{1}{2}+m}{2l+1}} Y_l^{m+\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \quad (5.35)$$

e satisfazem as seguintes equações de auto-valores

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r} \varphi_{j,m}^{(\pm)} = -\varphi_{j,m}^{(\pm)} \quad (5.36)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{L}) \varphi_{j,m}^{(\pm)} = -(1 \pm \kappa) \varphi_{j,m}^{(\pm)} \quad (5.37)$$

$$\kappa = \begin{cases} -(l+1) & \text{para } j = l + \frac{1}{2}, \\ l & \text{para } j = l - \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.38)$$

além da relação matemática

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \psi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{r}}{r^2} \left(-ir \frac{d}{dr} + i \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \right) \psi. \quad (5.39)$$

Chega-se, portanto, ao conjunto de equações

$$\frac{dF}{dr} = \frac{\kappa}{r}F - \left[E - M + \frac{\zeta + \eta_C}{r} \right] G, \quad (5.40a)$$

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{\kappa}{r}G + \left[E + M + \frac{\zeta - \eta_C}{r} \right] F. \quad (5.40b)$$

Nas regiões assintóticas, ou seja, quando r assume valores muito grandes ou muito pequenos, as funções radiais se comportam da seguinte forma

$$\begin{cases} F \approx Ar^{\gamma_j}, & G \approx Br^{\gamma_j} & \text{para } r \rightarrow 0, \\ F \approx Ce^{-\lambda r}, & G \approx De^{-\lambda r} & \text{para } r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.41)$$

onde $\gamma_j \equiv \sqrt{\kappa^2 - \zeta^2 + \eta_C^2}$ e $\lambda \equiv \sqrt{M^2 - E^2}$. Este comportamento assintótico sugere

$$G(\rho) = \sqrt{M + E} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma_j} [u(\rho) + v(\rho)], \quad (5.42a)$$

$$F(\rho) = \sqrt{M - E} e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{\gamma_j} [u(\rho) - v(\rho)], \quad (5.42b)$$

onde fizemos a mudança de variável $\rho \equiv 2\sqrt{M^2 - E^2}r$.

5.4.1 Estados Ligados

Estudaremos, inicialmente, estados ligados, ou seja, estados em que $M > |E|$. Substituindo (5.42) em (5.40), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\rho \frac{d^2u}{d\rho^2} + (2\gamma_j + 1) \frac{du}{d\rho} - \left[\gamma_j + 1 - \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda} \right] u = 0, \quad (5.43)$$

$$v = \frac{1}{\kappa + \frac{\zeta M + \eta_C E}{\lambda}} \left[-\rho \frac{du}{d\rho} - \left(\gamma_j - \rho + \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda} \right) u \right]. \quad (5.44)$$

Novamente nos deparamos com a equação hipergeométrica confluyente, cujas soluções são

$$u(\rho) = {}_1F_1 \left(\gamma_j + 1 - \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda}, 2\gamma_j + 1; \rho \right) \quad (5.45)$$

e, com o auxílio da relação de recorrência (C.5),

$$v(\rho) = -\frac{\left(\gamma_j + \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda} \right)}{\kappa + \frac{\zeta M + \eta_C E}{\lambda}} {}_1F_1 \left(\gamma_j - \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda}, 2\gamma_j + 1; \rho \right). \quad (5.46)$$

Para que ocorram estados ligados, é necessário que sejam impostas condições que limitem as funções hipergeométricas a polinômios. Podemos encontrar estas condições se analisarmos

o comportamento assintótico das hipergeométricas. Como resultado, encontramos a seguinte condição de quantização da energia

$$\gamma_j - \frac{\zeta E + \eta_C M}{\lambda} = n - \left(j + \frac{1}{2}\right), \quad (5.47)$$

de onde podemos obter

$$E_{n,j} = \frac{-\zeta \eta_C M}{\zeta^2 + [n - \nu_j]^2} \pm M \left\{ \left[\frac{\zeta \eta_C}{\zeta^2 + [n - \nu_j]^2} \right]^2 - \frac{\eta_C^2 - [n - \nu_j]^2}{\zeta^2 + [n - \nu_j]^2} \right\}, \quad (5.48)$$

onde $\nu_j \equiv j - \gamma_j + \frac{1}{2}$. Alguns casos especiais do espectro de energia acima são descritos a seguir.

1. $\zeta = 0$:

$$E = \pm M \sqrt{1 - \frac{\eta_C}{(n - \nu_j)^2}}; \quad (5.49)$$

2. $\eta_C = 0$:

$$E = M \sqrt{1 + \frac{\zeta^2}{(n - \nu_j)^2}}; \quad (5.50)$$

3. $\zeta = \eta_C$:

$$E = M \left(1 - \frac{2\zeta^2}{\zeta^2 + n^2} \right); \quad (5.51)$$

4. $\zeta = -\eta_C$:

$$E = M \left(\frac{\zeta^2 \pm n^2}{\zeta^2 + n^2} \right). \quad (5.52)$$

5.4.2 Estados Espalhados

As soluções de (5.42) para estados espalhados, ou seja, onde $|E| > M$, são

$$G(\rho_s) = \sqrt{M + E} e^{-\frac{\rho_s}{2}} \rho_s^{\gamma_j} [u_s(\rho_s) + v_s(\rho_s)], \quad (5.53a)$$

$$F(\rho_s) = \sqrt{M - E} e^{-\frac{\rho_s}{2}} \rho_s^{\gamma_j} [u_s(\rho_s) - v_s(\rho_s)], \quad (5.53b)$$

onde $\rho_s \equiv -2i\lambda_s r$, $\lambda_s = \sqrt{E^2 - M^2} = i\lambda$, e ainda

$$u_s(\rho_s) = {}_1F_1 \left(\gamma_j + 1 + \frac{i(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s}, 2\gamma_j + 1; \rho_s \right), \quad (5.54)$$

$$v_s(\rho_s) = \frac{\gamma_j - \frac{i(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s}}{\kappa - \frac{i(\zeta M + \eta_C E)}{\lambda_s}} {}_1F_1 \left(\gamma_j + \frac{i(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s}, 2\gamma_j + 1; \rho_s \right). \quad (5.55)$$

Para encontrar o ângulo de mudança de fase, devemos estudar o comportamento assintótico de (5.53) para $\lambda_s r \gg 1$

$$G(r) = C_{E,j}^{(1)} \cos \left(\lambda_s r - \gamma_j \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(2\lambda_s r)(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} + \sigma_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) + \\ C_{E,j}^{(2)} \sin \left(\lambda_s r - \gamma_j \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(2\lambda_s r)(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} + \sigma_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right), \quad (5.56)$$

e também

$$F(r) = C_{E,j}^{(3)} \sin \left(\lambda_s r - \gamma_j \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(2\lambda_s r)(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} + \sigma_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \right) + \\ C_{E,j}^{(4)} \cos \left(\lambda_s r - \gamma_j \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(2\lambda_s r)(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} + \sigma_3 + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \right), \quad (5.57)$$

onde

$$\sigma_1 \equiv \arg \left[\gamma_j + \frac{i(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} \right], \quad (5.58)$$

$$\sigma_2 \equiv \arg \left[\kappa - \frac{i(\zeta M + \eta_C E)}{\lambda_s} \right], \quad (5.59)$$

$$\sigma_3 \equiv \arg \Gamma \left(\gamma_j + \frac{i(\zeta E + \eta_C M)}{\lambda_s} \right). \quad (5.60)$$

CAPÍTULO 6

Conclusões

Nesta Dissertação, foi apresentado um resumo sobre a natureza e a origem dos defeitos topológicos — possíveis remanescentes exóticos de uma época em que a radiação predominava sobre a matéria — e sobre a mecânica quântica relativística e não-relativística, na tentativa de construir a fundamentação teórica e a motivação necessárias para se estudar a dinâmica de uma partícula carregada em diversos contextos.

Em um desses contextos, investigamos o movimento de uma partícula carregada na presença de uma corda cósmica: um defeito topológico na estrutura do espaço-tempo, cujas teorias descritivas vêm sendo revisitadas, por conta de novos métodos e desenvolvimentos na área de física de matéria condensada e de supercordas. Consideramos, também, a influência de um campo magnético uniforme e paralelo a esta corda. Observou-se que a influência da topologia e do campo causa alterações no espectro da partícula para estados ligados. Também foi possível mostrar que um ângulo de mudança de fase da partícula carregada recebe contribuições distintas da topologia não-trivial do espaço-tempo, bem como do campo magnético, no caso de estados espalhados. Esta investigação é feita, calculando-se exatamente o espectro de energia da partícula carregada e o ângulo de espalhamento. Observa-se, também, que a introdução da auto-interação, fornece contribuições adicionais, se comparadas ao caso em que esses termos não são considerados. Em adição a isto, é calculada exatamente, a intensidade do campo magnético que simplifica generosamente as soluções radiais da equação de Klein-Gordon, tornando-as simples polinômios.

Voltando a atenção para a mecânica quântica relativística no espaço plano, sistemas com simetria esférica são investigados. As equações de Klein-Gordon e Dirac, envolvendo potenciais vetor e escalar centrais, são resolvidas exatamente, encontrando-se o espectro de energia e o ângulo de espalhamento, quando possível.

Futuros desenvolvimentos envolvem a investigação de uma partícula carregada na presença de uma corda cósmica e de um campo magnético primordial para o caso fermiônico, onde se pretende encontrar as auto-funções e auto-energias da equação de Dirac, neste contexto. Além disso, também é de interesse, desenvolver a análise completa, no espaço-tempo plano, da

equação de Dirac envolvendo novas formas funcionais para os potenciais centrais.

Funções de Bessel Modificadas

A equação de Bessel surge da separação de variáveis das equações de Helmholtz e Laplace em coordenadas cilíndricas ou esféricas [45, 91]. As funções de Bessel (também chamadas de *harmônicos cilíndricos*) são, portanto, especialmente importantes em diversos problemas de propagação de ondas e potenciais estáticos.

As *funções de Bessel modificadas* são definidas através da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0, \quad (\text{A.1})$$

enquanto as *funções de Bessel ordinárias* obedecem à equação

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2) y = 0. \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.1) pode ser transformada na equação (A.2) através da substituição $z \rightarrow iz$, ou seja, as funções de Bessel modificadas são idênticas às funções de Bessel ordinárias com argumento imaginário. Representaremos as soluções de (A.2) por $J_\nu(z)$ e $J_{-\nu}(z)$ e as soluções de (A.1) por $I_\nu(z)$ e $I_{-\nu}(z)$. Para $z \rightarrow 0$, as soluções I_ν e J_ν são regulares, enquanto $I_{-\nu}$ e $J_{-\nu}$ são irregulares. $J_\nu(z)$ e $I_\nu(z)$ são funções reais de z , entretanto $J_\nu(iz)$ não é. Por esta razão podemos escrever

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{1}{2}i\pi}), \quad -\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi; \quad (\text{A.3a})$$

$$I_\nu(z) = e^{\frac{3i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{-\frac{3}{2}i\pi}), \quad \frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi. \quad (\text{A.3b})$$

Um segundo tipo de funções, K_ν , é definido por

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Problemas com simetria cilíndrica apresentam como soluções as funções de Bessel de ordem inteira. No limite em que $\nu \rightarrow n$, onde $n \in \mathbb{N}$, temos

$$K_n(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}; \quad (\text{A.5})$$

em problemas com simetria esférica, as soluções são funções de Bessel de ordem semi-inteira, que podem ser relacionadas com as funções de Bessel esféricas $j_n(z)$ através da relação

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (\text{A.6})$$

A forma assintótica das funções de Bessel modificadas [78] para grandes argumentos e um valor fixo de ν é

$$I_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^z, \quad (\text{A.7a})$$

$$K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}. \quad (\text{A.7b})$$

Quando $z \rightarrow 0$, o comportamento dessas funções é

$$I_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, \quad (\text{A.8a})$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{z^\nu}. \quad (\text{A.8b})$$

Finalmente, o wronskiano calculado a partir das funções de primeiro e segundo tipo é

$$W \{K_\nu(z), I_\nu(z)\} = I_\nu(z)K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) = \frac{1}{z}. \quad (\text{A.9})$$

Equações de Maxwell no Espaço Curvo

As equações de Maxwell, que datam do século XIX, resumem todo o eletromagnetismo clássico, ou seja, elas descrevem os campos eletromagnéticos gerados por distribuições de carga em um movimento arbitrário. Quando Maxwell formulou sua teoria, o contexto onde os fenômenos físicos supostamente ocorriam era um espaço-tempo newtoniano: uma estrutura contendo uma variedade que é difeomorfa¹ a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, onde o primeiro fator descreve o tempo newtoniano absoluto [92] e o segundo fator representa o espaço euclidiano: o reino dos fenômenos acessíveis à nossa percepção imediata. Nesta abordagem original, Maxwell apresentou suas equações como um sistema de oito equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem envolvendo as componentes dos campos elétrico e magnético [93], gerados por distribuições de cargas e correntes com movimento descrito no vácuo².

Posteriormente estas equações foram apresentadas usando o cálculo vetorial [94], que é a forma mais usada até hoje nos livros-texto de eletrodinâmica. No formalismo vetorial, as equações de Maxwell tomam a forma de quatro equações envolvendo os operadores divergente e rotacional. À época de Maxwell, supunha-se que o movimento de partículas carregadas sob a ação de campos elétricos e magnéticos deveria ser descrito pela segunda lei de Newton com uma *força de Lorentz* atuando na partícula. Mas no começo do século XX, graças aos trabalhos de Lorentz, Poincaré e Einstein [95], estabeleceu-se que o sistema de equações de Maxwell era compatível com o espaço-tempo de Minkowski. Também ficou evidente que a força de Lorentz clássica precisava ser modificada para que a teoria clássica de partículas carregadas e seus campos eletromagnéticos fosse invariante mediante transformações no espaço-tempo de Minkowski, definindo uma representação do grupo de Poincaré³ [96]. Tal condição era

¹Um difeomorfismo é uma função suave (com derivadas de todas as ordens), com inversa suave, que faz o mapeamento entre variedades diferenciáveis (variedades localmente semelhantes ao espaço euclidiano). Em outras palavras, é um isomorfismo entre variedades suaves.

²Dentro de um material as equações envolvem outros campos, os chamados campos de polarização.

³Uma representação descreve um grupo em termos de transformações lineares de espaços vetoriais. Em particular, ela pode ser usada para representar os elementos do grupo como matrizes e a operação do grupo pode ser representada como o produto entre matrizes. O grupo de Poincaré também é conhecido como *grupo de Lorentz*.

necessária para que a teoria satisfizesse o *princípio da relatividade*: as equações que descrevem as leis físicas possuem a mesma forma em quaisquer referenciais inerciais.

A dinâmica de um campo eletromagnético — onde a métrica pode não ser a métrica de Minkowski; ou onde é usado um sistema de coordenadas arbitrário (não necessariamente cartesiano) — é governada pelas *equações de Maxwell no espaço-tempo curvo*. Estas equações podem ser vistas como a generalização das equações de Maxwell no vácuo, que normalmente são formuladas em coordenadas locais ou no espaço-tempo plano. Mas como a Relatividade Geral determina que a presença de campos eletromagnéticos (ou matéria/energia em geral) induz uma curvatura no espaço-tempo [97], o conjunto de equações de Maxwell no espaço-tempo plano deve ser visto como um caso particular ou aproximado.

Na forma covariante de Lorentz, as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad (\text{B.1a})$$

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0. \quad (\text{B.1b})$$

Os índices gregos variam de 0 a 3, $J^\nu = (\rho, J_x, J_y, J_z)$ é a quadri-corrente, ρ é a densidade de carga, $\vec{J}$ é a densidade de corrente e o tensor eletromagnético é dado por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.3})$$

onde $A^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$ é o quadri-potencial do campo eletromagnético, sendo ϕ o potencial escalar e $\vec{A}$ o potencial vetor.

As equações de Maxwell covariantes de Lorentz são válidas em qualquer referencial inercial, no entanto elas não são covariantes mediante transformações gerais de coordenadas. Neste sentido, podemos dizer que as equações (B.1) são as equações de Maxwell na ausência de gravitação, ou seja, no espaço plano.

Além disso, temos que a densidade lagrangiana para o campo eletromagnético na ausência de gravidade é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\alpha A_\alpha + \mathcal{L}_e, \quad (\text{B.4})$$

onde $\mathcal{L}_e$ é a densidade lagrangiana associada às partículas carregadas.

As equações de Maxwell no espaço plano podem ser generalizadas para um espaço-tempo curvo se as reescrevermos na forma covariante por transformações gerais de coordenadas. Esta generalização pode ser feita se estendermos a densidade lagrangiana (B.4) para o caso com gravitação, escrevendo-a como um invariante perante transformações gerais de coordenadas. Com este objetivo, introduzimos o termo $\sqrt{-g}$, onde $g = \det g_{\mu\nu}$ [98, 99], da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\sqrt{-g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sqrt{-g}J^\alpha A_\alpha + \mathcal{L}_e. \quad (\text{B.5})$$

Substituindo a densidade lagrangiana (B.5) na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \right)} \right) = 0, \quad (\text{B.6})$$

obtemos a seguinte equação

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) = 4\pi J^\alpha. \quad (\text{B.7})$$

O termo à esquerda da igualdade é conhecido como a derivada covariante⁴ (representada pelo símbolo ∇_β) do tensor $F^{\alpha\beta}$ [99], ou seja

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha, \quad (\text{B.8})$$

que é a equação de Maxwell no espaço-curvo na presença de uma corrente. Comparando as equações (B.1a) e (B.8), podemos perceber que a generalização da equação de Maxwell pode ser feita se substituirmos a derivada usual pela derivada covariante. Se fizermos esta substituição na equação (B.1b), obtemos a equação de Maxwell no espaço-curvo para sistemas que não envolvem corrente

$$\nabla_\gamma F_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Além disso, podemos escrever o tensor eletromagnético na presença de gravidade e, como o símbolo de Christoffel é simétrico com respeito à troca dos índices covariantes, o tensor eletromagnético no espaço curvo é idêntico ao tensor eletromagnético no espaço plano.

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.10})$$

⁴De modo geral, $\nabla_\alpha F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu F^{\beta\nu} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\nu F^{\mu\gamma}$, onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ é o símbolo de Christoffel de segunda espécie.

Funções Hipergeométricas Confluentes

A função hipergeométrica confluyente é uma forma degenerada da função hipergeométrica. Também chamada de função de Kummer de primeiro tipo, a hipergeométrica confluyente é a solução da equação

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (\text{C.1})$$

que pode ser resolvida diretamente através da expansão da solução [45] em termos de uma série hipergeométrica

$${}_1F_1(a, b; z) = M(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \quad (\text{C.2})$$

onde $(a)_n$ e $(b)_n$ são *símbolos de Pochhammer*, também conhecidos como fatoriais ascendentes

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1) \cdots (x+n-1). \quad (\text{C.3})$$

A representação integral [78] da função de Kummer é dada por

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du. \quad (\text{C.4})$$

Uma equação que será útil é a fórmula [78] de recorrência

$$z \frac{d}{dz} F(a, b; z) = (b-a)F(a-1, b; z) - (b-a-z)F(a, b; z). \quad (\text{C.5})$$

E, por fim, sua forma assintótica [78] na região $|z| \rightarrow \infty$,

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} [1 + O(|z|^{-1})], \quad \Re z > 0; \quad (\text{C.6})$$

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} [1 + O(|z|^{-1})], \quad \Re z < 0. \quad (\text{C.7})$$

Referências Bibliográficas

- [1] WEYL, H. et al. *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2003.
- [2] ROSEN, J. *Symmetry Discovered*. [S.l.]: Dover Publications, 1998.
- [3] WEYL, H. *Symmetry*. [S.l.]: Princeton University Press, 1952.
- [4] KEPLER, J. *The Six-Cornered Snowflake*. [S.l.]: Oxford University Press, 1966.
- [5] DESCARTES, R. *Principles of Philosophy*. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [6] NEWTON, I. *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*. [S.l.]: Daniel Adee, 1846.
- [7] SKYRME, T. A non-linear field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, v. 260, n. 1300, p. 127–138, 1961.
- [8] HARA, Y.; NAMBU, Y. Nonleptonic decays of K mesons. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 16, n. 19, p. 875–879, May 1966.
- [9] KIRZHNITS, D. Weinberg model and the “hot” universe. *JETP Letters*, v. 15, p. 745–748, 1972.
- [10] KIRZHNITS, D.; LINDE, A. Macroscopic consequences of the Weinberg model. *Physics Letters B*, v. 42, n. 4, p. 471–474, dez. 1972.
- [11] WEINBERG, S. Gauge and global symmetries at high temperature. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 9, n. 12, p. 3357–3378, Jun 1974.
- [12] KIBBLE, T. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 9, n. 8, p. 1387–1398, 1976.
- [13] KIBBLE, T. Cosmic strings reborn? ArXiv:astro-ph/0410073v2. out. 2004.

- [14] CONTALDI, C.; HINDMARSH, M.; MAGUEIJO, J. Cosmic microwave background and density fluctuations from strings plus inflation. *Phys. Rev. Lett.*, v. 82, p. 2034–2037, 1999.
- [15] BOUCHET, F. et al. Evidence against or for topological defects in the BOOMERanG data. *Phys. Rev. D*, v. 65, n. 2, 2002.
- [16] SMITH, A. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. 263–292 p. (Proceedings of a Workshop Supported by the SERC and Cambridge).
- [17] POLCHINSKI, J. Cosmic superstrings revisited. *Talk at GR17 and COSMO-04*, 2004.
- [18] JEONG, E. et al. The validity of the cosmic string pattern search with the cosmic microwave background. ArXiv:astro-ph/0612706v3. maio 2007.
- [19] SAZHIN, M. V. et al. Gravitational lensing by cosmic strings: what we learn from the CSL-1 case. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 376, n. 4, p. 1731 – 1739, 2007.
- [20] SAZHIN, M. et al. CSL-1: chance projection effect or serendipitous discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 343, n. 2, p. 353, 2003.
- [21] SAZHIN, M. et al. Further spectroscopic observations of the CSL-1 object. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 636, n. 1, p. L5, 2006.
- [22] SAZHIN, M. et al. Search for gravitational lenses near the extragalactic double object CSL-1. *Astronomy Letters*, v. 31, n. 2, p. 73–79, fev. 2005.
- [23] M.V., S. et al. The true nature of CSL-1. ArXiv:astro-ph/0601494v2. fev. 2006.
- [24] AGOL, E.; HOGAN, C. J.; PLOTKIN, R. M. Hubble imaging excludes cosmic string lens. *Phys. Rev. D*, v. 73, n. 8, p. 087302, Apr 2006.
- [25] RAY, R.; SRIVASTAVA, A. M. Measuring cosmic defect correlations in liquid crystals. *Phys. Rev. D*, v. 69, n. 10, p. 103525, May 2004.
- [26] BOWICK, M. J. et al. The Cosmological Kibble Mechanism in the Laboratory: String Formation in Liquid Crystals. *Science*, v. 263, n. 5149, p. 943–945, 1994.

- [27] DIGAL, S.; RAY, R.; SRIVASTAVA, A. M. Observing correlated production of defects and antidefects in liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, n. 24, p. 5030–5033, Dec 1999.
- [28] CORTIJO, A.; VOZMEDIANO, M. A. Effects of topological defects and local curvature on the electronic properties of planar graphene. *Nuclear Physics B*, v. 763, n. 3, p. 293 – 308, 2007.
- [29] CORTIJO, A.; VOZMEDIANO, M. A. A cosmological model for corrugated graphene sheets. *The European Physical Journal*, v. 148, n. 1, p. 83–89, 2007.
- [30] SITENKO, Y.; VLASII, N. Electronic properties of graphene with a topological defect. *Nuclear Physics B*, v. 787, n. 3, p. 241 – 259, 2007.
- [31] SRIVASTAVA, A. M. Formation of cosmic string network from black holes: Implications from liquid crystal experiments. ArXiv:hep-ph/0611253v1. nov. 2006.
- [32] HENDRY, P. C. et al. Generation of defects in superfluid ^4He as an analogue of the formation of cosmic strings. *Nature*, v. 368, p. 315–317, 1994.
- [33] ZUREK, W. H. Cosmological experiments in superfluid helium? *Nature*, v. 317, p. 505–508, 1985.
- [34] CARMI, R.; POLTURAK, E.; KOREN, G. Observation of spontaneous flux generation in a multi-Josephson-junction loop. *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, n. 21, p. 4966–4969, May 2000.
- [35] SAKELLARIADOU, M. Formation and evolution of cosmic superstrings: a short review. *Fortschritte der Physik*, fev. 2010.
- [36] SASWAT, S.; HENRY, T. S.-H. Cosmic string production towards the end of brane inflation. *Physics Letters B*, v. 536, p. 185–192, 2002.
- [37] DVALI, G.; VILENKIN, A. Formation and evolution of cosmic D strings. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2004, n. 03, p. 010, 2004.
- [38] JONES, N. T.; STOICA, H.; TYE, S. H. H. The production, spectrum and evolution of cosmic strings in brane inflation. *Physics Letters B*, v. 563, p. 6–14, 2003.
- [39] GOLDSTONE, J. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, v. 19, p. 154–164, 1961.

- [40] GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 127, n. 3, p. 965–970, Aug 1962.
- [41] VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, n. 4, p. 852–857, Feb 1981.
- [42] GOTT, J. Gravitational lensing effects of vacuum string: exact results. *Astrophys. J.*, n. 288, p. 422, 1985.
- [43] HISCOCK, W. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, n. 3288, p. 31, 1985.
- [44] ANDERSON, M. *The Mathematical Theory of Cosmic Strings*. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, 2003. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation).
- [45] ARFKEN, G.; WEBER, H. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2001.
- [46] GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- [47] GRIFFITHS, D. *Introduction to Quantum Mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, 1995.
- [48] MEHRA, J.; RECHENBERG, H. *The historical development of quantum theory*. [S.l.]: Springer-Verlag, 1982.
- [49] PLANCK, M. On the law of distribution of energy in the normal spectrum. *Annalen der Physik*, v. 4, p. 553, 1901.
- [50] EINSTEIN, A. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, v. 322, n. 6, p. 132–148, 1905.
- [51] HUXLEY, T. *Agnosticism and Christianity and Other Essays*. [S.l.]: Prometheus Books, 1992.
- [52] DAWKINS, R. *The God Delusion*. [S.l.]: Black Swan, 2006.
- [53] BELL, J. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 38, n. 3, 1966.
- [54] SAA, A. Canonical quantization of the relativistic particle in static spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 13, n. 3, p. 553–557, 1996.

- [55] FULLING, S. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989.
- [56] MCMAHON, D. *Quantum Field Theory Demystified*. [S.l.]: McGraw-Hill, 2008.
- [57] ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Dover Publications, 2005.
- [58] BIRREL, N.; DAVIES, P. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982.
- [59] AUDRETSCH, J.; SCHÄFFER, G. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin- $\frac{1}{2}$ particles in an expanding universe: I. influence of the expansion. *General Relativity and Gravitation*, v. 9, n. 3, p. 243–255, 1978.
- [60] AUDRETSCH, J.; SCHÄFFER, G. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin- $\frac{1}{2}$ particles in expanding universes: II. energy spectrum of the hydrogen atom. *General Relativity and Gravitation*, v. 9, n. 6, p. 489–500, 1978.
- [61] PARKER, L. One-electron atom in curved space-time. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 44, n. 23, p. 1559–1562, Jun 1980.
- [62] MARQUES, G. d. A.; BEZERRA, V. B. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, n. 10, p. 105011, Nov 2002.
- [63] MARQUES, G. de A.; BEZERRA, V. Some effects on quantum systems due to the gravitational field of a topological defect. *Brazilian Journal of Physics*, v. 35, n. 4B, dez. 2005.
- [64] GERBERT, P. de S.; JACKIW, R. Classical and quantum scattering on a spinning cone. *Communications in Mathematical Physics*, v. 124, n. 2, p. 229–260, 1989.
- [65] ALVAREZ, M. Aharonov-Bohm scattering on a cone. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 32, n. 22, p. 4079–4085, 1999.
- [66] SPINELLY, J.; MELLO, E. R. B. de; BEZERRA, V. B. Relativistic quantum scattering on a cone. *Classical and Quantum Gravity*, v. 18, n. 8, p. 1555–1566, 2001.
- [67] BEZERRA, V. B. Gravitational Aharonov-Bohm effect in a locally flat spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 8, n. 10, p. 1939–1945, 1991.

- [68] FURTADO, C.; MORAES, F. Harmonic oscillator interacting with conical singularities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 33, n. 31, p. 5513–5519, 2000.
- [69] HOOFT, G. 't. Non-perturbative 2 particle scattering amplitudes in 2+1 dimensional quantum gravity. *Communications in Mathematical Physics*, v. 117, n. 4, p. 685–700, dez. 1988.
- [70] KAY, B.; STUDER, U. Boundary conditions for quantum mechanics on cones and fields around cosmic strings. *Communications in Mathematical Physics*, v. 139, n. 1, p. 103–139, 1991.
- [71] MARQUES, G. de A.; BEZERRA, V. B. Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 5, p. 985–995, 2002.
- [72] DOSCH, H. G.; JANSEN, J.; MÜLLER, V. *Phys. Nor.*, v. 5, p. 2, 1971.
- [73] PADMANABHAN, T. *Structure formation in the universe*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1993.
- [74] ZELIK, M.; GREGORY, S. *Introductory Astronomy and Astrophysics*. [S.l.]: Thompson Learning, Inc., 1998.
- [75] BRECHER, K.; BLUMENTHAL, G. *Astrophys. Lett.*, v. 6, p. 169, 1970.
- [76] KIHARA, T.; MIYOSHI, K. *Publ. Astron. Soc. Jap.*, v. 22, p. 245, 1970.
- [77] REES, M.; REINHARDT, M. *Astron. Astrophys.*, v. 19, p. 189, 1972.
- [78] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions*. [S.l.]: U.S. Government Printing Office, 1964.
- [79] FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, v. 195, n. 1, p. 90 – 94, 1994.
- [80] MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: John Wiley and Sons Inc., 1970.
- [81] SCHIFF, L. I. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1968.
- [82] VERCIN, A. Two anyons in a static, uniform magnetic field. Exact solution. *Physics Letters B*, v. 260, n. 1-2, p. 120 – 124, 1991.

- [83] KATANAEV, M. O.; VOLOVICH, I. V. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity. *Annals of Physics*, v. 216, n. 1, p. 1 – 28, 1992.
- [84] MELLO, E. R. B. de; BEZERRA, V. B. Charged particles in a magnetic field on a cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 36, n. 10, p. 5297–5304, 1995.
- [85] CASTRO, A. S. D.; FRANKLIN, J. Exact solutions of the Dirac equation for modified coulombic potentials. *International Journal of Modern Physics A*, v. 15, p. 4355–4360, 2000.
- [86] BOSE, S. K.; SCHULZE-HALBERG, A. Exact solution of the Dirac equation for a singular central power potential. *Modern Physics Letters A*, v. 15, p. 1583–1588, 2000.
- [87] BRIHAYE, Y.; KOSINSKI, P. Quasi-exactly solvable radial Dirac equations. *Modern Physics Letters A*, v. 13, p. 1445–1452, 1998.
- [88] FRANKLIN, J.; KOSINSKI, P. A simple Dirac wave function for a Coulomb potential with linear confinement. *Modern Physics Letters A*, v. 14, p. 2409–2411, 1999.
- [89] GREINER, W. *Quantum Mechanics - An Introduction*. [S.l.]: Springer, Berlin, Heidelberg, 1994.
- [90] BJORKEN, J.; DRELL, S. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill Inc., 1964.
- [91] BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing, 1968.
- [92] RODRIGUES, W. A.; SOUZA, Q. A. G. de; BOZHKO, Y. The mathematical structure of newtonian spacetime: Classical dynamics and gravitation. *Foundations of Physics*, v. 25, n. 6, p. 871–924, 1995.
- [93] MAXWELL, J. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 3. ed. [S.l.]: Dover Publications Inc., 1891.
- [94] HEAVISIDE, O. On the forces, stresses and fluxes of energy in the electromagnetic field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, A183, p. 423–480, 1893.
- [95] WHITTAKER, E. *A History of the Theories of Aether and Electricity*. New York: Humanities Press, 1973.

- [96] WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. New York: Wiley, 1972.
- [97] EINSTEIN, A. *Relativity: The Special and General Theory*. New York: Three Rivers Press, 1961.
- [98] BERGMANN, P. *Introduction to the Theory of Relativity*. New York: Dover Publications, 1976.
- [99] CARMELI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: Wiley and Sons, 1982.
- [100] PARKER, L.; PIMENTEL, L. O. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 25, n. 12, p. 3180–3190, Jun 1982.
- [101] MYRHEIM, J.; HALVORSEN, E.; VERCIN, A. Two anyons with Coulomb interaction in a magnetic field. *Physics Letters B*, v. 278, n. 1-2, p. 171 – 174, 1992.