



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Pós-graduação em Física

**Efeitos induzidos por uma corda cósmica
na dinâmica relativística e na polarização
do vácuo de campos de matéria.**

Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros

Tese de Doutorado

João Pessoa

Julho, 2014

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Física

Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros

**Efeitos induzidos por uma corda cósmica na dinâmica
relativística e na polarização do vácuo de campos de matéria.**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Física do Departamento de Física da Universidade Federal
da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau
de Doutor em Física.*

Orientador: *Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello*

João Pessoa

Julho, 2014

M488e Medeiros, Eduardo Rafael Figueiredo.
 Efeitos induzidos por uma corda cósmica na dinâmica
 relativística e na polarização do vácuo de campos de matéria /
 Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros.- João Pessoa, 2014.
 130f.
 Orientador: Eugênio Ramos Bezerra de Mello
 Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Corda cósmica. 3. Espaço-tempo de anti-de
 Sitter. 4. Campos fermiônicos. 5. Campos bosônicos. 6. Campo
 magnético.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Eduardo Rafael
Figueiredo Medeiros**, candidato ao Título de
Doutor em Física na Área de Concentração
Gravitação e Cosmologia.

Aos sete dias do mês de julho do ano de dois mil e quatorze, às 16h00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Eduardo Rafael Figueiredo Medeiros**. A comissão examinadora foi composta pelos professores doutores: *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* (UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, *Valdir B. Bezerra* (UFPB), *Knut Bakke* (UFPB), *Júlio César Fabris* (UFES) e *Ilya Shapiro* (UFJF). Dando início aos trabalhos, o Prof. *Eugênio Ramos Bezerra de Mello* comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado “*Efeitos induzidos por uma corda cósmica na dinâmica relativística e polarização de vácuo de campos de matéria*”. Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: “**aprovado**”. Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, lavrei a presente ata que vai assinada por mim mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba, **07 de julho de 2014**.

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Valdir B. Bezerra
UFPB

Prof. Dr. Knut Bakke
UFPB

Prof. Dr. Júlio César Fabris
UFES

Prof. Dr. Ilya Shapiro
UFJF

Danilo Wilson Lemos Menezes
Secretário

*À minha filha Laura, fonte da minha coragem e minha
companheira na exploração da arte e da natureza.
De mãos dadas, observamos o cosmos.*

Agradecimentos

- Agradeço especialmente à minha obra-prima e joia mais preciosa: minha filha Laura, que aprendeu desde cedo a hora certa de me dar um abraço e afastar todos os meus receios;
- À minha esposa Marcella, minha companheira, minha confidente, minha musa e meu grande amor;
- Agradeço também à minha família. Sem essa ilha de segurança, esta tese nunca teria sido escrita. Em especial à minha mãe, Dona Francisca, que me ensinou a amar as artes e buscar entender a natureza, além dos outros valores que hoje eu ensino à minha filha;
- Ao meu grande mestre, Prof. Eugênio R. Bezerra de Mello, um exemplo de competência e decência. Agradeço em especial pela sua paciência. Espero um dia poder trilhar o mesmo nobre caminho de brilhantismo;
- Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro e ao PPGF/UFPB pela estrutura, concedidos durante o doutorado.

*Gliding o'er all, through all, Through Nature, Time, and Space, As a ship
on the waters advancing, The voyage of the soul-not life alone, Death,
many deaths I'll sing.*

—WALT WHITMAN, *LEAVES OF GRASS* (1855)

Resumo

Nesta tese, investigamos aspectos quânticos associados a campos de matéria na vizinhança de uma corda cósmica em dois contextos distintos: a corda cósmica no espaço-tempo plano de Minkowski e a corda cósmica no espaço-tempo maximamente simétrico de anti-de Sitter (AdS). Inicialmente, fazemos uma breve revisão do formalismo utilizado nas nossas contribuições. No contexto da corda em Minkowski, analisamos a dinâmica quântica relativística de partículas carregadas, bosônicas e fermiônicas, na presença de um campo magnético, considerando também a presença de potenciais escalares. Para desenvolvermos esta análise, admitimos que o campo magnético é uniforme e paralelo à corda e que os potenciais escalares apresentam simetria cilíndrica, cujos centros estão sobre a corda cósmica. Duas configurações distintas para o potencial escalar são consideradas: **(i)** o potencial proporcional ao inverso da distância polar e **(ii)** o potencial linearmente proporcional à esta distância. Nesse sentido os espectros de energia são obtidos exatamente em diferentes cenários físicos e sua relação com a intensidade do campo magnético e com as constantes de acoplamento escalares é apresentada. No contexto da corda em AdS, analisamos o comportamento quântico de um campo fermiônico massivo. Especificamente, investigamos o condensado fermiônico, $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, e valor esperado no vácuo (VEV) do tensor energia-momento, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, induzidos pela presença de uma corda cósmica. Para esta análise, impusemos a condição de contorno da sacola do MIT, na fronteira de AdS. O condensado fermiônico e o VEV do tensor energia-momento são decompostos, respectivamente, em duas contribuições: uma induzida pelo espaço de AdS e outra induzida pela presença da corda. No que se refere ao VEV do tensor energia-momento, a parte induzida pela corda é diagonal e as pressões radial e axial são iguais à densidade de energia. Para pontos próximos à corda, os efeitos da curvatura são subdominantes e o VEV do tensor energia-momento coincide com o correspondente na geometria de Minkowski. Já para grandes distâncias próprias, os VEVs decaem de acordo com uma lei de potência, em contraste com o caso no espaço-tempo de Minkowski onde, para um campo massivo, o termo induzido pela corda decai exponencialmente.

Palavras-chave: corda cósmica, espaço-tempo de anti-de Sitter, campos fermiônicos, campos bosônicos, campo magnético.

Abstract

In this thesis, we investigate quantum properties associated with massive fields near a cosmic string within two distinct scenarios: a Minkowski flat background, and a maximally symmetric anti-de Sitter spacetime (AdS). Initially, we present a brief review of the formalism needed in our contribution. In Minkowski spacetime, we analyze the relativistic quantum dynamics of bosonic and fermionic charged particles in the presence of a magnetic field also considering the presence of scalar potentials. In order to develop this analysis, we assume that the magnetic field is parallel to the string axis, and the scalar potentials present a cylindrical symmetry with their center on the string. Two distinct configurations for the scalar potential are considered: (i) the potential proportional to the inverse of the polar distance, and (ii) the potential linearly proportional to this distance. The energy spectra are explicitly computed for different physical situations, and their dependence on the magnetic field strength, and scalar coupling constants are presented. In the context of a string in AdS, we investigate the quantum properties of a massive fermionic field. More specifically, we calculate the fermionic condensate (FC), $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$, and the vacuum expectation value (VEV) of the energy-momentum tensor, $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, induced by the presence of a cosmic string. In order to develop this analysis, we consider the MIT bag boundary condition on the boundary of AdS. The FC and the VEV of the energy-momentum tensor are decomposed into pure AdS and cosmic string induced parts. The string-induced part in the VEV of the energy-momentum tensor is diagonal, and the axial, and radial stresses are equal to the energy density. For points near the cosmic string, the effects of the curvature are sub-dominant and to leading order, the VEVs coincide with the corresponding VEVs for the cosmic string in the Minkowski bulk. At large proper distances from the string, the decay of the VEVs show a power-law dependence on the distance for both massless and massive fields, in contrast to the case of a Minkowski bulk where, for a massive field, the string-induced parts decay exponentially.

Keywords: cosmic string, anti-de Sitter, fermionic fields, bosonic fields, magnetic field

Lista de publicações produzidas durante o período:

1. E. R. B. de Mello, E. R. F. Medeiros, A. A. Saharian, "Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in anti-De Sitter spacetime", *Classical and Quantum Gravity*, vol. 30, no. 17, p. 175001, 2013.
2. E. R. F. Medeiros, E. R. B. de Mello, "Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential", *Eur. Phys. J. C*, vol. 72, no. 6, p. 2051, 2012.

Sumário

1	Introdução	1
2	Cordas cósmicas e espaços maximalmente simétricos	5
2.1	Defeitos topológicos e quebra espontânea de simetria	5
2.2	Modelo de Goldstone	6
2.3	Cordas cósmicas	8
2.4	Sinais observacionais	9
2.4.1	Radiação cósmica de fundo	9
2.4.2	Anisotropias no CMB	13
2.4.3	Modos-B de polarização	13
2.4.4	Defeitos topológicos e o sinal de modos-B detectado pelo BICEP2	14
2.4.5	Cordas fundamentais	15
2.5	Soluções tipo cordas solitônicas no modelo abeliano de Higgs	16
2.6	Espaços maximalmente simétricos	18
2.6.1	Espaço-tempo de de Sitter (dS)	18
2.6.2	Espaço-tempo anti-de Sitter (AdS)	20
2.7	Corda cósmica no espaço-tempo de dS	22
2.8	Corda cósmica no espaço-tempo de AdS	25
3	Teoria clássica de campos em espaços curvos	27
3.1	Interação do campo bosônico com campos externos	27
3.1.1	Equação de Klein-Gordon na presença de um campo eletromagnético	27
3.1.2	Equação de Klein-Gordon na presença de um campo gravitacional	28
3.1.3	Equação de Klein-Gordon na presença dos campos gravitacional e eletromagnético	30
3.2	Interação do campo fermiônico com campos externos	31
3.2.1	Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético	32
3.2.2	Equação de Dirac na presença de um campo gravitacional	32

3.2.3	Equação de Dirac na presença de campos eletromagnético e gravitacional	39
4	Análise quântica relativística de uma partícula carregada no espaço-tempo da corda cósmica	41
4.1	Sistema	41
4.2	Campos bosônicos: equação de Klein-Gordon	42
4.2.1	Equação radial bosônica	43
4.3	Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon	44
4.3.1	Níveis de Landau	44
4.3.2	Campo magnético nulo	46
4.3.3	Confinamento linear	49
4.3.4	Solução geral	52
4.4	Campos fermiônicos: equação de Dirac	54
4.4.1	Equações radiais fermiônicas	56
4.5	Soluções analíticas da equação de Dirac	60
5	Teoria quântica de campos em espaços curvos	63
5.1	Segunda quantização no espaço curvo	63
5.2	Criação de partículas	65
5.3	Polarização do vácuo	67
5.3.1	Função de Green e $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ no espaço-tempo curvo	68
6	Polarização do vácuo fermiônico por uma corda cósmica no espaço-tempo de Anti-de Sitter	71
6.1	Funções de onda fermiônicas	71
6.2	Condensado fermiônico	79
6.3	Tensor energia-momento	85
7	Conclusões	95
A	Funções de Bessel modificadas	100
B	Funções hipergeométricas confluentes	102
C	Equação diferencial de Heun	103
D	Sobre a condição de contorno na fronteira de AdS	105

E Conexão espinorial**107**

Lista de Figuras

2.1	Potencial de quebra de simetria $U(1)$: $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda (\phi^*\phi - \eta^2)^2$.	7
2.2	Espaço-tempo cônico externo à uma corda retilínea infinita.	17
6.1	Parte induzida pela corda no CF, $a^3\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{cs}$, como função de r/z e ma para a corda cósmica com parâmetro $q = 3$.	85
6.2	Parte induzida pela corda no VEV da densidade de energia, $a^4\langle T_0^0\rangle_{cs}$, <i>versus</i> a distância da corda e a massa do campo em unidades de escala de curvatura de AdS, para a corda cósmica com $q = 3$.	89
6.3	Parte induzida pela corda no VEV da tensão azimutal, $a^4\langle T_\phi^\phi\rangle_{cs}$, como função da distância da corda e da massa do campo em unidades da escala de curvatura de AdS, para a corda cósmica com $q = 3$.	93

CAPÍTULO 1

Introdução

A análise quântica de um sistema sob influência de um campo gravitacional tem atraído atenção na física há vários anos. Seguindo esta linha de pesquisa, o átomo de hidrogênio no espaço-tempo curvo foi investigado por [1–3]. Mostrou-se em [2], que a mudança no espectro da energia causada pela curvatura é diferente do efeito Doppler gravitacional usual. Contudo, esta mudança é perceptível apenas na região de campo gravitacional mais intenso. Recentemente, a análise da influência do espaço-tempo produzido por defeitos topológicos gravitacionais no espectro de energia do átomo de hidrogênio foi desenvolvida sob os pontos de vista não-relativístico [4] e relativístico [5]. Nestes trabalhos, o átomo de hidrogênio é colocado no espaço-tempo produzido por uma corda cósmica linear ideal e também por um monopolo global puntiforme. Diferentemente da análise prévia, devido à geometria específica associada ao espaço-tempo produzido por estes defeitos topológicos idealizados, nestas investigações mais recentes, o espectro de energia associado ao átomo de hidrogênio pode ser calculado exatamente.

De acordo com conceitos modernos em física teórica, como no contexto de teorias de grande unificação, tipos diferentes de defeitos topológicos podem ter sido criados no princípio do universo como consequência de uma transição de fase do vácuo [6–8]. Entre os possíveis defeitos estão as paredes de domínio, cordas cósmicas e monopolos. Estes últimos aparentam ser os melhores candidatos a ser observados, sendo as cordas cósmicas de interesse particular. A corda cósmica ideal é um defeito linear, retilíneo, cuja dimensão transversal é zero e o espaço-tempo produzido por ela é localmente plano, contudo, globalmente cônico, com déficit de ângulo planar determinado pela tensão da corda. Devido à estrutura cônica, uma partícula carregada colocada em repouso no espaço-tempo da corda fica sujeita a uma auto-interação eletrostática repulsiva proporcional ao inverso da distância polar à mesma [9, 10]. Mostrou-se também em [11] que fontes elétricas e magnéticas no espaço-tempo de uma corda cósmica tornam-se sujeitas a auto-interações induzidas.¹ Apesar de observações recentes da radiação

¹Estas auto-interações induzidas são consequência de distorções dos campos elétricos e magnéticos causados pelos aspectos globais e topológicos associados ao déficit de ângulo planar produzido pelo defeito.

cósmica de fundo terem descartado as cordas cósmicas como a fonte primordial de perturbações na distribuição de matéria no universo, elas ainda são candidatas a um número de efeitos físicos interessantes, tais como explosões de raios-gamma [12], ondas gravitacionais [13] e raios cósmicos de altas energias [14]. Recentemente, o interesse pelas cordas cósmicas foi renovado, parcialmente porque uma variação do seu mecanismo de formação é proposta no contexto de inflação [15, 16].

A análise quântica não-relativística do movimento de uma partícula carregada no espaço-tempo da corda cósmica, considerando a auto-interação eletrostática, na presença de um campo magnético uniforme paralelo à corda foi desenvolvida em [17], onde foi mostrado que a presença do defeito reduz o grau de degenerescência dos níveis de Landau. Além disso, a inclusão da auto-interação eletrostática na análise quebra a degenerescência restante. Em ambos os casos, funções de onda e auto-valores da energia são encontrados exatamente, para magnitudes específicas do campo magnético. Ainda, a análise do movimento não-relativístico de duas partículas carregadas em um cone e na presença de um campo magnético estático também foi desenvolvida em [18].

Usualmente, introduz-se o acoplamento entre uma partícula carregada e campos eletromagnéticos nas equações de Dirac e Klein-Gordon através do acoplamento mínimo. Nesse procedimento, o operador diferencial $p_\mu = i\partial_\mu$ é modificado de forma a incluir o quadri-vetor potencial eletromagnético A_μ na forma $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$. Há alguns anos, Dosch, Jansen e Müller [19] assinalaram que o acoplamento mínimo não é a única forma de acoplar um potencial à equação de Dirac. Nesse trabalho, foi sugerido que um potencial não-eletromagnético pode ser levado em conta modificando-se o termo de massa na forma $M \rightarrow M + S(\vec{r}, t)$, sendo $S(\vec{r}, t)$ o potencial escalar. Esse novo formalismo foi usado por Soff, Müller, Rafelski e Greiner em [20], para analisar a equação de Dirac na presença de um potencial coulombiano e um potencial escalar estático, inversamente proporcional à distância radial. Mais recentemente, a auto-interação eletrostática de uma partícula carregada no espaço-tempo da corda cósmica foi considerado em [21] e [22] como um potencial escalar, na análise do movimento quântico relativístico da partícula. Então, se quisermos investigar a dinâmica quântica relativística de uma partícula carregada sujeita à potenciais escalar e eletromagnético, ambos os procedimentos, o acoplamento mínimo e a modificação do termo de massa, devem ser considerados.

Uma das consequências mais importantes em teoria quântica de campos em espaços curvos está relacionada às propriedades não triviais do vácuo. Estas propriedades dependem tanto das características geométricas quanto das características topológicas do espaço-tempo de fundo,

onde a teoria está definida. Em particular, as condições de contorno impostas em um campo quântico em espaços de topologia não-trivial modificam o espectro das flutuações do ponto-zero, gerando mudanças nos valores esperados do vácuo (VEVs) para observáveis físicos. Um exemplo conhecido deste tipo de fenômeno é o efeito Casimir topológico [23]. A dependência explícita das características físicas do vácuo nas propriedades geométricas da variedade podem ser encontradas apenas para espaços-tempo de alto grau de simetria.

O espaço-tempo AdS como geometria de fundo em teoria quântica de campos tem importância por várias razões. O interesse inicial tinha relação com as principais questões da quantização de campos em espaços-tempo curvos. A falta de hiperbolicidade global e a presença de modos regulares e irregulares dão origem a um número de novos fenômenos sem análogos em teoria quântica de campos no espaço-tempo de Minkowski. Estes fenômenos foram discutidos por vários autores considerando campos escalares [24, 25] e espinoriais [26, 27]. A importância desta linha de pesquisa aumenta pelo surgimento natural do espaço-tempo de AdS como estado fundamental em teorias de supergravidade e Kaluza-Klein. A geometria AdS possui papel crucial em desenvolvimentos em física teórica na última década, tais como a correspondência AdS/CFT e o cenário de *braneworld* com grandes dimensões extras. A correspondência AdS/CFT (para uma revisão, ver [28]), representa uma realização do princípio holográfico e relaciona teorias de corda ou supergravidade no *bulk* AdS com uma teoria de campo conforme na fronteira. O cenário de *braneworld* oferece uma nova perspectiva no problema da hierarquia entre ordens de grandeza das interações gravitacional e eletrofraca (para revisões em gravidade em *braneworld* e cosmologia, ver [29, 30]). A ideia principal para resolver a grande hierarquia consiste em que o pequeno acoplamento de gravidade 4-dimensional é gerado pelo grande volume físico de dimensões extras.

A geometria da corda cósmica no espaço-tempo de AdS foi considerada em [31, 32]. Mostrou-se que, de maneira similar ao caso do espaço-tempo de Minkowski, para distâncias da corda maiores que seu raio central, os efeitos gravitacionais da corda podem ser descritos por um déficit de ângulo planar no elemento de linha de AdS. A topologia não-trivial correspondente induz efeitos adicionais de polarização de vácuo para campos quânticos. Estes efeitos foram investigados para a geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski para campos quânticos escalares [33, 34], fermiônicos [35, 36] e vetoriais [37, 38]. Recentemente, os resultados correspondentes foram generalizados para cordas cósmicas no espaço-tempo curvo. Especificamente, efeitos quânticos de um anel foram considerados para um campo escalar sem massa no espaço-tempo de Schwarzschild [39]. No espaço-tempo de

de Sitter, o efeito de polarização do vácuo foi analisado para campos escalares e fermiônicos quânticos em [40] e [41], respectivamente. Para o espaço-tempo de AdS, essa quantidade foi calculada em [42] para campos escalares. Continuamos seguindo uma linha de investigação similar, analisando efeitos de polarização do vácuo, associados a um campo espinorial de Dirac massivo, em um espaço-tempo 4-dimensional de AdS na presença de uma corda cósmica. O condensado fermiônico e o valor esperado no vácuo (VEV) do tensor energia-momento estão entre as características físicas locais mais importantes do vácuo fermiônico. O condensado fermiônico assume papel importante em modelos de quebra dinâmica de simetria quiral, onde o VEV do tensor energia-momento atua como a fonte da gravidade nas equações de Einstein semi-clássicas.

Esta tese está organizada da seguinte forma: nos capítulos 2, 3 e 5, fazemos uma revisão do formalismo teórico e matemático dos conceitos que cercam a corda cósmica e o espaço-tempo de de Sitter e anti-de Sitter. Nos capítulos 4 e 6, apresentamos a nossa contribuição pessoal.

Inicialmente, no capítulo 4 analisaremos o movimento quântico relativístico de bósons e férmions massivos, carregados, no espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada, na presença de um campo magnético uniforme, paralelo à corda e, também, sob influência de potenciais escalares. Duas configurações específicas para o potencial escalar serão consideradas: (i) o potencial proporcional ao inverso da distância polar à corda, $S \propto 1/r$ e (ii) o potencial linear com respeito à essa distância polar, $S \propto r$. Veremos que, para valores particulares do campo magnético, podemos obter exatamente soluções para as equações de Klein-Gordon e Dirac e o espectro de energia associado aos estados ligados.

Em seguida, no capítulo 6, consideramos o problema solúvel exatamente, da polarização do vácuo fermiônico por uma corda cósmica no espaço tempo de anti-de Sitter (AdS).

No capítulo 7, apresentaremos nossas conclusões e, por fim, introduzimos apêndices contendo detalhes matemáticos relevantes ao texto.

Ao longo desta tese, adotamos o sistema de unidades naturais ($\hbar = G = c = 1$) e a assinatura $(-, +, +, +)$.

Cordas cósmicas e espaços maximalmente simétricos

2.1 Defeitos topológicos e quebra espontânea de simetria

A quebra espontânea de simetria é uma ideia que se originou na física da matéria condensada. Ela ocorre quando um sistema, que é inicialmente simétrico com respeito a algum grupo de simetria, vai para um estado de vácuo que não é simétrico. Quando isto ocorre, o sistema não mais se comporta de acordo com sua simetria original. O grupo de simetria inicial do sistema pode ser discreto, como o grupo de translações de um cristal; ou contínuo, como o grupo de simetria rotacional, cujas transformações mantêm o cilindro, por exemplo, invariante.

Um exemplo comum que ajuda a explicar o fenômeno de quebra espontânea de simetria é uma bola colocada no topo de uma colina. A bola está num estado completamente simétrico, no entanto, instável. A menor perturbação fará com que a bola role em alguma direção. Neste ponto a simetria foi quebrada porque a bola escolheu uma direção particular, que pode ser diferenciada das demais (o sistema escolheu um estado de vácuo).

O resultado da quebra de alguns tipos de simetria presentes em sistemas físicos são os defeitos topológicos. Eles podem aparecer, notadamente, em sistemas de matéria condensada ou no contexto cosmológico, como defeitos na estrutura homogênea do espaço-tempo em alguma região do universo.

Os defeitos topológicos assumem papéis importantes no contexto das teorias de grande unificação (GUT) das partículas elementares. A premissa básica da grande unificação é que as simetrias conhecidas das partículas elementares são vestígios de um grupo maior de simetria G , após sucessivas quebras espontâneas de simetria:

$$G \longrightarrow H \longrightarrow SU_C(3) \times SU_L(2) \times U_Y(1) \longrightarrow SU_C(3) \times U_{EM}(1). \quad (2.1)$$

Isto implica que, na sua fase inicial, o universo passou por um número de transições de fase com

um ou vários tipos de defeitos topológicos sendo deixados pelo caminho. Apesar da abordagem deste cenário exigir uma quantidade saudável de ceticismo, a questão da formação e evolução de defeitos merece uma investigação séria.

Nas teorias modernas de partículas elementares, a quebra de simetria é descrita em termos de campos escalares chamados campos de Higgs. O estado fundamental da teoria não exhibe as mesmas simetrias da hamiltoniana e é caracterizado por um valor esperado não-nulo do campo de Higgs. As propriedades essenciais da quebra espontânea de simetria podem ser ilustradas em um modelo simples estudado por Goldstone em 1961 [43, 44].

2.2 Modelo de Goldstone

Considere a densidade lagrangeana clássica

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.2)$$

onde ϕ é um campo escalar complexo e o potencial $V(\phi)$ é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \lambda (\phi^* \phi - \eta^2)^2, \quad (2.3)$$

sendo λ e η constantes (ver figura 2.1). O modelo é invariante sob o grupo $U(1)$ de transformações de fases globais:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x). \quad (2.4)$$

Para $\eta^2 > 0$, os mínimos do potencial (2.3) formam um círculo $|\phi| = \eta$ e o estado fundamental (o vácuo) da teoria é caracterizado por um valor esperado não-nulo

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \eta e^{i\theta}, \quad (2.5)$$

onde θ é uma fase arbitrária. A transformação de fase (2.4) leva θ em $\theta + \alpha$, então o estado de vácuo $|0\rangle$ não é invariante sob (2.4) e a simetria é espontaneamente quebrada. O estado anterior à quebra de simetria, com $\langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0$, corresponde a um máximo local de $V(\phi)$. Pequenas perturbações ao redor deste estado são descritas pela densidade lagrangeana (2.2) com o potencial

$$V(\phi) \approx -\frac{1}{2} \lambda \eta^2 \phi^* \phi + \text{const.} \quad (2.6)$$

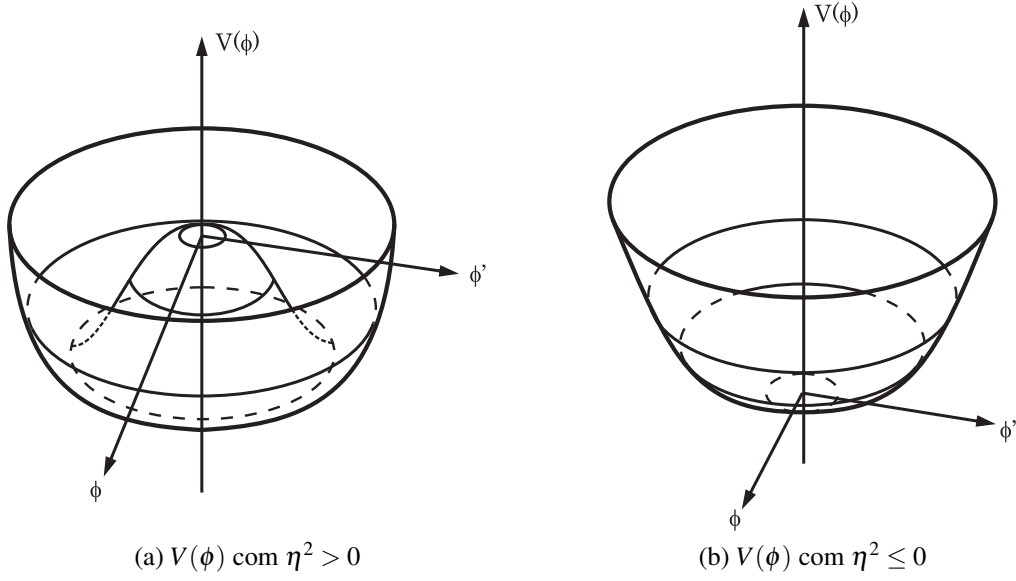


Figura 2.1 Potencial de quebra de simetria $U(1)$: $V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda (\phi^* \phi - \eta^2)^2$.

O sinal negativo no termo de massa indica a instabilidade do caso simétrico. Os vácuos da simetria quebrada para diferentes valores de θ são equivalentes. Escolhendo o vácuo para $\theta = 0$, podemos representar ϕ como

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.7)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são campos reais com valores esperados no vácuo nulos. Substituindo a equação (2.7) na densidade lagrangeana (2.2), obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\lambda \eta^2 \phi_1^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}, \quad (2.8)$$

onde o termo de interação $\mathcal{L}_{\text{int}}$ inclui termos de ordem mais alta em ϕ_1 e ϕ_2 . Podemos ver que ϕ_1 representa uma partícula com massa positiva $\mu = \sqrt{\lambda} \eta$, enquanto ϕ_2 não possui massa. A razão para isso é que ϕ_1 está associado às oscilações radiais sobre um ponto no círculo $|\phi| = \eta$, enquanto ϕ_2 corresponde ao movimento sobre o círculo. O aparecimento de partículas escalares sem massa, chamadas bósons de Goldstone, é uma característica geral da quebra espontânea de simetrias globais. Na seção seguinte estudaremos um caso particular de defeito topológico formado pela quebra de simetria.

2.3 Cordas cósmicas

De acordo com a teoria quântica de campos, a matéria é descrita em termos de campos que ocorrem no espaço e evoluem no tempo. Uma partícula corresponde a uma flutuação pontual do seu campo correspondente, da mesma forma que um fônon é uma excitação puntiforme, localizada, em um cristal. Alguns cristais admitem a possibilidade de linhas de defeitos estáveis, linhas nas quais a orientação dos átomos do cristal muda abruptamente. De modo similar, algumas teorias quânticas de campo permitem a existência de configurações de campo estáveis com defeitos lineares. Estes defeitos são chamados *cordas cósmicas*. Da mesma forma que nem todos os materiais cristalinos admitem defeitos lineares, nem todas as teorias de campo admitem cordas cósmicas. Por exemplo, o Modelo Padrão da física de partículas não admite configurações de cordas estáveis no vácuo, contudo, várias extensões do Modelo Padrão admitem tais defeitos.

Em um modelo de teoria quântica de campos que admite soluções do tipo cordas cósmicas, uma rede de tais defeitos, inevitavelmente, se forma durante o processo de resfriamento no início do universo. Da mesma forma que em sistemas de matéria condensada que admitem defeitos, tais soluções se formam durante um processo de rápida cristalização. Este é o mecanismo de Kibble [45–47].

Em um modelo de teoria quântica de campos, cordas cósmicas são distribuições lineares de massa-energia no universo, de comprimento qualquer. Elas são caracterizadas por dois números: a massa por unidade de comprimento, μ , e a tensão, T . Na sua forma fundamental, $\mu = T$, o que significa que há invariância de *boost* ao longo do comprimento da corda e elas são relativísticas.

Assim como partículas, cordas podem ser elementares ou compostas — formadas por constituintes mais fundamentais, neste caso, campos escalares e, possivelmente, de gauge. Se forem formadas por campos, são soluções clássicas das equações de campo localizadas em tubos de densidade de energia, relacionados aos sólitons. Classicamente, cordas elementares possuem diâmetro zero e cordas solitônicas possuem diâmetro não-nulo dado por uma medida de massa nas equações de campo clássicas [48].

Cordas cósmicas, então, seriam formadas no início do universo, pela quebra espontânea da simetria $U(1)$. Caso elas existam, devem ser extremamente finas e densas — para cordas resultantes de quebra de simetria em uma escala de energia η , temos que $\mu \sim \eta^2$. As cordas, para um teoria de grande unificação típica, com $\eta \sim 10^{16}$ GeV, possuem $G\mu \sim 10^{-6}$ ou $\mu \sim$

10^{22} g/cm, onde G é a constante da gravitação universal [10].

2.4 Sinais observacionais

Existem várias formas de procurar por cordas no universo. Um dos caminhos mais explorados é através do campo gravitacional das cordas, que perturbam a matéria e radiação ao seu redor. A amplitude dessas perturbações é controlada pelo parâmetro adimensional $8\pi G\mu$, onde G , novamente, é a constante de Newton. O fator 8π vem das equações de Einstein.

O campo gravitacional das cordas também pode produzir o efeito de lente gravitacional sobre galáxias, quasares e outras fontes distantes compactas [48–50]. Este efeito, produzido por uma corda retilínea, consiste em um par de imagens sem distorção ou ampliação, diferentemente do efeito produzido por galáxias ou clusters de galáxias. Esta seria uma forma excelente de procurar cordas, contudo, lentes produzidas por cordas devem ser separadas do sinal de fundo de pares de galáxias similares, o que não pode ser feito trivialmente.

2.4.1 Radiação cósmica de fundo

Observações recentes são consistentes com um modelo dos primeiros instantes do universo: inflação. Desde a proposta do modelo, a inflação tem obtido sucesso em explicar várias propriedades quantitativas e qualitativas do cosmos, fornecendo previsões cosmológicas e alterando radicalmente nosso entendimento sobre o "big bang". Neste modelo, o universo se expande e sua temperatura decresce. Assim, em tempos remotos, a temperatura e a densidade do cosmos devem ter sido extraordinariamente altas. Como consequência, a interação entre partículas elementares era tão forte que estas não conseguiam combinar-se para formar objetos mais complexos. Até que o universo resfriou a aproximadamente 100 MeV, quando era formado por um denso mar de quarks, léptons e bósons que se espalhavam mutuamente a uma taxa muito superior à de expansão, mantendo um equilíbrio térmico entre si. A partir deste ponto, os primeiros hádrons começaram a se formar. Logo depois, bárions e antibárions passaram a se aniquilar, aumentando consideravelmente a densidade de fótons. Quando a energia de radiação se reduziu à ordem de 1 MeV, bárions passaram a se combinar formando os núcleos dos elementos leves. Este processo é chamado de nucleossíntese. Entretanto, não foi até o universo resfriar a, aproximadamente, 0.26 eV ($\propto 3 \times 10^3$ K), que a radiação deixou de interagir com a matéria. Durante o período que precede, o universo era permeado por um plasma, formado por núcleos,

elétrons livres e radiação. Dizemos, por conseguinte, que neste período o universo era opaco. Isto porque o livre caminho médio dos fótons era tão pequeno, que estes não conseguiam viajar livremente, permanentemente colidindo com núcleos. Chamamos este evento particular de desacoplamento: o ponto em que o universo torna-se transparente e a radiação passa a propagar-se livremente, permeando o céu até os dias de hoje. Esta radiação, chamada radiação cósmica de fundo, vem sofrendo *redshift* desde então, encontrando-se, hoje, na forma de microondas à temperatura de $T_{\text{CMB}} \propto 2.725\text{K}$. Ela nos serve como uma fotografia do desacoplamento e através dela podemos inferir a validade do princípio cosmológico, assim como, a forma de nossa geometria.

A ideia de que o universo era inicialmente super quente e denso, esfriando-se e tornando-se mais diluído conforme se expande, recebe o nome de teoria do big bang, podendo, mas não sendo estritamente necessário, conter uma singularidade inicial. A detecção da radiação cósmica de fundo favorece tal teoria. Na verdade, esta radiação foi primariamente prevista, como consequência do big bang, por Ralph Alpher e Robert Herman, em 1948 [51]. A primeira detecção aconteceu, acidentalmente, em 1965, quando Arno Penzias e Robert Wilson faziam medições em seu recém construído radiômetro [52].

Atualmente, duas sondas (WMAP e Planck) mapeiam a radiação cósmica de fundo de todo o céu, obtendo suas temperaturas. As flutuações térmicas, são bastante pequenas, suportando o princípio cosmológico. Entretanto, as pequenas anisotropias são fundamentais para que as grandes estruturas pudessem ter sido formadas. Com a expansão, essas anisotropias aumentaram consideravelmente de volume, formando poços de potenciais onde a matéria pode se aglomerar. Caso estas pequenas flutuações não existissem, matéria e anti-matéria teriam se aniquilado mutuamente por completo, gerando apenas um mar de fótons, impossibilitando a formação de estruturas. Observações cautelosas do mapeamento da radiação cósmica de fundo permitem-nos inferir a respeito da geometria do universo e dos parâmetros observacionais. Por exemplo, o tamanho real das flutuações térmicas pode ser computado e comparado com as observações. Em uma geometria hiper-esférica, estes pontos apareceriam maiores do que realmente são. Analogamente, em uma geometria hiper-hiperbólica, estes seriam inferiores ao tamanho computado. De fato, as observações indicam que vivemos em um universo espacialmente plano¹, $k = 0$, não havendo diferenças entre os valores calculados e observados.

¹A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) descreve um universo homogêneo e isotrópico em expansão. Em coordenadas esféricas, pode ser escrita como $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]$, sendo $a(t)$ o fator de escala, a constante $k = K/|K| = -1, 0, 1$ e K é definido através do tensor de curvatura para um espaço maximamente simétrico $R_{ij} = -2Kg_{ij}$. Dessa forma, a

A teoria inflacionária sugere que a taxa de expansão do universo primordial tenha sido constante, resultando em uma abrupta expansão exponencial. Embora diversos autores tenham contribuído independentemente com a teoria inflacionária, foram Andrei Linde e Alan Guth que, em 1980, revelaram como a teoria do big bang suporta e, de certa forma, necessita da inflação [53]. A relatividade geral, sendo incompatível com a mecânica quântica, não é capaz de descrever acontecimentos na era de Planck, $0 \leq t \leq 10^{-43}\text{s}$, quando a densidade de energia era tão alta (superior a densidade de Planck, $\rho_{pl} \equiv 5 \times 10^{96}\text{kg/m}^3$), que as flutuações quânticas do espaço-tempo tornavam-se importantes. Independente do que possa ter ocorrido até o fim da era de Planck, a inflação deve ter tido seu fim em torno de $t_f \propto 10^{-33}\text{s}$ de forma que flutuações nas densidades de energia pudessem ocorrer para que, posteriormente, os núcleos atômicos fossem formados. A inflação, caso tenha de fato ocorrido, é capaz de explicar três grandes problemas enfrentados pela cosmologia moderna:

- **Problema da planaridade:** como comentado previamente, a densidade do Universo é bastante próxima da densidade crítica. Se a constante de curvatura k for identicamente nula, então a densidade do universo será igual a densidade crítica durante toda a evolução. Entretanto, não há motivos para admitirmos que a curvatura seja exatamente zero. Mesmo que $|k|$ tenha valor irrisório, como a densidade de curvatura cai com $1/a^2$, depois de um tempo suficiente, esta densidade torna-se dominante em relação as outras, afastando cada vez mais a densidade total da densidade crítica.
- **Problema do horizonte:** o problema do horizonte tem origem no alto grau de isotropia da radiação cósmica de fundo. As microondas detectadas, provenientes de todas as direções do céu com temperatura T_{CMB} , estão percorrendo o espaço desde o desacoplamento. Radiações vindas de lados opostos no céu, detectadas em antenas na Terra, não estiveram em contato por bilhões de anos. O fato de estarem em equilíbrio térmico é extraordinário.
- **Monopolos magnéticos:** teorias de unificação de forças elementares preveem a existência de outras entidades, além das descritas pelo modelo padrão de partículas. Dentre elas, os monopolos magnéticos. Se tais teorias estiverem corretas, no universo primordial, muito antes do desacoplamento, tais partículas devem ter sido criadas em abundância. Ademais, essas devem ser bastante massivas e, assim, não-relativísticas. Deste modo, com a expansão do universo, os monopolos magnéticos viriam a dominar sobre os demais componentes. Isto, como sabemos, não é observado.

métrica de FLRW admite três tipos de geometria espacial para o universo: hiper-esférica, hiper-hiperbólica e plana; correspondendo aos três possíveis valores de k : $+1$, -1 e 0 , respectivamente.

Além disso, podemos mencionar que **(i)** a expansão exponencial no período de inflação explica a enormidade do universo, **(ii)** a gravidade repulsiva associada ao falso vácuo oferece a possibilidade de explicar como a expansão de Hubble começou, **(iii)** cosmologia inflacionária explica naturalmente o elevadíssimo grau de homogeneidade e isotropia no universo, pela expansão de regiões uniformes microscópicas, tornando-se grandes o suficiente para conter o universo observável, **(iv)** os modelos inflacionários simples estão de acordo com as observações mais recentes das flutuações na temperatura da microonda cósmica de fundo dos experimentos WMAP, CBI, ACBAR e BOOMERANG, dando conta da anisotropia da radiação cósmica de fundo, além de ser o melhor modelo em acordo com as medidas feitas pelo satélite Planck da ESA em 2013 [53–58].

Cordas cósmicas não são observadas diretamente, por outro lado, sua presença pode ser inferida pelos seus efeitos gravitacionais, como mencionamos anteriormente. Por exemplo, *loops* de cordas cósmicas decaem em ondas gravitacionais [59–62], com intensos pulsos associados com *cusps* que se formam, em média, a cada oscilação de um *loop* [63, 64]. Uma classe completamente diferente de assinaturas surge da forma peculiar da sua métrica. O espaço-tempo ao redor de uma corda retilínea é localmente plano mas, globalmente, cônico com um déficit de ângulo planar determinado pela tensão da corda. Isto leva a efeitos interessantes, como a formação de faixas de matéria atrás de cordas em movimento, descontinuidades lineares na temperatura e polarização da CMB e padrões característicos de imagens formadas por efeito de lente gravitacional, como já mencionamos. Além disso, matéria de grande densidade criada em faixas de alto *redshift* pode ocasionar formação inicial de estrelas e alterar de forma significativa o histórico de reionização do universo [65].

Inicialmente, acreditava-se que cordas cósmicas foram as sementes para o crescimento de grandes estruturas no universo [66, 67]. Elas também explicariam as flutuações de temperatura do espectro de larga escala do CMB medidas pelo COBE [68]. Contudo, o espectro do CMB emitido pelas cordas estava em desacordo claro com um pico medido pelo BOOMERANG e MAXIMA em 2000, o que, efetivamente, descartou as cordas cósmicas como fonte significativa de flutuações cósmicas [69, 70]. Subsequentemente, vários picos acústicos no espectro do CMB detectados pelo WMAP forneceram evidências de ondas estacionárias no plasma primordial que não poderiam ocorrer devido a fontes incoerentes ativas, como cordas. Atualmente, a contribuição das cordas para o espectro do CMB é limitada a uma pequena fração da anisotropia total [71–75]. Ainda assim, as considerações teóricas relacionadas a modelos envolvendo cordas cósmicas servem como motivação para sua busca nos dados futuros.

2.4.2 Anisotropias no CMB

Cordas cósmicas induzem anisotropias no CMB de uma forma fundamentalmente diferente das perturbações inflacionárias. Neste último, a inflação estabelece condições para as perturbações que, então, evoluem para frente no tempo, sem a produção de perturbações adicionais. Em contraste, redes de cordas cósmicas persistem através da história do universo e são fontes ativas de perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, todo o tempo. Em particular, isto significa que modos vetoriais — que rapidamente decaem na ausência de um termo fonte e, por esta razão, são raramente considerados na literatura — são significantes para cordas cósmicas e tipicamente comparáveis em magnitude aos modos escalares. Modos tensoriais gerados pelas cordas também estão em um nível comparável, mas seu impacto observacional é geralmente inferior, por causa da natureza oscilatória das ondas gravitacionais [76]. Antes da recombinação (período em que átomos começaram a ser formados), perturbações de densidade e velocidade de fluido de bárions-fótons são produzidas nos sulcos de cordas em movimento. Após a recombinação, cordas que cruzam nosso campo de visão geram descontinuidades lineares na temperatura do CMB (efeito Kaiser-Stebbins-Gott, [77, 78]). Tanto os sulcos quanto o efeito KSG, ocorrem devido ao déficit de ângulo planar na métrica que cerca a corda. Além disso, partículas experimentam atração gravitacional à corda, caso ela não seja perfeitamente retilínea. A busca pela assinatura de cordas cósmicas no CMB pode ser dividida em tentativas de detectar, diretamente, descontinuidades lineares nos padrões de temperatura e polarização.

2.4.3 Modos-B de polarização

Uma questão importante é se a contribuição devida às cordas pode ser distinguida de outros desvios do cenário adiabático padrão, tais como ondas gravitacionais (previstas em modelos de inflação para grandes campos) e outros tipos de defeitos topológicos como texturas e cordas semi-locais. Mesmo tendo sido estabelecido que as cordas cósmicas não podem ser fonte da maioria da anisotropia da temperatura, o CMB ainda pode fornecer uma assinatura distinta da sua presença através dos modos-B do espectro de polarização primordial. Enquanto gradientes de intensidade automaticamente geram padrões pares, ou modos-E, nos mapas de polarização do CMB, padrões ímpares, ou modos-B, não são produzidos a menos que haja perturbações na métrica que possuam paridade localmente não-nula. Desvios locais da paridade zero, podem ser causados por modos tensoriais, ou ondas gravitacionais, que podem ser representadas como combinações lineares de polarizações à esquerda ou à direita, assim como podem ser causados

por modos vetoriais não-nulos, ou vorticidade. O modo-B das cordas é gerado principalmente por modos vetoriais, com um espectro que é diferente daquele geralmente produzido a partir de modos tensoriais que surgem de cenários inflacionários. Como veremos mais adiante, experimentos com a polarização do CMB podem ser capazes de revelar a presença de cordas cósmicas através da sua assinatura de modos-B, mesmo que as cordas contribuam com apenas 0,1% para a anisotropia da temperatura do CMB [79–87].

Em alguns modelos, próximo ao final do período de inflação, ocorre transição de fase em um conjunto de campos. Uma transição de fase térmica, em uma teoria com um conjunto topologicamente não-trivial de estados fundamentais, leva à formação de defeitos, estruturas compostas de configurações espaciais variáveis do campo escalar (e possivelmente de gauge). A partícula ou campo hipotético responsável pela inflação é chamada *inflaton*. No final da inflação, o *inflaton* substitui a temperatura como parâmetro de controle e os defeitos se formam igualmente bem. Modelos híbridos também podem ser acomodados, no contexto de supersimetria e Grande Unificação. Cordas cósmicas possuem uma propriedade crucial: seu decaimento é rápido o suficiente para manter uma densidade relativa constante com relação ao resto do conteúdo do universo. Esta propriedade não é compartilhada pelos demais defeitos: monopolos em particular (puntiformes) e paredes de domínio (bidimensionais) acabariam dominando a densidade de energia atualmente, a menos que a magnitude da sua massa fosse muito menor que a da inflação (da ordem de 10^{15} GeV) [88, 89].

2.4.4 Defeitos topológicos e o sinal de modos-B detectado pelo BICEP2

É convenção parametrizar a contribuição de ondas gravitacionais em termos da razão tensor-escalar $r = \mathcal{P}_t / \mathcal{P}_s$. A detecção para baixo-multipolo de anisotropias de modos-B de polarização pelo projeto BICEP2, abre uma nova janela observacional em modelos que geram perturbações primordiais que levam à formação de estruturas. O candidato principal para explicar este sinal de modos-B são as perturbações (tensoriais) de ondas gravitacionais primordiais geradas pela cosmologia inflacionária. Estas fornecem uma boa correspondência para uma razão tensor-escalar de $r = 0,2$, com a forma espectral na região de $\ell \approx 40 - 150$, mas perdendo um pouco a combinação para maiores multipolos, por razões ainda desconhecidas [90].

Um mecanismo alternativo para gerar modos-B primordiais é a presença de uma mistura de defeitos topológicos. Muitos cenários inflacionários, particularmente do tipo inflação híbrida, terminam com uma transição de fase. Produção de defeitos em tal transição é natural e plausivelmente um contribuinte sub-dominante para a anisotropia da temperatura total.

Se a detecção dos modos-B pelo experimento BICEP2 for confirmada, ondas gravitacionais primordiais seriam uma adição necessária ao modelo cosmológico padrão. Contudo, os dados do BICEP2 não correspondem muito bem para grandes valores de ℓ . Uma mistura de defeitos topológicos melhoram o *fit*, desde que a razão tensor-escalar seja $r = 0,15$ [91].

2.4.5 Cordas fundamentais

Estruturas unidimensionais também se destacam como constituintes fundamentais da matéria em teoria de cordas, o que permite a criação, no calor do big bang, de cordas elementares infinitamente longas e relativamente leves (se comparadas à escala de Planck). Estas cordas também se aniquilam rapidamente, portanto, o estudo de cordas cósmicas é agora um recurso importante da cosmologia de cordas elementares. Apesar de as interações entre cordas dependerem da escolha do modelo, todos os tipos de cordas possuem campos gravitacionais e, caso sejam massivas o suficiente, acrescentam às perturbações gravitacionais da inflação. A busca por cordas é, portanto, parcialmente, uma busca por desvios no modelo inflacionário padrão [15].

No contexto de grande unificação da física de partículas, cordas cósmicas existem pelas mesmas razões que vórtices existem em superfluidos e supercondutores. Trabalhos iniciais em teoria de cordas mostram que elas seriam pesadas e instáveis, mas à medida que os modelos se tornaram mais sofisticados, apareceram modelos de cordas leves e estáveis. Portanto, a busca por cordas cósmicas pode levar à validação da teoria de cordas fundamentais. Contudo, muitos passos serão necessários para uma validação rigorosa da teoria de cordas: não só cordas cósmicas precisam ser detectadas, como também precisam demonstrar assinaturas únicas da teoria de cordas.

Avanços em cosmologia observacional nas últimas décadas dão esperança de que cordas cósmicas possam ser descobertas, ou mesmo que não sejam descobertas, podem vir a ser limitadas de forma a fornecer informações úteis para a construção do modelo de teoria de cordas. Estes avanços observacionais incluem medições de alta precisão da radiação cósmica de fundo, enormes inspeções que mapeiam grandes estruturas cósmicas, grandes detectores de raios cósmicos, observações de satélite de fótons de raios-gamma de altas energias, detectores de neutrinos, busca e descobertas de várias pulsares de milissegundos e sofisticados detectores de ondas gravitacionais [47]. Espera-se que estes esforços possam levar a evidências observacionais para a teoria de cordas.

2.5 Soluções tipo cordas solitônicas no modelo abeliano de Higgs

A teoria de campo de gauge mais simples que apresenta uma solução tipo corda é o modelo abeliano de Higgs [92], que consiste em um campo escalar complexo, ϕ , e um campo de gauge, A_μ , com a ação de Minkowski

$$S = - \int d^4x \left(D_\mu \phi^* D^\mu \phi + V(\phi) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right), \quad (2.9)$$

onde a derivada covariante é $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ e a densidade de energia potencial é

$$V = \frac{1}{2} \lambda (|\phi|^2 - \phi_0^2)^2. \quad (2.10)$$

As equações de campo são

$$D^2 \phi + \lambda (|\phi|^2 - \phi_0^2) \phi = 0 \quad (2.11)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - ie (\phi^* D_\nu \phi - D_\nu \phi^* \phi) = 0, \quad (2.12)$$

onde $D^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu)$. O estado fundamental pode ser escrito como $\phi = e^{i\alpha} \phi_0$ e $A_\mu = 0$. Ocorrem excitações em torno do estado fundamental que correspondem a um escalar de massa $m_s = \sqrt{2\lambda} \phi_0$ e um vetor de massa $m_v = e\phi_0$.

Existem soluções estáticas de energia finita, com simetria cilíndrica, da seguinte forma

$$\phi = \phi_0 f(r) e^{i\theta}, \quad A_i = \frac{1}{er} A_\theta(r) \hat{\theta}_i, \quad A_0 = 0, \quad (2.13)$$

onde θ é a coordenada azimutal e r é a coordenada radial.

A métrica gerada por uma corda cósmica é a solução não-trivial mais simples das equações de campo de Einstein. A corda cósmica mais simples possível é infinita, fina, retilínea e estática. Tal corda possui alto grau de simetria — azimutal, invariância translacional e perante *boosts* de Lorentz ao longo da corda. A solução para campos fracos (que é praticamente idêntica à solução geral) foi encontrada pela primeira vez em 1981 por A. Vilenkin [67]. A métrica exata foi descoberta independentemente por B. Linet, D. Garfinkle *et al* [78, 93–95] em 1985. Esta solução foi construída assumindo um elemento de linha estático com simetria cilíndrica [96]. Ignorando a micro-estrutura das cordas cósmicas e tratando-as como objetos essencialmente unidimensionais, podemos caracterizá-las por um único parâmetro μ — sua massa por unidade

de comprimento. Em resumo, admitindo que a corda esteja ao longo do eixo z e usando o sistema de coordenadas cilíndricas, a solução obtida é

$$ds^2 = -dt^2 + dz^2 + dr^2 + (1 - 4G\mu)^2 r^2 d\phi^2, \quad (2.14)$$

onde $r \geq 0$ e $\phi = [0, 2\pi]$. O elemento de linha (2.14) possui uma interpretação geométrica bastante simples. É possível reescrevê-lo como elemento de linha de Minkowski

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2, \quad (2.15)$$

se definirmos a coordenada angular $\theta = (1 - 4G\mu)\phi$ de modo que

$$0 \leq \theta < 2\pi(1 - 4G\mu) \equiv \frac{2\pi}{p}. \quad (2.16)$$

Em outras palavras, a presença da corda introduz um déficit de ângulo azimutal $8\pi G\mu$, resultando em uma hipersuperfície com a geometria de um cone para t e z constantes (ver figura 2.2).

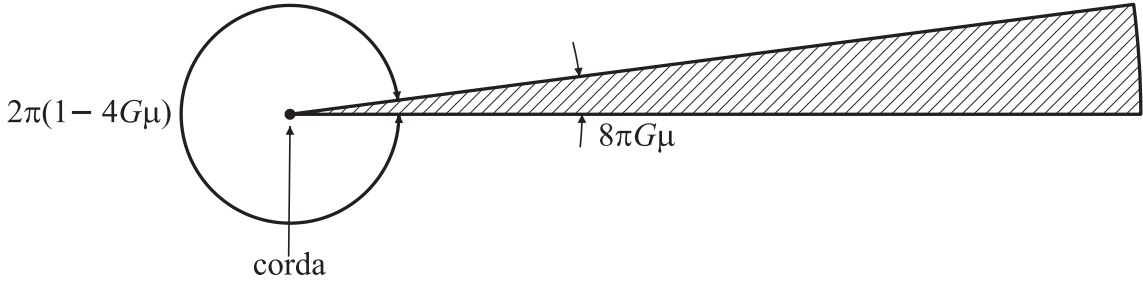


Figura 2.2 Espaço-tempo cônico externo à uma corda retilínea infinita.

O espaço-tempo cônico é localmente plano exceto em um ponto, onde a curvatura apresenta uma singularidade do tipo delta de Dirac e o escalar de curvatura é dado por

$$R = 4\pi(p - 1)\delta^{(2)}(\vec{r}), \quad (2.17)$$

portanto o espaço-tempo não é globalmente plano. O caso em que $\mu = 0$ corresponde a $p = 1$ e ao espaço-tempo de Minkowski. Quando $G\mu \rightarrow \frac{1}{4}$ o déficit de ângulo planar ocupa toda a área azimutal ao redor da corda e $p \rightarrow \infty$. Para $G\mu \geq \frac{1}{4}$ a métrica não serve mais para

descrever uma corda. Por outro lado, se considerarmos $\mu < 0$, então $0 < p < 1$ e temos um excesso de ângulo azimutal. Em matéria condensada, defeitos do tipo desclinação são descritos geometricamente através de um tensor métrico análogo ao de uma corda cósmica [11, 17]. É possível que estas estruturas demonstrem comportamento correspondente ao caso $0 < p < 1$. Neste caso o defeito apresenta curvatura negativa e o excesso de ângulo planar corresponde a um espaço-tempo anti-cônico.

2.6 Espaços maximalmente simétricos

A observação de galáxias distantes mostrou que o universo não é estático. Iniciou-se, então, a construção de modelos cosmológicos contemplando a ideia de que o universo é homogêneo e isotrópico no espaço, porém não no tempo, ou seja, pode ser separado em folheações tipo-espaço homogêneas e isotrópicas, o que implica que o espaço-tempo deve ser maximalmente simétrico.

Uma variedade D -dimensional é dita "maximalmente simétrica" quando apresenta o mesmo número de simetrias que o espaço euclidiano usual. Formalmente, um espaço é maximalmente simétrico quando possui $\frac{D(D+1)}{2}$ vetores de Killing.

Duas variedades maximalmente simétricas serão detalhadas nas seções seguintes: o espaço-tempo de de Sitter (dS), para $\Lambda > 0$ e anti-de Sitter (AdS), onde $\Lambda < 0$, sendo Λ a constante cosmológica presente nas equações de Einstein [97]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} . \quad (2.18)$$

2.6.1 Espaço-tempo de de Sitter (dS)

O espaço de de Sitter n -dimensional, para $D \geq 2$, é a solução das equações de Einstein no vácuo com uma constante cosmológica, Λ , positiva. Pode ser descrito como um subconjunto de pontos $(z_0, z_1, \dots, z_D) \in \mathbf{R}^{1,D}$, satisfazendo a equação da hipérbole de uma folha

$$z_0^2 - z_1^2 - \dots - z_D^2 = -\alpha^2 , \quad (2.19)$$

sendo $\alpha > 0$ o raio de curvatura do espaço. O escalar de curvatura R e a constante cosmológica Λ são

$$R = \frac{D(D-1)}{\alpha^2}, \quad \Lambda = \frac{(D-1)(D-2)}{2\alpha^2}. \quad (2.20)$$

Em quatro dimensões, o espaço-tempo de de Sitter é mais facilmente representado pelo hiperboloide

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -\alpha^2, \quad (2.21)$$

imerso em um espaço-tempo de Minkowski penta-dimensional com métrica

$$ds^2 = -dz_0^2 + dz_1^2 + dz_2^2 + dz_3^2 + dz_4^2. \quad (2.22)$$

De forma a resolver as equações de campo, devemos escolher um sistema de coordenadas. Consideremos inicialmente o sistema definido por:

$$z_0 = \alpha \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) + \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} |\vec{x}|^2 \quad (2.23)$$

$$z_4 = \alpha \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) - \frac{1}{2\alpha} e^{\frac{t}{\alpha}} |\vec{x}|^2 \quad (2.24)$$

$$z_i = e^{\frac{t}{\alpha}} x_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad -\infty < (t, x^i) < \infty, \quad (2.25)$$

que cobre apenas a metade da variedade de de Sitter com $z_0 + z_4 > 0$. Nessas coordenadas, o elemento de linha será expresso por:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\frac{2t}{\alpha}} \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2. \quad (2.26)$$

Podemos, também, definir um sistema de coordenadas em termos do tempo conforme $\tau = -\alpha e^{-\frac{t}{\alpha}}$, $-\infty < \tau < 0$. Nesse caso, o elemento de linha é

$$ds^2 = \left(\frac{\alpha}{\tau}\right)^2 \left[-d\tau^2 + \sum_{i=1}^3 (dz^i)^2 \right], \quad (2.27)$$

que revela que esta região do espaço de dS é conforme à uma região do espaço de Minkowski, com fator conforme $\frac{\alpha}{\tau}$. Usando o sistema de coordenadas estático definido por

$$z_0 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \sinh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad (2.28)$$

$$z_1 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cosh\left(\frac{t}{\alpha}\right) \quad (2.29)$$

$$z_2 = r \sin \theta \cos \theta \quad (2.30)$$

$$z_3 = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.31)$$

$$z_4 = r \cos \theta, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (2.32)$$

que cobre a metade da variedade de dS com $z_0 + z_1 > 0$, o elemento de linha é expresso por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.33)$$

evidenciando a simetria esférica presente em todos os espaços maximalmente simétricos.

2.6.2 Espaço-tempo anti-de Sitter (AdS)

Para D dimensões, sendo $D \geq 2$, o espaço de AdS pode ser descrito como o subconjunto de pontos $(z_0, z_1, \dots, z_D) \in \mathbf{R}^{2,D-1}$ sobre a hipérbole de uma folha que satisfaz

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - \dots - z_D^2 = \alpha^2, \quad (2.34)$$

com a métrica induzida pela métrica usual em $\mathbf{R}^{2,D-1}$,

$$ds^2 = -dz_0^2 - dz_1^2 + dz_2^2 + \dots + dz_D^2, \quad (2.35)$$

sendo $\alpha > 0$ a curvatura do espaço, o escalar de curvatura R e a constante cosmológica Λ

$$R = -\frac{D(D-1)}{\alpha^2}, \quad \Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2\alpha^2}. \quad (2.36)$$

Podemos parametrizar toda a hipérbole usando o sistema de coordenadas globais

$$z_0 = \alpha \cos \tau \cosh \rho \quad (2.37)$$

$$z_1 = \alpha \sin \tau \cosh \rho \quad (2.38)$$

$$z_2 = \alpha \sinh \rho \cos \theta_1 \quad (2.39)$$

$$z_3 = \alpha \sinh \rho \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (2.40)$$

$$\vdots \quad (2.41)$$

Aqui, $\tau \in (-\pi, \pi)$, $\rho \in (0, \infty)$ e θ_i parametrizam uma esfera $(D-2)$ -dimensional. A métrica será

$$ds^2 = \alpha^2 \left[-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{(n-2)}^2 \right]. \quad (2.42)$$

Trocando de coordenadas para $r = \alpha \sinh \rho$, $r \in (0, \infty)$, $\tau = \frac{t}{\alpha}$, o elemento de linha fica expresso por

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{(n-2)}^2. \quad (2.43)$$

O sistema de coordenadas de Poincaré, que cobre a região $z_0 + z_2 > 0$, é definido como:

$$z_0 = \frac{1}{2u} (\alpha^2 + u^2 - t^2 + (x^i)^2) \quad (2.44)$$

$$z_1 = \frac{\alpha t}{u} \quad (2.45)$$

$$z_2 = \frac{1}{2u} (\alpha^2 - u^2 + t^2 - (x^i)^2) \quad (2.46)$$

$$z_3 = \frac{\alpha x^i}{u}, \quad i = 1, \dots, D-2, \quad (2.47)$$

onde $x^i, t \in (-\infty, \infty)$ e $u \in (0, \infty)$. O elemento de linha é

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{u^2} [-dt^2 + du^2 + (dx^i)^2]. \quad (2.48)$$

2.7 Corda cósmica no espaço-tempo de dS

A geometria associada ao espaço-tempo correspondente é dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\frac{2t}{\alpha}} \left(dr^2 + r^2 d\phi^2 + \sum_{i=1}^N dz_i^2 \right), \quad (2.49)$$

onde $r \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi/q]$ são as coordenadas na geometria cônica, $(t, z_i) \in (-\infty, \infty)$ e o parâmetro α é relacionado à constante cosmológica e ao tensor de Ricci pelas fórmulas (2.20), onde n é a dimensão do espaço-tempo dada por $n = 3 + N$. O parâmetro q é maior que a unidade e implica a presença da corda cósmica² [98]. Usaremos o tempo conforme τ , definido como

$$\tau = -\alpha e^{-t/\alpha}, \quad -\infty < \tau < 0. \quad (2.50)$$

Em termos desta coordenada, o elemento de linha acima toma a forma

$$ds^2 = (\alpha/t)^2 \left(-d\tau^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + \sum_{i=1}^N dz_i^2 \right). \quad (2.51)$$

O elemento de linha (2.49) também pode ser escrito em coordenadas estáticas. Para simplificar, consideramos a transformação de coordenadas para o caso $n = 4$, com $N = 1$. Esta transformação é dada pelas relações

$$t = t_s + \frac{\alpha}{2} \ln(1 - r_s^2/\alpha^2) \quad (2.52)$$

$$r = \frac{r_s e^{-t_s/\alpha} \sin \theta}{\sqrt{1 - r_s^2/\alpha^2}} \quad (2.53)$$

$$z_1 = \frac{r_s e^{-t_s/\alpha} \cos \theta}{\sqrt{1 - r_s^2/\alpha^2}} \quad (2.54)$$

$$\phi = \phi \quad (2.55)$$

e o elemento de linha fica na forma

$$ds^2 = -(1 - r_s^2/\alpha^2) dt_s^2 + \frac{dr_s^2}{1 - r_s^2/\alpha^2} + r_s^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.56)$$

²Pode-se mostrar que, definindo as coordenadas $z_0 = \alpha \sinh(t/a) + \frac{1}{2\alpha} e^{t/\alpha} (r^2 + \vec{x}^2)$, $z_n = \alpha \cosh(t/a) - \frac{1}{2\alpha} e^{t/\alpha} (r^2 + \vec{x}^2)$, $z_1 = e^{t/\alpha} r \cos \phi$, $z_2 = e^{t/\alpha} r \sin \phi$ e $z_{i+2} = e^{t/\alpha} x_i$, elas satisfazem a equação do hiperboloide $z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - \sum z_i^2 - z_n^2 = -\alpha^2$, imerso em um espaço-tempo cônico $(n+1)$ -dimensional.

com $0 \leq \phi \leq 2\pi/q$. Introduzindo uma nova coordenada angular $\varphi = q\phi$, de (2.56), obtem-se o elemento de linha estático do espaço-tempo de dS com déficit de ângulo discutido previamente em [98], onde é mostrado que o efeito do vórtice no espaço-tempo de dS é criar um déficit angular na métrica (2.56).

Consideramos, inicialmente, a equação de Klein-Gordon no espaço curvo [42]

$$(\nabla_l \nabla^l + m^2 + \xi R)\Phi(x) = 0, \quad (2.57)$$

onde ξ é uma constante de acoplamento arbitrária. O conjunto completo de soluções desta equação, no espaço-tempo definido por (2.51), é:

$$\Phi_\sigma(x) = C_\sigma \eta^{(D-1)/2} H_\nu^{(1)}(\lambda \eta) J_{q|n|}(pr) e^{i\vec{k} \cdot \vec{z} + in\phi}, \quad \eta = \alpha e^{-t/\alpha}, \quad (2.58)$$

onde $\lambda = \sqrt{p^2 + k^2}$, $k = |\vec{k}|$, $\nu = \sqrt{(D-1)/4 - \xi D(D-1) - m^2 \alpha^2}$ e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. $H_\nu^{(1)}$ e J_ν representam funções de Hankel e Bessel, respectivamente e $\sigma = (p, \vec{k}, n)$ é o conjunto de números quânticos, sendo $p \in [0, \infty)$. O coeficiente C_σ pode ser obtido através da condição de ortonormalização

$$i \int d^{D-1}x \sqrt{|g|} g^{00} [\Phi_\sigma(x) \partial_t \Phi_{\sigma'}^*(x) - \Phi_{\sigma'}^*(x) \partial_t \Phi_\sigma(x)] = \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (2.59)$$

resultando em

$$C_\sigma^2 = \frac{q p e^{i(\nu - \nu^*)\pi/2}}{8 \alpha^{D-2} (2\pi)^{D-3}}, \quad (2.60)$$

para a constante de normalização.

Para obter o conjunto completo de soluções da equação de Dirac em dS na presença de uma corda cósmica infinitamente longa, alinhada ao eixo- z [41], escrevemos o seguinte elemento de linha em coordenadas cilíndricas:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2t/\alpha} (dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2), \quad (2.61)$$

onde $r \geq 0$, $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \phi \leq \phi_0 \leq 2\pi$ e os pontos espaciais (r, ϕ, z) e $(r, \phi + \phi_0, z)$ são identificados. Consideramos $D = 4$ por simplificação. O parâmetro α na equação acima é relacionado à constante cosmológica através da fórmula $\alpha = \sqrt{3/\Lambda}$. A dinâmica do campo

espinorial massivo no espaço curvo é descrita pela equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)\phi, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad (2.62)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo e Γ_μ é a conexão espinorial, dadas em termos das matrizes de Dirac no espaço plano $\gamma^{(a)}$ pelas relações

$$\gamma^\mu = e^\mu_{(a)} \gamma^{(a)}, \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e^\nu_{(a)} e_{(b)\nu;\mu}, \quad (2.63)$$

onde o ponto-e-vírgula representa a derivada covariante para campos vetoriais, $e^\mu_{(a)}$ é a base tetrada que satisfaz $e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} \eta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$, sendo η^{ab} o tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski.

Usando a forma padrão das matrizes de Dirac no espaço-tempo plano e adotando uma base tetrada conveniente, é possível resolver a equação (2.63) e obter suas autofunções. Para as autofunções de frequência positiva, encontra-se a seguinte expressão:

$$\psi_\sigma^{(+)}(x) = C^{(+)} \eta^2 e^{i(qj\phi + kz)} \begin{pmatrix} H_{\frac{1}{2} - im\alpha}^{(1)}(\gamma\eta) J_{\beta_1}(\lambda r) e^{-iq\phi/2} \\ C_\phi^{(1)} H_{\frac{1}{2} - im\alpha}^{(1)}(\gamma\eta) J_{\beta_2}(\lambda r) e^{iq\phi/2} \\ -is H_{-\frac{1}{2} - im\alpha}^{(1)}(\gamma\eta) J_{\beta_1}(\lambda r) e^{-iq\phi/2} \\ -is C_\phi^{(1)} H_{-\frac{1}{2} - im\alpha}^{(1)}(\gamma\eta) J_{\beta_2}(\lambda r) e^{iq\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

onde $q = 2\pi/\phi_0 \geq 1$, $\eta = |\tau|$, $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$, $0 \leq \lambda < \infty$, $-\infty < k < \infty$, $H_V^{(l)}(x)$ são as funções de Hankel e $J_V(x)$ são as funções de Bessel. Temos ainda que $s = \pm 1$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = n + \frac{1}{2}$ e $C_\phi^{(1)} = \frac{i\lambda \varepsilon_n}{k + s\gamma}$. As funções de Bessel possuem ordem

$$\beta_1 = q|j| - \frac{\varepsilon_j}{2}, \quad \beta_2 = q|j| + \frac{\varepsilon_j}{2}. \quad (2.65)$$

O coeficiente $C^{(+)}$ é determinado pela condição de ortonormalização

$$\int d^3x \sqrt{|g|} \psi_\sigma^{(+)*} \psi_{\sigma'}^{(+)} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.66)$$

sendo g o determinante do tensor métrico correspondente ao elemento de linha (2.61) e $\sigma = (\lambda, k, j, s)$ o conjunto de números quânticos que representa cada solução. O delta do lado direito da equação é o produto entre os deltas de Kronecker para os índices discretos (j, s) e as

funções delta de Dirac para os contínuos (λ, k) . Usando o wronskiano das funções de Hankel, encontra-se

$$|C^{(+)}|^2 = \frac{q\lambda e^{\alpha m\pi}}{32\pi\alpha^3}(\gamma + sk) . \quad (2.67)$$

De forma similar, para as autofunções de frequência negativa correspondente a um estado de vácuo de Bunch-Davies, encontra-se a seguinte expressão.

$$\psi_{\sigma}^{(-)}(x) = C^{(-)}\eta^2 e^{-i(qj\phi + kz)} \begin{pmatrix} H_{\frac{1}{2}-im\alpha}^{(2)}(\gamma\eta)J_{\beta_2}(\lambda r)e^{-iq\phi/2} \\ C_{\phi}^{(2)}H_{\frac{1}{2}-im\alpha}^{(2)}(\gamma\eta)J_{\beta_1}(\lambda r)e^{iq\phi/2} \\ -isH_{-\frac{1}{2}-im\alpha}^{(2)}(\gamma\eta)J_{\beta_2}(\lambda r)e^{-iq\phi/2} \\ -isC_{\phi}^{(2)}H_{-\frac{1}{2}-im\alpha}^{(2)}(\gamma\eta)J_{\beta_1}(\lambda r)e^{iq\phi/2} \end{pmatrix} , \quad (2.68)$$

com $C_{\phi}^{(2)} = \frac{i\varepsilon_j\lambda}{k-s\gamma}$ e

$$|C^{(-)}|^2 = \frac{q\lambda e^{-\alpha m\pi}}{32\pi\alpha^3}(\gamma - sk) . \quad (2.69)$$

Para as autofunções (2.68), $\hat{J}_3\psi_{\sigma}^{(-)} = -qj\psi_{\sigma}^{(-)}$ e $j = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$

O conjunto completo de funções descrito acima pode ser usado na investigação de efeitos induzidos pela estrutura cônica do espaço-tempo [41]. Sabe-se que o caso de um campo escalar no espaço-tempo de dS $(D+1)$ -dimensional, o estado de vácuo de Bunch-Davies não é fisicamente realizável para $m^2\alpha^2 \leq -D(D+1)\xi$, onde ξ é o parâmetro de acoplamento da curvatura. Em particular, este é o caso para um campo sem massa minimamente acoplado. A função de Wightman correspondente apresenta divergências infravermelhas para modos de longo comprimento de onda. Para um campo fermiônico, o estado de vácuo de Bunch-Davies é fisicamente realizável independentemente da massa.

2.8 Corda cósmica no espaço-tempo de AdS

Em coordenadas cilíndricas, a geometria associada com uma corda cósmica estática alinhada ao eixo- y no espaço tempo de AdS 4-dimensional é dada pelo elemento abaixo [31, 32]:

$$ds^2 = e^{-2y/a}(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2) + dy^2 , \quad (2.70)$$

onde $r \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi/q]$ definem as coordenadas na geometria cônica, $(t, y) \in (-\infty, \infty)$ e o parâmetro a determina a escala de curvatura do espaço-tempo. O parâmetro q é maior que a unidade e está relacionado com a presença da corda. Usando coordenadas de Poincaré definidas por $z = ae^{y/a}$, o elemento de linha acima é escrito na forma relacionada conformalmente com o elemento de linha associado à corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski:

$$ds^2 = (a/z)^2(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2) . \quad (2.71)$$

Nesse sistema de coordenadas, $z \in [0, \infty)$. Os limites $z = 0$ e $z = \infty$ correspondem à fronteira e ao horizonte de AdS, respectivamente.

A generalização de (2.71) para um espaço-tempo de AdS D -dimensional é feita de forma usual, acrescentando coordenadas euclidianas extras:

$$ds^2 = (a/z)^2(-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2 + \sum_{i=1}^d dz_i^2) , \quad (2.72)$$

onde $d = D - 4$.

A equação de campo [42] considerada é

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2 - \xi R)\Phi(x) = 0 . \quad (2.73)$$

No sistema de coordenadas definido em (2.72), o conjunto completo de soluções desta equação, regulares na fronteira $z = 0$, é caracterizado pelo conjunto de números quânticos $\sigma = (\lambda, n, p, \vec{k})$ e é dado por

$$\Phi_\sigma(x) = \sqrt{\frac{qa^{2-D}p\lambda}{2(2\pi)^{D-3}E}} z^{\frac{D-1}{2}} J_\nu(\lambda z) J_{|n|q}(pr) e^{i(nq\phi + \vec{k} \cdot \vec{x} - Et)} , \quad (2.74)$$

sendo $\vec{x} = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, $(\lambda, p) \in [0, \infty)$, $k_i \in (-\infty, \infty)$ e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ainda, $J_\mu(u)$ representa a função de Bessel, $E = \sqrt{\lambda^2 + p^2 + \vec{k}^2}$ e $\nu = \sqrt{(D-1)^2/4 - \xi D(D-1) + m^2 a^2}$.

As funções de modo em (2.74) são normalizadas pela condição de ortonormalização de Klein-Gordon usual (2.59).

A análise da polarização do vácuo fermiônico no espaço tempo de AdS, incluindo a solução da equação de Dirac, obtenção do condensado fermiônico e do valor esperado no vácuo do tensor energia-momento, uma das nossas contribuições apresentadas nesta tese, será desenvolvida em detalhes no capítulo 6.

Teoria clássica de campos em espaços curvos

3.1 Interação do campo bosônico com campos externos

A dinâmica relativística de um campo escalar, $\varphi(x)$, é governada pela equação de Klein-Gordon [99, 100]. Na seção seguinte, esta equação é apresentada, admitindo-se interação entre este campo e os campos gravitacional e eletromagnético. Incorporar estas interações, implica em modificar a equação de Klein-Gordon de forma a torná-la invariante por transformações de *gauge* e por transformações gerais de coordenadas.

3.1.1 Equação de Klein-Gordon na presença de um campo eletromagnético

A inclusão de um campo de *gauge*, A_a , na densidade lagrangeana se faz mediante a redefinição do conceito de derivada

$$\partial_a \rightarrow \partial_a + ieA_a , \quad (3.1)$$

onde A_a é o quadri-vetor potencial eletromagnético¹ e e é a carga elétrica do campo, o que implicitamente introduz o acoplamento entre o campo de matéria e o campo de *gauge*. Este acoplamento, chamado de acoplamento mínimo é do tipo $J^a A_a$, onde a densidade de corrente de matéria, J^a , é função do tipo do campo de matéria.

A ação associada a um campo escalar carregado e livre, com massa m , é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(x) , \quad (3.2)$$

onde a densidade lagrangeana do campo escalar, $\mathcal{L}(x)$, é

$$\mathcal{L}(x) = -g^{ab} \partial_a \varphi^*(x) \partial_b \varphi(x) - m^2 \varphi^*(x) \varphi(x) , \quad (3.3)$$

sendo g_{ab} o tensor métrico correspondente ao espaço plano e $g = \det(g_{ab})$. Considerando que

¹Índices latinos implicam coordenadas cartesianas e índices gregos implicam presença do campo gravitacional.

o campo $\varphi(x)$ está interagindo com o campo eletromagnético $A_a(x)$, a densidade lagrangeana (3.3), de acordo com (3.1), torna-se

$$\mathcal{L}(x) = -g^{ab}(D_a\varphi(x))^*D_b\varphi(x) - m^2\varphi^*(x)\varphi(x) , \quad (3.4)$$

onde $D_a = \partial_a + ieA_a$.

Do princípio variacional para a ação determinada pela lagrangeana (3.4), encontramos a equação de Klein-Gordon

$$(D_a D^a - m^2)\varphi(x) = 0 . \quad (3.5)$$

Variando a ação (3.2) com respeito ao tensor métrico g_{ab} , como segue,

$$T_{ab}(x) = -\frac{2}{\sqrt{-g(x)}} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}(x)} , \quad (3.6)$$

obtemos a expressão para o tensor energia-momento

$$T_{ab}(x) = (D_a\varphi(x))^*D_b\varphi(x) + (D_b\varphi(x))^*D_a\varphi(x) - g_{ab}\mathcal{L}(x) . \quad (3.7)$$

3.1.2 Equação de Klein-Gordon na presença de um campo gravitacional

De acordo com a teoria da relatividade geral, o campo gravitacional é descrito pela curvatura do espaço-tempo pseudo-Riemanniano. Um dos princípios que fundamentam a formulação da relatividade geral é o *princípio da covariância geral*, que pode ser enunciado da seguinte forma: *as equações que descrevem as leis da física devem ter a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas*. Isto significa que os resultados físicos não dependem, em particular, do sistema de coordenadas usado para obter os resultados [101].

O princípio da covariância geral é muito útil quando tentamos generalizar as leis da relatividade restrita, incorporando o campo gravitacional. A maneira mais simples de incluir a interação de um campo escalar com o campo gravitacional consiste na generalização covariante da equação de campo (equação de Klein-Gordon). Esta generalização é feita trocando-se a derivada usual, ∂_μ , pela derivada covariante gravitacional², ∇_μ , no formalismo de campo livre.

Tal interação com o campo gravitacional é chamada de acoplamento mínimo. A equação

²A derivada covariante de um tensor F_V^λ , é definida por $\nabla_\mu F_V^\lambda = \partial_\mu F_V^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha F_V^\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda F_V^\alpha$, onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ são símbolos de Christoffel de segunda espécie.

do campo escalar, neste caso, é dada por

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (3.8)$$

ou ainda

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - m^2 \right] \varphi(x) = 0 \quad (3.9)$$

onde $g = \det g_{\mu\nu}$.

De fato, podemos verificar que a equação de Klein-Gordon, escrita nessa forma, é covariante por transformações gerais de coordenadas.

Entretanto esta equação não é conformalmente invariante, mesmo no caso em que $m = 0$. Isto significa que, quando mapeamos o espaço Riemanniano com a métrica $g_{\mu\nu}$ em outro com a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)} g_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

onde $\sigma(x)$ é uma função arbitrária e bem comportada das coordenadas, não existe nenhuma transformação $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = F[\sigma]\varphi$ tal que a equação de onda (3.8) preserve a forma. O significado físico da invariância conforme é que um campo sem massa não tem escala própria de comprimento (para um campo massivo a escala é o comprimento Compton $\lambda_c = m^{-1}$) e, como consequência, a equação que governa a dinâmica do campo deve ter a mesma forma em espaços Riemannianos entre os quais a transformação conforme dada por (3.10) pode ser estabelecida.

Uma outra generalização covariante da equação do campo escalar foi sugerida por Gursey [102], dada por

$$(\nabla_\mu \nabla^\mu - \xi R - m^2)\varphi(x) = 0 \quad (3.11)$$

ou

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - \xi \mathcal{R} - m^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (3.12)$$

onde $R = R^\mu_\mu$ é o escalar de curvatura do espaço-tempo, sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci.

Se supormos $\xi = \xi_c = \frac{N-2}{4(N-1)}$, onde N é a dimensão do espaço (para $N = 4$, temos $\xi = \frac{1}{6}$), então a invariância conforme do sistema para o campo escalar sem massa será garantida. De fato, quando o mapeamento (3.10) é acompanhado com a transformação do campo $\varphi(x)$ de acordo com a fórmula

$$\varphi(x) \rightarrow \tilde{\varphi}(x) = e^{\frac{N-2}{2}\sigma(x)} \varphi(x), \quad (3.13)$$

a equação (3.11) transforma-se em

$$\left(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}^\mu - \xi_c \tilde{R} - m^2 e^{2\sigma(x)} \right) \tilde{\varphi}(x) = 0 , \quad (3.14)$$

onde $\tilde{\nabla}_\mu$ e $\tilde{R}$ são calculados na métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Para verificar isto é suficiente usar a lei de transformação do escalar de curvatura R sob a transformação (3.10) [103]:

$$\tilde{R} = e^{2\sigma(x)} [R + 2(N-1)\Delta_2\sigma - (N-1)(N-2)\Delta_1\sigma] , \quad (3.15)$$

onde $\Delta_1\sigma = \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma$ e $\Delta_2\sigma = \nabla_\mu\nabla^\mu\sigma$.

Comparando (3.11) com (3.14), podemos ver que, para $m = 0$ e $\xi = \xi_c$, a equação (3.11) é realmente invariante por transformações conformes. A equação (3.11) é obtida da densidade lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = - [g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi^*(x) \partial_\nu \varphi(x) + (m^2 + \xi R) \varphi^*(x) \varphi(x)] . \quad (3.16)$$

Variando a ação da lagrangeana (3.16) com respeito a métrica $g_{\mu\nu}(x)$, de acordo com (3.6), obtemos o tensor energia-momento

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \left(\frac{1}{2} - \xi \right) (\partial_\mu \varphi^* \partial_\nu \varphi + \partial_\nu \varphi^* \partial_\mu \varphi) + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} \partial^\lambda \varphi^* \partial_\lambda \varphi \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) m^2 g_{\mu\nu} - \xi G_{\mu\nu} - 2\xi^2 R g_{\mu\nu} \right] \varphi^* \varphi \\ &- \xi [\varphi^* \nabla_\mu \nabla_\nu \varphi + (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi^*) \varphi] , \end{aligned} \quad (3.17)$$

que é chamado de tensor de Chernikov-Tagirov. Na expressão acima, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein.

Para o campo sem massa, o traço do tensor (3.17) é zero quando $\xi = \xi_c$. Neste caso, a lei de conservação também é verificada

$$\nabla_\mu T^\mu{}_\nu(x) = 0 . \quad (3.18)$$

3.1.3 Equação de Klein-Gordon na presença dos campos gravitacional e eletromagnético

A situação mais geral é aquela em que o campo escalar está interagindo com os campos eletromagnético e gravitacional. Neste caso a equação de campo deverá ser modificada apro-

priadamente. Quando a interação eletromagnética é considerada, faz-se necessário escrever a equação de Klein-Gordon de uma outra forma, de modo a tornar a mesma invariante de *gauge*. Isto deve-se ao fato que a teoria eletromagnética é invariante por transformações de *gauge*. No caso em que o campo φ está interagindo com o campo gravitacional, devemos trocar a derivada ∂_μ pela derivada covariante gravitacional ∇_μ , de modo a tornar a equação de campo covariante por transformações gerais de coordenadas. A prescrição para incluir as interações eletromagnética e gravitacional é efetuar a troca da derivada ∂_μ por $\partial_\mu + ieA_\mu$ em (3.12). Sendo assim, a equação de Klein-Gordon generalizada é dada por:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) - \xi R - m^2 \right] \varphi(x) = 0, \quad (3.19)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

O tensor energia-momento correspondente a este sistema geral, pode também ser obtido através de um método análogo, ou seja, devemos trocar a derivada ordinária, ∂_μ , por $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ em (3.17), de modo a obter uma expressão invariante de *gauge*. Fazendo isto, chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(x) &= \left(\frac{1}{2} - \xi \right) ((D_\mu \varphi)^* D_\nu \varphi + (D_\nu \varphi)^* D_\mu \varphi) + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g_{\mu\nu} (D^\lambda \varphi)^* D_\lambda \varphi \\ &- \xi [\varphi^* (\nabla_\mu + ieA_\mu) (\nabla_\nu + ieA_\nu) \varphi + [(\nabla_\mu + ieA_\mu) (\nabla_\nu + ieA_\nu) \varphi]^* \varphi] \\ &+ \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) m^2 g_{\mu\nu} - \xi G_{\mu\nu} - 2\xi^2 R g_{\mu\nu} \right] \varphi^* \varphi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2 Interação do campo fermiônico com campos externos

A equação que governa um campo com $\text{spin} = \frac{1}{2}$, foi proposta por Dirac em 1928 [100]. Dirac observou que devido a presença do grau de liberdade fermiônico, uma função escalar não poderia acomodar toda a informação contida neste campo. Na sua formulação Dirac propôs um campo espinorial de quatro componentes, que levava em consideração os dois possíveis estados de energia e spin. A equação proposta é matricial, com derivadas lineares no espaço e tempo.

Nesta seção consideraremos a interação do campo de Dirac $\psi(x)$ com os campos eletromagnético e gravitacional.

3.2.1 Equação de Dirac na presença de um campo eletromagnético

Assim como acontece com o campo escalar, para descrever a interação de um campo carregado espinorial, ψ , com um campo eletromagnético, A_a , devemos substituir a derivada ordinária, como segue:

$$\partial_a \rightarrow D_a = \partial_a + ieA_a, \quad (3.21)$$

onde, novamente, A_a é o quadri-vetor do potencial eletromagnético e e é a carga da partícula. Esta maneira de introduzir a interação com o campo eletromagnético garante a invariância de *gauge* da teoria. De acordo com (3.21), a lagrangeana do campo ψ interagindo com o campo A_a é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x) \gamma^a D_a \psi(x) - (D_a^* \bar{\psi}(x)) \gamma^a \psi(x)] - m \bar{\psi}(x) \psi. \quad (3.22)$$

Aqui $\psi(x)$ é um espinor de quatro componentes, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ é o espinor conjugado e as matrizes de Dirac γ^a obedecem às relações de anti-comutação abaixo:³

$$\gamma^a \gamma^b + \gamma^b \gamma^a = -2\eta^{ab}. \quad (3.23)$$

Variando (3.22) com respeito a $\bar{\psi}$, obtemos a equação de Dirac

$$(i\gamma^a D_a - m) \psi(x) = 0. \quad (3.24)$$

A expressão para o tensor energia-momento do campo de Dirac num campo eletromagnético externo, é dada por

$$T_{ab} = \frac{i}{4} [\bar{\psi}(x) \gamma_a D_b \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_b D_a \psi(x) - (D_a^* \bar{\psi}(x)) \gamma_b \psi(x) - (D_b^* \bar{\psi}(x)) \gamma_a \psi(x)], \quad (3.25)$$

que satisfaz a condição $T_{ab} = T_{ba}$.

3.2.2 Equação de Dirac na presença de um campo gravitacional

Vamos considerar agora a interação do campo de Dirac com um campo gravitacional clássico. Para que isto, é necessário generalizar o conceito de covariância da equação de Dirac. Em

³O sinal negativo que aparece do lado direito da equação (3.23) é devido á assinatura da métrica que estamos usando

[100] foi mostrado que (3.24) é covariante de Lorentz, isto é, preserva sua própria forma se, junto com as transformações do grupo de Lorentz, o espinor ψ se transformar de acordo com a representação desse grupo.

A exigência da covariância de Lorentz da equação de Dirac pode ser transferida ao caso da geometria pseudo-Riemanniana localmente, onde o espaço-tempo é plano. Para isto, em qualquer ponto x podemos introduzir um espaço tangente pseudo-Euclidiano. Como uma base de vetores para esse espaço tangente, podemos escolher as então chamadas bases tetradas $e_\mu^{(a)}$ (com $a = 0, 1, 2, 3$). De acordo com [104], o caráter lorentziano do espaço-tempo da relatividade geral permite-nos definir referenciais de Lorentz locais, associados a uma escolha de tetradas, tal que, localmente, a métrica assuma os valores constantes da relatividade restrita.

Vamos definir a base tetrada como sendo

$$e_\mu^{(a)} = \sqrt{\lambda^{(a)}} O_{\mu a} , \quad (3.26)$$

onde o índice a que aparece em $O_{\mu a}$ não é um índice de soma. Desse modo $g_{\mu\nu}$ pode ser expresso por

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \eta_{ab} , \quad (3.27)$$

onde η_{ab} é o tensor de Minkowski. Admitindo que $e_\mu^{(a)}$ tem uma inversa, $e_{(a)}^\mu$, satisfazendo às relações

$$e_{(a)}^\mu e_\mu^{(b)} = \delta_a^b \quad (3.28)$$

e

$$e_{(a)}^\mu e_\nu^{(a)} = \delta_\nu^\mu , \quad (3.29)$$

podemos mostrar que

$$e_{(a)}^\mu = g^{\mu\nu} \eta_{ab} e_\nu^{(b)} \quad (3.30)$$

e

$$\eta_{ab} = e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu g_{\mu\nu} . \quad (3.31)$$

A base tetrada está associada a uma transformação local do sistema de coordenadas (x^α) para coordenadas locais (x^a) tal que, no ponto considerado, a métrica assuma a forma de Minkowski η_{ab} . Da equação (3.30), vemos que os índices latinos são levantados e abaixados com as matrizes η^{ab} e η_{ab} . Podemos observar ainda que os índices gregos são abaixados, levantados e contraídos com as matrizes $g_{\mu\nu}$ e $g^{\mu\nu}$.

De acordo com as equações acima, as tetradas $e_\mu^{(a)}$ formam um conjunto de vetores ortonor-

mais no espaço tangente ao espaço Riemanniano num ponto x . Então, para qualquer vetor ou tensor, temos que

$$V^\mu = e_{(a)}^\mu V^a \quad (3.32)$$

e

$$V^a = e_\mu^{(a)} V^\mu, \quad (3.33)$$

onde V^μ e V^a são, respectivamente, as componentes de um vetor V nas bases de coordenadas e local. De fato, podemos usar $e_\mu^{(a)}$ e $e_{(a)}^\mu$ para relacionar as bases de coordenadas com índices $\mu, \nu, \rho \dots$ e bases de Lorentz locais com índices $a, b, c \dots$

Em termos das tetradas, podemos escrever o elemento de linha por

$$ds^2 = \eta_{ab} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.34)$$

Dada a métrica $g_{\mu\nu}(x)$ a base tetrada não é unicamente determinada. De fato, para qualquer transformação de Lorentz local

$$\tilde{e}_\mu^{(a)} = \Lambda_b^a(x) e_\mu^{(b)}, \quad (3.35)$$

com

$$\Lambda_c^a(x) \Lambda_b^c(x) = \delta_b^a, \quad (3.36)$$

as equações (3.27) e (3.31) permanecem inalteradas. Desta forma, devemos estender o princípio da covariância geral, exigindo que as equações da teoria gravitacional sejam covariantes não apenas sob mudanças das bases de coordenadas no espaço tangente da variedade Riemanniana, mas também sob transformações de Lorentz locais das bases ortonormais da variedade.

Para escrever a equação de Dirac num espaço-tempo pseudo-Riemanniano, vamos tomar, independentemente, em cada ponto da variedade, uma estrutura espinorial local de Dirac. Definimos espinores de Dirac como objetos de quatro componentes que, sob o grupo de transformações de Lorentz locais (3.35), se transformam como os seus correspondentes em um espaço plano

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = S(\Lambda(x)) \psi(x) \quad (3.37)$$

e o seu conjugado correspondente

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda(x)), \quad (3.38)$$

onde $S(\Lambda(x))$ é uma matriz 4×4 , que depende da transformação de Lorentz $\Lambda_\beta^\alpha(x)$. Esta matriz

satisfaz a seguinte condição

$$\det(S) = 1 . \quad (3.39)$$

Em termos de componentes, podemos escrever (3.37) e (3.38) como

$$\psi^a(x) \rightarrow \psi'^a(x) = S_b^a(x) \psi^b(x) \quad (3.40)$$

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi'_a(x) = \psi_b(x) (S^{-1})_a^b(x) . \quad (3.41)$$

Sob transformações de coordenadas sobre a variedade, $x^\alpha \rightarrow x'^\alpha = x'^\alpha(x)$, espinores se transformam como escalares, ou seja,

$$\psi'(x') = \psi(x) .$$

Neste caso, não existe relação entre o grupo de transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e o grupo local de Lorentz. Diferentemente da variedade plana da relatividade restrita, onde o grupo de transformações (3.37) e (3.38) pode constituir uma representação do grupo de transformações lineares e homogêneas sobre a variedade, no caso de um espaço-tempo curvo a estrutura Lorentziana existe independentemente em cada ponto e as transformações locais (3.37) e (3.38) não podem constituir uma representação das transformações gerais sobre a variedade.

As matrizes constantes de Dirac γ^a satisfazem a relação de anti-comutação dada por (3.23). Usando a base tetrada, podemos definir sobre a variedade o campo de matrizes

$$\gamma^\mu(x) = e_{(a)}^\mu(x) \gamma^a , \quad (3.42)$$

tal que, de acordo com as equações (3.23), (3.28) e (3.29),

$$\gamma^\mu(x) \gamma^\nu(x) + \gamma^\nu(x) \gamma^\mu(x) = -2g^{\mu\nu}(x) , \quad (3.43)$$

constituindo uma álgebra de Clifford associada à métrica $g^{\mu\nu}(x)$ da variedade.

Sob o grupo de transformações (3.40) e (3.41), as matrizes $\gamma^\mu(x)$ se transformam da seguinte maneira

$$(\gamma'^\mu)_b^a = S_c^a (S^{-1})_b^d (\gamma^\mu)_d^c = (S(x) \gamma^\mu S^{-1}(x))_b^a . \quad (3.44)$$

Usando o formalismo de tetradas, obtemos

$$(\Lambda^{-1}(x))_b^a \gamma^b = S(x) \gamma^a S^{-1}(x). \quad (3.45)$$

As matrizes constantes de Dirac são preservam sua forma mediante uma transformação de Lorentz [100].

Com relação às transformações de coordenadas, as matrizes (3.42) se transformam como um 4-vetor contravariante

$$\gamma'^\mu(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \gamma^\nu(x). \quad (3.46)$$

Devido ao fato de que as matrizes do grupo de transformações (3.37) e (3.38) são funções de ponto, a derivada de um espinor não se transforma como um espinor. Assim, somos levados a definir o conceito de derivada covariante de um espinor como

$$\nabla_\alpha \psi^a(x) = \partial_\alpha \psi^a + \Gamma_{\alpha b}^a \psi^b(x), \quad (3.47)$$

de tal forma que se transforme como um espinor, sob o grupo (3.40)

$$\nabla_\alpha \psi'^a = S_b^a(x) \nabla_\alpha \psi^b. \quad (3.48)$$

Da lei de transformação (3.48), segue que Γ_α se transforma como

$$\Gamma'_{\alpha b} = S_d^a \Gamma_{\alpha f}^d (S^{-1})_b^f - (\partial_\alpha S^a)_d (S^{-1})_b^d \quad (3.49)$$

ou ainda

$$\Gamma'_\alpha = S \Gamma_\alpha S^{-1} - (\partial_\alpha S) S^{-1}. \quad (3.50)$$

A lei de transformação para Γ_α dada por (3.50) garante que a derivada covariante de um espinor se transforme como um espinor, frente a uma transformação de Lorentz. Sob transformações gerais de coordenadas, Γ_α se transforma como um covetor. As quantidades Γ_α são denominadas de afinidades espinoriais ou conexões internas.

A expressão $\psi_a \psi^a = \bar{\psi} \psi$ é um escalar sob as transformações (3.37) e (3.38) e isto implica que $\nabla_\alpha (\psi_a \psi^a) = \psi_a \nabla_\alpha \psi^a + (\nabla_\alpha \psi_a) \psi^a = \partial_\alpha (\psi_a \psi^a)$. Com isso, obtemos

$$\nabla_\alpha \psi_a = \partial_\alpha \psi_a - \Gamma_{\alpha a}^b \psi_b. \quad (3.51)$$

Para um objeto com índices espinoriais e tensoriais (quer dizer, com leis bem definidas, sob transformações gerais de coordenadas sobre a variedade e sob rotações dos referenciais locais) a derivada covariante é dada por

$$\nabla_\alpha F_b^{\lambda a} = \partial_\alpha F_b^{\lambda a} + \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda F_b^{\beta a} + \Gamma_{\alpha d}^a F_b^{\lambda d} - \Gamma_{\alpha b}^d F_d^{\lambda a} , \quad (3.52)$$

que generaliza a derivada covariante usual.

Como sabemos, o espaço-tempo da relatividade geral é pseudo-Riemanniano e, neste caso, temos que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Isto implica, a partir de (3.43), que

$$-2\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \nabla_\alpha (\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\mu(x)) = 0 . \quad (3.53)$$

Uma condição suficiente para (3.53) é

$$\nabla_\alpha \gamma_\mu = \partial_\alpha \gamma_\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \gamma_\lambda - \gamma_\mu \Gamma_\alpha + \Gamma_\alpha \gamma_\mu = 0 . \quad (3.54)$$

Usando (3.42) e as propriedades da álgebra de Dirac gerada pelas matrizes constantes γ^a , podemos verificar que a conexão Γ_α é dada por

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{8} [\gamma^\mu (\partial_\alpha \gamma_\mu) - (\partial_\alpha \gamma_\mu) \gamma^\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho (\gamma^\mu \gamma_\rho - \gamma_\rho \gamma^\mu)] . \quad (3.55)$$

Podemos mostrar ainda que

$$\Gamma_\alpha = -\frac{1}{2} \omega_{\alpha ab} \Sigma^{ab} , \quad (3.56)$$

onde

$$\omega_{\alpha ab} = -e_{b\mu} (\partial_\alpha e_a^\mu) - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho e_a^\mu e_{b\rho} \quad (3.57)$$

$$= e_{(a)}^\mu \nabla_\alpha e_{(b)\mu} \quad (3.58)$$

e

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4} [\gamma^a, \gamma^b] . \quad (3.59)$$

A imposição (3.54) é suficiente para garantir que $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, mas não é necessária. De fato, tomando

$$\nabla_\alpha \gamma_\mu = [V_\alpha, \gamma_\mu] , \quad (3.60)$$

para qualquer V_α pertencendo a álgebra de Pauli das matrizes $\gamma^\mu(x)$, a condição $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$ é

preservada. A afinidade espinorial Γ^μ , de acordo com (3.60), deve satisfazer

$$\partial_\mu \gamma_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \gamma_\lambda + \Gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \Gamma_\mu = V_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu V_\mu . \quad (3.61)$$

Uma solução possível para (3.61) é

$$\tilde{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu - V_\mu , \quad (3.62)$$

onde Γ_μ é dada por (3.55) [104].

Não temos, em geral, critério para decidir entre (3.54) e (3.60), [104]. A escolha (3.54) parece ser a mais simples, pois, neste caso, o tensor energia-momento do campo de Dirac em interação com a gravitação tem a forma da relatividade restrita, a menos da substituição $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$. As afinidades (3.55) são denominadas coeficientes de Fock-Ivanenko.

Com a noção de derivada covariante (3.52) em relação a transformações gerais de coordenadas e transformações de Lorentz locais, a equação de Dirac da relatividade restrita pode ser generalizada para uma variedade Riemanniana através de

$$\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu . \quad (3.63)$$

A equação de Dirac, covariante sob os grupos de Lorentz local (3.37), (3.38), (3.45) e o grupo de transformações gerais de coordenadas, tem a forma

$$(i\gamma^\mu(x)\nabla_\mu - m)\psi(x) = 0 , \quad (3.64)$$

ou

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m]\psi(x) = 0 . \quad (3.65)$$

A equação de Dirac generalizada (3.65) é obtida da equação de Euler para a lagrangeana

$$\mathcal{L}(x) = \sqrt{-g} \left\{ \frac{i}{2} [\bar{\psi}(x)\gamma^\mu(x)\nabla_\mu \psi(x) - (\nabla_\mu \bar{\psi}(x))\gamma^\mu(x)\psi(x)] - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \right\} , \quad (3.66)$$

sendo $\nabla_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - \bar{\psi}\Gamma_\mu$. Da ação para a densidade lagrangeana acima, obtemos também o

tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4} [\bar{\psi}\gamma_\nu(x)\nabla_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)\gamma_\mu(x)\nabla_\nu\psi(x) - (\nabla_\mu\bar{\psi}(x))\gamma_\nu(x)\psi(x) - (\nabla_\nu\bar{\psi}(x))\gamma_\mu(x)\psi(x)] . \quad (3.67)$$

Para o caso em que o campo não possui massa ($m = 0$), a equação de Dirac se reduz a

$$\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi(x) = 0 . \quad (3.68)$$

Diferentemente da equação do campo escalar, no caso em que $m = 0$, a equação de Dirac no espaço Riemanniano (3.68) é conformalmente invariante sem uma modificação adicional se, além de

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\sigma(x)} g_{\mu\nu} , \quad (3.69)$$

ocorrer a transformação

$$\psi(x) \rightarrow \tilde{\psi}(x) = e^{\frac{3}{2}\sigma(x)} \psi(x) , \quad (3.70)$$

como podemos ver em [105].

3.2.3 Equação de Dirac na presença de campos eletromagnético e gravitacional

Vamos admitir que o campo de Dirac $\psi(x)$ esteja interagindo, simultaneamente, com os campos gravitacional e eletromagnético. Como vimos anteriormente, a interação com o campo eletromagnético é descrita pela troca da derivada ordinária por $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$, garantindo assim que a equação de Dirac seja invariante por transformações de *gauge*. No caso em que o campo $\psi(x)$ está interagindo com o campo gravitacional, a derivada de um espinor $\partial_\mu\psi(x)$ deve ser substituída por $(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\psi(x)$, para que a mesma se transforme como um espinor frente a transformações de Lorentz locais. De fato, como já foi dito, esta substituição faz com que a equação de Dirac seja covariante por transformações de Lorentz locais e transformações gerais de coordenadas.

Podemos, então, escrever a equação de Dirac, para um campo $\psi(x)$ interagindo com campos eletromagnéticos e gravitacional, da seguinte maneira:

$$[i\gamma^\mu(x)(\nabla_\mu + ieA_\mu) - m]\psi(x) = 0 , \quad (3.71)$$

onde $\gamma^\mu(x)$ e ∇_μ são dados por (3.42) e (3.63), respectivamente. A equação de Dirac, escrita

desta forma, é invariante de *gauge* e covariante por transformações de Lorentz e transformações gerais de coordenadas.

A expressão para o tensor energia-momento neste caso geral deverá contemplar (3.25) e (3.67) como casos especiais. Levando em consideração estes fatos, podemos escrever:⁴

$$T_{\mu\nu}(x) = \frac{i}{4} \left[\bar{\psi} \gamma_\nu(x) \nabla_\mu \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_\mu(x) \nabla_\nu \psi(x) - (\nabla_\mu^* \bar{\psi}(x)) \gamma_\nu(x) \psi(x) - (\nabla_\nu^* \bar{\psi}(x)) \gamma_\mu(x) \psi(x) \right], \quad (3.72)$$

onde $\nabla_\mu = \nabla_\mu + ieA_\mu$.

⁴Este resultado também pode ser obtido variando-se a ação correspondente em relação a métrica.

Análise quântica relativística de uma partícula carregada no espaço-tempo da corda cósmica

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 4.1, introduzimos o sistema físico e explicitamos as expressões matemáticas para o tensor métrico, o potencial quadri-vetorial e os potenciais escalares. Consideramos estes campos de fundo na análise do movimento relativístico de bósons e férmions carregados. A primeira parte deste capítulo lida com o caso bosônico. Na seção 4.2, a equação de Klein-Gordon modificada é apresentada. Considerando estados estacionários, $\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt}\Psi_E(\vec{r})$ e admitindo para $\Psi_E(\vec{r})$ um *ansatz* que apresenta simetria cilíndrica obtemos, na subseção 4.2.1, a equação diferencial mais geral obedecida pela função radial. A obtenção de soluções para esta equação diferencial é considerada na seção 4.3 e são especificados separadamente, em cada subseção, valores diferentes atribuídos aos parâmetros associados às constantes de acoplamento escalar e do campo magnético. Na segunda parte, repetimos esta análise para o caso fermiônico. Na seção 4.4, apresentamos a equação de Dirac modificada e nossa escolha para as matrizes de Dirac no espaço curvo. A seção seguinte lida com as equações diferenciais radiais resultantes do *ansatz* sugerido pela simetria do sistema. Soluções para estas equações e informação física são obtidas na seção 4.5. Algumas propriedades associadas com a equação diferencial mais relevante apresentada no capítulo, que é a equação diferencial de Heun biconfluente, são apresentadas no apêndice C.

4.1 Sistema

Nesta seção, apresentamos o ambiente físico no qual consideraremos partículas relativísticas carregadas. Inicialmente, introduzimos o espaço-tempo de uma corda cósmica idealizada onde a partícula irá se propagar, o potencial vetor associado a um campo magnético uniforme paralelo à corda e o potencial escalar mais geral que nos permite obter soluções analíticas das equações de Klein-Gordon e Dirac.

Usando coordenadas cilíndricas, com a corda sobre o eixo $-z$, o tensor métrico correspon-

dente é definido pelo elemento de linha abaixo:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (4.1)$$

onde a coordenada radial polar, $r \geq 0$, as coordenadas $(t, z) \in (-\infty, \infty)$ e a variável angular $\varphi \in [0, 2\pi]$. O parâmetro α , menor que a unidade, é dado em termos da densidade linear de massa da corda, μ , na forma $\alpha = 1 - 4\mu$.

No espaço-tempo da corda cósmica, o potencial vetor associado com um campo magnético uniforme paralelo à corda, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0 \hat{k}$, considerando um gauge de Coulomb, pode ser expresso por

$$\vec{A} = (0, A_\varphi, 0), \quad \text{com} \quad A_\varphi = \frac{1}{2} \alpha B_0 r^2. \quad (4.2)$$

Além disso, consideraremos nesta análise, a presença de potenciais escalares cilíndricamente simétricos, que nos permitem encontrar soluções analíticas para as equações de campo. Este potencial é da forma:¹

$$S(r) = \frac{\eta_C}{r} + \eta_L r. \quad (4.3)$$

Nas seções seguintes, analisaremos partículas carregadas com spin-0 e spin- $\frac{1}{2}$ sob influência das configurações de campo acima. Iniciaremos com o caso bosônico, em seguida, o fermiônico.

4.2 Campos bosônicos: equação de Klein-Gordon

O movimento quântico relativístico de um bóson carregado no espaço curvo e na presença de potenciais escalares e magnético é descrita pela equação de Klein-Gordon modificada abaixo,

$$\left[\mathcal{D}^2 + \xi R - (M + S(r))^2 \right] \Phi(x) = 0, \quad (4.4)$$

¹A análise quântica relativística do movimento de uma partícula carregada de spin-0 no espaço-tempo produzido por uma corda cósmica ideal na presença do campo gerado por um monopolo magnético e potenciais escalares foi desenvolvida em [106].

onde o operador diferencial acima é dado por

$$\mathcal{D}^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} D_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} D_\nu) , \quad (4.5)$$

com $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$, $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $S(r)$ é o potencial escalar. Como estamos considerando o acoplamento mínimo, a constante de acoplamento introduzida anteriormente, ξ , deve ser descartada.

4.2.1 Equação radial bosônica

Nesta subseção, construiremos a equação diferencial radial associada à equação de Klein-Gordon (4.4), considerando a situação física mais geral envolvendo a presença do campo magnético e potenciais escalares.

Dada a simetria cilíndrica deste sistema, adotaremos o *ansatz* para a função de onda abaixo:

$$\Phi(x) = e^{i(kz+m\varphi-Et)} R(r) . \quad (4.6)$$

Substituindo (4.6) em (4.4), vemos que a função de onda, $R(r)$, deve obedecer a equação diferencial

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] R(r) + \left[E^2 - k^2 + 2M\omega \frac{m}{\alpha} - M^2 \omega^2 r^2 - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} - (M + S(r))^2 \right] R(r) = 0 , \quad (4.7)$$

onde

$$\omega = \frac{eB_0}{2M} , \quad (4.8)$$

é a chamada *frequência de ciclotron* da partícula. Considerando o potencial escalar (4.3), a equação (4.7) é expressa como uma equação diferencial de Heun biconfluente [107].

Para resolver a equação acima, é conveniente definir uma nova função radial, $u(r)$, como mostrado abaixo:

$$u(r) = \sqrt{r} R(r) . \quad (4.9)$$

Tomando o potencial escalar (4.3) e definindo uma nova variável adimensional

$$x = \sqrt{\Delta} r \quad \text{com} \quad \Delta = \sqrt{\eta_L^2 + M^2 \omega^2}, \quad (4.10)$$

a equação de Heun biconfluente radial (4.7) fica na seguinte forma de Schrödinger

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{\varepsilon_{k,m}}{\Delta} + \frac{\gamma_m}{x^2} + \frac{\delta_C}{x} + \frac{\delta_L x}{\Delta} - x^2 \right] u(x) = 0. \quad (4.11)$$

onde

$$\varepsilon_{k,m} = E^2 - k^2 - M^2 + 2 \left(M \omega \frac{m}{\alpha} - \eta_C \eta_L \right), \quad (4.12)$$

$$\gamma_m = \frac{1}{4} - \eta_C^2 - \frac{m^2}{\alpha^2}, \quad (4.13)$$

$$\delta_L = -\frac{2M}{\sqrt{\Delta}} \eta_L \quad \text{e} \quad \delta_C = -\frac{2M}{\sqrt{\Delta}} \eta_C. \quad (4.14)$$

Depois de construirmos a equação diferencial radial completa, o próximo passo é obter o conjunto completo das funções de onda e o espectro de energia correspondente.

4.3 Soluções analíticas da equação de Klein-Gordon

Nesta seção, analisaremos a equação diferencial radial obtida previamente, considerando situações físicas diversas. Iniciaremos com a forma relativística dos níveis de Landau para bósons carregados. Neste caso, as soluções para a equação diferencial radial são apresentadas em termos da função hipergeométrica confluyente. As análises mais recentes e relevantes sobre movimento quântico contidas neste capítulo serão apresentadas nas sub-seções seguintes. Lá, veremos que as soluções para a equação radial são dadas em termos de funções de Heun biconfluentes.

4.3.1 Níveis de Landau

A solução particular mais simples para (4.11) pode ser encontrada se admitirmos $\eta_C = \eta_L = 0$, mas, mantendo $\omega \neq 0$. Como se sabe, apenas estados ligados existem nestas condições. A

equação diferencial (4.11) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\frac{E^2 - k^2 - M^2}{M\omega} + \frac{2m}{\alpha} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\alpha^2}}{x^2} - x^2 \right] u = 0 . \quad (4.15)$$

É útil analisar o comportamento assintótico das soluções da equação acima. Para $x \rightarrow 0$, esta equação se resume a:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[\frac{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{\alpha^2}}{x^2} \right] u \approx 0 , \quad (4.16)$$

cujas soluções ocorrem na forma

$$u(x) = c_1 x^{\frac{1}{2} - \left| \frac{m}{\alpha} \right|} + c_2 x^{\frac{1}{2} + \left| \frac{m}{\alpha} \right|} . \quad (4.17)$$

Para o caso em que $x \rightarrow \infty$, temos que

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x^2 u \approx 0 . \quad (4.18)$$

Para esta equação, temos soluções do tipo

$$u(x) = c_3 e^{\frac{x^2}{2}} + c_4 e^{-\frac{x^2}{2}} . \quad (4.19)$$

O comportamento assintótico descrito acima indica que é pertinente escrever $u(x)$ na forma

$$u(x) = x^{\tilde{\beta}} e^{-\frac{x^2}{2}} F(x) , \quad (4.20)$$

onde $\tilde{\beta} = \frac{1}{2} + \left| \frac{m}{\alpha} \right|$, e $F(x)$ é uma função auxiliar. De fato, substituindo (4.20) na equação diferencial, obtemos,

$$x \frac{d^2F}{dx^2} + (2\tilde{\beta} - 2x^2) \frac{dF}{dx} + \left(\frac{E^2 - k^2 - M^2}{M\omega} + \frac{2m}{\alpha} - 2\tilde{\beta} - 1 \right) xF = 0 . \quad (4.21)$$

Definindo a variável adimensional $y = x^2 = M\omega r^2$, a equação acima fornece

$$y \frac{d^2F(y)}{dy^2} + (c - y) \frac{dF(y)}{dy} - aF(y) = 0 , \quad (4.22)$$

onde as constantes são dadas por

$$c = \frac{|m|}{\alpha} + 1, \quad a = \frac{1}{2} \left(\frac{|m| - m}{\alpha} + 1 \right) - \frac{E^2 - k^2 - M^2}{4M\omega}. \quad (4.23)$$

A solução da equação diferencial (4.22) é a conhecida função hipergeométrica confluyente [108]:

$$F(y) = {}_1F_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{|m| - m}{\alpha} + 1 \right) - \frac{E^2 - k^2 - M^2}{4M\omega}, \quad \frac{|m|}{\alpha} + 1; \quad y \right). \quad (4.24)$$

O comportamento assintótico da função hipergeométrica confluyente para grandes valores do seu argumento é [108]:

$${}_1F_1(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} [1 + O(|z|^{-1})]. \quad (4.25)$$

Então, devido ao comportamento divergente da função $F(y)$ para grandes valores do seu argumento, soluções associadas a estados ligados só podem ser obtidas se impusermos que esta função seja um polinômio de grau n . Neste caso, a solução radial demonstra comportamento aceitável no infinito. Esta condição é obtida se

$$\frac{1}{2} \left(\frac{|m| - m}{\alpha} + 1 \right) - \frac{E^2 - k^2 - M^2}{4M\omega} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.26)$$

Esta equação fornece a condição de quantização do espectro de energia da partícula:

$$E_{k,m,n} = \pm \left\{ k^2 + M^2 + 2M\omega \left[2n + 1 + \frac{|m| - m}{\alpha} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.27)$$

No caso em que $m > 0$, não ocorre influência da corda cósmica no espectro de energia da partícula, pois $|m| - m = 0$. Entretanto, para $m < 0$, a presença do fator α modifica visivelmente o espectro, reduzindo (ainda que não eliminando) a degenerescência. Cada conjunto de funções de onda com mesmo valor n é chamado *nível de Landau*.

4.3.2 Campo magnético nulo

Consideremos o caso em que $\omega = 0$, mas levando em conta os efeitos do potencial escalar, i.e., mantendo η_C e η_L não-nulos. Neste caso devemos reescrever a equação (4.11) da seguinte

maneira²:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{\bar{\epsilon}_k}{|\eta_L|} + \frac{\gamma_m}{x^2} + \frac{\bar{\delta}_C}{x} + \frac{\bar{\delta}_L x}{|\eta_L|} - x^2 \right] u(x) = 0, \quad (4.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_k &= E^2 - k^2 - M^2 - 2\eta_C \eta_L, \\ \bar{\delta}_L &= -\frac{2M}{\sqrt{|\eta_L|}} \eta_L \quad \text{e} \quad \bar{\delta}_C = -\frac{2M}{\sqrt{|\eta_L|}} \eta_C. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para obtermos o espectro de energia da equação (4.28), é conveniente analisarmos seu comportamento assintótico para $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$. Através desta análise, é possível expressar $u(x)$ em termos de uma função $F(x)$, como mostrado abaixo:

$$u(x) = x^\beta e^{-\frac{1}{2}x\left(x - \frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|}\right)} F(x), \quad (4.30)$$

com

$$\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\eta_C^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}}. \quad (4.31)$$

Agora, substituindo o ansatz (4.30) em (4.28), a equação resultante é:

$$\begin{aligned} xF''(x) &+ \left(2\beta + \frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|}x - 2x^2 \right) F'(x) \\ &+ \left[\beta \frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|} + \bar{\delta}_C + \left(\frac{\bar{\epsilon}_k}{|\eta_L|} + \frac{\bar{\delta}_L^2}{4\eta_L^2} - 2\beta - 1 \right) x \right] F(x) = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Está é a equação diferencial de Heun biconfluente [107], cuja solução é a função de Heun biconfluente (HBC), H_B :

$$F(x) = H_B \left(2\beta - 1, \quad \frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|}, \quad \frac{\bar{\epsilon}_k}{|\eta_L|} + \frac{\bar{\delta}_L^2}{4\eta_L^2}, \quad 2\bar{\delta}_C, \quad -x \right). \quad (4.33)$$

Adotaremos, aqui, outra abordagem. Usaremos o método de Frobenius para encontrar soluções

²O caso onde $\omega = \eta_l = 0$ já foi analisado em [21].

para (4.32):

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n . \quad (4.34)$$

Substituindo a série acima em (4.32), os coeficientes são definidos por uma relação de recorrência envolvendo três termos,

$$c_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2\beta + n + 1)} \left[\left(-\frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|} (n+1) - \bar{B} \right) c_{n+1} + (2n - \bar{C}) c_n \right] \quad (4.35)$$

e pela relação abaixo,

$$c_1 = \frac{M}{\sqrt{|\eta_L|}} \left(1 + \frac{\eta_C}{\beta} \right) c_0 , \quad (4.36)$$

onde $\bar{B} = \beta \frac{\bar{\delta}_L}{|\eta_L|} + \bar{\delta}_C$ e $\bar{C} = \frac{\bar{\varepsilon}_{k,m}}{|\eta_L|} - 2\beta - 1 + \frac{M^2}{|\eta_L|}$.

Um tipo especial de soluções exatas, representando estados ligados, pode ser obtida na forma de expressões polinomiais de $F(x)$. Para um polinômio de ordem n , duas condições devem ser satisfeitas:

$$\bar{C} = 2n \quad (4.37)$$

sendo n um número inteiro, positivo e

$$c_{n+1} = 0 . \quad (4.38)$$

Admitindo que $c_0 = 1$ e usando a relação de recorrência (4.35), apresentamos abaixo os primeiros coeficientes da série de Frobenius:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2(2\beta + 1)} \left[\frac{2M^2}{|\eta_L|} \left(1 + \frac{\eta_C}{\beta} \right) (\eta_C + \beta + 1) + \bar{C} \right] , \\ c_3 &= \frac{M}{6(\beta + 1)\sqrt{|\eta_L|}} \left\{ \frac{\eta_C + \beta + 2}{2(2\beta + 1)} \left[\frac{2M^2}{|\eta_L|} \left(1 + \frac{\eta_C}{\beta} \right) (\eta_C + \beta + 1) + \bar{C} \right] \right. \\ &\quad \left. + (2 - \bar{C}) \left(1 - \frac{\eta_C}{\beta} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (4.39)$$

A condição $\bar{C} = 2n$ fornece o seguinte espectro de energia para a partícula:

$$E_{k,m,n} = \pm \left[k^2 + 2\eta_C \eta_L + 2|\eta_L| \left(n + \beta + \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.40)$$

Esta expressão é válida para ambos os sinais e a quantidade entre colchetes é claramente positiva, então o sistema possui soluções negativas e positivas para o espectro de energia. Inicialmente, esta equação indica que o espectro de energia não depende da massa da partícula, contudo, é importante mencionar que a condição $c_{n+1} = 0$, fornece uma expressão algébrica envolvendo valores específicos para a constante de acoplamento do potencial escalar, para a massa da partícula e para o número quântico associado ao momento angular. Podemos assumir que o parâmetro η_L pode ser ajustado para se adequar à esta equação. Sendo assim, este parâmetro depende dos números quânticos n e m , então definimos, doravante, $\eta_{L_{n,m}}$.

Em seguida, consideramos para a função $F_{n,m}(x)$ o caso mais simples, um polinômio de primeira ordem. Então, após alguns cálculos, podemos escrever:

$$F_{1,m}(r) = 1 + M \left(1 + \frac{\eta_C}{\beta} \right) r, \quad (4.41)$$

Também para este caso específico, a energia será

$$E_{k,m,1} = \pm \left[k^2 + 2\eta_C \eta_{L_{1,m}} + 2|\eta_{L_{1,m}}| \left(\beta + \frac{3}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.42)$$

Além disso, a condição (4.38) nos permite expressar o parâmetro $\eta_{L_{1,m}}$ em termos da massa da partícula como mostrado abaixo:

$$\eta_{L_{1,m}} = \frac{M^2}{\beta} [\eta_C^2 + (2\beta + 1)\eta_C + \beta(\beta + 1)]. \quad (4.43)$$

Desta forma a energia é completamente definida e podemos afirmar que o espectro de energia da partícula, de fato, depende da sua massa, como esperado e também depende do parâmetro α , através da definição de β .

4.3.3 Confinamento linear

Nesta subseção, analisaremos a situação onde a interação escalar coulombiana não está presente, mas o confinamento linear e o campo magnético são mantidos. Para este sistema, a

função $u(x)$ satisfaz a equação diferencial abaixo, obtida diretamente de (4.11):

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{\tilde{\epsilon}_{k,m}}{\Delta} + \frac{\tilde{\gamma}_m}{x^2} + \frac{\delta_L x}{\Delta} - x^2 \right] u(x) = 0, \quad (4.44)$$

onde

$$\tilde{\epsilon}_{k,m} = E^2 - k^2 - M^2 + 2M\omega \frac{m}{\alpha} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}_m = \frac{1}{4} - \frac{m^2}{\alpha^2}. \quad (4.45)$$

Novamente, analisamos o comportamento assintótico da equação diferencial para grandes e pequenos valores da variável. No limite em que $x \rightarrow \infty$, podemos reescrever

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \left[\frac{\delta_L x}{\Delta} - x^2 \right] u(x) = 0. \quad (4.46)$$

Para o caso em que $x \rightarrow 0$, por outro lado, teremos

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{\tilde{\gamma}_m}{x^2} u(x) = 0. \quad (4.47)$$

Observa-se que $u(x)$ pode ser expressa em termos de uma função arbitrária, $G(x)$, da forma:

$$u(x) = x^{\tilde{\beta}} e^{-\frac{1}{2}x\left(x - \frac{\delta_L}{\Delta}\right)} G(x), \quad (4.48)$$

onde

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{2} + \frac{|m|}{\alpha}. \quad (4.49)$$

Substituindo (4.48) em (4.44), é possível notar que $G(x)$ satisfaz a equação diferencial HBC, com um dos seus parâmetros sendo zero:

$$x G''(x) + \left(2\tilde{\beta} + \frac{\delta_L}{\Delta} x - 2x^2 \right) G'(x) + \left[\tilde{\beta} \frac{\delta_L}{\Delta} + \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\Delta} + \frac{\delta_L^2}{4\Delta^2} - 2\tilde{\beta} - 1 \right) x \right] G(x) = 0. \quad (4.50)$$

Consequentemente, podemos escrever

$$G(x) = H_B \left[2\frac{|m|}{\alpha}, \quad \frac{\delta_L}{\Delta}, \quad \frac{\tilde{\epsilon}}{\Delta} + \frac{\delta_L^2}{4\Delta^2}, \quad 0, \quad -x \right]. \quad (4.51)$$

Novamente, podemos obter explicitamente a forma de $G(x)$ através da expansão de Frobenius,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad (4.52)$$

em (4.50). Também neste caso, a relação de recorrência envolve três coeficientes da série, como mostrado abaixo:

$$d_{n+2} = \frac{1}{(n+2)(2\tilde{\beta} + n + 1)} \left[-\frac{\delta_L}{\Delta} (\tilde{\beta} + n + 1) d_{n+1} + (2n - \tilde{C}) d_n \right] \quad (4.53)$$

e $d_1 = -\frac{\delta_L}{2\Delta} d_0$,

onde $\tilde{C} = \frac{\tilde{\varepsilon}}{\Delta} - 2\tilde{\beta} - 1 + \frac{\delta_L^2}{4\Delta^2}$, e fazemos d_0 igual à unidade. Abaixo, listamos dois outros coeficientes:

$$d_2 = \frac{1}{2\tilde{\beta} + 1} \left[\frac{\eta_L^2}{M\bar{\omega}^3} (\tilde{\beta} + 1) - \frac{\tilde{C}}{2} \right],$$

$$d_3 = \frac{1}{6(\tilde{\beta} + 1)} \frac{\eta_L}{\bar{\omega}\sqrt{M\bar{\omega}}} \left\{ \frac{2(\tilde{\beta} + 2)}{2\tilde{\beta} + 1} \left[\frac{\eta_L^2}{M\bar{\omega}^3} (\tilde{\beta} + 1) - \frac{\tilde{C}}{2} \right] + 2 - \tilde{C} \right\}. \quad (4.54)$$

Mais uma vez, procuramos aqui formas polinomiais para a função $G(x)$. Assim, devemos impor condições equivalentes à (4.37) e (4.38) aos coeficientes.

Da condição $\tilde{C} = 2n$, obtemos o espectro de energia:

$$E_{k,m,n} = \pm \left[k^2 + \frac{M^4 \omega^2}{\eta_L^2 + M^2 \omega^2} - \frac{2m}{\alpha} M \omega + 2M\bar{\omega} \left(n + \frac{|m|}{\alpha} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.55)$$

com $\bar{\omega} = \frac{1}{M} \sqrt{\eta_L^2 + M^2 \omega^2}$. Como na análise anterior, podemos ver que o espectro de energia da partícula depende de um certo conjunto de parâmetros. A condição $d_{n+1} = 0$ fornece uma equação algébrica envolvendo este conjunto de parâmetros e a massa da partícula. Aqui, adotaremos um procedimento diferente do usado na subseção anterior. Vamos admitir que a intensidade do campo magnético é ajustável, de acordo com a equação obtida, que, por sua vez, depende dos números quânticos n e m . Dessa forma, obtemos valores discretos para B_0 e, conseqüentemente, para ω , que denotaremos $\omega_{n,m}$.

Para ilustrar, podemos aplicar este formalismo para o caso onde a função $G(x)$ é um polinômio de primeira ordem. Neste caso, a magnitude do campo magnético será dada por $\bar{\omega}_{1,m}$

como mostrado em (4.58). A função $G_1(r)$ será,

$$G_{1,m}(r) = 1 + \frac{\eta_L}{\bar{\omega}_{1,m}} r . \quad (4.56)$$

E para a auto-energia, temos:

$$E_{k,m,1} = \pm \left[k^2 + \frac{M^4 \omega_{1,m}^2}{\eta_L^2 + M^2 \omega_{1,m}^2} - \frac{2m}{\alpha} M \omega_{1,m} + 2M \bar{\omega}_{1,m} \left(\frac{|m|}{\alpha} + 2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} , \quad (4.57)$$

com o parâmetro $\bar{\omega}_{1,m}$ assumindo a forma

$$\bar{\omega}_{1,m} = \left[\frac{\eta_L^2}{M} \left(\frac{|m|}{\alpha} + \frac{3}{2} \right) \right]^{\frac{1}{3}} . \quad (4.58)$$

Para quaisquer valores das quantidades físicas, a equação (4.58) fornece pelo menos uma solução física real para B_0 .

4.3.4 Solução geral

Nesta subseção, investigaremos a solução do problema considerado, na sua forma mais geral, ou seja, a análise da dinâmica quântica de um bóson carregado, na presença de um campo magnético uniforme dado em termos de um potencial vetor (4.2) e de um potencial escalar dado por (4.3), no espaço-tempo da corda cósmica. A equação diferencial radial associada a este problema é (4.11).

Como fizemos anteriormente, para obter o espectro de energia, é conveniente analisar o comportamento assintótico de (4.11) para $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$. Depois desta análise, podemos expressar a função $u(x)$ da seguinte forma:

$$u(x) = x^\beta e^{-\frac{1}{2}x\left(x - \frac{\delta_L}{\Lambda}\right)} H(x) , \quad (4.59)$$

com

$$\beta = \frac{1}{2} + \sqrt{\eta_C^2 + \frac{m^2}{\alpha^2}} . \quad (4.60)$$

Substituindo a função acima em (4.11), obtemos

$$xH'' + \left[2\beta + \frac{\delta_L}{\Delta}x - 2x^2\right]H' + \left[\beta\frac{\delta_L}{\Delta} + \delta_C + \left(\frac{\varepsilon}{\Delta} + \frac{\delta_L^2}{4\Delta^2} - 2\beta - 1\right)x\right]H = 0. \quad (4.61)$$

Novamente, usando o método de Frobenius,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad (4.62)$$

Observamos que as relações de recorrência obedecidas pelos coeficientes desta expansão são:

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= \frac{1}{(n+2)(2\beta+n+1)} \left[\left(-\frac{\delta_L}{\Delta}(n+1) - B \right) c_{n+1} + (2n-C)c_n \right], \\ c_1 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\delta_L}{\Delta} + \frac{\delta_C}{\beta} \right) c_0, \end{aligned} \quad (4.63)$$

onde $B = \beta\frac{\delta_L}{\Delta} + \delta_C$, $C = \frac{\varepsilon}{\Delta} - 2\beta - 1 + \frac{\delta_L^2}{4\Delta^2}$. Como nos casos anteriores, listamos os primeiros coeficientes, considerando $c_0 = 1$:

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2\beta+1} \left[\frac{M\beta}{\bar{\omega}} \Omega \left(\Omega + \frac{\eta_L}{M\bar{\omega}} \right) - \frac{C}{2} \right], \\ c_3 &= \frac{1}{6(\beta+1)\sqrt{M\bar{\omega}}} \left\{ \frac{1}{2\beta+1} \left[\frac{4\eta_L}{\bar{\omega}} + 2M\beta\Omega \right] \left[\frac{M\beta}{\bar{\omega}} \Omega \left(\Omega + \frac{\eta_L}{M\bar{\omega}} \right) - \frac{C}{2} \right] + M(2-C)\Omega \right\}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

sendo $\Omega = \frac{\eta_L}{M\bar{\omega}} + \frac{\eta_C}{\beta}$. Para obter a forma polinomial da função, devemos impor duas condições aos coeficientes, similares a (4.37) e (4.38). A condição $C = 2n$, fornece o espectro de energia,

$$E_{k,m,n} = \pm \left[k^2 + \frac{M^4\omega^2}{\eta_L^2 + M^2\omega^2} + 2\eta_C\eta_L - 2M\omega\frac{m}{\alpha} + 2M\bar{\omega} \left(n + \frac{1}{2} + \beta \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.65)$$

com $\bar{\omega} = \frac{1}{M} \sqrt{\eta_L^2 + M^2\omega^2}$.

Deste resultado, podemos ver que o campo magnético e ambos os termos do potencial escalar interferem significativamente no espectro de energia. Para o caso onde a função $H(x)$ é um polinômio de Heun de primeiro grau,

$$H_{1,m}(r) = 1 + M \left[\frac{\eta_L}{M\bar{\omega}_{1,m}} + \frac{\eta_C}{\beta} \right] r, \quad (4.66)$$

a energia da partícula é

$$E_{k,m,1} = \pm \left[k^2 + \frac{M^4 \omega_{1,m}^2}{\eta_L^2 + M^2 \omega_{1,m}^2} + 2\eta_C \eta_L - \frac{2m}{\alpha} M \omega_{1,m} + 2M \bar{\omega}_{1,m} \left(\beta + \frac{3}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} . \quad (4.67)$$

A condição $d_2 = 0$ obriga que o parâmetro $\bar{\omega}_{1,m}$ satisfaça a seguinte equação algébrica de terceiro grau,

$$\bar{\omega}_{1,m}^3 - \frac{M \eta_C^2}{\beta} \bar{\omega}_{1,m}^2 - \frac{(2\beta + 1) \eta_C \eta_L}{\beta} \bar{\omega}_{1,m} - \frac{(\beta + 1) \eta_L^2}{M} = 0 . \quad (4.68)$$

A equação acima possui pelo menos uma solução real, mas decidimos não reproduzi-la aqui, uma vez que se trata de uma expressão muito longa. Também é importante enfatizar que o nível de energia (4.67) foi obtido assumindo-se que os parâmetros η_C e η_L são diferentes de zero, $C = 2$ e $c_2 = 0$. Este é o nível de energia mais baixo que o método analítico adotado pode fornecer. Podemos ver que este nível de energia é completamente diferente do nível correspondente obtido dos níveis de Landau dados por (4.27).

4.4 Campos fermiônicos: equação de Dirac

Nesta seção, consideraremos a análise quântica relativística de uma partícula carregada, de spin $-\frac{1}{2}$, no contexto mais geral, i.e., um férmion na presença de um campo magnético uniforme e de um potencial escalar dados, respectivamente, por (4.2) e (4.3).

Antes de mais nada, introduzimos a generalização da equação de Dirac para um espaço-tempo curvo arbitrário, na presença de um potencial eletromagnético externo e de um potencial escalar, a qual é dada por

$$\left[i\gamma^\mu(x) (\nabla_\mu + ieA_\mu) - (M + S(r)) \right] \Psi(x) = 0 . \quad (4.69)$$

Aqui, M é a massa da partícula e a derivada covariante para campos fermiônicos é definida da forma

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu , \quad (4.70)$$

juntamente com a conexão espinorial afim

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}e_{(a)}^\nu \left[\partial_\mu e_{(b)\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_{(b)\sigma} \right], \quad (4.71)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é o símbolo de Christoffel de segundo tipo e $e_{(a)}^\mu(x)$ é a base tetrada definida posteriormente. E ainda, $\gamma^\mu(x)$ representa a matriz de Dirac generalizada, que satisfaz a álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = -2g^{\mu\nu}(x), \quad (4.72)$$

e definida em termos de um conjunto de campos tetrados $e_{(a)}^\mu(x)$ e matrizes de Dirac constantes, $\gamma_{(a)}$, na forma

$$\gamma^\mu(x) = e_{(a)}^\mu(x)\gamma_{(a)}. \quad (4.73)$$

Os campos tetrados $e_{(a)}^\mu(x)$ satisfazem a relação

$$\eta^{(a)(b)}e_{(a)}^\mu(x)e_{(b)}^\nu(x) = g^{\mu\nu}. \quad (4.74)$$

Aqui, letras gregas são usadas para representar índices tensoriais e letras latinas (entre parênteses) para índices tetrados. As matrizes $\gamma^{(a)}$ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo plano. Neste trabalho, usaremos a definição destas matrizes representada abaixo:

$$\gamma^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \gamma^{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^{(a)} \\ -\sigma^{(a)} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

onde $\sigma^{(a)}$ são as matrizes de Pauli e $\mathbf{1}$ é a matriz identidade 2×2 .

Para analisar a equação de Dirac no espaço-tempo da corda cósmica, podemos considerar a base tetrada $e_{(a)}^\mu$ definida como:

$$e_{(a)}^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\frac{\sin \phi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & \sin \phi & \frac{\cos \phi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Usando as equações (4.73), (4.75) e (4.76), obtemos as seguintes expressões para as matrizes

de Dirac generalizadas $\gamma^\mu(x)$:

$$\gamma^0 = \gamma^{(0)}, \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Aqui, σ^i representa o seguinte conjunto de matrizes de Pauli modificadas:

$$\sigma^1 = \sigma^r = \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ e^{i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

$$\sigma^2 = \sigma^\phi = -\frac{i}{\alpha r} \begin{bmatrix} 0 & e^{-i\phi} \\ -e^{i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

$$\sigma^3 = \sigma^z = \sigma^{(3)}, \quad (4.80)$$

então $\gamma^3 = \gamma^{(3)}$.

4.4.1 Equações radiais fermiônicas

Nesta subseção, investigaremos a equação de Dirac (4.69) desacoplando as equações diferenciais para as quatro componentes do spinor de Dirac, através de uma série de considerações acerca da simetria. Como nas seções anteriores, as presenças do campo magnético e do potencial escalar são consideradas, como descrito na seção 4.1.

Das equações (4.71), (4.76) e (4.77), é possível calcular as conexões espinoriais

$$\Gamma_\mu = (0, 0, \Gamma_\phi, 0), \quad \text{com} \quad \Gamma_\phi = \frac{i(1-\alpha)}{2} \Sigma^{(3)}, \quad \text{e} \quad \Sigma^{(3)} = \begin{bmatrix} \sigma^{(3)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(3)} \end{bmatrix}. \quad (4.81)$$

A hamiltoniana associada à (4.69) é

$$\mathcal{H} = -i\gamma_{(0)} \left[\gamma^r \partial_r + \gamma^\phi \left(\partial_\phi + \frac{i(1-\alpha)}{2} \Sigma^{(3)} + ieA_\phi(r) \right) + \gamma^{(3)} \partial_z + i(M + S(r))^2 \right]. \quad (4.82)$$

Este operador satisfaz as relações de comutação $[\mathcal{H}, \hat{p}_3] = [\mathcal{H}, \hat{J}_3] = 0$, onde $\hat{p}_3 = -i\partial_z$, $\hat{J}_3 =$

$\hat{L}_3 + \hat{S}_3 = -i\partial_\phi + \frac{1}{2}\Sigma^{(3)}$, e as equações lineares de autovalor seguintes

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi, \quad (4.83)$$

$$\hat{p}_3\Psi = k\Psi, \quad (4.84)$$

$$\hat{f}_3\Psi = -i\partial_\phi\Psi + \frac{1}{2}\Sigma^{(3)}\Psi = j\Psi, \quad (4.85)$$

sendo $j = m + \frac{1}{2}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, e $k \in (-\infty, \infty)$.

Adotaremos o seguinte ansatz para a função de onda:

$$\Psi(t, r, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-iEt + im\phi + ikz} \begin{bmatrix} \varphi_+(r) \\ -i\varphi_-(r)e^{i\phi} \\ \chi_+(r) \\ i\chi_-(r)e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Substituindo a função acima em (4.83), após alguns cálculos, mostramos que as funções radiais obedecem as seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\chi'_- + \left(\frac{j}{\alpha r} - M\omega r \right) \chi_- + k\chi_+ + [M - E + S(r)] \varphi_+ = 0, \quad (4.87)$$

$$\chi'_+ - \left(\frac{j}{\alpha r} - M\omega r \right) \chi_+ + k\chi_- + [M - E + S(r)] \varphi_- = 0, \quad (4.88)$$

$$\varphi'_- + \left(\frac{j}{\alpha r} - M\omega r \right) \varphi_- - k\varphi_+ + [M + E + S(r)] \chi_+ = 0, \quad (4.89)$$

$$\varphi'_+ - \left(\frac{j}{\alpha r} - M\omega r \right) \varphi_+ - k\varphi_- + [M + E + S(r)] \chi_- = 0. \quad (4.90)$$

Estas equações apresentam a simetria discreta

$$\chi_+ = \lambda \varphi_+ \quad \text{e} \quad \varphi_- = \lambda \chi_-, \quad \text{com} \quad \lambda = \frac{E + s\sqrt{E^2 - k^2}}{k} \quad \text{e} \quad s = \pm 1. \quad (4.91)$$

Também introduzimos a frequência de ciclotron $\omega = \frac{eB_0}{2M}$. Aplicando o argumento de simetria

expresso em (4.91), é possível reduzir o número de equações às duas dadas abaixo:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j-\alpha)}{\alpha^2 r^2} + E^2 - k^2 + 2M\omega \left(\frac{j}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) - M^2 \omega^2 r^2 - (M + S(r))^2 \right] \varphi + \frac{dS(r)}{dr} \chi = 0 , \quad (4.92)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{j(j+\alpha)}{\alpha^2 r^2} + E^2 - k^2 + 2M\omega \left(\frac{j}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) - M^2 \omega^2 r^2 - (M + S(r))^2 \right] \chi + \frac{dS(r)}{dr} \varphi = 0 , \quad (4.93)$$

onde usamos $\varphi_+ \equiv \varphi$, e $\chi_- \equiv \chi$, por simplicidade.

As equações (4.92) e (4.93) são equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas. Percebemos que este par de equações pode ser escrito da seguinte forma matricial

$$\hat{K} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0 , \quad (4.94)$$

sendo $\hat{K}$ o operador matricial 2×2 abaixo,

$$\hat{K} = D(r)\mathbf{1} + A(r)\sigma^{(3)} + S'(r)\sigma^{(1)} , \quad (4.95)$$

onde

$$D(r) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{j^2}{\alpha^2 r^2} + E^2 - k^2 + 2M\omega \frac{j}{\alpha} - M^2 \omega^2 r^2 - (M + S(r))^2 , \quad (4.96)$$

$$A(r) = \frac{j}{\alpha r^2} + M\omega , \quad (4.97)$$

$$S'(r) = -\frac{\eta_C}{r^2} + \eta_L . \quad (4.98)$$

O operador $\hat{K}$ pode ser diagonalizado através da matriz $\hat{R}$, ortogonal, 2×2 , como mostrado abaixo,

$$\hat{R}\hat{K}\hat{R}^{-1}\hat{R} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = 0, \quad \text{com} \quad \hat{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} . \quad (4.99)$$

Este processo nos permite escrever o novo operador, chamado de $\hat{K}_\phi$, na forma

$$\hat{K}_\phi = D(r)\mathbf{1} + \left(\frac{j}{\alpha r^2} + M\omega \right) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix} + \left(\eta_L - \frac{\eta_C}{r^2} \right) \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (4.100)$$

com $\theta = 2\phi$. Concluindo, este operador diferencial é diagonal se ambas as condições abaixo forem satisfeitas simultaneamente:

$$\frac{j}{\alpha} \tan \theta = -\eta_C \quad \text{e} \quad M\omega \tan \theta = \eta_L. \quad (4.101)$$

Esta análise fornece o seguinte conjunto de expressões

$$\omega = -\frac{j\eta_L}{\alpha M\eta_C}, \quad (4.102)$$

$$\sin \theta = -\frac{\alpha\eta_C}{\sqrt{j^2 + \alpha^2\eta_C^2}}, \quad (4.103)$$

$$\cos \theta = \frac{j}{\sqrt{j^2 + \alpha^2\eta_C^2}}. \quad (4.104)$$

Isto significa que, para desacoplar (4.92) e (4.93), é preciso impor a condição (4.102). Assim, a análise do movimento quântico é simplificada enormemente. As duas equações diferenciais de quarta ordem obtidas no caso geral se reduzem a duas equações diferenciais de segunda ordem. Apesar desta condição fornecer um sistema simplificado, em princípio, as soluções para as equações de onda e espectro de energia poderiam não ser compatíveis. Felizmente, como veremos adiante, esta situação não ocorre nesta análise. Retornando a (4.102), vemos que a intensidade do campo magnético, a massa da partícula e as constantes de acoplamento escalar devem estar relacionadas e, além disso, esta relação depende do número quântico momento angular total, j . Para satisfazer esta condição, podemos permitir que os parâmetros ω ou η_L sejam ajustados para um valor específico, permitindo a obtenção de soluções exatas para as equações radiais, como fizemos para o caso bosônico. Sendo assim, é possível reescrever as equações diferenciais anteriores na forma de Schrödinger, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega\frac{j}{\alpha} - 2\eta_C\eta_L - \gamma\frac{\eta_L}{\eta_C} \right. \\ \left. - \frac{\gamma(\gamma-1)}{r^2} - \frac{2M\eta_C}{r} - 2M\eta_L r - \gamma^2\frac{\eta_L^2}{\eta_C^2}r^2 \right] \varphi = 0, \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\chi}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega\frac{j}{\alpha} - 2\eta_C\eta_L + \gamma\frac{\eta_L}{\eta_C} \right. \\ \left. - \frac{\gamma(\gamma+1)}{r^2} - \frac{2M\eta_C}{r} - 2M\eta_L r - \gamma^2\frac{\eta_L^2}{\eta_C^2}r^2 \right] \chi = 0, \end{aligned} \quad (4.106)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\alpha} \sqrt{j^2 + \alpha^2 \eta_C^2}$. Além disso, podemos escrever estas equações como equações HBC, dadas por (C.4), se definirmos uma nova variável adimensional³

$$x = \sqrt{\gamma \frac{|\eta_L|}{\eta_C}} r . \quad (4.107)$$

Então, temos

$$\varphi''(x) + \left[\frac{\zeta_{k,j} \eta_C}{\gamma |\eta_L|} - \frac{\eta_L}{|\eta_L|} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{x^2} + \frac{a}{x} + bx - x^2 \right] \varphi(x) = 0 , \quad (4.108)$$

$$\chi''(x) + \left[\frac{\zeta_{k,j} \eta_C}{\gamma |\eta_L|} + \frac{\eta_L}{|\eta_L|} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{x^2} + \frac{a}{x} + bx - x^2 \right] \chi(x) = 0 , \quad (4.109)$$

onde

$$\zeta_{k,j} = E^2 - M^2 - k^2 + 2M\omega \frac{j}{\alpha} - 2\eta_C \eta_L , \quad (4.110)$$

$$a = -2M\eta_C \sqrt{\frac{\eta_C}{\gamma |\eta_L|}} \quad \text{e} \quad (4.111)$$

$$b = \frac{a\eta_L}{\gamma |\eta_L|} . \quad (4.112)$$

Neste ponto concluímos as observações acerca de (4.108) e (4.109) e deixamos a obtenção de suas soluções exatas para a seção seguinte.

4.5 Soluções analíticas da equação de Dirac

Seguindo o mesmo processo usado para obter soluções da equação de Klein-Gordon, é conveniente analisar o comportamento assintótico das soluções das equações diferenciais radiais (4.108) e (4.109) para $x \rightarrow 0$ e $x \rightarrow \infty$. Através destas análises, verifica-se que as componentes radiais do spinor de Dirac podem ser expressas como

$$\varphi(x) = x^\gamma e^{-\frac{1}{2}x(x-b)} F(x) , \quad (4.113)$$

$$\chi(x) = x^{\gamma+1} e^{-\frac{1}{2}x(x-b)} H(x) . \quad (4.114)$$

³Nesta análise assumimos η_C uma constante positiva.

Inserindo este ansatz em (4.108) e (4.109), obtemos

$$\begin{aligned}
 xF''(x) &+ (2\gamma + bx - 2x^2)F'(x) + \left[\left(1 + \frac{\eta_L}{|\eta_L|}\right)a \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} - 2(\gamma + 1) + 1 - \frac{\eta_L}{|\eta_L|} \right)x \right] F(x) = 0, \quad (4.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 xH''(x) &+ (2(\gamma + 1) + bx - 2x^2)H'(x) + \left[\left(1 + \frac{(\gamma + 1)\eta_L}{\gamma|\eta_L|}\right)a \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} - 2(\gamma + 1) - 1 + \frac{\eta_L}{|\eta_L|} \right)x \right] H(x) = 0. \quad (4.116)
 \end{aligned}$$

Estas são equações do tipo HBC, com soluções

$$F(x) = H_B \left(2\gamma - 1, \quad b, \quad \frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} - \frac{\eta_L}{|\eta_L|}, \quad 2a; \quad -x \right), \quad (4.117)$$

$$H(x) = H_B \left(2\gamma + 1, \quad b, \quad \frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} + \frac{\eta_L}{|\eta_L|}, \quad 2a; \quad -x \right). \quad (4.118)$$

É mais eficiente acompanhar a análise de ambas as equações, (4.115) e (4.116), simultaneamente. Para conseguir isso, definimos as constantes A , B e D e a função G , representando F ou H , como mostrado abaixo:

$$A = \begin{cases} \gamma, & \text{if } G = F \\ \gamma + 1, & \text{if } G = H \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1 + \frac{\eta_L}{|\eta_L|}, & \text{if } G = F \\ 1 + \frac{(\gamma + 1)\eta_L}{\gamma|\eta_L|}, & \text{if } G = H \end{cases} \quad (4.119)$$

$$e \quad D = \begin{cases} \frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} - 2(\gamma + 1) + 1 - \frac{\eta_L}{|\eta_L|}, & \text{if } G = F \\ \frac{\zeta_{k,j}\eta_C}{\gamma|\eta_L|} + \frac{b^2}{4} - 2(\gamma + 1) - 1 + \frac{\eta_L}{|\eta_L|}, & \text{if } G = H \end{cases}. \quad (4.120)$$

Fazendo uso destas definições, é possível representar as duas equações diferenciais em uma única forma,

$$xG'' + (2A + bx - 2x^2)G' + (Ba + Dx)G = 0. \quad (4.121)$$

Usando o método de Frobenius, obtemos a expansão em série desta solução:

$$G(x) = \sum_n C_n x^n. \quad (4.122)$$

Substituindo esta série em (4.121), obtemos a relação de recorrência

$$C_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+2A+1)} \{ [Ba + b(n+1)] C_{n+1} + (D - 2n) C_n \} \quad (4.123)$$

$$\text{e } C_1 = -\frac{Ba}{2A} C_0 . \quad (4.124)$$

Com esta relação, podemos construir os três primeiros coeficientes da expansão. Assumindo $C_0 = 1$, teremos:

$$C_2 = \frac{1}{2(2A+1)} \left[\frac{Ba}{2A} (Ba + b) - D \right] , \quad (4.125)$$

$$C_3 = \frac{1}{6(A+1)} \left\{ \frac{Ba+2b}{2(2A+1)} \left[D - \frac{Ba}{2A} (Ba + b) \right] + \frac{Ba}{2A} (D - 2) \right\} . \quad (4.126)$$

Sabemos que truncando a expansão em série da função HBC em um polinômio de Heun de grau n , obtemos uma solução analítica para as equações radiais. Podemos implementar este método impondo duas condições sobre os coeficientes da série, semelhante ao que fizemos na análise bosônica. As condições são:

$$C_{n+1} = 0 \quad \text{e} \quad D = 2n , \quad \text{sendo } n = 1, 2, \dots \quad (4.127)$$

Da condição $D = 2n$, é possível obter uma expressão formal para a energia. O mesmo autovalor da energia deve ser reproduzido independentemente da escolha feita para a constante D (seja $G = F$ ou $G = H$). Para que isso ocorra, é necessário impor $\eta_L > 0$, de outra forma não existem auto-valores associados aos polinômios de Heun que satisfaçam a condição $D = 2n$ para as duas componentes simultaneamente. Após adotar esta restrição, obtemos:

$$E_{k,j,n} = \pm \left\{ M^2 - k^2 - 2M\omega \frac{j}{\alpha} + 2\eta_C \eta_{L_n} + \eta_{L_n} \left[\frac{2\gamma(\gamma+n+1)}{\eta_C} - \frac{M^2 \eta_C^2}{\gamma^2 \eta_{L_n}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} . \quad (4.128)$$

Se assumirmos uma solução na forma de um polinômio de Heun de grau $n = 1$, a equação $C_2 = 0$ indica que o parâmetro η_L depende do momento angular total j . Para este caso, temos

$$\eta_{L1,j} = \frac{2M^2 \eta_C^3 (2\gamma+1)}{\gamma^3} . \quad (4.129)$$

O valor acima, junto com (4.128), fornece o espectro de energia da partícula.

Teoria quântica de campos em espaços curvos

Nesta seção apresentaremos brevemente o estudo da teoria quântica de campos em um espaço-tempo curvo. Neste formalismo o espaço-tempo é descrito por um tensor métrico clássico, $g_{\mu\nu}(x)$. Algumas vezes este estudo é chamado de teoria semi-clássica, pois apenas os campos de matéria são quantizados. Veremos, no decorrer desta análise, que considerar um espaço-tempo não Minkowskiano irá produzir efeitos quânticos, tais como a criação de partículas e a polarização do vácuo.

5.1 Segunda quantização no espaço curvo

No espaço-tempo plano, a invariância de Lorentz permite-nos identificar um único estado de vácuo para a teoria. Em geral não existe um único estado de vácuo em um espaço-tempo curvo. Como resultado, o conceito de partículas torna-se ambíguo e a interpretação das quantidades físicas torna-se mais difícil.

Vamos considerar o caso particular de um campo escalar real e massivo, cuja densidade lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} \left(\partial_\alpha \varphi \partial^\alpha \varphi + m^2 \varphi^2 + \xi R \varphi^2 \right) . \quad (5.1)$$

A equação de onda correspondente é

$$(\square - m^2 - \xi R) \varphi(x) = 0 . \quad (5.2)$$

Onde $\square$ é o operador d'Alembertiano generalizado, R é o escalar de curvatura e ξ é a constante de acoplamento entre o campo escalar e a geometria. O caso em que $\xi = 0$ é conhecido como acoplamento mínimo e a equação resultante é chamada de Klein-Gordon. Se o termo de massa, m , anula-se, a teoria é invariante conformalmente para $\xi = 1/6$.

O produto interno entre duas soluções da equação de Klein-Gordon é definido por

$$(f_1, f_2) = -i \int_{\Sigma} (f_1 \partial_{\mu} f_2^* - f_2^* \partial_{\mu} f_1) d\Sigma^{\mu} , \quad (5.3)$$

onde $d\Sigma^{\mu} = d\Sigma n^{\mu}$, sendo $d\Sigma$ o elemento de volume em uma hipersuperfície tipo-espaço, isto é, uma superfície na qual o intervalo entre dois pontos da mesma é positivo, e n^{μ} o vetor unitário tipo-tempo, ou seja, $|\eta| = -1$ e normal à esta hipersuperfície. Este produto interno independe da escolha da hipersuperfície [109], uma vez que as funções anulam-se no infinito.

A quantização de um campo escalar, no espaço curvo, pode ser feita seguindo o procedimento canônico. Inicialmente, devemos escolher uma forma de folhear o espaço-tempo em hipersuperfícies tipo-espaço. Sendo Σ uma hipersuperfície particular com o vetor n^{μ} rotulado por um valor constante da coordenada tempo t , isto é, escolhendo $n^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, a derivada de φ na direção normal é $\dot{\varphi} = n^{\mu} \partial_{\mu} \varphi$ e o momento canônico é definido por

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \quad (5.4)$$

Devemos, então, impor a relação de comutação canônica

$$[\varphi(\vec{x}, t), \pi(\vec{x}', t)] = i\delta(\vec{x}, \vec{x}') , \quad (5.5)$$

onde $\delta(\vec{x}, \vec{x}')$ é uma função delta na hipersuperfície com a propriedade

$$\int \delta(\vec{x}, \vec{x}') d\Sigma = 1 . \quad (5.6)$$

Considerando que $\{f_j\}$ é um conjunto completo de soluções da equação (5.2), $\{f_j^*\}$ será um conjunto completo de soluções com norma negativa e $\{f_j, f_j^*\}$ formará um conjunto completo de soluções da equação de onda, em termos do qual podemos expandir uma função arbitrária. Desse modo, devemos escrever o operador de campo $\hat{\varphi}$ como uma soma de operadores de criação e aniquilação, como segue:

$$\hat{\varphi} = \sum_j \left(a_j f_j + a_j^{\dagger} f_j^* \right) , \quad (5.7)$$

onde $[a_j, a_{j'}^{\dagger}] = \delta_{j,j'}$. Esta expansão define o estado de vácuo $|0\rangle$ através da relação $a_j|0\rangle = 0$. No caso em que o espaço-tempo é plano, escolhemos as soluções de norma positiva como solu-

ções de frequência positiva, $f_j \propto e^{-i\omega t}$. Indiferente ao referencial de Lorentz escolhido, no qual t é a coordenada temporal, este procedimento define um único estado de vácuo de Minkowski. Em outras palavras, podemos dizer que, no espaço plano, a escolha $\{f_j\}$ é única. No espaço-tempo curvo, não existe, em geral, uma única escolha de $\{f_j\}$ e, logo, não existe um único estado de vácuo. Isto significa que não podemos identificar um estado de vácuo univocamente e a noção de partícula torna-se ambígua. Esta não unicidade é responsável por provocar consequências físicas, tais como o fenômeno de criação de partículas, que discutiremos a seguir.

5.2 Criação de partículas

Vamos considerar um espaço-tempo que assintoticamente plano no passado e no futuro e curvo na região intermediária. Sejam $\{f_j\}$ as soluções com frequências positivas no passado (região *in*), e seja $\{F_j\}$ as soluções com frequências positivas no futuro (região *out*). Admitindo que estes conjuntos de soluções são ortonormais, segundo (5.3) e (5.5), temos

$$\begin{aligned} (f_j, f_{j'}) &= (F_j, F_{j'}) = \delta_{j,j'} \\ (f_j^*, f_{j'}^*) &= (F_j^*, F_{j'}^*) = -\delta_{j,j'} \\ (f_j, f_{j'}^*) &= (F_j, F_{j'}^*) = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Como os conjuntos são completos, podemos escrever um em termos do outro. Por exemplo, podemos expandir os modos *in* em termos dos modos *out*, ou seja,

$$f_j = \sum_k (\alpha_{jk} F_k + \beta_{jk} F_k^*) . \quad (5.9)$$

Inserindo a relação acima em (5.8), chegamos às seguintes condições:

$$\sum_k (\alpha_{jk} \alpha_{j'k}^* - \beta_{jk} \beta_{j'k}^*) = \delta_{jj'} \quad (5.10)$$

e

$$\sum_k (\alpha_{jk} \alpha_{j'k} - \beta_{jk} \beta_{j'k}) = 0 . \quad (5.11)$$

A expansão inversa é

$$F_k = \sum_j (\alpha_{jk}^* f_j - \beta_{jk} f_j^*) . \quad (5.12)$$

O operador de campo, $\hat{\phi}$, pode ser escrito em termos de ambos os conjuntos, ou seja,

$$\hat{\phi} = \sum_j \left(a_j f_j + a_j^\dagger f_j^* \right) = \sum_j \left(b_j F_j + b_j^\dagger F_j^* \right). \quad (5.13)$$

Os operadores a_j e $a_j^\dagger$ são, respectivamente, os operadores de criação e aniquilação na região *in*, enquanto que b_j e $b_j^\dagger$ são os operadores correspondentes na região *out*. O estado de vácuo na região *in* é definido por $a_j|0\rangle_{\text{in}} = 0, \forall j$ e descreve o caso em que nenhuma partícula está presente inicialmente. O estado de vácuo na região *out* é definido por $b_j|0\rangle_{\text{out}} = 0, \forall j$ e descreve o caso em que nenhuma partícula está presente no futuro. Notando que $a_j = (\varphi, f_j)$ e $b_j = (\varphi, F_j)$, podemos expandir um conjunto de operadores em termos do outro, isto é,

$$a_j = \sum_k \left(\alpha_{jk}^* b_k - \beta_{jk}^* b_k^\dagger \right) \quad (5.14)$$

ou

$$b_k = \sum_j \left(\alpha_{jk} a_j - \beta_{jk} a_j^\dagger \right). \quad (5.15)$$

Esta transformação é chamada de transformação de Bogoliubov e os coeficientes α_{jk} e β_{jk} são os chamados coeficientes de Bogoliubov [110].

Agora podemos descrever o fenômeno físico de criação de partículas por um campo gravitacional dependente do tempo. Vamos admitir que nenhuma partícula está presente antes de considerar o campo gravitacional. Se adotarmos a descrição de Heisenberg, o estado $|0\rangle_{\text{in}}$ será o estado do sistema em qualquer instante de tempo. Entretanto, o operador número que fornece o número total de partículas na região *out* é $N_k = b_k^\dagger b_k$. Desta forma, o número médio de partículas criadas no modo k é

$$\langle N_k \rangle_{\text{in}} = {}_{\text{in}} \langle 0 | b_k^\dagger b_k | 0 \rangle_{\text{in}} = \sum_j |\beta_{jk}|^2. \quad (5.16)$$

Então, podemos observar que, se os coeficientes β_{jk} são diferentes de zero, ocorrerá o fenômeno de criação de partículas.

Uma aplicação direta dos conceitos discutidos acima é a criação de partículas por um universo em expansão [111].

5.3 Polarização do vácuo

A noção de vácuo em uma teoria quântica de campos, difere essencialmente do *vazio* da física clássica. O estado de vácuo corresponde ao estado do operador número de partículas com autovalor nulo. Segundo a ideia de Dirac para férmions, o estado de vácuo quântico é um estado cujos níveis de energia negativa estão ocupados, de acordo com o princípio da exclusão de Pauli, e todos os níveis de energia positiva estão vazios [100]. Entretanto, o estado de vácuo depende de campos externos e este fenômeno se manifesta no cálculo de valores esperados no vácuo de operadores bi-lineares nos campos:

$$\langle \hat{A}(x) \rangle = \sum_k A \left\{ \varphi_k^{(-)}(x), \varphi_k^{(+)}(x) \right\}, \quad (5.17)$$

onde $A\{f, g\}$ é um operador diferencial bi-linear.

O efeito de polarização do vácuo é mais comumente associado às flutuações do vácuo de campos de matéria na presença de interações eletromagnéticas externas. Estas flutuações surgem da interação do campo eletromagnético com as partículas que constituem o mar de Dirac. Particularmente o cálculo da função de Green associada ao campo eletromagnético,

$$\langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(x') | 0 \rangle = G_{\mu\nu}(x, x'), \quad (5.18)$$

apresenta um resultado formalmente divergente em teoria de perturbação. De modo a obtermos um resultado finito para esta função, devemos aplicar um processo de renormalização, que consiste, essencialmente, na redefinição da carga elétrica do elétron [100].

As flutuações quânticas de campos de matéria na presença de campos de fundo (clássicos) gravitacionais, são também denominadas de polarização do vácuo. Neste caso, por exemplo, o cálculo do valor esperado no vácuo do operador tensor energia-momento, $\langle \hat{T}_\mu^\nu \rangle$, é também formalmente divergente. Novamente, de modo a obtermos um resultado finito e bem definido, devemos aplicar um processo de renormalização. Fazendo isto, as contribuições espúrias são absorvidas nas redefinições das constantes cosmológica e gravitacional. Além disso, surgem termos quadráticos nos tensores de Riemann, Ricci e no escalar de curvatura, que estão ausentes na teoria clássica de Einstein [110]. A consistência deste formalismo torna-se evidente quando consideramos o valor esperado no vácuo, $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$, como fonte no lado direito da equação semi-clássica de Einstein:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle. \quad (5.19)$$

O valor esperado no vácuo, renormalizado, $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle_{Ren}$, deve satisfazer ainda restrições de modo a preservar o princípio geral de covariância e ser conservado.

5.3.1 Função de Green e $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ no espaço-tempo curvo

Nesta seção analisaremos o valor esperado no vácuo do operador tensorial energia-momento, para um dado campo de matéria em um espaço-tempo curvo, $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$. Como vimos acima, este objeto pode ser considerado como fonte na equação semi-clássica de Einstein.

O cálculo deste valor esperado no vácuo pode ser efetuado a partir da função de Green associada ao campo de matéria em questão. Formalmente, podemos escrever

$$\langle 0 | \hat{T}_{\mu\nu}(x) | 0 \rangle = \lim_{x' \rightarrow x} \Delta_{\mu\nu'}(x, x') G(x, x') , \quad (5.20)$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green associada ao campo e $\Delta_{\mu\nu'}(x, x')$ é um operador diferencial, cuja forma depende do campo que estamos tratando e o índice ν' está relacionado com a derivada¹ em relação a x' . Esta quantidade é formalmente divergente porque depende do produto de operadores de campo e suas derivadas avaliados no mesmo ponto. Fisicamente, este infinito está associado às flutuações quânticas do vácuo. Especificamente para a componente zero-zero, esta divergência está associada a energia do estado de vácuo, que é infinita.

Devemos, portanto, aplicar um procedimento de renormalização, de modo a obter um valor finito e bem comportado para $\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle$. O procedimento que iremos adotar é o de separação de pontos. A ideia básica deste processo consiste em subtrair dos valores encontrados, após a ação do operador $\Delta_{\mu\nu'}$ na função de Green, todas as divergências que aparecem ao tomarmos o limite de coincidência. A seguir, detalharemos um processo que fornece um valor finito que respeita o critério de conservação. Por simplicidade, consideraremos apenas campos livres e discutiremos o processo de renormalização da função de dois pontos. Se calcularmos a função de dois pontos para alguma escolha de vácuo em um espaço-tempo curvo, podemos mostrar que o comportamento da mesma, para curtas distâncias, é

$$G(x, x') \sim \frac{1}{2\pi^2} \left(-\frac{1}{\sigma} + \ln \sigma + \text{termos finitos} \right) , \quad x' \rightarrow x , \quad (5.21)$$

onde σ é a metade do quadrado da distância geodésica entre os pontos x e x' .

¹É preciso aplicar inicialmente a derivada para, em seguida, tomar o limite de coincidência

Analisaremos a função de dois pontos associada ao campo:

$$G(x, x') \equiv \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle, \quad (5.22)$$

onde $|0\rangle$ é um estado de vácuo escolhido. Dizemos que esta função tem a forma de Hadamard se pudermos expressá-la como

$$G(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')} + V(x, x') \ln[\zeta^2 \sigma(x, x')] + W(x, x'), \quad (5.23)$$

onde U , V e W são funções regulares e finitas para todas as escolhas de x e x' e ζ é um parâmetro arbitrário de escala de massa, introduzido de modo a tornar a função acima finita. As funções U e V são quantidades geométricas que independem do estado quântico e apenas W nos fornece alguma informação sobre o estado. Com isto, a parte divergente de $G(x, x')$, no limite de coincidência, será independente do estado. Analisando a equação (5.23), verificamos que, para renormalizarmos função de Green, devemos subtrair da mesma a função de Hadamard, G_H , dada por

$$G_H(x, x') = \frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')} + V(x, x') \ln[\zeta^2 \sigma(x, x')]. \quad (5.24)$$

Assim, o valor esperado no vácuo, renormalizado, do tensor energia-momento pode ser obtido por:

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle_{Ren} = \lim_{x' \rightarrow x} \Delta_{\mu\nu'}(x, x') [G(x, x') - G_H(x, x')]. \quad (5.25)$$

Quando efetuamos a subtração descrita pela equação (5.25), estamos absorvendo as divergências de $\langle \hat{T}_{\mu\nu}(x) \rangle$ nas redefinições das constantes de acoplamento da ação gravitacional, isto é, constante gravitacional e cosmológica. Na verdade, mostra-se que os termos divergentes, que surgem do valor esperado no vácuo do tensor energia-momento para campos escalares, podem ser derivados de uma ação efetiva associada a uma densidade lagrangeana divergente, $\mathcal{L}_{div}$, que tem caráter puramente geométrico [110]. Esta densidade lagrangeana depende das funções a_0 ,

a_1 e a_2 , as quais, no limite de coincidência são:

$$a_0(x) = 1, \quad (5.26)$$

$$a_1(x) = \left(\frac{1}{6} - \xi\right) R \quad \text{e} \quad (5.27)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{180} \left(R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} - R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} \right) \quad (5.28)$$

$$- \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi \right) \square R + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi^2 \right) R^2, \quad (5.29)$$

onde $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o tensor de Riemann, $R_{\alpha\beta}$ é o tensor de curvatura de Ricci e R é o escalar de curvatura. Considerando este resultado juntamente com a densidade lagrangeana de Einstein na presença do termo cosmológico,

$$S_E = \frac{1}{16\pi G_B} \int d^4x (R - 2\Lambda_B), \quad (5.30)$$

sendo G_B e Λ_B as constantes gravitacional e cosmológica não renormalizadas, define-se a ação total gravitacional por:

$$S_T = S_E + S_{div}. \quad (5.31)$$

Desta forma os termos divergentes em S_{div} , proporcionais a a_0 e a_1 , irão renormalizar as constantes G_B e Λ_B , respectivamente. A contribuição proporcional a a_2 , não presente originalmente na ação de Einstein, é de quarta ordem no tensor métrico e em suas derivadas. Quando este termo é inserido em S_T , o lado esquerdo da equação de Einstein é modificado. Desta forma devemos introduzir termos de quarta ordem na densidade lagrangeana original, com os respectivos coeficientes não renormalizados, de tal forma que os mesmos sejam renormalizados apropriadamente, resultando em um formalismo finito para a nova equação de Einstein.

Polarização do vácuo fermiônico por uma corda cósmica no espaço-tempo de Anti-de Sitter

Este capítulo está organizado da seguinte forma: na seção 6.1, apresentamos a geometria da variedade associada com o espaço-tempo considerado e construímos o conjunto completo de funções de onda fermiônicas para energias positiva e negativa. Na seção 6.2, calculamos o condensado fermiônico usando o método do somatório dos modos. Analisamos, separadamente, a contribuição induzida pela corda cósmica e seu comportamento em regiões assintóticas dos parâmetros. A análise do VEV do tensor energia-momento é considerada na seção 6.3. Lá, a contribuição induzida pela corda cósmica também é investigada. No apêndice D, mostramos que as funções dos modos usadas ao longo do texto são obtidas quando a condição de contorno da "sacola do MIT" é imposta à uma distância finita do contorno de AdS, que é, então, zerada.

6.1 Funções de onda fermiônicas

O objetivo principal desta seção é obter o conjunto completo de funções dos modos fermiônicos num espaço tempo de AdS 4-dimensional na presença de uma corda cósmica. Este conjunto é necessário para o cálculo dos efeitos de polarização do vácuo, através do método de somatória dos modos.

Em coordenadas cilíndricas, considerando uma corda estática cujo eixo de simetria está alinhado ao eixo $-y$, a geometria associada com a corda cósmica em um espaço-tempo de AdS 4-dimensional é dado pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = e^{-2y/a} (-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2) + dy^2, \quad (6.1)$$

onde $r \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi/q]$ definem as coordenadas no subespaço cônico, $(t, y) \in (-\infty, \infty)$. Os pontos (r, ϕ, y) e $(r, \phi + 2\pi/q, y)$ são identificados e o parâmetro a está relacionado com

a constante cosmológica e com o escalar de Ricci para o espaço-tempo de AdS pelas fórmulas

$$\Lambda = -3a^{-2}, \quad R = -12a^{-2}. \quad (6.2)$$

O parâmetro q , maior que a unidade, representa a presença da corda cósmica.

Usando a coordenada de Poincaré definida como $z = ae^{y/a}$, o elemento de linha acima é apresentado na forma conformalmente relacionada ao elemento de linha associado com a corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski:

$$ds^2 = (a/z)^2 (-dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2). \quad (6.3)$$

Para esta nova coordenada, temos $z \in [0, \infty)$. As hipersuperfícies $z = 0$ e $z = \infty$ correspondem à fronteira e ao horizonte de AdS, respectivamente.

O tensor métrico correspondente ao elemento de linha (6.1) é uma solução exata da equação de Einstein na presença de uma constante cosmológica negativa e da corda [31, 32], para valores arbitrários de q .

A dinâmica quântica de um campo espinorial massivo no espaço-tempo curvo é governada pela equação de Dirac

$$i\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi = 0, \quad \text{onde} \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad (6.4)$$

onde γ^μ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo curvo e Γ_μ são as conexões espinoriais. Estes são dados em termos das matrizes de Dirac no espaço-tempo plano, $\gamma^{(a)}$, através das relações,

$$\gamma^\mu = e^\mu_{(a)} \gamma^{(a)}, \quad \Gamma_\mu = -\frac{1}{4} \gamma^{(a)} \gamma^{(b)} e^\nu_{(a)} e_{(b)\nu;\mu}, \quad (6.5)$$

onde o ponto-e-vírgula denota a derivada covariante padrão para campos vetoriais. Em (6.5), $e^\mu_{(a)}$ é a base tetrada que satisfaz a relação $e^\mu_{(a)} e^\nu_{(b)} \eta^{ab} = g^{\mu\nu}$, sendo η^{ab} o tensor métrico no espaço-tempo de Minkowski.

Para simplificar a obtenção das funções de onda fermiônicas na geometria considerada, utilizaremos a representação das matrizes de Dirac dada em [100], multiplicadas à esquerda pela matriz $i\gamma^{(5)}$. Nesta representação, temos

$$\gamma^{(0)} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(a)} = -i \begin{pmatrix} \sigma_a & 0 \\ 0 & -\sigma_a \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (6.6)$$

onde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são as matrizes de Pauli. Pode-se verificar que as matrizes acima obedecem a álgebra de Clifford, $\{\gamma^{(a)}, \gamma^{(b)}\} = -2\eta^{ab}$.

A base tetrada correspondente ao elemento de linha (6.3) pode ser escrita na forma

$$e_{(a)}^\mu = \frac{z}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q\phi) & -\sin(q\phi)/r & 0 \\ 0 & \sin(q\phi) & \cos(q\phi)/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Com esta escolha, as matrizes γ^μ no espaço curvo são:

$$\gamma^0 = \frac{z}{a} \gamma^{(0)}, \quad \gamma^i = -i \frac{z}{a} \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

onde o índice i corresponde às coordenadas r, ϕ, z . As matrizes 2×2 em (6.8) são dadas por

$$\sigma^r = \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^\phi = -\frac{i}{r} \begin{pmatrix} 0 & e^{-iq\phi} \\ -e^{iq\phi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Para as componentes da conexão espinorial, obtemos:

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{2a} \gamma^{(3)} \gamma_\mu + \frac{(1-q)}{2} \gamma^{(1)} \gamma^{(2)} \delta_\mu^\phi, \quad \Gamma_z = 0. \quad (6.10)$$

O que nos leva à seguinte expressão para a combinação que surge na equação de Dirac (6.4):

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = -\frac{3}{2z} \gamma^z + \frac{1-q}{2r} \gamma^r. \quad (6.11)$$

Tomando a dependência temporal para as quatro componentes do espinor de energia positiva na forma e^{-iEt} e decompondo em dois espinores de duas componentes, superior e inferior, denotados por φ e χ respectivamente, a equação de Dirac pode ser escrita como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \left(\sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r - \frac{ma}{z} \right) \varphi - iE \chi &= 0, \\ \left(\sigma^l \partial_l - \frac{3}{2z} \sigma^z + \frac{1-q}{2r} \sigma^r + \frac{ma}{z} \right) \chi - iE \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Substituindo o espinor χ da primeira equação na segunda, obtemos uma equação diferencial de segunda ordem para φ :

$$\left[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - i \frac{1-q}{r^2} \sigma^3 \partial_\phi + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 + \partial_z^2 - \frac{3}{z} \partial_z - \frac{(1-q)^2}{4r^2} + \frac{15-4m^2a^2}{4z^2} + \frac{ma}{z^2} \sigma^z + E^2 \right] \varphi = 0. \quad (6.13)$$

Como a equação acima é diagonal, podemos obter duas equações diferenciais de segunda ordem, decompondo o espinor φ em suas duas componentes φ_1 e φ_2 , respectivamente. Tomando estas funções na forma $\varphi_l(x) = e^{iqn_l\phi} R_l(r) Z_l(z)$, com $l = 1, 2$, obtemos o seguinte par de equações:

$$E^2 + \frac{1}{R_l} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \pm \frac{qn_l(1-q)}{r^2} - \frac{(1-q)^2}{4r^2} - \frac{n^2q^2}{r^2} \right] R_l \quad (6.14)$$

$$+ \frac{1}{Z_l} \left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{3}{z} \frac{d}{dz} + \frac{15-4m^2a^2 \pm 4ma}{4z^2} \right] Z_l = 0. \quad (6.15)$$

Desenvolvendo o mecanismo padrão de separação de variáveis, escrevemos:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \pm \frac{qn_l(1-q)}{r^2} - \frac{(1-q)^2}{4r^2} - \frac{n^2q^2}{r^2} \right] R_l(r) = -\lambda^2 R_l(r), \quad (6.16)$$

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{3}{z} \frac{d}{dz} + \frac{15-4m^2a^2 \pm 4ma}{4z^2} \right] Z_l(z) = -k^2 Z_l(z), \quad (6.17)$$

onde $E^2 - \lambda^2 - k^2 = 0$. Podemos ver que a solução normalizável para a função radial é expressa em termos da função de Bessel do primeiro tipo, $R_l(r) = J_{\beta_l}(\lambda r)$, de ordem

$$\beta_l = |qn_l - (-1)^l(q-1)/2|, \quad (6.18)$$

onde $n_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Para a função $Z_l(z)$, a solução geral é dada em termos de uma combinação linear entre as funções $z^2 J_{\nu_l}(kz)$ e $z^2 N_{\nu_l}(kz)$, onde $N_{\nu}(x)$ é a função de Neumann e

$$\nu_l = ma + (-1)^l/2. \quad (6.19)$$

A normalização da função de onda fermiônica é dada através de uma integral sobre as coordenadas espaciais. Já vimos que a componente radial, dada pela função de Bessel, converge na origem. No entanto, a parte da solução que envolve a componente z , cuja contribuição na

integral de normalização é dada por

$$\int_0^\infty dz \frac{1}{z^3} Z_l^2 \propto \int_0^\infty dz z (c_1^2 J_{\nu_l}^2(kz) + c_2^2 N_{\nu_l}^2(kz) + 2c_1 c_2 J_{\nu_l}(kz) N_{\nu_l}(kz)) , \quad (6.20)$$

possui uma convergência mais sutil. No limite em que $z \rightarrow 0$, temos $J_{\nu_l}^2(kz) \approx z^{2\nu_l}$ e $N_{\nu_l}^2(kz) \approx z^{-2\nu_l}$. Se fizermos $c_2 = 0$, vemos que a integral acima converge em $z = 0$. No caso em que $c_1 = 0$, a convergência da integral em z será condicionada à região onde $\nu_l < 1$. Como não desejamos impor esta restrição aos campos fermiônicos, fazemos $c_2 = 0$, ou seja, para $ma \geq 1/2$ o termo com a função de Neumann é excluído para que as funções dos modos sejam normalizáveis e a solução para a função $Z_l(z)$ é:

$$Z_l(z) = z^2 J_{\nu_l}(kz) . \quad (6.21)$$

A energia é dada por

$$E = \sqrt{\lambda^2 + k^2} . \quad (6.22)$$

Para $ma < 1/2$, os modos com a função de Neumann também são normalizáveis. Neste caso, para especificar unicamente as funções dos modos, uma condição de contorno adicional é necessária na fronteira de AdS, $z = 0$. Aqui, para o caso $ma < 1/2$, consideramos um caso especial de condições de contorno na fronteira de AdS, quando a condição de contorno da sacola do MIT é imposta a uma distância finita da fronteira, $z = \delta$, que é então levada para zero, $\delta \rightarrow 0$ (condensado fermiônico e VEV do tensor energia-momento para a geometria de duas fronteiras planas no *bulk* de AdS com as condições de contorno da sacola do MIT foram discutidas recentemente em [27]). No apêndice D, mostramos que este procedimento leva à escolha das funções de modos na forma (6.21) e garante a corrente nula de férmions através da fronteira de AdS. Note que a condição de contorno que usamos também exclui os modos normalizáveis com $Z_l(z) = z^2 K_{\nu_l}(z\sqrt{\lambda^2 - E^2})$, $\lambda > E$, onde $K_\nu(x)$ é a função de Macdonald.

Finalmente, podemos escrever as duas componentes superiores do espinor na forma

$$\varphi_l = C_l z^2 J_{\beta_l}(\lambda r) J_{\nu_l}(kz) e^{iqn_l \phi} . \quad (6.23)$$

De posse da componente superior, podemos usar a primeira equação de (6.12) para obter a componente inferior. Após alguns cálculos, obtemos:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= B_1 e^{iqn_1 \phi} J_{\beta_1}(\lambda r) z^2 J_{\nu_2}(kz) , \\ \chi_2 &= B_2 e^{iqn_2 \phi} J_{\beta_2}(\lambda r) z^2 J_{\nu_1}(kz) , \end{aligned} \quad (6.24)$$

com as relações

$$n_2 = n_1 + 1, \beta_2 = \beta_1 + \varepsilon_{n_1}, \quad (6.25)$$

onde $\varepsilon_n = 1$ para $n \geq 0$ e $\varepsilon_n = -1$ para $n < 0$. Os coeficientes $B_{1,2}$ em (6.24) são dados pelas expressões

$$B_1 = \frac{i}{E} (kC_1 - \varepsilon_{n_1} \lambda C_2), \quad B_2 = \frac{i}{E} (\varepsilon_{n_1} \lambda C_1 + kC_2). \quad (6.26)$$

Podemos ver que as funções de onda fermiônicas definidas com as componentes superiores e inferiores dadas pelas relações (6.23) e (6.24), respectivamente, são auto-funções da projeção do momento angular total ao longo da direção da corda cósmica:

$$\hat{J}_z \psi = \left(-i\partial_\phi + \frac{q}{2} \Sigma^z \right) \psi = qj\psi, \quad \Sigma^z = \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix}, \quad (6.27)$$

onde

$$j = n_1 + 1/2, \quad j = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots \quad (6.28)$$

As funções de onda fermiônicas que obtivemos contém quatro coeficientes e existem duas equações que os relacionam. A condição de normalização destas funções fornece uma terceira equação. Consequentemente, um dos coeficientes permanece arbitrário. Para determinar este coeficiente, uma outra condição se faz necessária. Esta necessidade está relacionada ao fato de os números quânticos (λ, k, j) não especificarem unicamente a função de onda fermiônica e outro número quântico adicional é necessário.

Para especificar a segunda constante, nós impomos a condição

$$C_1/B_1 = -C_2/B_2. \quad (6.29)$$

Levando em conta (6.26), obtemos as relações:

$$C_2 = -\varepsilon_{n_1} b_s^{(+)} C_1, \quad B_1 = isC_1, \quad B_2 = i\varepsilon_{n_1} s b_s^{(+)} C_1, \quad (6.30)$$

o que implica

$$b_s^{(\pm)} = \frac{sE \mp k}{\lambda}, \quad s = \pm 1. \quad (6.31)$$

Note que tem-se $b_s^{(+)} b_s^{(-)} = 1$. Com a condição (6.29), as funções de modos fermiônicas são especificadas unicamente pelo conjunto $\sigma = (\lambda, k, j, s)^1$. Em alternativa a (6.29), poderíamos

¹Este conjunto define unicamente a função de onda. Nele, os números quânticos λ e k são contínuos, definidos

impor outra condição. A única restrição é que as funções de onda resultantes devem formar um conjunto completo. Por exemplo, a condição similar a 6.29) com sinal oposto no lado direito fornece outro conjunto de funções de onda. Diferentes condições fornecem as mesmas funções de dois pontos e, como resultado, os mesmos VEVs para observáveis físicas.

Com base nessa discussão, para funções de onda fermiônicas de energia positiva, podemos escrever a seguinte expressão:

$$\psi_{\sigma}^{(+)}(x) = C_{\sigma}^{(+)} e^{-iEt} z^2 \begin{pmatrix} J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_1}(kz) \\ -\varepsilon_j b_s^{(+)} J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_2}(kz) e^{iq\phi} \\ is J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_2}(kz) \\ i\varepsilon_j s b_s^{(+)} J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_1}(kz) e^{iq\phi} \end{pmatrix} e^{iq(j-1/2)\phi}, \quad (6.32)$$

onde a ordem das funções de Bessel é definida em termos de j como:

$$\beta_l = |qj + (-1)^l/2| = q|j| + (-1)^l \varepsilon_j/2. \quad (6.33)$$

Podemos ver que $\varepsilon_j = \varepsilon_{n_1}$.

O coeficiente $C_{\sigma}^{(+)}$ em (6.32) é determinado pela condição de normalização

$$\int d^3x \sqrt{\gamma} (\psi_{\sigma}^{(+)})^{\dagger} \psi_{\sigma'}^{(+)} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (6.34)$$

onde γ é o determinante da métrica espacial. O símbolo delta no lado direito é entendido como a função delta de Dirac para números quânticos contínuos (λ, k) e o delta de Kronecker para discretos (j, s). Substituindo os auto-espinores (6.32) em (6.34), temos

$$\begin{aligned} \int d^3x \sqrt{\gamma} (\psi_{\sigma}^{(+)})^{\dagger} \psi_{\sigma'}^{(+)} &= a^3 C_{\sigma'}^* C_{\sigma} \int_0^{\frac{2\pi}{q}} d\phi \int_0^{\infty} dr r \int_0^{\infty} dz z e^{i(E'-E)t - iq(j'-j)\phi} \\ &\times \left[J_{\beta'_1}(\lambda' r) J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_1}(k' z) J_{\nu_1}(kz) \right. \\ &+ \varepsilon_{j'} \varepsilon_j b_{s'} b_s J_{\beta'_2}(\lambda' r) J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_2}(k' z) J_{\nu_2}(kz) \\ &+ s' s J_{\beta'_1}(\lambda' r) J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_2}(k' z) J_{\nu_2}(kz) \\ &\left. + \varepsilon_{j'} \varepsilon_j b_{s'} b_s s' s J_{\beta'_2}(\lambda' r) J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_2}(k' z) J_{\nu_2}(kz) \right]. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Usando a representação integral do delta de Kronecker e do delta de Dirac envolvendo o produto

no intervalo $[0, \infty)$, $j = 0, \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$ e $s = \pm 1$.

das funções de Bessel [112],

$$\delta_{x,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(x-n)\phi} d\phi \quad e \quad (6.36)$$

$$\delta(x-a) = x \int_0^\infty t J_\nu(xt) J_\nu(at) dt, \quad (6.37)$$

a equação (6.35) será igual a

$$\begin{aligned} \int d^3x \sqrt{\gamma} (\psi_\sigma^{(+)})^\dagger \psi_{\sigma'}^{(+)} &= \frac{2\pi a^3}{q} \frac{\delta(\lambda-\lambda')}{\lambda} \frac{\delta(k-k')}{k} \delta_{j,j'} [1 \\ &+ b_{s'} b_s + s' s + s' s b_{s'} b_s] C_{\sigma'}^* C_\sigma e^{i(E'-E)t} \\ &= \delta_{\sigma\sigma'} = \delta_{j,j'} \delta_{s,s'} \delta(\lambda' - \lambda) \delta(k' - k), \end{aligned} \quad (6.38)$$

sendo $b_s^{(+)} = \frac{sE-k}{\lambda}$, $E = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$, $s = \pm 1$ e $\sigma = (\lambda, k, j, s)$. Assim, encontramos

$$|C_\sigma^{(+)}|^2 = \frac{sq\lambda^2 k}{8\pi a^3 E b_s^{(+)}}. \quad (6.39)$$

Na discussão acima, como soluções das equações para as partes radiais das funções dos modos, tomamos as funções de Bessel $J_{\beta_l}(\lambda r)$, $l = 1, 2$. Esta escolha corresponde aos modos regulares da corda. Além disso, poderíamos considerar os modos irregulares com as funções de Neumann $N_{\beta_l}(\lambda r)$. Para que estes modos sejam normalizáveis, a integral $\int_0^\infty dr r N_{\beta_l}(\lambda r) N_{\beta_l}(\lambda' r)$ deve convergir no limite inferior de integração para ambos $l = 1$ e $l = 2$. Da condição de convergência em $l = 2$, obtem-se o vínculo $q|j| < 1/2$, que não pode ser satisfeito para $q \geq 1$. Consequentemente, no problema considerado, não existem modos irregulares normalizáveis sobre a corda. Note que, modos irregulares normalizáveis são possíveis na presença de fluxo magnético ao longo do eixo da corda.

A função de onda de energia negativa pode ser obtida da função de energia positiva pela matriz de carga conjugada. Seguindo o procedimento geral dado em [100], a matriz de conjugação de carga, $\mathcal{C}$, deve obedecer a relação $\mathcal{C}(\gamma^{(a)})^* \mathcal{C}^{-1} = -\gamma^{(a)}$, onde $(\gamma^{(a)})^*$ denota o complexo conjugado. Na representação usada aqui para as matrizes de Dirac, todas as matrizes são complexas, exceto $\gamma^{(2)}$, então $\mathcal{C}$ deve anti-comutar com $\gamma^{(2)}$ e comutar com as outras. A menos de uma fase geral, uma escolha particular para esta matriz é

$$\mathcal{C} = \gamma^{(5)} \gamma^{(2)} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{C}^{-1}.$$

A função de onda de energia negativa pode ser dada por $\psi_\sigma^{(-)}(x) = \mathcal{C}(\psi_\sigma^{(+)}(x))^*$. O resultado final é

$$\psi_\sigma^{(-)}(x) = C_\sigma^{(-)} e^{iEt} z^2 \begin{pmatrix} J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_1}(kz) \\ -\varepsilon_j b_s^{(-)} J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_2}(kz) e^{iq\phi} \\ is J_{\beta_2}(\lambda r) J_{\nu_2}(kz) \\ i\varepsilon_j s b_s^{(-)} J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\nu_1}(kz) e^{iq\phi} \end{pmatrix} e^{-iq(j+1/2)\phi}, \quad (6.40)$$

Onde usamos as mesmas notações de (6.32), e $C_\sigma^{(-)} = -i\varepsilon_j s b_s^{(+)} (C_\sigma^{(+)})^*$. O módulo da constante de normalização $C_\sigma^{(-)}$ pode também ser calculado através de uma condição de normalização similar àquela usada para a função de onda de energia positiva (6.34). Neste caso, seu valor é

$$|C_\sigma^{(-)}|^2 = \frac{sq\lambda^2 k}{8\pi a^3 E b_s^{(-)}}. \quad (6.41)$$

As funções de onda obtidas nesta seção podem ser usadas para investigar vários efeitos quânticos na vizinhança da corda cósmica envolvendo elétrons e pósitrons. No que se segue, usamos estas funções para descrever o condensado fermiônico e o VEV do tensor energia-momento.

6.2 Condensado fermiônico

Uma vez que obtivemos as funções de onda normalizadas com energias positiva e negativa, podemos calcular o condensado fermiônico (CF), $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$, onde $|0\rangle$ é o estado de vácuo no espaço-tempo de AdS na presença de uma corda cósmica e $\bar{\psi}_\sigma^{(-)} = \psi_\sigma^{(-)\dagger} \gamma^{(0)}$ é o adjunto de Dirac. Expandindo o operador de campo em termos do conjunto completo $\{\psi_\sigma^{(-)}, \psi_\sigma^{(+)}\}$, ou seja, escrevendo

$$\psi = \sum_\sigma \left[\psi_\sigma^{(+)} a_\sigma + \psi_\sigma^{(-)} a_\sigma^\dagger \right], \quad (6.42)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{\sigma'} \left[a_\sigma^\dagger \bar{\psi}_{\sigma'}^{(+)} + a_{\sigma'} \bar{\psi}_{\sigma'}^{(-)} \right] \quad (6.43)$$

e fazendo o produto interno

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \langle 0 | \sum_{\sigma, \sigma'} a_{\sigma'} \bar{\psi}_{\sigma'}^{(-)} \psi_{\sigma}^{(-)} a_{\sigma}^{\dagger} | 0 \rangle \quad (6.44)$$

$$= \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\psi}_{\sigma'}^{(-)} \psi_{\sigma}^{(-)} \langle 0 | a_{\sigma'} a_{\sigma}^{\dagger} | 0 \rangle, \quad (6.45)$$

a seguinte fórmula para o condensado fermiônico é obtida:

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \sum_{\sigma} \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \psi_{\sigma}^{(-)}, \quad (6.46)$$

onde usamos que $a_k | 0 \rangle = \langle 0 | a_k^{\dagger} = 0$ e a notação compacta definida abaixo,

$$\sum_{\sigma} = \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\infty} dk \sum_{s=\pm 1} \sum_{j=\pm 1/2, \dots}. \quad (6.47)$$

Substituindo o auto-espinor (6.40) em (6.46), obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle &= \frac{qz^4}{4\pi a^3} \sum_{\sigma} \frac{\lambda^2 k}{E} J_{\nu_1}(kz) J_{\nu_2}(kz) \\ &\times \left[b_s^{(+)} J_{\beta_2}^2(\lambda r) - b_s^{(-)} J_{\beta_1}^2(\lambda r) \right]. \end{aligned} \quad (6.48)$$

O condensado fermiônico dado por (6.48) é divergente e é necessário realizar algum procedimento de regularização. Assumiremos que uma função de corte é introduzida na fórmula acima, sem escrevê-la explicitamente. Como veremos, a forma explícita desta função não é relevante para a discussão a seguir.

A soma sobre o número quântico momento angular total, j , para as funções de Bessel correspondentes fornece a mesma expressão para $l = 1$ e $l = 2$:

$$\sum_{j=\pm 1/2, \dots} J_{\beta_l}^2(\lambda r) = \sum_j \left[J_{qj-1/2}^2(\lambda r) + J_{qj+1/2}^2(\lambda r) \right]. \quad (6.49)$$

Aqui e doravante, é usada a notação

$$\sum_j = \sum_{j=1/2, \dots}. \quad (6.50)$$

Agora é possível efetuar a soma sobre o número quântico s . O resultado é²,

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = -\frac{q z^4}{\pi a^3} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dk \frac{k^2}{E} J_{\nu_1}(kz) J_{\nu_2}(kz) \sum_j \left[J_{qj+1/2}^2(\lambda r) + J_{qj-1/2}^2(\lambda r) \right]. \quad (6.51)$$

De forma a obter uma expressão mais útil para o CF, usamos a identidade

$$\frac{1}{E} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds e^{-(\lambda^2 + k^2)s^2}. \quad (6.52)$$

Substituindo esta identidade em (6.51), é possível calcular as integrais sobre as variáveis λ e k com ajuda das fórmulas em [112]. Mesmo que as funções de Bessel associadas à variável z sejam de ordens diferentes, a integral sobre k é calculada, porque $\nu_2 = \nu_1 + 1$. Usando a relação $J_\nu(x) J_{\nu+1}(x) = (\nu/x) J_\nu^2(x) - \partial_x J_\nu^2(x)/2$, após alguns cálculos, a integral será,

$$\int_0^\infty dk k^2 e^{-k^2 s^2} J_{\nu_1}(kz) J_{\nu_2}(kz) = \frac{e^{-z^2/(2s^2)}}{4s^4} z \left[I_{\nu_1}(z^2/(2s^2)) - I_{\nu_2}(z^2/(2s^2)) \right]. \quad (6.53)$$

Agora, introduzindo a nova variável $y = r^2/(2s^2)$, obtemos

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = -\frac{q \rho^{-5}}{\sqrt{2\pi} \pi a^3} \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-(1+\rho^{-2})y} \left[I_{\nu_1}(y/\rho^2) - I_{\nu_2}(y/\rho^2) \right] \mathcal{J}(q, y), \quad (6.54)$$

considerando

$$\rho = r/z, \quad (6.55)$$

e

$$\mathcal{J}(q, y) = \sum_j \left[I_{qj-1/2}(y) + I_{qj+1/2}(y) \right]. \quad (6.56)$$

Inicialmente, consideramos o CF para um campo sem massa. Neste caso, de (6.54), encontra-se

$$\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle = \left(\frac{z}{a} \right)^3 \langle \bar{\psi} \psi \rangle_b^{(M)}, \quad (6.57)$$

onde

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_b^{(M)} = -\frac{qz}{\pi^2 r^4} \int_0^\infty dy y e^{-(2z^2/r^2+1)y} \mathcal{J}(q, y), \quad (6.58)$$

é o CF para um campo fermiônico sem massa induzido por uma única fronteira, com condi-

²Podemos ver em (6.51) que a integral em k diverge linearmente. Para grandes valores de k , $\frac{k^2}{E} \rightarrow k$ e $J_{\nu_1}(kz) J_{\nu_2}(kz) \rightarrow \frac{2}{\pi k z}$.

ções de contorno do tipo sacola do MIT, perpendicular à corda no espaço-tempo de Minkowski [113]. Portanto, para um campo sem massa, temos a relação conforme padrão entre os problemas com cordas cósmicas no espaço-tempo de AdS e na geometria da corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski com uma fronteira em $z = 0$, onde o campo obedece a condição de contorno da sacola do MIT (ver ref. [113]).

Para um campo massivo, é possível expressar a série (6.56) de forma mais conveniente para nossa discussão [113]:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q, y) = & \frac{2}{q} \sum_{l=0}^p (-1)^l \cos(\pi l/q) e^{y \cos(2\pi l/q)} \\ & + \frac{4}{\pi} \cos(q\pi/2) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} e^{-y \cosh(2x)}, \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde p é a parte inteira contida em $q/2$, $p = [q/2]$, e o símbolo "linha" na soma acima implica que o termo para $l = 0$ deve ser dividido por 2. No caso $1 \leq q < 2$, o primeiro termo do lado direito de (6.59) deve ser omitido. No caso em que $q = 1$, temos $\mathcal{J}(1, y) = e^y$. Assim podemos ver que a contribuição do termo $l = 0$ em (6.59) em $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$ coincide com o CF no espaço-tempo de AdS puro, sem a presença da corda, denotado abaixo como $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\text{AdS}}$. A parte restante corresponde à correção induzida pela presença da corda cósmica. Então, podemos escrever:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\text{cs}} = \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle - \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\text{AdS}}. \quad (6.60)$$

Para pontos fora da corda, a geometria local é a mesma do espaço-tempo de AdS puro e na ausência de uma função de corte, as partes divergentes dos termos do lado direito de (6.60) se cancelam. Portanto, a parte induzida pela corda é finita e não requer qualquer processo de renormalização.

Substituindo (6.59) em (6.54) e integrando sobre a variável y , com auxílio da fórmula da ref. [112], para a parte induzida pela corda, encontra-se

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{\text{cs}} = & -\frac{\rho^{-2}}{2\pi^2 a^3} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \cos\left(\frac{\pi l}{q}\right) \frac{W_{ma}(1 + 2\rho^2 \sin^2(\pi l/q))}{\sin^2(\pi l/q)(1 + \rho^2 \sin^2(\pi l/q))} \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \frac{W_{ma}(1 + 2\rho^2 \cosh^2 x)}{(1 + \rho^2 \cosh^2 x) \cosh^2 x} \right] \end{aligned} \quad (6.61)$$

onde

$$W_v(u) = Q_{v-1}^2(u) - Q_v^2(u), \quad (6.62)$$

e $Q_v^\mu(u)$ é a função de Legendre de segundo tipo associada. Note que, para valores ímpares de q , o termo integral em (6.61) se anula. Como é visto, a parte no CF induzida pela corda cósmica depende das coordenadas r e z na forma da razão ρ . Isto é consequência da máxima simetria do espaço-tempo de AdS. Uma vez que a distância própria da corda é dada por a/z , percebe-se que ρ é a distância própria do ponto de observação da corda, medida em unidades do raio de curvatura de AdS, a .

Vamos considerar o comportamento de $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}$ em regiões assintóticas dos parâmetros. Para grandes distâncias próprias da corda, em comparação com o raio de curvatura de AdS, tem-se $\rho \gg 1$. Nesse caso, o argumento associado às funções de Legendre em (6.61) é grande. Levando em conta que, para $u \gg 1$, temos

$$Q_v^\mu(u) \approx \sqrt{\pi} \frac{e^{i\mu\pi}}{2^{v+1}} \frac{\Gamma(v+\mu+1)}{\Gamma(v+3/2)} \frac{1}{u^{v+1}}, \quad (6.63)$$

para a ordem dominante, temos

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} \approx -\frac{(z/r)^{2ma+4}}{2^{2ma+1}\pi^{3/2}a^3} \frac{\Gamma(ma+2)}{\Gamma(ma+1/2)} g(q, 2ma+4). \quad (6.64)$$

Em (6.64), introduzimos a notação

$$g(q, \alpha) = \sum_{l=1}^p \frac{(-1)^l \cos(\pi l/q)}{\sin^\alpha(\pi l/q)} + \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \frac{\cos(q\pi/2)}{\cosh^\alpha x}. \quad (6.65)$$

Pode-se verificar que

$$g(q, 4) = -\frac{(q^2-1)(7q^2+17)}{720}. \quad (6.66)$$

Em particular, de (6.64), conclui-se que, para um valor fixo de r , o CF se anula na fronteira de AdS como z^{2ma+4} . Para um valor fixo de z e para grandes distâncias da corda cósmica, a parte induzida pela corda no CF cai com r^{-2ma-4} . Note que, para uma corda no background de Minkowski e para um campo fermiônico massivo, a grandes distâncias da corda, o CF decai exponencialmente.

A pequenas distâncias próprias da corda, comparadas à escala de curvatura de AdS, temos $\rho \ll 1$ e o argumento das funções associadas de Legendre em (6.61) é próximo de 1. Neste caso, usamos a seguinte expressão assintótica para a função associada de Legendre:

$$Q_v^\mu(u) \approx \frac{e^{i\mu\pi}}{2} \Gamma(\mu) \left(\frac{u+1}{u-1} \right)^{\mu/2} \left[1 + \frac{v(1+v)}{\mu-1} \frac{1-u}{2} \right]. \quad (6.67)$$

Para a ordem dominante, de (6.61) encontra-se

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} \approx -\frac{m}{2\pi^2} \left(\frac{z}{ar} \right)^2 g(q, 2). \quad (6.68)$$

Daqui, conclui-se que, para uma distância fixa da corda cósmica, a parte induzida pela corda no CF diverge no horizonte de AdS. Note que, para a geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski, próximo à corda, temos $\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs}^{(M)} \approx mg(q, 2)/(2\pi^2 r^2)$.

Agora, consideramos grandes valores do raio de curvatura do espaço-tempo de AdS, quando y é fixo, assumindo que $ma \gg 1$. Levando em conta que, neste caso, $z = ae^{\frac{y}{a}} \approx a + y$, vemos que o grau das funções de Legendre associadas (6.61) cresce enquanto o argumento se aproxima de 1. Temos a seguinte fórmula assintótica [114]

$$Q_v^\mu(\cosh(b/v)) \approx e^{i\mu\pi} v^\mu K_\mu(b), \quad (6.69)$$

para $v \gg 1$. Usando esta fórmula e a relação de recorrência para a função associada de Legendre de [108], encontramos

$$Q_v^\mu(\cosh(b/v)) - Q_{v-1}^\mu(\cosh(b/v)) \approx bv^{\mu-1} e^{i\mu\pi} K_{\mu-1}(b). \quad (6.70)$$

Com ajuda desta relação, de 6.61) para o CF, obtem-se:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} \approx & -\frac{2m^3}{\pi^2} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \left(\frac{\pi l}{q} \right) f_1(2mr \sin(\pi l/q)) \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} f_1(2mr \cosh x) \right], \end{aligned} \quad (6.71)$$

com a notação $f_v(x) = K_v(x)/x^v$. A expressão do lado direito coincide com o CF na geometria de uma corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski [113].

Na figura 6.1, apresentamos a dependência da parte induzida pela corda no CF em função da razão r/z e de ma para a geometria da corda cósmica com $q = 3$. A razão r/z é a distância própria do ponto de observação da corda medida em unidades da escala de curvatura de AdS e ma é a massa do campo medida nas mesmas unidades. No cálculo numérico, tomamos o valor $q = 3$ por simplificação. O comportamento qualitativo para outros valores de q é similar ao apresentado na figura.

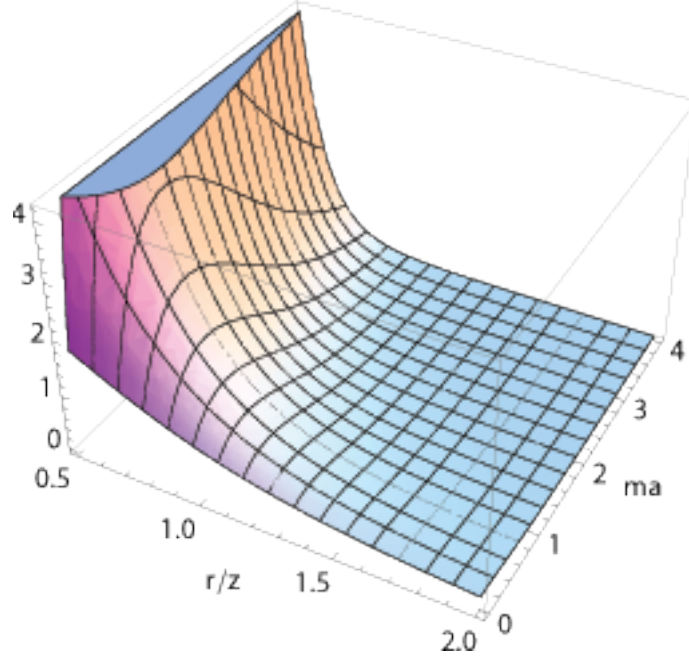


Figura 6.1 Parte induzida pela corda no CF, $a^3\langle\bar{\psi}\psi\rangle_{cs}$, como função de r/z e ma para a corda cósmica com parâmetro $q = 3$.

6.3 Tensor energia-momento

Nesta seção, consideraremos outra importante característica do vácuo quântico fermiônico: o VEV do tensor energia-momento. O tensor energia-momento associado a um campo fermiônico é dado pela expressão abaixo [97]:

$$\hat{T}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\bar{\psi}\gamma_{(\mu}(\nabla_{\nu)}\psi) - (\nabla_{(\mu}\bar{\psi})\gamma_{\nu)}\psi] . \quad (6.72)$$

De forma similar ao cálculo do CF, o VEV do tensor energia-momento pode ser obtido através da soma dos modos:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}\gamma_{(\mu}\nabla_{\nu)}\psi_{\sigma}^{(-)} - (\nabla_{(\mu}\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)})\gamma_{\nu)}\psi_{\sigma}^{(-)}] , \quad (6.73)$$

onde os parênteses envolvendo os índices implicam simetrização e $\nabla_{\mu}\bar{\psi} = \partial_{\mu}\bar{\psi} - \bar{\psi}\Gamma_{\mu}$. Como no caso do CF, o VEV do tensor energia-momento é apresentado na forma decomposta:

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \langle T_{\mu\nu}\rangle_{\text{AdS}} + \langle T_{\mu\nu}\rangle_{cs} , \quad (6.74)$$

onde o primeiro e segundo termos do lado direito correspondem à parte de AdS puro e à correção no VEV do tensor energia-momento devido à presença da corda cósmica. Vamos mostrar que ambas as partes são diagonais. Por causa da máxima simetria do espaço-tempo de AdS, a parte $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{AdS}}$ não depende de ponto do espaço-tempo e é completamente determinada pelo seu traço: $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{AdS}} = (g_{\mu\nu}/4) \langle T^\alpha_\alpha \rangle_{\text{AdS}}$. Esta parte foi calculada em [26], usando a técnica da função zeta e regularizações de Pauli-Villars. Novamente, nesta seção estamos principalmente interessados em calcular a parte do VEV induzida pela corda cósmica. Esta parte é finita para pontos fora da corda e não requer qualquer processo de renormalização.

Primeiramente, vamos calcular $\langle 0|T_{00}|0 \rangle$. Desenvolvendo a derivada covariante do campo espinorial, observamos que, além das contribuições da derivada temporal do campo, que fornece um termo proporcional à energia, aparece a contribuição devida ao anti-comutador $\{\gamma_0, \Gamma_0\}$:

$$\langle 0|T_{00}|0 \rangle = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} \left[\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_0 \partial_0 \psi_{\sigma}^{(-)} + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_0 \Gamma_0 \psi_{\sigma}^{(-)} \right] \quad (6.75)$$

$$- (\partial_0 \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}) \gamma_0 \psi_{\sigma}^{(-)} + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \Gamma_0 \gamma_0 \psi_{\sigma}^{(-)} \quad (6.76)$$

$$= \frac{i}{2} \sum_{\sigma} \left[\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_0 \partial_0 \psi_{\sigma}^{(-)} - (\partial_0 \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}) \gamma_0 \psi_{\sigma}^{(-)} + \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \{\gamma_0, \Gamma_0\} \psi_{\sigma}^{(-)} \right]. \quad (6.77)$$

Este último se anula, neste caso:

$$\{\gamma_0, \Gamma_0\} = \frac{a}{2z^2} \left\{ \gamma^{(0)}, \gamma^{(0)} \gamma^{(3)} \right\} \quad (6.78)$$

$$= \frac{a}{2z} \left(\gamma^{(0)} \gamma^{(0)} \gamma^{(3)} + \gamma^{(0)} \gamma^{(3)} \gamma^{(0)} \right) = 0, \quad (6.79)$$

uma vez que $\gamma_0 = -\frac{a}{z} \gamma^{(0)}$, $\Gamma_0 = -\frac{1}{2z} \gamma^{(0)} \gamma^{(3)}$ e $\gamma^{(3)} \gamma^{(0)} = -\gamma^{(0)} \gamma^{(3)}$. Portanto, para o VEV da densidade de energia, encontra-se

$$\langle 0|T_{00}|0 \rangle = \frac{a}{z} \sum_{\sigma} E \psi_{\sigma}^{(-)\dagger} \psi_{\sigma}^{(-)}. \quad (6.80)$$

Substituindo (6.40) e (6.41) em (6.80), após a soma sobre s , obtemos

$$\langle 0|T_{00}|0 \rangle = \frac{qz^3}{2\pi a^2} \int_0^\infty d\lambda \lambda \int_0^\infty dk k E \left[J_{v_1}^2(kz) + J_{v_2}^2(kz) \right] \quad (6.81)$$

$$\times \sum_j \left[J_{qj+1/2}^2(\lambda r) + J_{qj-1/2}^2(\lambda r) \right]. \quad (6.82)$$

Agora, para continuar este cálculo de forma compacta, usamos a identidade

$$E = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty ds \partial_{s^2} e^{-(k^2+\lambda^2)s^2}. \quad (6.83)$$

Mudando a ordem de integração, é possível integrar sobre as variáveis λ e k , usando a fórmula da Ref. [112]. Como resultado, encontramos a representação

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{00}|0\rangle &= -\frac{qz^3}{4\pi^{3/2}a^2} \int_0^\infty ds \partial_{s^2} \left\{ \frac{e^{-(r^2+z^2)/(2s^2)}}{s^4} [I_{\nu_1}(z^2/(2s^2)) + I_{\nu_2}(z^2/(2s^2))] \right. \\ &\quad \left. \times \sum_j [I_{qj+1/2}(r^2/(2s^2)) + I_{qj-1/2}(r^2/(2s^2))] \right\}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Após a integração por partes na variável s e usando a fórmula da soma (6.59), a contribuição induzida pela corda cósmica é³

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}} &= \frac{\rho^{-2}}{4\pi^2 a^4} \left[\sum_{l=1}^P (-1)^l \cos\left(\frac{\pi l}{q}\right) \frac{F_{ma}^{(2)}(1+2\rho^2 \sin^2(\pi l/q))}{\sin^2(\pi l/q)(1+\rho^2 \sin^2(\pi l/q))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \frac{F_{ma}^{(2)}(1+2\rho^2 \cosh^2 x)}{(1+\rho^2 \cosh^2 x) \cosh^2 x} \right], \end{aligned} \quad (6.85)$$

onde definimos a nova função

$$F_v^{(n)}(u) = Q_{v-1}^n(u) + Q_v^n(u). \quad (6.86)$$

Como no CF, o VEV da densidade de energia depende de r e z na forma da combinação ρ .

Para um campo sem massa, levando em conta que $F_0^{(2)}(1+2y^2) = 1+y^{-2}$ e usando (6.66), de (6.85), temos:

$$\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}} = \left(\frac{z}{a}\right)^4 \langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}^{(\text{M})}, \quad (6.87)$$

onde

$$\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}^{(\text{M})} = -\frac{(q^2-1)(7q^2+17)}{2880\pi^2 r^4}, \quad (6.88)$$

é a densidade de energia correspondente para um campo sem massa na geometria da corda cósmica no *bulk* de Minkowski [35]. O campo fermiônico sem massa é conformalmente invariante e (6.87) apresenta a relação padrão para os VEVs em problemas relacionados conformalmente.

³Podemos ver que em (6.85), a componente $l=0$ do somatório foi removida, pois a mesma coincide com $\langle T_0^0 \rangle_{\text{AdS}}$.

Voltando, agora, para a solução geral, para grandes valores de ρ , $\rho \gg 1$, usando a expressão assintótica (6.63), para a ordem principal, encontramos

$$\langle T_0^0 \rangle_{cs} \approx -\frac{1}{2a} \langle \bar{\psi} \psi \rangle_{cs}, \quad (6.89)$$

onde a expressão assintótica para o CF é dada pela expressão (6.64). Como foi visto, para um valor fixo de r , o VEV da densidade de energia vai para zero na fronteira de AdS com z^{2ma+4} . Para grandes distâncias da corda cósmica, a parte induzida pela corda na densidade de energia se comporta como r^{-2ma-4} . No limite oposto, $\rho \ll 1$, usando a fórmula (6.67), obtemos a seguinte expressão assintótica:

$$\langle T_0^0 \rangle_{cs} \approx -\frac{(q^2 - 1)(7q^2 + 17)}{2880\pi^2} \left(\frac{z}{ar} \right)^4. \quad (6.90)$$

A parte induzida pela corda diverge no horizonte de AdS e na corda.

Agora, vamos considerar o limite minkowskiano correspondendo à $a \rightarrow \infty$. Através da relação (6.69) para a função de Legendre associada, na ordem dominante, encontra-se

$$\begin{aligned} \langle T_0^0 \rangle_{cs} \approx & \frac{2m^4}{\pi^2} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \cos\left(\frac{\pi l}{q}\right) f_2(2mr \sin(\pi l/q)) \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{\pi q}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} f_2(2mr \cosh x) \right]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

A expressão do lado direito coincide com a expressão correspondente na geometria da corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski [113].

Na figura 6.2, a forma como a parte induzida pela corda no VEV da densidade de energia depende da distância da corda e da massa do campo em unidades de escala de curvatura de AdS é mostrada. Como no exemplo numérico para o CF, consideramos a corda cósmica com $q = 3$.

O cálculo da componente de $\langle 0|T_{rr}|0\rangle$, também apresenta, além da contribuição devida à derivada radial do campo, uma contribuição advinda do anti-comutador $\{\gamma_r, \Gamma_r\}$. Este último também se anula, neste caso, restando apenas as contribuições devidas às derivadas radiais,

$$\langle 0|T_{rr}|0\rangle = \frac{i}{2} \sum_{\sigma} [\bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_r \partial_r \psi_{\sigma}^{(-)} - (\partial_r \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)}) \gamma_r \psi_{\sigma}^{(-)}]. \quad (6.92)$$

Substituindo (6.40) e (6.41) nesta fórmula, usando a representação (6.8) para matrizes de Dirac,

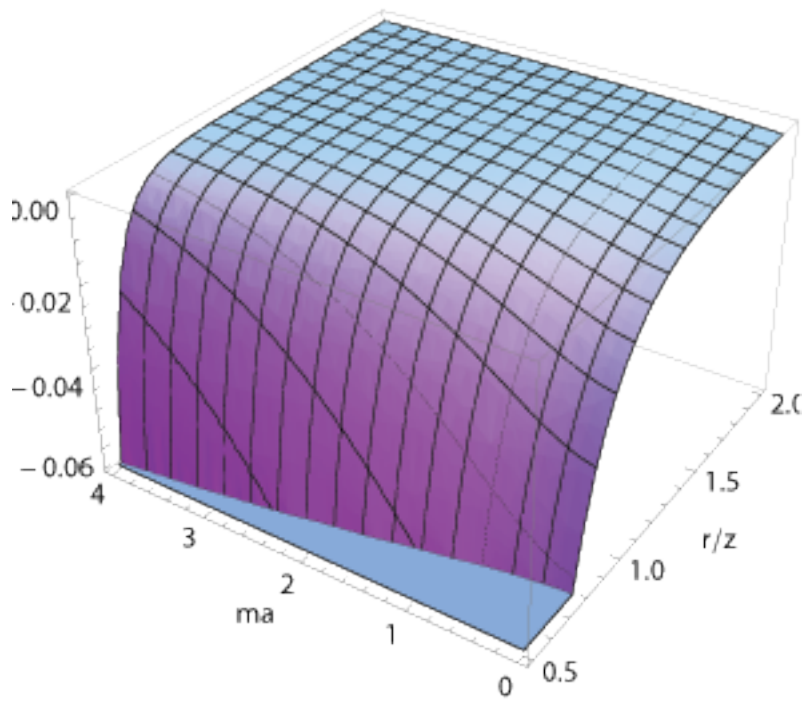


Figura 6.2 Parte induzida pela corda no VEV da densidade de energia, $a^4\langle T_0^0\rangle_{cs}$, *versus* a distância da corda e a massa do campo em unidades de escala de curvatura de AdS, para a corda cósmica com $q = 3$.

após algumas etapas intermediárias, encontramos,

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{rr}|0\rangle &= -\frac{qz^3}{8\pi a^2} \sum_{\sigma} \varepsilon_j \frac{\lambda^3 k}{E} [J_{\nu_1}^2(kz) + J_{\nu_2}^2(kz)] \\ &\times [J'_{\beta_1}(\lambda r) J_{\beta_2}(\lambda r) - J_{\beta_1}(\lambda r) J'_{\beta_2}(\lambda r)]. \end{aligned} \quad (6.93)$$

Efetuada as somas sobre s e j e usando a relação de recorrência envolvendo a derivada da função de Bessel, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{rr}|0\rangle &= \frac{qz^3}{2\pi a^2} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty dk \frac{\lambda^3 k}{E} [J_{\nu_1}^2(kz) + J_{\nu_2}^2(kz)] \\ &\times \sum_j \left[J_{qj+1/2}^2(\lambda r) + J_{qj-1/2}^2(\lambda r) - \frac{2qj}{\lambda r} J_{qj-1/2}(\lambda r) J_{qj+1/2}(\lambda r) \right]. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Usando novamente a identidade (6.52), a integração sobre k pode ser efetuada com a ajuda da fórmula da Ref. [112]. A integral sobre λ é um pouco mais sutil. Para os dois primeiros termos entre colchetes, podemos usar a fórmula abaixo,

$$\int_0^\infty d\lambda \lambda^3 e^{-\lambda^2 s^2} J_\nu^2(\lambda r) = -\partial_{s^2} \left[\frac{e^{-r^2/(2s^2)}}{2s^2} I_\nu(r^2/(2s^2)) \right]. \quad (6.95)$$

Para o último termo, podemos adotar um procedimento similar ao usado na obtenção de (6.53). O resultado é,

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{rr}|0\rangle &= -\frac{qz^3}{4\pi^{3/2}a^2} \int_0^\infty ds \frac{e^{-z^2/(2s^2)}}{s^2} [I_{\nu_1}(z^2/(2s^2)) + I_{\nu_2}(z^2/(2s^2))] \\ &\times \sum_j \left\{ \partial_{s^2} \left[s^{-2} e^{-r^2/(2s^2)} (I_{qj+1/2}(r^2/(2s^2)) + I_{qj-1/2}(r^2/(2s^2))) \right] \right. \\ &\left. + \frac{qj}{s^4} e^{-r^2/(2s^2)} [I_{qj-1/2}(r^2/(2s^2)) - I_{qj+1/2}(r^2/(2s^2))] \right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Finalmente, introduzindo uma nova variável, $y = r^2/(2s^2)$, e usando a relação

$$qj[I_{qj-1/2}(y) - I_{qj+1/2}(y)] = (y\partial_y - y + 1/2)[I_{qj-1/2}(y) + I_{qj+1/2}(y)], \quad (6.97)$$

todas as somas envolvendo a função de Bessel modificada associadas à coordenada radial podem ser calculadas usando (6.59). Finalmente, extraindo do resultado geral a contribuição devida ao espaço-tempo de AdS puro, obtemos a contribuição induzida apenas pela corda cósmica

mica, que coincide com o resultado correspondente para a densidade de energia:

$$\langle T_r^r \rangle_{cs} = \langle T_0^0 \rangle_{cs} . \quad (6.98)$$

Agora, vamos analisar a componente $\langle 0|T_{\phi\phi}|0\rangle$. Neste caso também, as únicas contribuições não-nulas vêm da derivada da função de onda com respeito à variável azimutal. Esta derivada pode ser calculada a partir da definição do momento angular total (6.27). Assim podemos escrever $\partial_\phi = iJ_\phi - iq\Sigma^z/2$. Levando este procedimento em conta, surge um anti-comutador $\{\gamma_\phi, \Sigma^z\}$, que é zero. Temos, então,

$$\langle 0|T_{\phi\phi}|0\rangle = q \sum_{\sigma} j \bar{\psi}_{\sigma}^{(-)} \gamma_{\phi} \psi_{\sigma}^{(-)} . \quad (6.99)$$

Substituindo (6.40) e (6.41) na equação acima e usando a representação fornecida em (6.8) para as matrizes de Dirac, chegamos a,

$$\langle 0|T_{\phi\phi}|0\rangle = \frac{q^2 r z^3}{4\pi a^2} \sum_{\sigma} \epsilon_j j \frac{\lambda^2 k}{E} J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\beta_2}(\lambda r) [J_{\nu_1}^2(kz) + J_{\nu_2}^2(kz)] . \quad (6.100)$$

Como o termo dentro da soma não depende de s , a soma sobre este número quântico contribui apenas com um fator 2. Quanto à soma sobre j , temos

$$\sum_{j=\pm 1/2, \dots} j \epsilon_j J_{\beta_1}(\lambda r) J_{\beta_2}(\lambda r) = 2 \sum_j j J_{qj-1/2}(\lambda r) J_{qj+1/2}(\lambda r) . \quad (6.101)$$

Usando a relação (6.52), a integral sobre a variável k pode ser calculada [112]. Quanto à integral sobre λ , podemos usar um procedimento similar ao apresentado em (6.53). Definindo uma nova variável $y = r^2/(2s^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{\phi\phi}|0\rangle &= \frac{2q\rho^{-3}}{(2\pi)^{3/2}a^2} \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-(1+\rho^{-2})y} [I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)] \\ &\times \sum_j qj [I_{qj-1/2}(y) - I_{qj+1/2}(y)] . \end{aligned} \quad (6.102)$$

De (6.97), é possível expressar a pressão azimutal acima em termos da função (6.56). Usando a fórmula (6.59), a integral sobre a variável y pode ser calculada explicitamente. Como resultado,

a contribuição para a tensão azimutal induzida pela corda cósmica será,

$$\begin{aligned} \langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} = & \frac{a^{-4}}{4\pi^2} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \cos\left(\frac{\pi l}{q}\right) G_{ma}(\rho \sin(\pi l/q)) \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x) G_{ma}(\rho \cosh x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \right], \end{aligned} \quad (6.103)$$

onde

$$G_v(x) = \frac{F_v^{(2)}(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} + 2 \frac{F_v^{(3)}(1+2x^2)}{x(1+x^2)^{3/2}}. \quad (6.104)$$

Como para as outras componentes, a pressão azimutal depende de r e z através da razão ρ , que é a distância própria da corda medida em unidades do raio de curvatura de AdS. Para um campo fermiônico sem massa, temos $G_0(x) = -3/x^4$, e de (6.103) obtem-se $\langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} = -3\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$, onde o $\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$ é dado por (6.87).

Vamos considerar o comportamento da pressão azimutal em regiões assintóticas da razão ρ . Para $\rho \gg 1$, usamos a fórmula (6.63) para a função de Legendre associada. Para a ordem dominante, temos:

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx \frac{2ma+3}{2a} \langle \bar{\psi}\psi \rangle_{\text{cs}}. \quad (6.105)$$

Comparando com (6.89), vemos que na região considerada, temos a relação $\langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx -(2ma+3)\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}$. Para $\rho \ll 1$, similar ao caso da densidade de energia, encontramos a relação

$$\langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx -3\langle T_0^0 \rangle_{\text{cs}}, \quad (6.106)$$

onde a expressão assintótica para a densidade de energia é dada por (6.90). E, finalmente, no limite de Minkowski, correspondendo a $a \rightarrow \infty$, recuperamos o resultado de [113]:

$$\begin{aligned} \langle T_\phi^\phi \rangle_{\text{cs}} \approx & -\frac{2m^4}{\pi^2} \left[\sum_{l=1}^p (-1)^l \cos(\pi l/q) f^{(\phi)}(2mr \sin(\pi l/q)) \right. \\ & \left. + \frac{2q}{\pi} \cos\left(\frac{q\pi}{2}\right) \int_0^\infty dx \frac{\sinh(qx) \sinh(x) f^{(\phi)}(2mr \cosh x)}{\cosh(2qx) - \cos(q\pi)} \right]. \end{aligned} \quad (6.107)$$

com

$$f^{(\phi)}(x) = f_1(x) + 3f_2(x). \quad (6.108)$$

A figura 6.3 apresenta a parte induzida pela corda no VEV da pressão azimutal como função de r/z e ma (distância própria da corda e a massa medida em unidades da escala de curvatura

de AdS, a). Consideramos a corda cósmica com $q = 3$.

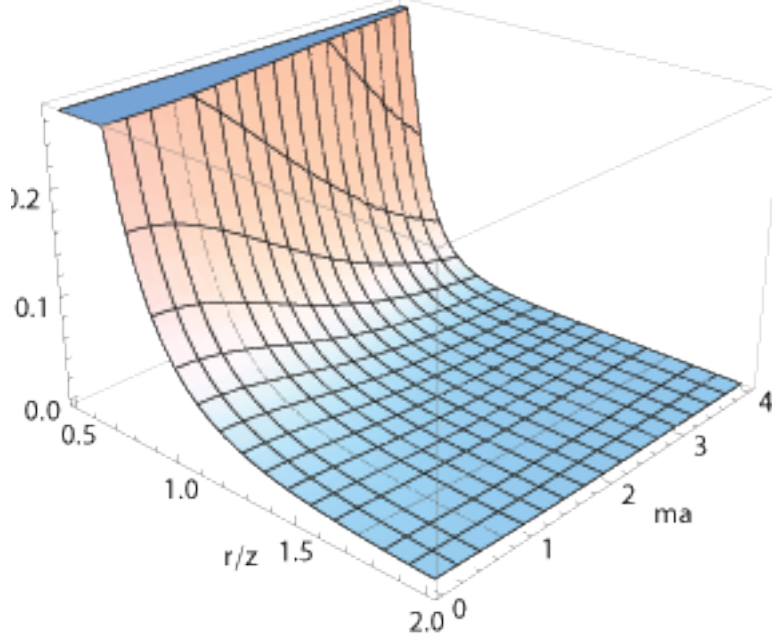


Figura 6.3 Parte induzida pela corda no VEV da tensão azimutal, $a^4 \langle T_\phi^\phi \rangle_{cs}$, como função da distância da corda e da massa do campo em unidades da escala de curvatura de AdS, para a corda cósmica com $q = 3$.

O cálculo da tensão axial, $\langle 0|T_{zz}|0\rangle$, se torna mais simples porque $\Gamma_z = 0$. Substituindo (6.40), (6.41) e matriz gamma correspondente em (6.73), após alguns cálculos, chega-se em:

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{zz}|0\rangle &= -\frac{qz^3}{8\pi a^2} \sum_{\sigma} \frac{\lambda^2 k^2}{E} \left[b_s^{(+)} J_{\beta_1}^2(\lambda r) - b_s^{(-)} J_{\beta_2}^2(\lambda r) \right] \\ &\quad \times \left[J_{\nu_1}(kz) J'_{\nu_2}(kz) - J_{\nu_2}(kz) J'_{\nu_1}(kz) \right]. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Usando as relações de recorrência envolvendo a derivada da função de Bessel, somando sobre s e usando (6.52), temos:

$$\begin{aligned} \langle 0|T_{zz}|0\rangle &= \frac{qz^3}{\pi^{3/2} a^2} \int_0^\infty ds \int_0^\infty d\lambda \lambda e^{-\lambda^2 s^2} \sum_j \left[J_{qj-1/2}^2(\lambda r) + J_{qj+1/2}^2(\lambda r) \right] \\ &\quad \times \int_0^\infty dk k^3 e^{-k^2 s^2} \left[J_{\nu_1}^2(kz) + J_{\nu_2}^2(kz) - \frac{2ma}{kz} J_{\nu_1}(kz) J_{\nu_2}(kz) \right]. \end{aligned} \quad (6.110)$$

O procedimento para calcular as integrais é similar ao que adotamos no caso da pressão radial.

Introduzindo no resultado final a nova variável, $y = r^2/(2s^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle 0|T_z^z|0\rangle &= \frac{q\rho^{-5}}{(2\pi)^{3/2}a^4} \int_0^\infty dy y^{3/2} e^{-(1+\rho^{-2})y} \mathcal{J}(q,y) \\ &\times [I_{\nu_1}(y/\rho^2) + I_{\nu_2}(y/\rho^2)] . \end{aligned} \quad (6.111)$$

Usando (6.59) e extraindo a parte devida ao espaço-tempo de AdS puro, obtemos a contribuição para a pressão axial induzido pela corda cósmica, que coincide com a expressão correspondente para a densidade de energia:

$$\langle T_z^z \rangle_{cs} = \langle T_0^0 \rangle_{cs} . \quad (6.112)$$

Usando relações de recorrência envolvendo a derivada da função de Legendre associada, pode-se verificar explicitamente que a parte do VEV do tensor energia-momento induzida pela corda cósmica obedece à equação de conservação covariante, $\langle T_\mu^\nu \rangle_{cs; \nu} = 0$, que é reduzida a duas equações diferenciais, para o problema considerado,

$$\begin{aligned} \partial_r(r\langle T_r^r \rangle_{cs}) - \langle T_\phi^\phi \rangle_{cs} &= 0 , \\ z\partial_z\langle T_z^z \rangle_{cs} + \langle T_\mu^\mu \rangle_{cs} - 4\langle T_z^z \rangle_{cs} &= 0 . \end{aligned} \quad (6.113)$$

Também, usando relações de recorrência envolvendo funções de Legendre associadas de diferentes ordens, pode-se verificar que a relação para o traço, abaixo, é satisfeita:

$$\langle T_\mu^\mu \rangle_{cs} = m\langle \bar{\psi}\psi \rangle_{cs} . \quad (6.114)$$

Note que a anomalia do traço é contida na parte de AdS puro do VEV e a parte induzida pela corda possui traço nulo, para um campo fermiônico sem massa.

Finalizamos esta seção ressaltando algumas diferenças nos VEVs encontrados aqui para um campo fermiônico e o encontrado no caso bosônico [42]. No caso escalar o tensor-energia momento é, em geral, não diagonal e a componente $\langle T_z^r \rangle_{cs}$ se anula apenas para um campo conformalmente acoplado, sem massa. Além disso, no caso escalar, as pressões radial e axial, em geral, não coincidem com a densidade de energia (sem soma sobre l): $\langle T_l^l \rangle_{cs} \neq \langle T_0^0 \rangle_{cs}$, $l = r, z$.

CAPÍTULO 7

Conclusões

Nesta tese, analisamos a dinâmica de férmions e bósons, bem como as propriedades do vácuo fermiônico, em sistemas físicos na vizinhança de cordas cósmicas, no espaço-tempo de Minkowski e anti-de Sitter. Nossas contribuições constituem os capítulos 4 e 6. A seguir, são apresentadas as conclusões destes trabalhos.

No capítulo 4, investigamos o movimento quântico relativístico de partículas carregadas de $\text{spin}=0$ e $\text{spin}=-\frac{1}{2}$, no espaço-tempo da corda cósmica, sob influência de um campo magnético uniforme e paralelo ao eixo de simetria da corda. Consideramos ainda um potencial escalar dependente da coordenada radial, cujo centro está sobre a corda. A análise completa é feita em duas partes: a primeira descreve bósons, em seguida, férmions.

Para o caso bosônico, obtivemos a equação diferencial radial (4.11), a partir da equação de Klein-Gordon, adotando o ansatz (4.6) para a função de onda. Esta equação foi analisada de acordo com diferentes valores dos parâmetros físicos. Especificamente para o caso geral investigado na subseção 4.3.4, foi possível expressar a equação diferencial em termos da equação diferencial de Heun biconfluente. Como estamos interessados em obter uma expressão explícita para o espectro de energia, buscamos soluções polinomiais para esta equação radial. Para obter estes polinômios, usamos o método de Frobenius e encontramos uma relação de recorrência de três termos envolvendo os coeficientes da expansão. Finalmente, impondo condições específicas sobre estes coeficientes, obtivemos soluções polinomiais. Admitindo uma solução polinomial de primeira ordem, a energia encontrada foi expressa em (4.67), sob a condição de que a frequência de ciclotron seja uma solução real de (4.68). Como esta solução é uma expressão bastante longa, decidimos não reproduzir aqui.

Para o caso fermiônico observamos que, adotando o ansatz (4.86) para a função de onda, obtivemos um conjunto de quatro equações diferenciais radiais da equação de Dirac. Além disso, observando a simetria discreta expressa em (4.91), reduzimos o sistema a duas equações diferenciais acopladas. Uma tentativa direta de desacoplar estas equações resultaria em um sistema muito mais complexo de equações diferenciais de quarta ordem. Em vez disso, através das relações (4.101)-(4.104), que obrigam que ambos os potenciais escalares sejam

considerados (o que fica particularmente claro em (4.101)), mostramos que é possível simplificar drasticamente este sistema de equações diferenciais escrevendo-o como equações de Heun biconfluentes. Como aconteceu no caso bosônico, também é útil simplificar as soluções BCH sob forma de polinômios de Heun, para conseguir obter o espectro de energia da partícula. Este processo fornece uma relação algébrica adicional envolvendo os parâmetros do sistema.

Em conclusão, percebemos que uma análise mais simples do movimento do campo fermiônico pode ser desenvolvida, desde que duas condições envolvendo os parâmetros do sistema sejam satisfeitas, a saber: (4.102) e (4.129) para o caso onde o polinômio de Heun é de primeiro grau. Como admitimos $\eta_C > 0$ para obter resultados fisicamente relevantes para o espectro de energia, também foi necessário assumir $\eta_L > 0$. Consequentemente, para garantir que (4.102) seja satisfeita para um campo magnético ao longo da direção positiva do eixo $-z$, i.e., $\vec{B} = B_0 \hat{k}$, o valor do momento angular total, j , deve ser negativo. Se a direção oposta for escolhida para o campo magnético, apenas valores positivos de j são aceitáveis. Concluimos que o caso geral deve ser abordado através de duas análises: para um campo magnético ao longo da direção $\hat{k}$, um valor negativo de momento angular total é necessário; para o campo magnético na direção oposta, um valor positivo de j é requerido. O fato de o sinal do número quântico j estar condicionado à direção do campo magnético não representa uma restrição ao nosso resultado, uma vez que o espectro de energia obtido em (4.128) depende do produto entre ω e j , que é sempre negativo.

Como vimos, análises fechadas envolvendo equações de Heun biconfluentes só podem ser desenvolvidas quando impomos polinômios de Heun específicos, de grau n , como soluções das equações de campo. A razão para esta dificuldade é que, para a função de Heun biconfluente completa, não há expressão geral que descreva seu comportamento assintótico para grandes valores do argumento.¹ Na análise presente, para bósons e férmions, ilustramos como informações físicas relevantes sobre o sistema podem ser obtidas quando a função BCH é expressa como um polinômio de Heun de grau $n = 1$ (obviamente, esta análise pode ser estendida para quaisquer polinômios de grau maior que a unidade). Como consequência desta abordagem, alguns parâmetros físicos precisam ser fixados pela ordem do polinômio e por números quânticos angulares.

A presença do potencial escalar tipo coulombiano nos sistemas considerados neste capítulo pode estar associada à presença de um potencial de auto-interação eletrostática sobre a partícula carregada, induzido pela topologia não-trivial do espaço-tempo cônico [10]. Quanto ao

¹Para valores específicos dos parâmetros, a função BCH pode ser expressa como a função hipergeométrica confluyente.

potencial escalar linear, pode estar associado a um oscilador harmônico cilíndrico extra, atuando sobre a partícula. Devido às presenças do campo magnético e do potencial escalar linear, apenas estados ligados ocorrem neste sistema. Considerando diferentes valores para o campo magnético e para as constantes de acoplamento dos potenciais escalares tipo coulombiano e linear, conseguimos obter explicitamente os espectros de energia associados a ambas partículas carregas; além disso, destes resultados, podemos observar que, apesar de as partículas moverem-se em uma região do espaço-tempo localmente plana, o espectro de energia das partículas depende das propriedades globais do espaço-tempo através do parâmetro α , associado ao déficit de ângulo planar.

No capítulo 6, calculamos o CF e o VEV do tensor energia-momento associado a um campo fermiônico no background de um espaço-tempo de AdS, 4-dimensional, na presença de uma corda cósmica. Estes VEVs são gerados por duas fontes de polarização do vácuo: o campo gravitacional devido à constante cosmológica negativa; e a topologia não-trivial induzida pela corda cósmica. Como a análise de campos fermiônicos quânticos um espaço de AdS puro foi desenvolvida na literatura, aqui estamos apenas interessados no cálculo dos valores esperados do vácuo induzidos pela corda cósmica. Além disso, como a presença da corda não modifica a curvatura do background AdS, todas as divergências apresentadas nos cálculos dos VEVs aparecem apenas nas contribuições devidas ao espaço puramente AdS e as contribuições induzidas pela corda não necessitam de renormalização. Todas são automaticamente finitas para pontos fora da corda.

Os cálculos dos VEVs mencionados acima foram feitos através da soma sobre os modos fermiônicos. Assim, um ponto crucial deste capítulo, foi a obtenção do conjunto completo de funções de onda fermiônicas dadas por (6.32) e (6.40). De forma a especificar unicamente as funções de modo no *bulk* de AdS, uma condição de contorno adicional é necessária na fronteira de AdS. Aqui, consideramos um caso especial de condição de contorno, quando a condição de sacola do MIT é imposta a uma distância finita da fronteira que, em seguida, é levada para zero. Efetuando-se a soma sobre o momento angular (6.59), os VEVs foram decompostos como a soma das contribuições do background e AdS puro e da corda. Dessa forma, para pontos fora da corda, a renormalização é reduzida ao termo para o *bulk* de AdS puro, na ausência da corda. As partes induzidas pela corda, em ambos CF e VEV do tensor energia-momento, dependem das coordenadas r e z , através da combinação r/z , que é a distância própria da corda, medida em unidades de raio da curvatura de AdS. Como forma de verificar parcialmente as equações para o *bulk* AdS, mostramos que para grandes valores do raio de curvatura, para o termo de

ordem dominante, os VEVs são obtidos para a geometria da corda cósmica no espaço-tempo de Minkowski.

A parte induzida pela corda no CF é dada pela expressão (6.61). Para grandes distâncias próprias da corda, o termo dominante na expansão assintótica correspondente é dado por (6.64). Para um valor fixo da coordenada radial r , a parte induzida pela corda no CF se anula na fronteira de AdS. Para um valor fixo de z e para grandes distâncias da corda cósmica, a parte induzida pela corda decai com r^{-2ma-4} . Para uma corda cósmica no background de Minkowski e para um campo fermiônico massivo, a grandes distâncias da corda, o CF decai exponencialmente. Para pequenas distâncias próprias da corda, o termo dominante no CF se comporta como $(z/r)^2$. Em particular, o CF diverge no horizonte de AdS.

O VEV do tensor energia-momento é decomposto como (6.74). Devido à máxima simetria do *bulk* de AdS, a parte de AdS puro não depende do ponto no espaço-tempo e é proporcional ao tensor métrico. A parte induzida pela corda no VEV do tensor energia-momento é diagonal e as pressões radial e axial correspondentes são iguais à densidade de energia. Para o campo fermiônico, as partes induzidas pela corda na densidade de energia e na pressão azimutal são dados pelas expressões (6.85) e (6.103). Para grandes distâncias próprias da corda, estas partes se relacionam ao CF através das fórmulas (6.89) e (6.105) e o VEV total é dominado pela parte AdS pura. Para pequenas distâncias próprias da corda, a parte induzida pela corda se comporta como $(z/r)^4$ e, entre a densidade de energia e a pressão azimutal, temos a relação (6.106). Verificamos explicitamente que as componentes da parte induzida pela corda do tensor energia-momento obedecem às condições de conservação covariantes, (6.113), e à relação do traço, (6.114). A anomalia do traço está contida no VEV de AdS puro e a parte induzida pela corda tem traço nulo para um campo fermiônico sem massa.

Na geometria considerada, a fronteira do espaço-tempo de AdS pode ser identificada com um espaço-tempo cônico 3-dimensional. Como foi mostrado em [115], este espaço-tempo surge como solução das equações de Einstein 3-dimensionais na presença de uma massa pontual m_0 . Esta massa é conectada ao déficit de ângulo planar através da relação $m_0 = (1 - 1/q)/(4G_3)$, onde G_D é a constante gravitacional no espaço-tempo D -dimensional. Note que a densidade linear de massa da corda num espaço-tempo 4-dimensional é dada por $\mu_0 = (1 - 1/q)/(4G_4)$. De forma similar à correspondência AdS/CFT, uma dualidade entre teorias de campo escalar num *bulk* de AdS com uma corda estática infinita na sua fronteira foi discutida em [32]. Dualidade análoga entre teorias de campo fermiônico podem ser consideradas usando a prescrição padrão para campos fermiônicos na correspondência AdS/CFT [116, 117] (para uma discussão

recente, ver também [118]). Nesta prescrição, os modos não-normalizáveis no *bulk* de AdS são tratados como termos de fonte acoplados a um operador fermiônico $\mathcal{O}$ na fronteira, que é dual ao campo fermiônico ψ . O procedimento de quantização que usamos corresponde à chamada quantização padrão de campos fermiônicos na correspondência AdS/CFT. Para $ma < 1/2$, existe um procedimento de quantização alternativo, no qual a condição de contorno corrige a componente inferior do bispinor. Neste caso, tem-se duas teorias duais diferentes na fronteira, que são relacionadas por uma transformada de Legendre. De posse dos valores esperados para os produtos bilineares dos operadores fermiônicos no *bulk*, é possível investigar os valores esperados correspondentes na teoria dual através da prescrição padrão para calcular as funções de dois pontos na fronteira.

APÊNDICE A

Funções de Bessel modificadas

A equação de Bessel surge da separação de variáveis das equações de Helmholtz e Laplace em coordenadas cilíndricas ou esféricas [119, 120]. As funções de Bessel (também chamadas de *harmônicos cilíndricos*) são, portanto, especialmente importantes em diversos problemas de propagação de ondas e potenciais estáticos.

As *funções de Bessel modificadas* são definidas através da equação diferencial

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2) y = 0, \quad (\text{A.1})$$

enquanto as *funções de Bessel ordinárias* obedecem à equação

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - \nu^2) y = 0. \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.1) pode ser transformada na equação (A.2) através da substituição $z \rightarrow iz$, ou seja, as funções de Bessel modificadas são idênticas às funções de Bessel ordinárias com argumento imaginário. Representaremos as soluções de (A.2) por $J_\nu(z)$ e $J_{-\nu}(z)$ e as soluções de (A.1) por $I_\nu(z)$ e $I_{-\nu}(z)$. Para $z \rightarrow 0$, as soluções I_ν e J_ν são regulares, enquanto $I_{-\nu}$ e $J_{-\nu}$ são irregulares. $J_\nu(z)$ e $I_\nu(z)$ são funções reais de z , entretanto $J_\nu(iz)$ não é. Por esta razão podemos escrever

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{\frac{1}{2}i\pi}), \quad -\pi < \arg z \leq \frac{1}{2}\pi; \quad (\text{A.3a})$$

$$I_\nu(z) = e^{\frac{3i\nu\pi}{2}} J_\nu(ze^{-\frac{3}{2}i\pi}), \quad \frac{1}{2}\pi < \arg z \leq \pi. \quad (\text{A.3b})$$

Um segundo tipo de funções, K_ν , é definido por

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (\text{A.4})$$

Problemas com simetria cilíndrica apresentam como soluções as funções de Bessel de ordem

inteira. No limite em que $\nu \rightarrow n$, onde $n \in \mathbb{N}$, temos

$$K_n(z) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}; \quad (\text{A.5})$$

em problemas com simetria esférica, as soluções são funções de Bessel de ordem semi-inteira, que podem ser relacionadas com as funções de Bessel esféricas $j_n(z)$ através da relação

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z). \quad (\text{A.6})$$

A forma assintótica das funções de Bessel modificadas [108] para grandes argumentos e um valor fixo de ν é

$$I_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^z, \quad (\text{A.7a})$$

$$K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}. \quad (\text{A.7b})$$

Quando $z \rightarrow 0$, o comportamento dessas funções é

$$I_\nu(z) \sim \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad (\text{A.8a})$$

$$K_\nu(z) \sim \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{z^\nu}. \quad (\text{A.8b})$$

Finalmente, o wronskiano calculado a partir das funções de primeiro e segundo tipo é

$$W \{K_\nu(z), I_\nu(z)\} = I_\nu(z) K_{\nu+1}(z) + I_{\nu+1}(z) K_\nu(z) = \frac{1}{z}. \quad (\text{A.9})$$

APÊNDICE B

Funções hipergeométricas confluentes

A função hipergeométrica confluyente é uma forma degenerada da função hipergeométrica. Também chamada de função de Kummer de primeiro tipo, a hipergeométrica confluyente é a solução da equação

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b - z) \frac{dw}{dz} - aw = 0, \quad (\text{B.1})$$

que pode ser resolvida diretamente através da expansão da solução [119] em termos de uma série hipergeométrica

$${}_1F_1(a, b; z) = M(a, b; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n z^n}{(b)_n n!}, \quad (\text{B.2})$$

onde $(a)_n$ e $(b)_n$ são *símbolos de Pochhammer*, também conhecidos como fatoriais ascendentes

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1) \cdots (x+n-1). \quad (\text{B.3})$$

A representação integral [108] da função de Kummer é dada por

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{zu} u^{a-1} (1-u)^{b-a-1} du. \quad (\text{B.4})$$

Uma equação que será útil é a fórmula [108] de recorrência

$$z \frac{d}{dz} F(a, b; z) = (b-a)F(a-1, b; z) - (b-a-z)F(a, b; z). \quad (\text{B.5})$$

E, por fim, sua forma assintótica [108] na região $|z| \rightarrow \infty$,

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b} [1 + O(|z|^{-1})], \quad \Re z > 0; \quad (\text{B.6})$$

$${}_1F_1(a, b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} (-z)^{-a} [1 + O(|z|^{-1})], \quad \Re z < 0. \quad (\text{B.7})$$

Equação diferencial de Heun

A equação de Heun é a equação diferencial genérica com quatro pontos singulares regulares em $0, 1, a$ e ∞ . A forma natural padrão da equação de Heun é [107],

$$y''(z) + \left(\frac{\lambda}{z} + \frac{\mu}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-a} \right) y'(z) + \left(\frac{\alpha\sigma z - q}{z(z-1)(z-a)} \right) y(z) = 0. \quad (\text{C.1})$$

O parâmetro ε é expresso em termos dos demais na forma $\varepsilon = \alpha + \sigma + 1 - \lambda - \mu$. Quatro equações confluentes surgem da equação de Heun geral, através de diferentes processos de confluência. Na nossa investigação, temos interesse particular na equação biconfluente (BCH), com ponto singular regular em $z = 0$ e ponto singular irregular em $z = \infty$. A forma canônica da equação BCH é

$$xu''(x) + (1 + \alpha - \sigma x - 2x^2)u'(x) + \left\{ (\lambda - \alpha - 2)x - \frac{1}{2}[\mu + \sigma(1 + \alpha)] \right\} u(x) = 0, \quad (\text{C.2})$$

onde α, σ, λ e μ são parâmetros arbitrários. Através da transformação

$$u(x) = x^{-\frac{1+\alpha}{2}} e^{\frac{\sigma x + x^2}{2}} v(x), \quad (\text{C.3})$$

a equação BCH toma a forma de Schrödinger

$$v''(x) + \left[Ax^2 + Bx + C + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2} \right] v(x) = 0, \quad (\text{C.4})$$

com $A = -1; B = -\sigma; C = \lambda - \frac{\sigma^2}{4}; D = -\frac{\mu}{2}; E = \frac{1-\alpha^2}{4}$.

O polinômio de Heun biconfluente, $H_B(\alpha, \sigma, \lambda, \mu; x)$, pode ser obtido como uma expansão de Frobenius para a equação BCH, calculada como uma expansão em série de potências em torno da origem,

$$H_B = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad (\text{C.5})$$

Substituindo a expansão acima em (C.2), encontra-se uma relação de recorrência de três termos:

$$A_{m+2} = \frac{1}{(n+2)(n+2+\alpha)} \left\{ \left[\frac{\mu}{2} + \sigma \left(n+1 + \frac{\alpha+1}{2} \right) \right] C_{n+1} + (2n - \lambda + \alpha + 2) C_n \right\}, \quad (C.6)$$

para $m \geq 1$ e

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma + \frac{\mu}{1+\alpha} \right] A_0. \quad (C.7)$$

As raízes de A_{n+1} são autovalores que correspondem a estes polinômios de Heun particulares. Neste caso, todos os coeficientes subsequentes se cancelam e a série resulta em uma forma polinomial de grau n para H_B . Para este caso, devemos ter,

$$\lambda - \alpha - 2 = 2n, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad A_{n+1} = 0. \quad (C.8)$$

Infelizmente, não existe uma expressão fechada para o comportamento assintótico da função de Heun biconfluyente, no caso geral, para grandes valores do argumento. Consequentemente, as condições impostas sobre seus parâmetros, de modo a fornecer uma forma polinomial, só podem ser obtidas através da análise de cada coeficiente separadamente, como fizemos ao longo deste capítulo.

A função de Heun biconfluyente pode ser escrita em termos da função M de Whittaker ou da função hipergeométrica confluyente [108], para valores específicos dos parâmetros, como mostrado abaixo:

$$H_B(\alpha, 0, \lambda, 0; x) = \frac{1}{x^{\frac{\alpha}{2}+1}} e^{\frac{x^2}{2}} M\left(\frac{\lambda}{4}, \frac{\alpha}{4}; x^2\right) = {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{4} - \frac{\lambda}{4} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} + 1; x^2\right). \quad (C.9)$$

APÊNDICE D

Sobre a condição de contorno na fronteira de AdS

Considere o campo fermiônico na região $z > \delta$, assumindo que, na fronteira, o campo obedece a condição de contorno da sacola do MIT,

$$(1 + i\gamma^\mu n_\mu)\psi = 0, \quad z = \delta, \quad (\text{D.1})$$

com $n_\mu = -\delta_\mu^z a/z$ sendo a normal à fronteira. Esta condição de contorno garante fluxo nulo de férmions através da fronteira. As funções de modo de energia positiva, para este problema, são obtidas de (6.32), fazendo-se as substituições $C_\sigma^{(+)} \rightarrow C_{b\sigma}^{(+)}$ and $J_{v_l}(kz) \rightarrow J_{v_l}(kz) + CY_{v_l}(kz)$, $l = 1, 2$. Da condição de contorno (D.1) segue que $C = -J_{v_2}(k\delta)/Y_{v_2}(k\delta)$. O novo coeficiente de normalização $C_{b\sigma}^{(+)}$ é determinado da condição de normalização (6.34) onde, agora, a integral é sobre a região $z \geq \delta$. Pelos cálculos, similares aos descritos na seção 6.1, a seguinte expressão é obtida

$$|C_{b\sigma}^{(+)}|^2 = \frac{sq\lambda^2 k}{8\pi a^3 E b_s^{(+)} J_{v_2}^2(k\delta) + Y_{v_2}^2(k\delta)}. \quad (\text{D.2})$$

Desta maneira, para funções de modo fermiônicas de energia positiva, obedecendo a condição de contorno (D.1), obtem-se

$$\psi_{b\sigma}^{(+)}(x) = C_{b\sigma}^{(+)} e^{-iEt} z^2 \begin{pmatrix} J_{\beta_1}(\lambda r) V_{v_1}(kz) \\ -\varepsilon_j b_s^{(+)} J_{\beta_2}(\lambda r) V_{v_2}(kz) e^{iq\phi} \\ is J_{\beta_1}(\lambda r) V_{v_2}(kz) \\ i\varepsilon_j s b_s^{(+)} J_{\beta_2}(\lambda r) V_{v_1}(kz) e^{iq\phi} \end{pmatrix} e^{iq(j-1/2)\phi}, \quad (\text{D.3})$$

onde

$$V_v(kz) = J_v(kz) - \frac{J_{v_2}(k\delta)}{Y_{v_2}(k\delta)} Y_v(kz). \quad (\text{D.4})$$

A expressão para os modos de energia negativa $\psi_{b\sigma}^{(-)}(x)$ é derivada de forma similar. Esta expressão é obtida de (6.40) pelas substituições $C_\sigma^{(-)} \rightarrow C_{b\sigma}^{(-)}$ and $J_{v_l}(kz) \rightarrow V_{v_l}(kz)$, onde $|C_{b\sigma}^{(-)}|^2$ é dado por (D.2) com a mudança $b_s^{(+)} \rightarrow b_s^{(-)}$. No limite $\delta \rightarrow 0$, para $z > \delta$ fixo, temos $|C_{b\sigma}^{(+)}|^2 \rightarrow |C_\sigma^{(+)}|^2$, $V_{v_l}(kz) \rightarrow J_{v_l}(kz)$ e as funções de modo $\psi_{b\sigma}^{(\pm)}(x)$ se reduzem a (6.32) e

(6.40), como foi dito no texto.

Conexão espinorial

A conexão espinorial é definida através da equação

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^{(a)}\gamma^{(b)}e_{(a)}^\nu \left[\partial_\mu e_{(b)\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma e_{(b)\sigma} \right] , \quad (\text{E.1})$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ é o símbolo de Christoffel de segundo tipo, $e_{(a)}^\mu(x)$ é a base tetrada e $\gamma^\mu(x)$ representa a matriz de Dirac generalizada. Ao longo do texto, foi necessário obter esta quantidade tanto na variedade de Minkowski, quanto em anti-De Sitter. Abaixo, mostramos detalhes deste cálculo.

No espaço-tempo de Minkowski, na presença da corda cósmica, de acordo com a base tetrada (4.76), usada no capítulo 4, vemos que as matrizes de Dirac no espaço curvo obedecem às seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \gamma^{(0)} , & \gamma^1 &= \gamma^{(1)} , \\ \gamma^2 &= \frac{1}{\alpha r} \gamma^{(2)} , & \gamma^3 &= \gamma^{(3)} . \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Ainda nessa geometria, os símbolos de Christoffel são $\Gamma_{22}^1 = -\alpha^2 r$, $\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$ e os demais são nulos. De posse desses valores, obtemos

$$\Gamma^0 = \Gamma^1 = \Gamma^3 = 0 , \quad (\text{E.3})$$

$$\Gamma^2 = \frac{(1-\alpha)}{4} \left(\gamma^{(1)} \gamma_{(2)} + \gamma^{(2)} \gamma_{(1)} \right) . \quad (\text{E.4})$$

Como estes resultados já foram apresentados exaustivamente na literatura [110], não entraremos em detalhes dos cálculos.

Para a métrica de AdS, na presença da corda cósmica, os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^z &= -\frac{1}{z} , & \Gamma_{tz}^t &= -\frac{1}{z} , & \Gamma_{rr}^z &= \frac{1}{z} , \\ \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} , & \Gamma_{rz}^r &= -\frac{1}{z} , & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r , \\ \Gamma_{\phi\phi}^z &= \frac{r^2}{z} , & \Gamma_{\phi z}^\phi &= -\frac{1}{z} , & \Gamma_{zz}^z &= -\frac{1}{z} . \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Substituindo estes símbolos na definição da conexão, após alguns cálculos, observa-se que as

derivadas covariantes não-nulas (o termo entre colchetes na definição da conexão) são os listados abaixo:

$$\begin{aligned}
 \nabla_0 e_0^{(3)} &= \frac{a}{z^2}, & \nabla_0 e_3^{(0)} &= \frac{a}{z^2}, \\
 \nabla_1 e_1^{(3)} &= -\frac{a}{z^2}, & \nabla_1 e_3^{(1)} &= \frac{a \cos(q\phi)}{z^2}, \\
 \nabla_1 e_3^{(2)} &= \frac{a \sin(q\phi)}{z^2}, & \nabla_2 e_1^{(1)} &= \frac{a(1-q) \sin(q\phi)}{z}, \\
 \nabla_2 e_1^{(2)} &= \frac{a(q-1) \cos(q\phi)}{z}, & \nabla_2 e_2^{(1)} &= \frac{a(1-q) r \cos(q\phi)}{z}, \\
 \nabla_2 e_2^{(2)} &= \frac{a(1-q) r \sin(q\phi)}{z}, & \nabla_2 e_2^{(3)} &= -\frac{ar^2}{z^2}, \\
 \nabla_2 e_3^{(1)} &= -\frac{ar \sin(q\phi)}{z^2}, & \nabla_2 e_3^{(2)} &= \frac{ar \cos(q\phi)}{z^2}.
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

Com esses valores, cada componente da conexão pode ser calculada:

$$\Gamma_0 = -\frac{\alpha^{(3)}}{2z}, \tag{E.7}$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{2z} \left(\gamma^{(1)} \gamma^{(3)} \cos(q\phi) + \gamma^{(2)} \gamma^{(3)} \sin(q\phi) \right), \tag{E.8}$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\gamma^{(3)} \gamma^{(1)} \frac{r \sin(q\phi)}{z} - \gamma^{(2)} \gamma^{(1)} (1-q) - \gamma^{(3)} \gamma^{(2)} \frac{r \cos(q\phi)}{z} \right), \tag{E.9}$$

$$\Gamma_3 = 0. \tag{E.10}$$

Assim, podemos calcular $\gamma^\mu \Gamma_\mu$:

$$\gamma^\mu \Gamma_\mu = \gamma^0 \Gamma_0 + \gamma^1 \Gamma_1 + \gamma^2 \Gamma_2 = \frac{3i}{2a} \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & -\sigma^z \end{pmatrix} - \frac{iz(1-q)}{2ar} \begin{pmatrix} \sigma^r & 0 \\ 0 & -\sigma^r \end{pmatrix}. \tag{E.11}$$

Referências Bibliográficas

- 1 AUDRETSCH, J.; SCHÄFFER, G. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin- $\frac{1}{2}$ particles in an expanding universe: I. influence of the expansion. *General Relativity and Gravitation*, v. 9, n. 3, p. 243–255, 1978.
- 2 PARKER, L. One-electron atom in curved space-time. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 44, n. 23, p. 1559–1562, Jun 1980.
- 3 PARKER, L.; PIMENTEL, L. O. Gravitational perturbation of the hydrogen spectrum. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 25, n. 12, p. 3180–3190, Jun 1982.
- 4 MARQUES, G. de A.; BEZERRA, V. B. Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, v. 19, n. 5, p. 985–995, 2002.
- 5 MARQUES, G. d. A.; BEZERRA, V. B. Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 66, n. 10, p. 105011, Nov 2002.
- 6 VILENKIN, A.; SHELLARD, E. P. S. *Cosmic strings and other topological defects*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. (Cambridge monographs on mathematical physics). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/278400>>.
- 7 KIBBLE, T. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 9, n. 8, p. 1387–1398, 1976.
- 8 VILENKIN, A. Cosmic strings and domain walls. *Physics Reports*, v. 121, n. 5, p. 263 – 315, 1985.
- 9 LINET, B. Force on a charge in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 33, p. 1833–1834, Mar 1986. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.33.1833>>.
- 10 SMITH, A. *The Formation and Evolution of Cosmic Strings*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1990. 263–292 p. (Proceedings of a Workshop Supported by the SERC and Cambridge).
- 11 MELLO, E. R. Bezerra de et al. Self-forces on electric and magnetic linear sources in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 51, p. 7140–7143, Jun 1995. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.51.7140>>.

- 12 BEREZINSKY, V.; HNATYK, B.; VILENKIN, A. Gamma ray bursts from superconducting cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 64, p. 043004, Jul 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.64.043004>>.
- 13 DAMOUR, T.; VILENKIN, A. Gravitational wave bursts from cosmic strings. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 3761–3764, Oct 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.3761>>.
- 14 BHATTACHARJEE, P.; SIGL, G. Origin and propagation of extremely high-energy cosmic rays. *Physics Reports*, v. 327, n. 3-4, p. 109 – 247, 2000. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157399001015>>.
- 15 SARANGI, S.; TYE, S.-H. Cosmic string production towards the end of brane inflation. *Physics Letters B*, v. 536, n. 3-4, p. 185 – 192, 2002. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269302018245>>.
- 16 DVALI, G.; VILENKIN, A. Formation and evolution of cosmic d strings. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2004, n. 03, p. 010, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1475-7516/2004/i=03/a=010>>.
- 17 FURTADO, C. et al. Landau levels in the presence of disclinations. *Physics Letters A*, v. 195, n. 1, p. 90 – 94, 1994.
- 18 MELLO, E. R. B. de; BEZERRA, V. B. Charged particles in a magnetic field on a cone. *Journal of Mathematical Physics*, v. 36, n. 10, p. 5297–5304, 1995.
- 19 DOSCH, H. G.; JANSEN, J.; MÜLLER, V. Einige bemerkungen zum kleinschen paradoxon. *Phys. Nor.*, v. 5, p. 2, 1971.
- 20 RAFELSKI, J. et al. Solution of the Dirac Equation for Scalar Potentials and its Implications in Atomic Physics. *Z.Naturforsch.*, v. 28A, p. 1389, 1973.
- 21 BORDAG, M.; KHUSNUTDINOV, N. A remark on bound states in conical spacetime. *Class. Quantum Grav.*, v. 13, n. L41, 1996.
- 22 SPINELLY, J.; MELLO, E. R. B. de; BEZERRA, V. B. Relativistic quantum scattering on a cone. *Classical and Quantum Gravity*, v. 18, n. 8, p. 1555–1566, 2001.
- 23 MELLO, E. R. B. de; SAHARIAN, A. A. Topological casimir effect in compactified cosmic string spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 29, n. 3, p. 035006, 2012.
- 24 AVIS, S. J.; ISHAM, C. J.; STOREY, D. Quantum field theory in anti-de sitter space-time. *Phys. Rev. D*, v. 18, p. 3565–3576, Nov 1978.
- 25 CALDARELLI, M. M. Quantum scalar fields on anti-de sitter space-time. *Nuclear Physics B*, v. 549, n. 1-2, p. 499 – 515, 1999.

- 26 CAMPORESI, R.; HIGUCHI, A. Stress-energy tensors in anti-de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 45, p. 3591–3603, May 1992. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.3591>>.
- 27 ELIZALDE, E.; ODINTSOV, S. D.; SAHARIAN, A. A. Fermionic casimir densities in anti-de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 87, p. 084003, Apr 2013. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.084003>>.
- 28 AHARONY, O. et al. Large n field theories, string theory and gravity. *Physics Reports*, v. 323, n. 3-4, p. 183 – 386, 2000. ISSN 0370-1573. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157399000836>>.
- 29 BRAX, P.; BRUCK, C. van de. Cosmology and brane worlds: a review. *Classical and Quantum Gravity*, v. 20, n. 9, p. R201, 2003. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/20/i=9/a=202>>.
- 30 MAARTENS, R.; KOYAMA, K. Brane-world gravity. *Living Rev. Relativity*, v. 13, n. 5, 2010.
- 31 DEHGHANI, M.; GHEZELBASH, A.; MANN, R. Vortex holography. *Nuclear Physics B*, v. 625, n. 1-2, p. 389 – 406, 2002. ISSN 0550-3213. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S055032130200024X>>.
- 32 BAYONA, C. A. B.; FERREIRA, C. N.; OTOYA, V. J. V. A conical deficit in the ads 4 /cft 3 correspondence. *Classical and Quantum Gravity*, v. 28, n. 1, p. 015011, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=1/a=015011>>.
- 33 LINET, B. Quantum field theory in the space-time of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 536–539, Jan 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.536>>.
- 34 MELLO, E. R. Bezerra de et al. Vacuum polarization induced by a cylindrical boundary in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 025017, Jul 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.025017>>.
- 35 FROLOV, V. P.; SEREBRIANY, E. M. Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 35, p. 3779–3782, Jun 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.35.3779>>.
- 36 MELLO, E. R. Bezerra de et al. Fermionic vacuum polarization by a cylindrical boundary in the cosmic string spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 78, p. 105007, Nov 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.105007>>.
- 37 DOWKER, J. S. Vacuum averages for arbitrary spin around a cosmic string. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 36, p. 3742–3746, Dec 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.36.3742>>.

- 38 MELLO, E. B. de; BEZERRA, V.; SAHARIAN, A. Electromagnetic casimir densities induced by a conducting cylindrical shell in the cosmic string spacetime. *Physics Letters B*, v. 645, n. 2-3, p. 245 – 254, 2007. ISSN 0370-2693.
- 39 OTTEWILL, A. C.; TAYLOR, P. Renormalized vacuum polarization and stress tensor on the horizon of a schwarzschild black hole threaded by a cosmic string. *Classical and Quantum Gravity*, v. 28, n. 1, p. 015007, 2011. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=1/a=015007>>.
- 40 MELLO, E. B. de; SAHARIAN, A. Vacuum polarization by a cosmic string in de sitter spacetime. *Journal of High Energy Physics*, v. 2009, n. 04, p. 046, 2009. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1126-6708/2009/i=04/a=046>>.
- 41 MELLO, E. R. B. de; SAHARIAN, A. A. Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in de sitter spacetime. *Journal of High Energy Physics*, v. 2010, n. 8, p. 1–29, 2010. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2010\)038](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2010)038)>.
- 42 MELLO, E. R. B. de; SAHARIAN, A. A. Vacuum polarization induced by a cosmic string in anti-de sitter spacetime. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 45, n. 11, p. 115402, 2012. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/45/i=11/a=115402>>.
- 43 GOLDSTONE, J. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, v. 19, p. 154–164, 1961.
- 44 GOLDSTONE, J.; SALAM, A.; WEINBERG, S. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 127, n. 3, p. 965–970, Aug 1962.
- 45 KIBBLE, T. Some Implications of a Cosmological Phase Transition. *Phys.Rept.*, v. 67, p. 183, 1980.
- 46 KIBBLE, T. Phase Transitions in the Early Universe. *Acta Phys.Polon.*, B13, p. 723, 1982.
- 47 COPELAND, E. J.; POGOSIAN, L.; VACHASPATI, T. Seeking String Theory in the Cosmos. *Class.Quant.Grav.*, v. 28, p. 204009, 2011.
- 48 Hindmarsh, M. Signals of Inflationary Models with Cosmic Strings. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 190, p. 197–228, 2011.
- 49 VILENKIN, A. Cosmic strings as gravitational lenses. *Astrophys.J.*, v. 282, p. L51–L53, 1984.
- 50 MACK, K. J.; WESLEY, D. H.; KING, L. J. Observing cosmic string loops with gravitational lensing surveys. *Phys.Rev.*, D76, p. 123515, 2007.
- 51 ALPHER, R. A.; HERMAN, R. C. On the relative abundance of the elements. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 74, p. 1737–1742, Dec 1948. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.74.1737>>.

- 52 PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys.J.*, v. 142, p. 419–421, 1965.
- 53 GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, p. 347–356, Jan 1981. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.23.347>>.
- 54 GUTH, A. H. Eternal inflation and its implications. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 40, n. 25, p. 6811, 2007. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/40/i=25/a=S25>>.
- 55 LINDE, A. A new inflationary universe scenario: A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, v. 108, n. 6, p. 389 – 393, 1982. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269382912199>>.
- 56 AGUIRRE, A. Eternal Inflation, past and future. Arxiv:0712.0571. 2007.
- 57 Planck Collaboration. Planck 2013 results. i. overview of products and scientific results. *A&A*, v. 571, p. A1, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321529>>.
- 58 Planck Collaboration. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *A&A*, v. 571, p. A16, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321591>>.
- 59 VILENKIN, A. Gravitational radiation from cosmic strings. *Physics Letters B*, v. 107, n. 1, p. 47 – 50, 1981. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269381911448>>.
- 60 HOGAN, C. J.; REES, M. J. Gravitational interactions of cosmic strings. *Nature*, v. 311, p. 109–114, 1984.
- 61 VACHASPATI, T.; VILENKIN, A. Gravitational radiation from cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 31, p. 3052–3058, Jun 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.3052>>.
- 62 BENNETT, D. P.; BOUCHET, F. m. c. R. Evidence for a scaling solution in cosmic-string evolution. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 60, p. 257–260, Jan 1988. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.60.257>>.
- 63 BEREZINSKY, V.; HNATYK, B.; VILENKIN, A. Superconducting cosmic strings as gamma-ray burst engines. Astro-ph/0001213. 2000.
- 64 DAMOUR, T.; VILENKIN, A. Gravitational wave bursts from cosmic strings. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 85, p. 3761–3764, Oct 2000. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.85.3761>>.

- 65 POGOSIAN, L.; VILENKIN, A. Early reionization by cosmic strings reexamined. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 70, p. 063523, Sep 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.70.063523>>.
- 66 ZELDOVICH, Y. B. Cosmological fluctuations produced near a singularity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 192, n. 4, p. 663–667, 1980. Disponível em: <<http://mnras.oxfordjournals.org/content/192/4/663.abstract>>.
- 67 VILENKIN, A. Gravitational field of vacuum domain walls and strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 23, n. 4, p. 852–857, Feb 1981.
- 68 BENNETT, C. L. et al. Four-year coBE dmr cosmic microwave background observations: Maps and basic results. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 464, n. 1, p. L1, 1996. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/464/i=1/a=L1>>.
- 69 BERNARDIS, P. de et al. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, v. 404, p. 955–959, 2000.
- 70 HANANY, S. et al. Maxima-1: A measurement of the cosmic microwave background anisotropy on angular scales of 10° – 5° . *The Astrophysical Journal Letters*, v. 545, n. 1, p. L5, 2000. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1538-4357/545/i=1/a=L5>>.
- 71 BENNETT, C. L. et al. First-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Preliminary maps and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 148, n. 1, p. 1, 2003. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0067-0049/148/i=1/a=1>>.
- 72 WYMAN, M.; POGOSIAN, L.; WASSERMAN, I. Bounds on cosmic strings from wmap and sdss. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 72, p. 023513, Jul 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.023513>>.
- 73 BEVIS, N. et al. Fitting cosmic microwave background data with cosmic strings and inflation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 100, p. 021301, Jan 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.021301>>.
- 74 BATTYE, R.; GARBRECHT, B.; MOSS, A. Tight constraints on f - and d -term hybrid inflation scenarios. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 81, p. 123512, Jun 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.81.123512>>.
- 75 BATTYE, R. A.; PEARSON, J. A. Charge, junctions, and the scaling of domain wall networks. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 82, p. 125001, Dec 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.125001>>.
- 76 TUROK, N.; PEN, U.-L.; SELJAK, U. c. v. Scalar, vector, and tensor contributions to cmb anisotropies from cosmic defects. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 023506, Jun 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.023506>>.
- 77 KAISER, N.; STEBBINS, A. Microwave anisotropy due to cosmic strings. *Nature*, v. 310, p. 391 – 393, 1984.

- 78 Gott III, J. R. Gravitational lensing effects of vacuum strings - Exact solutions. *Astrophysical Journal*, v. 288, p. 422–427, jan. 1985.
- 79 POGOSIAN, L. et al. Observational constraints on cosmic string production during brane inflation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 68, p. 023506, Jul 2003. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.023506>>.
- 80 ALBRECHT, A.; BATTYE, R. A.; ROBINSON, J. The case against scaling defect models of cosmic structure formation. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 4736–4739, Dec 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.4736>>.
- 81 SELJAK, U. c. v.; PEN, U.-L.; TUROK, N. Polarization of the microwave background in defect models. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 79, p. 1615–1618, Sep 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.1615>>.
- 82 HU, W.; WHITE, M. Cmb anisotropies: Total angular momentum method. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 56, p. 596–615, Jul 1997. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.56.596>>.
- 83 SELJAK, U. c. v.; SLOSAR, A. c. v. *b* polarization of the cosmic microwave background as a tracer of strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 74, p. 063523, Sep 2006. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.74.063523>>.
- 84 BEVIS, N. et al. Cmb polarization power spectra contributions from a network of cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 76, p. 043005, Aug 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.043005>>.
- 85 POGOSIAN, L.; WYMAN, M. B-modes from cosmic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 083509, Apr 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.083509>>.
- 86 URRESTILLA, J. et al. Degeneracy between primordial tensor modes and cosmic strings in future cmb data from the planck satellite. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 77, p. 123005, Jun 2008. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.123005>>.
- 87 MUKHERJEE, P. et al. Detecting and distinguishing topological defects in future data from the cmbpol satellite. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 83, p. 043003, Feb 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.043003>>.
- 88 MELLO, E. R. B. de; MEDEIROS, E. R. F.; SAHARIAN, A. A. Fermionic vacuum polarization by a cosmic string in anti-de sitter spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, n. 17, p. 175001, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/30/i=17/a=175001>>.
- 89 Figueiredo Medeiros, E.R.; Bezerra de Mello, E.R. Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential. *Eur. Phys. J. C*, v. 72, n. 6, p. 2051, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-2051-9>>.

- 90 ADE, P. A. R. et al. Detection of b -mode polarization at degree angular scales by bicep2. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 241101, Jun 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.241101>>.
- 91 LIZARRAGA, J. et al. Can topological defects mimic the bicep2 b -mode signal? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 112, p. 171301, Apr 2014. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.112.171301>>.
- 92 NIELSEN, H. B.; OLESEN, P. Vortex Line Models for Dual Strings. *Nucl. Phys.*, B61, p. 45–61, 1973.
- 93 HISCOCK, W. Exact gravitational field of a string. *Phys. Rev. D*, v. 32, p. 31, 1985.
- 94 LINET, B. The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings. *General Relativity and Gravitation*, v. 17, n. 11, p. 1109–1115, 1985. ISSN 1572-9532. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00774211>>.
- 95 GARFINKLE, D. General relativistic strings. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 32, p. 1323–1329, Sep 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.1323>>.
- 96 ANDERSON, M. *The Mathematical Theory of Cosmic Strings*. [S.l.]: Institute of Physics Publishing, 2003. (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation).
- 97 BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. C. W. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge University Press, 1982. Cambridge Books Online. ISBN 9780511622632. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511622632>>.
- 98 GHEZELBASH, A.; MANN, R. Vortices in de sitter spacetimes. *Physics Letters B*, v. 537, n. 3-4, p. 329 – 339, 2002. ISSN 0370-2693.
- 99 SHAW, G.; F, M. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Wiley Interscience) Elementary introduction, 1993.
- 100 BJORKEN, J.; DRELL, S. *Relativistic Quantum Mechanics*. [S.l.]: McGraw-Hill Inc., 1964.
- 101 CARMELI, M. *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*. New York: Wiley and Sons, 1982.
- 102 GÜRSEY, F. Reformulation of general relativity in accordance with mach's principle. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 24, p. 211–242, 1963.
- 103 EISENHART, L. Riemann geometry. *Princeton Univ*, 1926.
- 104 SOARES, D. li escola de cosmologia e gravita cão, ed. M. Novello, CBPF, Rio de Janeiro, pg, v. 479, 1980.

- 105 GRIB, A. A.; MOSTEPANENKO, V.; MAMAYEV, S. *Vacuum quantum effects in strong fields*. [S.l.]: Fridmann Lab., 1994.
- 106 OLIVEIRA, A. L. C. de; MELLO, E. R. B. de. Exact solutions of the klein-gordon equation in the presence of a dyon, magnetic flux and scalar potential in the spacetime of gravitational defects. *Class. Quantum Grav.*, v. 23, p. 5249, 2006.
- 107 SLAVYANOV, S. Y.; LAY, W. *Special Functions: A Unified Theory Based in Singularities*. [S.l.]: Oxford Univ. Press, New York, 2000.
- 108 ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. *Handbook of Mathematical Functions*. [S.l.]: Dover, New York, 1972.
- 109 FORD, L. Quantum field theory in curved spacetime. *arXiv preprint gr-qc/9707062*, 1997.
- 110 BIRREL, N.; DAVIES, P. *Quantum Fields in Curved Space*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1982.
- 111 SCHRODINGER, E. The proper vibrations of the expanding universe. *Physica*, v. 6, n. 7, p. 899 – 912, 1939. ISSN 0031-8914. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0031891439900911>>.
- 112 GRADSHTEYN, I.; RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series, and Products*. [S.l.]: Elsevier, 2007.
- 113 MELLO, E. R. B. de; SAHARIAN, A. A.; ABAJYAN, S. V. Fermionic vacuum polarization by a flat boundary in cosmic string spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, n. 1, p. 015002, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/30/i=1/a=015002>>.
- 114 BATEMAN, H.; ERDÉLYI, A. *Higher transcendental functions*. New York, NY: McGraw-Hill, 1955. (Calif. Inst. Technol. Bateman Manuscr. Project). Disponível em: <<https://cds.cern.ch/record/100233>>.
- 115 DESER, S.; JACKIW, R.; HOOFT, G. 't. Three-dimensional einstein gravity: Dynamics of flat space. *Annals of Physics*, v. 152, n. 1, p. 220 – 235, 1984. ISSN 0003-4916. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000349168490085X>>.
- 116 HENNINGSON, M.; SFETSOS, K. Spinors and the ads/cft correspondence. *Physics Letters B*, v. 431, n. 1-2, p. 63 – 68, 1998. ISSN 0370-2693. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269398005590>>.
- 117 MÜCK, W.; VISWANATHAN, K. S. Conformal field theory correlators from classical field theory on anti-de sitter space: Vector and spinor fields. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 58, p. 106006, Oct 1998. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.58.106006>>.

- 118 IQBAL, N.; LIU, H. Real-time response in ads/cft with application to spinors. *Fortschritte der Physik*, WILEY-VCH Verlag, v. 57, n. 5-7, p. 367–384, 2009. ISSN 1521-3978. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/prop.200900057>>.
- 119 ARFKEN, G.; WEBER, H. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2001.
- 120 BUTKOV, E. *Mathematical Physics*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing, 1968.