



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TEORIAS DA GRAVITAÇÃO E GEOMETRIA DE WEYL

MARIA LAURA PUCHEU

João Pessoa, 2013

MARÍA LAURA PUCHEU

TEORIAS DA GRAVITAÇÃO E GEOMETRIA DE WEYL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de doutor em física.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

2013

João Pessoa, PB

P977t Pucheu, María Laura.
 Teorias da gravitação e geometria de Weyl / Maria Laura
 Pucheu.- João Pessoa, 2013.
 94f.
 Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
 Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
 1. Física. 2. Relatividade geral. 3. Geometria riemanniana.
 4. Geometria de Weyl integrável. 5. Convencionalismo.
 6. Teoria gravitacional de Brans-Dicke.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
doutorado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 28 de junho de 2013, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, **APROVA Maria Laura Pucheu** na defesa de sua tese intitulada "*Teorias da gravitação e geometria de Weyl*".

João Pessoa, 28 de junho de 2013

Orientador:

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(DF/UFPB)

1º Examinador:

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(DF/UFPB)

2º Examinador:

Prof. Dr. Nivaldo Agostinho Lemos
(UFF)

3º Examinador:

Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte
(DF/UFPB)

4º Examinador:

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel
(IFT/UNESP)



AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Carlos Romero, pela sua paciência.

Aos seres queridos que estão longe, pela sua fé em mim. E aos que estão ao meu lado, pela companhia que só me traz paz.

Agradeço ao CNPq e ao CLAF pelo apoio financeiro.

Resumo

A gravitação tem sido atribuída, desde a aparição da relatividade geral, à curvatura do espaço-tempo. A linguagem geometrodinâmica por esta teoria introduzida, representa uma ferramenta conveniente para predizer o comportamento da matéria. Partindo da idéia proposta por Poincaré de que a geometria do espaço é apenas uma convenção, afirmando que nenhuma geometria é mais correta que outra, mas mais conveniente, mostramos como certas teorias da gravitação, em particular a teoria geral da relatividade, assim como a teoria de Brans-Dicke, podem ser completamente reformuladas numa geometria que é uma generalização da geometria riemanniana: a geometria de Weyl integrável. Com esta escolha da linguagem matemática, o movimento das partículas e raios de luz correspondem a geodésicas weyllianas, as quais satisfazem uma nova classe de invariância, a invariância por transformações de Weyl. Estas transformações permitem definir os chamados referenciais de Weyl e, no caso da teoria da gravitação criada por Einstein, recuperá-la na sua formulação riemanniana, num *gauge* particular. Por outro lado, esta modificação na dinâmica dos objetos traz uma nova percepção dos fenômenos físicos que tentaremos explorar.

PALAVRAS-CHAVE: *Relatividade Geral, Geometria Riemanniana, Geometria de Weyl integrável, Convencionalismo, Teoria gravitacional de Brans-Dicke.*

Abstract

We show that the theory of General Relativity can be entirely formulated in the language of the integrable Weyl geometry. We develop the concept of Weyl frames and state the fact that they are completely equivalent as far as geodesic motion is concerned. In the case of General Relativity, we build an action that is manifestly invariant with respect to Weyl transformations. In this scenario, the gravitational field is described by a combination of both the metric and a geometrical scalar field. We illustrate this point by examining how distinct geometrical and physical pictures of the same phenomena may arise in different frames for the particular case of conformally flat spacetimes. Besides, we show that our choice of Weyl geometry for describing the space-time of General Relativity completely agrees with Poincaré ideas that the geometry of space was merely a convention and that no geometry is more correct than any other, only more convenient. On the other hand, we consider the Brans-Dicke gravitational theory as a point of departure for constructing a geometric scalar-field theory. In this approach we apply the Palatini variational method to the Brans-Dicke action. We then are naturally led to conclude that space-time has the geometrical structure of a Weyl integrable manifold. We briefly examine some features of this scalar-tensor theory in which Brans-Dicke scalar field now plays the role of a geometrical field.

KEYWORDS: *General Relativity, Riemannian geometry, Integrable Weyl geometry , Conventionality, Brans-Dicke theory of Gravitation.*

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Geometria de Weyl	5
1.1 Generalização de Weyl da geometria Riemanniana	6
1.2 A teoria de unificação de Weyl	9
1.3 Teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável (WIST)	12
2 Formulação da relatividade geral numa geometria de Weyl	14
2.1 Referenciais de Weyl	15
2.2 A relatividade geral em uma geometria de Weyl integrável	16
2.2.1 O postulado das geodésicas	17
2.2.2 Equações de campo	19
2.2.3 Identidades de Bianchi e a lei de conservação do tensor momento-energia	22

2.2.4	Limite Newtoniano	24
2.2.5	Testes do sistema solar: desvio espectral gravitacional	27
2.3	Analogia com a teoria de Brans-Dicke	29
2.4	Teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) e a teoria de Brans-Dicke	32
3	Espaço-tempo conformalmente plano e o formalismo dos referenciais de Weyl	35
3.1	Espaços conformalmente planos e referenciais de Weyl	36
3.2	Espaços conformalmente planos na relatividade geral. Transformações de referencial	38
3.3	Teoria da gravitação de Nordström	40
4	Convencionalismo e relatividade geral	43
4.1	Convencionalismo e relatividade geral	44
4.1.1	Representação convencionalista	44
4.2	Interpretação no formalismo dos referenciais	46
5	Uma reinterpretação geométrica da teoria de Brans-Dicke	50
5.1	Equações de campo.	51
5.1.1	Princípio variacional de Palatini	51
5.1.2	Variação com respeito a conexão independente	52
5.1.3	Lagrangiana da matéria. Variação com relação à métrica e ao campo escalar	53
5.2	Lei de conservação para a matéria	55
5.3	A ação de Brans-Dicke no formalismo dos referenciais de Weyl	56
	Conclusões	58
A	Relatividade geral e geometria de Riemann	60

A.1	Princípios da relatividade geral	61
A.2	Geometria Riemanniana	62
A.2.1	Equações de geodésicas	64
A.2.2	Tensor de Riemann	65
A.2.3	Tensor métrico. Geodésicas métricas	66
A.3	Equações de Einstein	69
A.4	Equações de campo a partir do princípio variacional de Hamilton	70
B	Teoria gravitacional de Brans-Dicke	74
B.1	Teoria de Brans-Dicke	74
B.2	Soluções cosmológicas na teoria de Brans-Dicke	77
B.3	Solução de O’Hanlon e Tupper	79
	Bibliografia	81

Introdução

A teoria da relatividade geral (RG), introduzida por Einstein no início do século XX , se destaca, além de sua eficiência em explicar e prever os fenômenos físicos relacionados a gravitação, pela extrema elegância matemática. Como hipótese básica, esta teoria admite que o espaço e o tempo estão ligados numa mesma estrutura espaço-temporal, e que no limite de gravidade nula se reduz ao espaço-tempo plano de Minkowski. Einstein se baseou nas idéias de Riemann, que acreditava que o Universo pode ser descrito como uma variedade curva, cuja curvatura poderia ser medida através de observações astronômicas. Einstein admitiu, também, que a distribuição de matéria determina, em cada ponto do espaço-tempo, a curvatura local desta variedade. De maneira geral, a idéia fundamental da relatividade geral pode ser resumida na seguinte forma: *o espaço-tempo é uma variedade M sobre a qual se define uma métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$, sendo que a curvatura de $g_{\mu\nu}$ está relacionada com a distribuição de matéria no espaço-tempo de acordo com certas equações diferenciais conhecidas como equações de Einstein* [4].

O sucesso da teoria proposta por Einstein levou à aceitação desta filosofia geometrodinâmica ao mesmo tempo que deu um status de realidade empírica ao carácter riemanniano do espaço-tempo. Porém, as propriedades que são teoricamente atribuídas ao espaço não são mensuráveis através de experimentos. Em outras palavras, a linguagem matemática usada na RG para descrever o espaço-tempo curvo, especificamente a geometria riemanniana, pode ser considerada apenas uma *ferramenta* para descrever o movimento das partículas ou dos raios de luz, mas, de fato, podemos convir que nenhuma restrição foi imposta *a priori* sobre

a natureza específica da variedade espaço-temporal na formulação da teoria [4].

Segundo Poincaré, a geometria do espaço-tempo é uma mera convenção que pode ser livremente escolhida pelo cientista [36]. Mais tarde, H. Reichenbach desenvolveu a mesma idéia em [2], onde assegura que a geometria do espaço-tempo na relatividade geral é convencional, no sentido de que a métrica do espaço-tempo pode ser escolhida livremente desde que seja postulada a presença de um *campo de força universal*. Contudo, durante muito tempo a teoria geral da relatividade tem sido inevitavelmente associada exclusivamente à geometria de Riemann.

Desde a aparição da teoria geral da relatividade, vários têm sido os intentos de criar uma teoria que unificasse a gravitação e o eletromagnetismo (para uma revisão sobre a historia das teorias de unificação no século XX , sugerimos a Ref. [1]). O surgimento desses trabalhos foi acompanhado pelo desenvolvimento de outros tipos de estruturas geométricas, geralmente chamadas de geometrias não-riemannianas. Entre elas, a geometria criada por H. Weyl é um dos primeiros exemplos.

Um dos principais propósitos deste trabalho é mostrar que a teoria da relatividade geral pode ser reformulada utilizando uma linguagem não-riemanniana, a saber, a geometria de Weyl integrável. Como veremos no capítulo 1, esta geometria pode ser considerada uma generalização da geometria de Riemann e é caracterizada essencialmente por dois elementos: um tensor métrico e um campo de 1-forma que desempenha um papel fundamental no transporte paralelo, permitindo aos vetores mudar também seu comprimento quando são transportados.

A nova formulação incorpora como um caso particular a teoria original de Einstein, enquanto em sua forma mais geral introduz naturalmente um campo escalar, o *campo escalar de Weyl*, como um elemento geométrico que toma parte diretamente na dinâmica da gravitação.

Outro ponto interessante que foi considerado para reformular a relatividade geral diz respeito à invariância da teoria sob certas transformações. Como sabemos, para desenvolver a sua teoria especial da relatividade (RE), Einstein abdicou da invariância por transformações de Galileu da teoria newtoniana, estabelecendo o *princípio de covariância especial*, segundo o qual todas as equações físicas devem permanecer invariantes sob transformações de Lorentz. Mais tarde, na construção de sua teoria relativística da gravitação, o *princípio de equivalência* desempenhou um papel fundamental. Einstein também adotou em sua teoria da gravitação o *princípio de covariância geral*, que estabelece como requisito que as equações da Física sejam

invariantes por transformações gerais de coordenadas.

Se admitimos a geometria de Weyl integrável como a geometria que descreve o espaço-tempo, um novo tipo de invariância surge naturalmente: a invariância por transformações de Weyl. A ação que permite obter as equações de Einstein a partir de um princípio variacional é generalizada de tal forma que ambos os elementos geométricos, tanto o tensor métrico quanto o campo de Weyl, intervêm em sua construção, tornando-a invariante sob transformações de Weyl. Estas transformações simultâneas para a métrica e o campo escalar introduzidas por Weyl no seu trabalho original de unificação levam à definição dos chamados *referenciais de Weyl* que, como será demonstrado, permitem recuperar a relatividade geral na sua convenção riemanniana num referencial particular. No capítulo 2, desenvolveremos estes conceitos mais profundamente e apresentaremos detalhadamente a mencionada reformulação da relatividade geral.

Por outro lado, descrever o espaço-tempo por uma geometria mais geral que acrescenta um campo escalar proporciona um enfoque diferente, o qual nos remete a certas teorias escalares-tensoriais. No capítulo 5, exploraremos este fato levando em consideração a teoria gravitacional de Brans-Dicke. Esta última incorpora um campo escalar motivada por uma exigência física: obter uma teoria da gravitação que satisfaça inteiramente o *princípio de Mach*. Não obstante, poderíamos indagar se seria possível atribuir uma origem geométrica a este campo. Quando a teoria proposta por Brans e Dicke é interpretada no formalismo dos referenciais de Weyl, o campo escalar adquire de maneira natural um significado geométrico, sendo identificado com o campo de Weyl que caracteriza o referencial. Em outras palavras, dentro do mesmo espírito com que Einstein desenvolveu sua teoria da gravitação, o campo de Brans-Dicke passa a desempenhar uma função como elemento geométrico constituinte da variedade espaço-temporal, e portanto deve participar como variável dinâmica das equações de campo da mesma maneira que a métrica o faz.

A presente tese está organizada da seguinte forma. Para começar, ao longo do capítulo 1, a geometria criada por H. Weyl será explorada de modo detalhado. Além do mais, serão discutidas de modo sucinto algumas teorias físicas da gravitação que adotam um espaço-tempo descrito por esta geometria em particular, por uma de suas variações, qual seja, a geometria de Weyl integrável. Como foi mencionado, o capítulo 2 será destinado à reformulação da relatividade geral no contexto dos referenciais de Weyl, enquanto que o capítulo 3 conterà um exemplo de como podem ser reinterpretados certos resultados a partir das transformações de referencial. Nesse capítulo, será considerada uma classe de espaços que desempenham um papel destacado dentro da Cosmologia, os espaços conformalmente

planos. Retomando os conceitos de geometria e convencionalismo, no capítulo 4 será analisado um trabalho publicado por I. W. Roxburgh e R. T. Tavakol, cujo título, em inglês, é *Conventionalism and General Relativity* [34]. Na citada publicação, os autores ilustram com um exemplo no contexto da relatividade geral uma aplicação concreta das idéias de Poincaré. Eis a conclusão desses autores: a geometria riemanniana representa, no caso da relatividade geral, uma linguagem conveniente, porém não única ou exclusiva. Comprovaremos que o trabalho de Roxburgh e Tavakol é completamente consistente com nossa reformulação da teoria de Einstein. Terminando esta apresentação, no capítulo 5 daremos um enfoque geométrico a teoria da gravitação alternativa mais satisfatória que se conhece, à teoria de Brans-Dicke. Finalizamos com o capítulo que contém nossas conclusões e observações de caráter geral.

CAPÍTULO 1

Geometria de Weyl

Pouco depois de Einstein formular a teoria da relatividade geral, que fornecia uma descrição geométrica da gravitação, Weyl propôs em 1918 uma teoria mais geral, que incluía uma descrição geométrica do eletromagnetismo [9][10]. Como sabemos, a relatividade geral supõe que o espaço-tempo é descrito por uma geometria riemanniana, caracterizada por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Neste caso, se um vetor é transportado paralelamente, sua direção pode variar, porém seu módulo é constante. A geometria concebida originalmente por Weyl é, além do mais, caracterizada por um campo de 1-forma σ_μ . Neste tipo de estrutura, um vetor pode variar não apenas de direção sob transporte paralelo, mas também de comprimento. Além disso, se um vetor é transportado paralelamente desde um ponto A até um ponto B , seu comprimento em B depende, em geral, do caminho entre os dois pontos, isto é, o comprimento é não-integrável. Weyl introduziu um padrão de comprimento arbitrário, isto é, um *gauge*, em cada ponto. Sob uma transformação de *gauge* o vetor σ_μ adiciona o gradiente duma função escalar. Weyl identificou σ_μ com o quadripotencial A_μ que descreve o campo electromagnético. Contudo, foi como consequência da não-integrabilidade da longitude que a teoria de Weyl foi rapidamente rejeitada pela maioria dos físicos.

Não obstante, o tipo de estrutura matemática criada por Weyl foi amplamente utilizada mais tarde. Em 1929, o próprio Weyl aplicou novamente sua idéia dos *gauges* no contexto da Mecânica Quântica [11]. Mais recentemente, Dirac retomou o formalismo de-

envolvido por Weyl em relação com sua hipótese dos grandes números [12] [13] (para uma revisão das teorias físicas nas áreas de Partículas Elementares e Cosmologia baseadas nesta geometria durante o século XX , sugerimos a Ref. [14]).

Partindo de conceitos da geometria Riemanniana e da generalização desses conceitos, serão apresentadas neste capítulo as noções básicas da geometria de Weyl, e particularmente de uma das variantes, explorada a partir da segunda metade do século passado, conhecida como *geometria de Weyl integrável* [15]-[18]. Por fim, serão comentadas algumas das teorias físicas que utilizaram esta generalização da geometria riemanniana para a descrição do espaço-tempo: o trabalho original desenvolvido por Weyl e as recentes teorias WIST.

1.1 Generalização de Weyl da geometria Riemanniana

Tomando como ponto de partida definições e resultados básicos da geometria Riemanniana introduzidos no apêndice A, nesta seção apresentaremos as correspondentes generalizações para a geometria de Weyl.

A seguir, é introduzido o conceito de variedade weylana através da seguinte definição.

Definição 1.1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , um tensor métrico g e um campo de 1-forma σ , chamado campo de Weyl, globalmente definido em M . Diz-se que ∇ é **Weyl-compatível** com g se satisfaz a seguinte condição:*

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (1.1)$$

sendo U , V e W campos vetoriais arbitrários.

Esta definição é claramente, uma generalização da idéia de compatibilidade riemanniana entre ∇ e a métrica g dada pela definição (A.2.4). Se a 1-forma σ é nula sobre M , recuperamos então a condição de compatibilidade riemanniana. Portanto, é natural supor que uma versão generalizada do teorema de Levi-Civita (A.2.1) seja válida se nos restringirmos as conexões simétricas.

Teorema 1.1.1. (*extensão do teorema de Levi-Civita*) *Em uma dada variedade diferenciável M , com uma métrica g e um campo diferenciável de 1-forma σ definido sobre M , existe uma única conexão afim ∇ tal que*

- ∇ é simétrica.

- ∇ é Weyl-compatível.

Para a demonstração deste teorema, é sugerida a leitura da Ref. [20].

Consideremos agora a equação (1.1) escrita em um sistema local de coordenadas $\{x^a\}$, $a = 1, \dots, n$. Um cálculo simples leva a uma expressão para as componentes da conexão afim dada completamente em termos das componentes de g e σ , a saber

$$\Gamma_{jk}^i = \{_{jk}^i\} - \frac{1}{2}g^{il} [g_{lj}\sigma_k + g_{lk}\sigma_j - g_{jk}\sigma_l], \quad (1.2)$$

onde $\{_{jk}^i\}$ são os símbolos de Christoffel dados por (A.8).

É interessante mencionar que a condição de não-metricidade de Weyl (1.1) implica que a derivada covariante do tensor métrico g na direção de um campo de vetores $V \in T(M)$ é diferente de zero (diferentemente de (A.20), em uma geometria riemanniana). Mais especificamente, sendo σ o campo de Weyl, temos

$$\nabla_i g_{jk} = \sigma_i g_{jk}. \quad (1.3)$$

As propriedades do transporte paralelo de Weyl ficam mais claras com a seguinte proposição.

Corolário 1.1.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , uma métrica g e um campo de 1-forma σ . Se ∇ é Weyl-compatível, então para cada curva suave $\alpha = \alpha(\lambda)$ e todo par de campos de vetores U e V transportados paralelamente ao longo de α , tem-se que*

$$\frac{d}{d\lambda} g(V, U) = \sigma\left(\frac{d}{d\lambda}\right) g(V, U), \quad (1.4)$$

onde $\frac{d}{d\lambda}$ denota o vetor tangente a α .

Integrando a equação (1.4) ao longo da curva α , desde $P_0 = \alpha(\lambda_0)$ até um ponto arbitrário $P = \alpha(\lambda)$, obtém-se

$$g(V(\lambda), U(\lambda)) = g(V(\lambda_0), U(\lambda_0)) e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma(d/d\rho) d\rho}. \quad (1.5)$$

Tomando $V = U$, e chamando $L(\lambda)$ o comprimento do vetor $V(\lambda)$ em $P = \alpha(\lambda)$, em um sistema de coordenadas locais $\{x^a\}$, a equação (1.4) se reduz a

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sigma_a}{2} \frac{dx^a}{d\lambda} L. \quad (1.6)$$

Consideremos agora o conjunto de todas as curvas fechadas $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow M$, isto é, com $\alpha(a) = \alpha(b)$. Fazendo uso de (1.5), chegamos à expressão

$$g(V(b), U(b)) = g(V(a), U(a)) e^{\int_a^b \sigma(d/d\lambda)d\lambda}. \quad (1.7)$$

Segue do teorema de Stokes que se σ é uma forma exata, isto é, se existe uma função escalar ϕ tal que $\sigma = d\phi$, então

$$\oint \sigma \left(\frac{d}{d\lambda} \right) d\lambda = 0, \quad (1.8)$$

para toda curva fechada. Neste caso, temos o que é conhecido na literatura como *variedade de Weyl integrável*. Voltando para a definição (1.2), se tomarmos $\sigma_\alpha = \phi_{,\alpha}$ vemos que a conexão afim de Weyl para o caso integrável em função do campo escalar ϕ é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \{\alpha_{\mu\nu}\} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta} \phi_{,\nu} + g_{\nu\beta} \phi_{,\mu} - g_{\mu\nu} \phi_{,\beta}), \quad (1.9)$$

Usando (1.9) pode-se escrever o tensor de Ricci $R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = R_{\mu\nu}$, em termos do tensor de Ricci $\tilde{R}_{\mu\nu}$ calculado em termos da conexão riemanniana:

$$R_{\mu\nu} = \tilde{R}_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\mu \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - \tilde{\nabla}_\alpha \phi^{,\alpha}), \quad (1.10)$$

com $\tilde{\nabla}$ denotando a derivada covariante construída com os símbolos de Christoffel. Contraindo a última expressão com o tensor métrico $g^{\mu\nu}$, obtém-se o escalar de curvatura

$$R = \tilde{R} - 3\tilde{\square}\phi + \frac{3}{2} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}, \quad (1.11)$$

onde novamente utilizou-se o símbolo til ($\sim$) para denotar os elementos da geometria de Riemann. Por último, o tensor de Einstein em uma variedade de Weyl integrável é dado por

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} - \tilde{\nabla}_\mu \phi^{,\nu} - \frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} - \tilde{\nabla}_\alpha \phi^{,\alpha} \right). \quad (1.12)$$

É simples comprovar, observando (1.10) e (1.12), que tanto o tensor de Ricci quanto o tensor de Einstein satisfazem, nesta classe de geometria, as mesmas propriedades da simetria que no caso riemanniano.

Levando em conta o apresentado até agora para o caso mais geral, uma variedade de Weyl é completamente caracterizada pelo conjunto de três elementos (M, g, σ) , que chamaremos *referencial de Weyl*. É importante mencionar que a condição de compatibilidade

weylana (1.4) permanece invariante quando vamos para outro referencial de Weyl $(M, \bar{g}, \bar{\sigma})$, aplicando as seguintes transformações simultâneas em g e σ :

$$\bar{g} = e^f g, \quad (1.13)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma + df, \quad (1.14)$$

onde f é uma função escalar definida sobre M . É claro que o mapeamento conforme (1.13) e a transformação de *gauge* (1.14) definem classes de equivalência no conjunto dos referenciais de Weyl. A invariância da condição de não-metricidade (1.4) sob o conjunto de transformações (1.13) e (1.14) foi percebida pela primeira vez por Weyl, em sua tentativa de unificar gravitação e electromagnetismo.

1.2 A teoria de unificação de Weyl

Na publicação de 1918 (a tradução desta publicação é dada em [11]), Weyl tentou formular uma teoria de campo unificada generalizando a geometria em que se baseia a teoria da relatividade geral de Einstein.

Para desenvolver sua teoria, Weyl partiu de uma ação dada de forma geral por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} W, \quad (1.15)$$

onde W depende das quantidades σ e $g_{\mu\nu}$, supostas variáveis independentes. As equações de campo são obtidas impondo que $\delta S = 0$. A densidade $\mathcal{W} = \sqrt{-g}W$ deve ser invariante por transformações de Weyl, dado que o objetivo é obter equações de campo invariantes de *gauge*. Sem especificar ainda a forma explícita de $\mathcal{W}$, suas derivadas funcionais são dadas por

$$\delta \int d^4x \mathcal{W} = \int (\mathcal{W}^\alpha \delta \sigma_\alpha + \mathcal{W}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta}), \quad (1.16)$$

onde todas as variações das variáveis de campo se anulam sobre a superfície de integração. Então, as equações de campo se escrevem

$$\mathcal{W}^\alpha = 0, \quad (1.17)$$

$$\mathcal{W}^{\alpha\beta} = 0. \quad (1.18)$$

Embora a forma de $\mathcal{W}$ deva ainda ser determinada, Weyl interpretou (1.17) como as equações do campo electromagnético e (1.18) como aquelas do campo gravitacional.

É interessante resaltar que a intenção de Weyl neste ponto não foi a de obter as equações de movimento via princípio de Hamilton, mas sim a de investigar as consequências de impor invariância local de *gauge* na ação S [21]. O próximo passo dele foi, então, exigir que as variações arbitrárias fossem transformações de *gauge* infinitesimais dependendo de uma função arbitrária $f(x)$, e que a ação fosse invariante sob esse tipo de transformação ($\delta S = 0$). Na teoria de Weyl de 1918, uma transformação de *gauge* consiste em uma transformação infinitesimal de escala

$$\delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \delta f, \quad (1.19)$$

combinada com uma transformação infinitesimal no campo electromagnético

$$\delta \sigma_\alpha = \partial_\alpha (\delta f). \quad (1.20)$$

Desta maneira, com $\delta S = 0$ e aplicando as transformações (1.19) e (1.20) em (1.16), obtém-se

$$\delta S = \int dx \{ \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \delta f + \mathcal{W}^\alpha \partial_\alpha (\delta f) \} = 0, \quad (1.21)$$

e consequentemente,

$$\int dx \{ \mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \delta f + \partial_\alpha (\mathcal{W}^\alpha \delta f) - (\partial_\alpha \mathcal{W}^\alpha) \delta f \} = 0. \quad (1.22)$$

Eliminando o termo de superfície, tem-se

$$\mathcal{W}^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \delta f = (\partial_\alpha \mathcal{W}^\alpha) \delta f, \quad (1.23)$$

e, portanto,

$$\mathcal{W}_\alpha^\alpha = \partial_\alpha \mathcal{W}^\alpha. \quad (1.24)$$

Esta equação expressa a dependência entre as equações de campo gravitacional e aquelas do campo electromagnético.

Com o objetivo de obter uma lei de conservação da carga eléctrica, Weyl supôs que as equações do campo gravitacional (1.18) são satisfeitas, isto é $\mathcal{W}^{\mu\nu} = 0$. Assim, (1.24) resulta

$$\partial_\alpha \mathcal{W}^\alpha = 0. \quad (1.25)$$

Neste ponto, é introduzida por Weyl a lagrangiana associada às equações inhomogêneas de Maxwell

$$\mathcal{W}^\alpha = \partial_\beta F^{\alpha\beta} - J^\alpha, \quad (1.26)$$

onde $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ sendo A^α o quadripotencial identificado com o campo de 1-forma σ^α e J^α denota a corrente elétrica. Então, tem-se

$$\partial_\alpha (\partial_\beta F^{\alpha\beta} - J^\alpha) = 0. \quad (1.27)$$

Dado que o campo tensorial $F^{\alpha\beta}$ é antissimétrico, $\partial_\alpha \partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0$, chega-se a

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0, \quad (1.28)$$

que é o que queria ser demonstrado.

Embora o formalismo matemático da teoria do eletromagnetismo de Weyl seja consistente e elegante, ele não prediz nenhum fenômeno físico novo que possa ser observado e sirva como confirmação da teoria. Pelo contrário, logo que Weyl apresentou a teoria de campo unificada, Einstein apontou sérias objeções [22]. Consideremos o caso de um campo gravitacional estático e radialmente simétrico na presença de um campo electromagnético, que também supomos ser independente do tempo e radialmente simétrico. Neste caso, o vetor de *gauge* σ_α terá apenas uma componente diferente de zero, σ_0 . Esta função dependerá unicamente da distância ao centro de simetria. Consideremos um relógio em um ponto fixo determinado que mede o tempo por meio de um processo periódico de duração τ_0 na coordenada temporal x^0 . O tempo físico para este relógio em repouso coincide com a quantidade $(1/c)L$, onde L é o comprimento do vetor introduzida em (1.6). De acordo com (1.7), após um tempo x^0 temos

$$L = L_0 \exp\left(\int_0^{x^0} \sigma_0 dx^0\right) = L_0 \exp(\sigma_0 x^0). \quad (1.29)$$

Podemos considerar L_0 como o período τ_0 do relógio, admitindo que no instante $x^0 = 0$ o intervalo medido pelo relógio coincide com o intervalo de tempo físico. Porém, depois de transcorrido um tempo x^0 a medida física de um período do relógio será

$$\tau = \tau_0 \exp(\sigma_0 x^0). \quad (1.30)$$

Em particular, se supomos dois relógios idênticos em dois pontos do campo com diferentes valores σ_0 , eles poderiam diferir gradativamente em suas frequências à medida que o tempo

avança. Podemos considerar este efeito em relógios atômicos e devemos esperar então, que as frequências das várias linhas espectrais dependam da localização e histórias passadas dos átomos. Mas é um fato conhecido que as linhas espectrais são bem nítidas e definidas; como consequência Einstein concluiu que a teoria de Weyl contradiz a experiência. A força do argumento de Einstein não parece tão poderosa atualmente, dado que agora é sabido que a física clássica não descreve fenômenos atômicos sem considerar certas modificações quânticas. De qualquer maneira, parece estranho que dois sistemas físicos idênticos no mesmo ponto do espaço devam ser diferentes por causa de suas histórias passadas [22].

1.3 Teoria da gravitação em um espaço-tempo de Weyl integrável (WIST)

Tomando como ponto de partida o trabalho realizado por Ehlers, Pirani e Schild [23], os quais desenvolveram uma teoria axiomática sobre a estrutura do espaço-tempo, apareceram, nos primeiros anos da década de 80, teorias da gravitação em que o espaço-tempo é descrito por uma geometria de Weyl integrável [18].

Teorias deste tipo apresentam a geometria de Weyl integrável como uma maneira natural de geometrizar um campo escalar sem massa, ao mesmo tempo que tenta descrever todos os fenômenos clássicos da relatividade geral [24].

Os dois objetos fundamentais desta classe de teoria, o campo tensorial métrico $g_{\mu\nu}$ e o campo escalar $\phi(x)$, são dinamicamente determinados pelas equações de campo obtidas de um princípio variacional, e a interação da gravitação com outros campos da natureza, agora descrita por $g_{\mu\nu}$ e $\phi(x)$, é inequivocamente obtida por meio da prescrição de que nas equações da relatividade especial dos campos não-geométricos as derivadas comuns são substituídas por derivadas covariantes de Weyl.

Finalmente, chamamos WIST (Weyl integrable space-time) um espaço de Weyl onde o campo de 1-forma σ que o define é um gradiente de um campo escalar, isto é, $\sigma_\alpha = \phi_{,\alpha}$. É simples ver que existem três escalares que podem ser construídos em um WIST: R , $\phi^\alpha \phi_{,\alpha}$ e $\phi^\alpha{}_{;\alpha}$, onde ϕ é o campo escalar de Weyl. A forma da ação então, pode ser escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ R - \omega \phi^\mu \phi_{,\mu} \}, \quad (1.31)$$

onde R é a curvatura weylana e ω é um parâmetro sem dimensão. Fazendo uso da expressão

(1.10) para o escalar de curvatura

$$R = \tilde{R} - 3\tilde{\Box}\phi + \frac{3}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}, \quad (1.32)$$

com $\tilde{\Box}\phi = \tilde{\nabla}_\alpha\phi^{,\alpha}$ denotando o operador d'Alembertiano calculado com os símbolos de Christoffel. Por outro lado, a variação de (1.31) com respeito à métrica e ao campo escalar ϕ , independentemente, leva a

$$\tilde{\Box}\phi = 0, \quad (1.33)$$

e

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}g_{\mu\nu} + \tilde{\nabla}_\mu\phi_{,\nu} + \left(\omega + \frac{1}{2}\right)\phi_{,\nu}\phi_{,\mu} - g_{\mu\nu}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{3}{4}\right)\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = 0, \quad (1.34)$$

isto é, em termos dos elementos de WIST

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \omega\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{\omega}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.35)$$

CAPÍTULO 2

Formulação da relatividade geral numa geometria de Weyl

No presente capítulo, veremos como reformular a teoria da Relatividade Geral na linguagem de uma geometria mais geral, a saber, a geometria de Weyl integrável. Neste novo contexto, buscaremos uma teoria que seja invariante sob o grupo de transformações de Weyl. Um ponto chave no desenvolvimento deste formalismo será construir uma ação invariante por este grupo de transformações [25]. É claro que neste cenário o campo gravitacional será descrito não apenas pelo tensor métrico, mas também pelo campo escalar. Mais tarde, serão obtidas as equações de campo que interpretaremos como sendo as de um tipo de teoria escalar-tensorial e descobriremos que em termos de elementos da geometria riemanniana, esta apresenta semelhanças com a teoria de Brans-Dicke. A seguir, examinaremos como diferentes descrições geométricas e físicas surgem quando efetuamos uma transformação de referencial, através das transformações de Weyl. Para finalizar, mostraremos como as chamadas teorias da gravitação em WIST são matematicamente equivalentes à teoria de Brans-Dicke quando consideramos um referencial particular.

2.1 Referenciais de Weyl

De acordo com o apresentado no capítulo 1, é possível caracterizar uma geometria de Weyl através de dois elementos: o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o campo escalar ϕ , de tal maneira que ambos estão relacionados pela condição de compatibilidade $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}$. Consideremos o conjunto (M, g, ϕ) , sendo M uma variedade diferencial, g a métrica definida sobre ela e ϕ o campo de Weyl associado. Chamaremos à triade (M, g, ϕ) , *referencial de Weyl*.

Consideremos agora as transformações de Weyl simultâneas para a métrica e o campo de Weyl dadas por (1.13) e (1.14). No caso de uma geometria integrável, tem-se que

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

$$\bar{\phi} = \phi + f, \quad (2.2)$$

onde $\sigma = d\phi$ e f é uma função escalar arbitrária. Estas transformações, sendo aplicadas a (M, g, ϕ) nos permitem obter um novo referencial de Weyl $(M, \bar{g}, \bar{\phi})$. Como caso particular, escolhamos o valor $f = -\phi$ para o fator conforme em (2.1) e (2.2), assim o referencial resultante será caracterizado por $(M, \bar{g} = e^{-\phi}g, \bar{\phi} = 0)$. Isto é, neste caso o campo escalar se anula e a condição de compatibilidade para a nova métrica pode ser escrita como

$$\nabla_\alpha(\bar{g}_{\mu\nu}) = 0. \quad (2.3)$$

Em outras palavras, recuperamos uma geometria de Riemann com uma métrica efetiva $e^{-\phi}g$. Chamamos este referencial, *referencial de Riemann*.

Como já foi comentado no capítulo anterior, alguns dos elementos geométricos permanecem invariantes sob uma transformação de referencial dada por (2.1) e (2.2). Como consequência da invariância da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ definida por (1.2), que em termos do campo escalar ϕ toma a forma

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta}\phi_{,\nu} + g_{\nu\beta}\phi_{,\mu} - g_{\mu\nu}\phi_{,\beta}), \quad (2.4)$$

quantidades como $R^\alpha_{\mu\beta\nu}$ e $R_{\mu\nu}$ permanecem invariantes por uma transformação de referencial.

Um resultado fundamental, consequência da invariância de (2.4), é que as equações de linhas geodésicas não mudarão de forma quando fazemos uma transformação de referencial.

Como é sabido, na teoria da relatividade geral é postulado que as partículas livres de

forças não-gravitacionais seguem geodésicas do tipo-tempo, enquanto os raios de luz viajam ao longo de geodésicas nulas [4] [6]. Em outras palavras, as geodésicas são curvas privilegiadas que permitem determinar o movimento das partículas e raios de luz. O fato de que neste novo formalismo elas são invariantes sob transformações de referencial e que a geometria de Riemann representa um caso particular da geometria desenvolvida por Weyl, sugere a possibilidade de expressar a relatividade geral num contexto geométrico mais geral, no qual as equações de campo também permaneçam invariantes sob transformações de Weyl.

2.2 A relatividade geral em uma geometria de Weyl integrável

A primeira e fundamental hipótese que adotaremos para atingir nosso objetivo de reformular a relatividade geral em um contexto geométrico mais geral, será considerar que o espaço-tempo é descrito por uma variedade de Weyl integrável.

Como sabemos, as leis da física na relatividade geral formulada por Einstein são governadas por dois princípios básicos: o princípio de covariância geral e a exigência de que as equações de campo devem se reduzir àquelas da relatividade especial no caso em que o campo gravitacional seja nulo [4]. Isto sugere a seguinte regra simples: nas equações válidas na relatividade especial, substitua a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e o operador derivada parcial ∂_α associado com $\eta_{\mu\nu}$ pelo operador derivada covariante $\tilde{\nabla}_\alpha$ associado com $g_{\mu\nu}$.

De maneira análoga, neste novo formalismo que envolve a relatividade geral em um contexto de geometria de Weyl integrável, é natural propor a seguinte prescrição: a métrica da relatividade especial é substituída por $e^{-\phi}g$ e consequentemente, a derivada ∂_α é substituída pela derivada covariante ∇_α calculada com a conexão de Weyl dada em (2.4). Para um referencial arbitrário, esta regra para o acoplamento de partículas e campos com a gravitação, estabelece o *acoplamento mínimo* com a métrica $e^{-\phi}g_{\mu\nu}$, e se reduz à regra usual da relatividade geral no caso do referencial de Riemann, isto é, quando $\phi = 0$.

Com o propósito de obter uma formulação da relatividade geral que seja invariante por transformações de Weyl, é postulada uma lagrangiana da forma ¹

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \{ R + 2e^{-\phi} \Lambda + \kappa e^{-\phi} L_m \}, \quad (2.5)$$

¹Em n dimensões, escreveríamos (2.5) como $S_n = \int d^n x \sqrt{-g} e^{(1-\frac{n}{2})\phi} \{ R + 2e^{-\phi} \Lambda + \kappa e^{-\phi} L_m \}$.

onde R é o escalar de curvatura de Weyl integrável, isto é, calculado com a conexão (2.4), L_m representa a densidade lagrangiana da matéria, κ é a constante de Einstein e Λ , a constante cosmológica.

Em (2.5), L_m depende de ϕ , $g_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria, denotados por ξ . De acordo com a regra proposta, se a lagrangiana dos campos de matéria na relatividade especial é dada por $L_m^{(re)}(\eta_{\mu\nu}, \xi, \partial_\alpha \xi)$, então teremos que $L_m(g_{\mu\nu}, \phi, \xi, \nabla_\alpha \xi) \equiv L_m^{(re)}(e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \xi, \nabla_\alpha \xi)$.

É simples provar a invariância de (2.5). Fazendo uso das transformações (2.1) e (2.2), vemos que $\sqrt{-g} = e^{-2f} \sqrt{-\bar{g}}$, e como resultado direto da invariância da conexão, $R^\alpha_{\mu\nu\beta} = \bar{R}^\alpha_{\mu\nu\beta}$ y $R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$. Por outro lado, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ implica $R = e^f \bar{R}$. Finalmente, a invariância do termo associado aos campos de matéria é assegurada pela forma em que foi obtido a partir da relatividade especial via $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu}$ e $\partial_\alpha \rightarrow \nabla_\alpha$.

2.2.1 O postulado das geodésicas

Nesta seção nos ocuparemos do movimento das partículas e raios de luz, tendo como objetivo estender o postulado das geodésicas da teoria da relatividade geral de Einstein, sob a hipótese de que seja invariante por transformações de Weyl. Tendo em conta a regra que foi estabelecida a partir da relatividade especial para construir nosso formalismo, $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu}$, torna-se simples a generalização: se $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ é uma curva tipo tempo parametrizada, então esta curva corresponde a linha de universo de uma partícula livre de qualquer força não-gravitacional que se move desde um ponto $x^\mu(\lambda_0)$ até um ponto $x^\mu(\lambda_1)$ se, e somente se, extremiza o funcional

$$\Delta\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\phi/2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.6)$$

Estendendo a hipótese do relógio da relatividade geral para um referencial de Weyl arbitrário, postulamos que $\Delta\tau$ é o tempo próprio medido por um relógio que se move junto com a partícula. É claro a partir de (2.6), que esta definição do tempo próprio é invariante por transformações de Weyl e se reduz à expressão usual na relatividade geral quando $\phi = 0$.

Consideremos agora a variação do funcional (2.6). Temos

$$\delta(\Delta\tau) = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} 2e^{-\phi} \left(e^{-\phi} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{-1/2} \times \quad (2.7)$$

$$\times \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} g_{\sigma\beta} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\alpha + g_{\sigma\beta} \frac{d\delta x^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) d\lambda.$$

Sem perda da generalidade, suporemos neste ponto que a curva original é parametrizada segundo

$$e^{-\phi} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (2.8)$$

É interessante notar que (2.8) permite identificar o parâmetro λ como sendo o tempo próprio τ . Com essa escolha da parametrização, extremizar o funcional (2.6) implica que

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\phi} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} g_{\sigma\beta} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\alpha + g_{\sigma\beta} \frac{d\delta x^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) d\lambda = 0. \quad (2.9)$$

Integrando por partes o último termo de (2.9), temos que

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\phi} \left\{ -g_{\sigma\beta} \frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} - \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right\} \delta x^\alpha d\lambda \\ & - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} e^{-\phi} \left\{ \frac{1}{2} \phi_{,\alpha} g_{\sigma\beta} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\alpha + g_{\sigma\beta} \phi_{,\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \delta x^\sigma \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Fazendo uso da expressão para os símbolos de Christoffel dada em (A.8), é evidente que a primeira linha em (2.10) dá como resultado a equação de geodésica na geometria riemanniana. Levando em conta a contribuição da segunda das integrais, obtemos

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.11)$$

onde $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ é a conexão de Weyl (2.4). Desta maneira, (2.11) representa a equação de geodésica afim em um espaço-tempo de Weyl integrável.

Como conclusão, a extensão do postulado das geodésicas requer que o funcional (2.6) seja um extremo, o que é equivalente a postular que as partículas sigam geodésicas afins calculadas com a conexão de Weyl. Uma consequência da invariância das componentes de $\Gamma_{\mu\sigma}^\nu$ e do tempo próprio definido por (2.6) quando vamos de um referencial de Weyl para um outro referencial por meio das transformações de Weyl, é que as equações (2.11) resultam evidentemente invariantes por esse conjunto de transformações.

Como é conhecido, o postulado das geodésicas não apenas estabelece o movimento das partículas, mas também o de raios de luz no espaço-tempo. Dado que a trajetória dos raios de luz é representada por curvas nulas, não é possível descrevê-las usando como parâmetro o

tempo próprio. De fato, os raios de luz devem seguir geodésicas afins nulas, que não podem ser definidas mediante o funcional (2.6), porém são caracterizadas pelo seu comportamento sob transporte paralelo. Assim, estendemos este postulado admitindo simplesmente que os raios de luz seguem geodésicas afins nulas de Weyl. É sabido que as geodésicas nulas são preservadas, a menos de uma reparametrização da curva, sob transformações conformes. No caso das transformações (2.1) e (2.2), as geodésicas nulas também permanecem invariantes, novamente como consequência da invariância da conexão afim. Como resultado, a estrutura causal do espaço-tempo permanece invariante nos diferentes referenciais conectados por transformações de Weyl.

2.2.2 Equações de campo

Nesta seção, o objetivo será obter as equações de campo a partir de um princípio variacional, começando com (2.5). Admitindo a hipótese de que espaço-tempo é descrito por uma geometria de Weyl integrável, é razoável considerar que a ação (2.5) varia não apenas com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$, mas também com respeito ao campo geométrico ϕ .

Por conveniência, consideremos novamente a ação (2.5), mas agora expressa em termos riemannianos. Fazendo uso da equação que relaciona a curvatura escalar nas duas geometrias, temos para um espaço n -dimensional

$$R = \tilde{R} - (n-1)\tilde{\square}\phi + \frac{(n-1)(n-2)}{4}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}, \quad (2.12)$$

onde n denota a dimensão do espaço, $\tilde{\square}\phi = \phi^{\cdot\alpha}_{;\alpha}$ é o operador d'Alembertiano e til ($\sim$) se refere a elementos na geometria de Riemann, isto é, calculados a partir dos símbolos de Christoffel. Assim, a ação (2.5) é escrita como

$$S = \int dx \sqrt{-g} e^{-\phi} \left\{ \tilde{R} + \frac{3}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{\cdot\alpha} - 3\phi^{\cdot\alpha}_{;\alpha} + 2e^{-\phi}\Lambda + e^{-\phi}\kappa L_m \right\}. \quad (2.13)$$

Usando o teorema de Gauss para eliminar divergências, podemos reescrever a equação acima como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \left\{ \tilde{R} + \omega \phi_{,\alpha}\phi^{\cdot\alpha} + 2e^{-\phi}\Lambda + \kappa e^{-\phi} L_m \right\}, \quad (2.14)$$

sendo $\omega = -\frac{3}{2}$.

Efetuando a mudança de variável $\psi = e^{-\phi}$ em (2.14) resulta a seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \psi \tilde{R} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha}}{\psi} + 2\psi^2 \Lambda + \kappa \psi^2 L_m \right\}. \quad (2.15)$$

Tendo em vista que já foi estabelecida a forma mais conveniente para a ação, consideremos primeiramente a variação de (2.15) em relação a $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \delta_g S = \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) \left(\psi \tilde{R} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\alpha} \psi^{,\alpha}}{\psi} + 2\psi^2 \Lambda \right) + \\ \int d^4x \sqrt{-g} \left(\psi \delta \tilde{R} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\mu} \psi_{,\nu}}{\psi} \delta g^{\mu\nu} \right) + \delta_g \left(\kappa \int d^4x \sqrt{-g} \psi^2 L_m \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Neste ponto é oportuno analisar mais detalhadamente o último termo do lado direito da equação (2.16), correspondente à ação dos campos de matéria. Como foi comentado no início deste capítulo, em nossa formulação da relatividade geral seguimos a prescrição $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu}$, ou em termos do campo auxiliar ψ , $\eta_{\mu\nu} \rightarrow \psi^{-1} g_{\mu\nu}$, o que nos leva a definir um tensor momento-energía pela equação

$$\delta S_m = \kappa \int d^4x \sqrt{-\gamma} T_{\mu\nu} \delta \gamma^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde, por simplicidade, usamos a métrica efetiva $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} = \psi^{-1} g_{\mu\nu}$. Num referencial arbitrário, em termos de $g_{\mu\nu}$ e ψ , temos

$$\begin{aligned} \delta_g S_m &= \delta_g \left(\kappa \int d^4x \sqrt{-g} \psi^2 L_m \right) = \kappa \int d^4x \delta_g (\sqrt{-g} L_m) \\ &= \kappa \int d^4x \sqrt{-\gamma} T_{\mu\nu} \delta \gamma^{\mu\nu} \\ &= \kappa \int d^4x \sqrt{-g} \psi T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Retomando a equação (2.16) e levando em conta (2.18), assim como fazendo uso das

²Vemos claramente da definição (2.17) que $T_{\mu\nu}$ é invariante por transformações de referencial. Desta maneira, embora o tensor momento-energia seja definido usando a métrica efetiva, temos que $T_{\mu\nu}(\gamma, 0) = T_{\mu\nu}(g, \phi)$.

identidades $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$ e $\delta\tilde{R} = \delta g^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta\tilde{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}\delta_g S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(-\frac{1}{2}\psi\tilde{R}g_{\mu\nu} + \psi\tilde{R}_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} + \psi g^{\mu\nu} \delta\tilde{R}_{\mu\nu} \right] \\ &+ \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{3}{4}g_{\mu\nu} \frac{\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}}{\psi} - \psi^2 \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}}{\psi} \right] \delta g^{\mu\nu} \\ &+ \kappa \int d^4x \sqrt{-g} \psi T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Considerando a equação de Palatini³

$$\delta\tilde{R}_{\mu\nu} = (\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{;\nu} - (\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{;\lambda}, \quad (2.20)$$

junto com a condição $\delta_g S = 0$, após alguns cálculos chegamos a

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{\psi_{;\alpha}{}^{\alpha}}{\psi} g_{\mu\nu} - \frac{\psi_{;\mu;\nu}}{\psi} - \frac{3}{4} \frac{\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}}{\psi^2} g_{\mu\nu} + \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\mu}\psi_{,\nu}}{\psi^2} + \psi \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.21)$$

A equação de campo (2.21) escrita como função do campo escalar original ϕ , o campo escalar de Weyl, torna-se

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{4} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - g_{\mu\nu} \phi^{;\alpha}{}_{;\alpha} + \frac{1}{2} \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \phi_{;\mu;\nu} + e^{-\phi} \Lambda g_{\mu\nu} - \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Finalmente, consideremos a variação de (2.14) com relação ao campo escalar de Weyl ou, de maneira equivalente, a variação de (2.15) com relação ao campo auxiliar ψ :

$$\delta_\psi S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \psi\tilde{R} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}}{\psi} + 2\psi^2 \Lambda \right\} + \delta_\psi S_m. \quad (2.23)$$

A variação da ação da matéria toma a forma

$$\begin{aligned}\int d^4x \delta_\psi (\sqrt{-g} \psi^2 L_m) &= \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta\psi} \delta\psi \\ &= - \int d^4x g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \delta\psi,\end{aligned}\quad (2.24)$$

com o que $\delta_\psi S = 0$ leva a

$$\tilde{R} + 3 \frac{\psi_{;\alpha}{}^{\alpha}}{\psi} - \frac{3}{2} \frac{\psi_{,\alpha}\psi^{,\alpha}}{\psi^2} + 4\psi\Lambda - \kappa T = 0, \quad (2.25)$$

³É claro que estamos utilizando um sistema de coordenadas geodésico, em que se pode anular a conexão afim [6][22].

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ denota o traço do tensor momento-energia em um referencial de Weyl caracterizado por $g_{\mu\nu}$ e ϕ . Como uma função do campo de Weyl, a última equação se escreve

$$\tilde{R} + \frac{3}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - 3\phi_{;\alpha}^{\alpha} + 4e^{-\phi}\Lambda - \kappa T = 0. \quad (2.26)$$

As equações (2.22) e (2.26) são as equações de campo da teoria da relatividade geral formulada em uma geometria de Weyl integrável, em um referencial de Weyl arbitrário caracterizado por $g_{\mu\nu}$ e ϕ , e desempenham o papel das equações de Einstein da teoria da relatividade geral na formulação riemanniana original. De fato, as equações se reduzem àsquelas da RG no referencial de Riemann.

Por último, vale a pena notar que (2.26) é o traço da equação (2.22), pelo que as equações não são independentes. Isto é consistente com o fato de que existe absoluta liberdade na escolha de um referencial de Weyl arbitrário.

2.2.3 Identidades de Bianchi e a lei de conservação do tensor momento-energia

Para começar, consideremos o tensor de curvatura de Riemann em uma geometria de Weyl integrável apresentado na seção (1.1) e definido por

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\sigma,\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}, \quad (2.27)$$

onde $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ são as componentes da conexão simétrica de Weyl. Como já mencionado, (2.27) possui as mesmas propriedades de simetria que o tensor de curvatura em uma geometria riemanniana. Como consequência disto, e do fato de a conexão (2.5) ser simétrica, é possível demonstrar de maneira completamente análoga ao caso riemanniano [6][7] que (2.27) satisfaz a identidade de Bianchi

$$\nabla_{\lambda}R^{\alpha}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_{\nu}R^{\alpha}_{\mu\lambda\sigma} + \nabla_{\sigma}R^{\alpha}_{\mu\lambda\nu} = 0, \quad (2.28)$$

sendo ∇_{μ} a derivada covariante weylana. Contraindo os índices em (2.28), obtemos

$$\nabla_{\lambda}R^{\nu}_{\mu\nu\sigma} + \nabla_{\nu}R^{\nu}_{\mu\lambda\sigma} + \nabla_{\sigma}R^{\nu}_{\mu\lambda\nu} = 0. \quad (2.29)$$

Tomando em consideração a definição do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}$, aplicando as propriedades do tensor de Riemann e a condição de não-metricidade para a geometria de

Weyl integrável, $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \phi_{,\alpha} g_{\mu\nu}$, finalmente temos

$$\nabla_\sigma G^\sigma{}_\nu = -\phi_{,\sigma} G^\sigma{}_\nu. \quad (2.30)$$

Voltemos agora nossa atenção para a equação de campo (2.22), escrita integralmente em função de elementos da geometria riemanniana. Tendo em conta que o tensor de Einstein em um espaço-tempo de Weyl quadri-dimensional é dado por

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} - \phi_{,\mu;\nu} - \frac{1}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{4}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - \square\phi \right), \quad (2.31)$$

a equação (2.22) pode ser reescrita como

$$G_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} \Lambda - \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

ou de igual maneira, multiplicando pelo tensor métrico $g^{\mu\lambda}$,

$$G^\lambda{}_\nu = e^{-\phi} \delta^\lambda{}_\nu \Lambda - \kappa T^\lambda{}_\nu. \quad (2.33)$$

Tomando a divergência covariante de (2.33), fazendo uso de (2.31) e novamente da equação (2.33), chega-se a

$$\nabla_\lambda T^\lambda{}_\nu = -\phi_{,\lambda} T^\lambda{}_\nu, \quad (2.34)$$

que por sua vez implica

$$\nabla_\lambda (e^\phi T^\lambda{}_\nu) = 0. \quad (2.35)$$

As equações (2.31) e (2.35) representam uma generalização dos resultados da teoria da relatividade geral, e obviamente, se reduzem a estes no referencial de Riemann, onde a derivada covariante de Weyl se transforma na derivada covariante calculada com os símbolos de Christoffel e o campo de Weyl ϕ se anula, resultando $G_{\mu\nu} \equiv \tilde{G}_{\mu\nu}$ em concordância com (2.31).

De acordo com o que foi apresentado até agora, as equações de campo implicam a relação $\nabla_\lambda (e^\phi T^\lambda{}_\nu) = 0$. É interessante notar que da mesma maneira que na teoria de Einstein, (2.35) garante que o movimento de partículas de poeira satisfaçam a equação de geodésicas na geometria de Weyl. Para demonstrá-lo, consideremos o tensor momento-energia

correspondente a um fluido sem pressão (poeira), escrito na forma

$$T^\lambda{}_\nu = g^{\lambda\mu} T_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} (\rho u_\mu u_\nu), \quad (2.36)$$

sendo ρ a densidade de energia e $u^\alpha = \gamma^{\alpha\beta} u_\beta$, a quadri-velocidade das partículas do fluido. Fixamos a condição de normalização (2.8)

$$e^{-\phi} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 1. \quad (2.37)$$

Tomando a derivada covariante weylana na última expressão, e levando em conta a condição de não-metricidade, tem-se que

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_{\nu;\alpha} = e^{-\phi} u^\nu u_{\nu;\alpha} = 0 \Rightarrow u^\nu u_{\nu;\alpha} = 0. \quad (2.38)$$

Por outro lado, calculando a derivada covariante de Weyl da expressão (2.36) e considerando (2.38), obtém-se que

$$(\rho g^{\lambda\mu} u_\mu)_{;\lambda} u_\nu + \rho g^{\lambda\mu} u_\mu u_{\nu;\lambda} = -\phi_\lambda \rho g^{\lambda\mu} u_\mu u_\nu. \quad (2.39)$$

Contraindo (2.39) com u_ν , fazendo uso de (2.38) e substituindo o resultado obtido novamente em (2.39), chega-se a

$$u^\lambda u_{\nu;\lambda} = 0, \quad (2.40)$$

que representa a equação de geodésicas. Em outras palavras, as equações de campo (2.22) implicam por si mesmas o *postulado das geodésicas estendido*, segundo o qual as linhas de universo das partículas de prova são geodésicas do espaço-tempo de Weyl integrável.

2.2.4 Limite Newtoniano

Na presente seção, mostraremos que neste formalismo mais geral a relatividade geral, como era de esperar, se reduz à teoria newtoniana da gravitação quando a gravidade é fraca e o movimento relativo das fontes é muito mais lento que a velocidade da luz c . Diz-se que uma teoria da gravitação tem limite newtoniano quando é possível deduzir a segunda lei de Newton partindo das equações de geodésicas e a equação de Poisson, das equações de campo. A seguir analisaremos o limite newtoniano da relatividade geral formulada em um referencial de Weyl arbitrário.

Dado que a geometria do espaço-tempo que descreve a física newtoniana é euclidiana,

um campo gravitacional fraco em uma teoria geométrica da gravitação se manifesta como fenômeno métrico através de uma pequena perturbação da métrica de Minkowski. Consideremos um tensor métrico da forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (2.41)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, ϵ é um parâmetro pequeno e o termo $\epsilon h_{\mu\nu}$ corresponde a uma pequena perturbação estática devido à presença de matéria. Admitimos o mesmo tipo de aproximação para o campo escalar ϕ , que será considerado independente do tempo e da ordem de ϵ , isto é, escreveremos $\phi = \epsilon \xi$, sendo ξ uma função finita. Por outro lado, consideraremos que a velocidade da partícula $v^j = \frac{dx^j}{dt}$ (sendo $j = 1, 2, 3$) ao longo da linha geodésica é muito menor que a velocidade da luz, $\frac{v}{c} \ll 1$, e em consequência, apenas levaremos em conta apenas os termos de primeira ordem em ϵ e $\frac{v}{c}$.

O elemento de linha (2.41) pode ser escrito como

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + \epsilon h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.42)$$

onde $x^0 = ct$. A partir de (2.42), em nossa aproximação resulta que

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \simeq (1 + \epsilon h_{00})c^2. \quad (2.43)$$

Extraindo a raiz quadrada, adotando $c = 1$ e tomando os termos de menor ordem em ϵ , temos que

$$\frac{ds}{dt} \simeq 1, \quad (2.44)$$

do que se deduz que $s \simeq t + cte$.

Por outro lado, consideremos agora a equação das geodésicas

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (2.45)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ representa as componentes da conexão afim de Weyl dada em (2.5) e que na mesma aproximação se escreve

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu &\simeq \frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) - \frac{1}{2}\epsilon g^{\mu\nu}(\eta_{\nu\alpha}\xi_{,\beta} + \eta_{\nu\beta}\xi_{,\alpha} - \eta_{\alpha\beta}\xi_{,\nu}) \\ &\simeq \frac{\epsilon}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\nu\alpha,\beta} + h_{\nu\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu} - \eta_{\nu\alpha}\xi_{,\beta} - \eta_{\nu\beta}\xi_{,\alpha} + \eta_{\alpha\beta}\xi_{,\nu}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

É simples comprovar que as componentes da conexão afim cujos índices covariantes são do tipo espacial resultam em termos quadráticos em v ,

$$\Gamma_{ij}^\mu \sim \epsilon v^i v^j, \quad (2.47)$$

o mesmo acontecendo com as componentes do tipo tempo-espço. Como consequência, usando a última das expressões em (2.46) se chega a

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{\epsilon}{2} \eta^{\mu\nu} (\xi_{,\nu} - h_{00,\nu}). \quad (2.48)$$

Então, a equação de geodésicas (2.45) se escreve

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0, \quad (2.49)$$

e levando em consideração (2.44), resulta

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + c^2 \Gamma_{00}^\mu = 0. \quad (2.50)$$

Para $\mu = 0$, obtém-se a equação trivial $\frac{d^2 x^0}{dt^2} = 0$, enquanto que para $\mu = j = 1, 2, 3$ se chega a

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} = -c^2 \frac{\epsilon}{2} \partial_j (\xi - h_{00}), \quad (2.51)$$

ou na notação vetorial,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -c^2 \frac{\epsilon}{2} \vec{\nabla} (h_{00} - \xi), \quad (2.52)$$

que é a equação de movimento newtoniana em um campo gravitacional representado por $U = \frac{\epsilon c^2}{2} (h_{00} - \xi)$. É interessante evidenciar que o campo de Weyl está presente nesta última equação através de ξ , juntamente com a componente h_{00} do tensor métrico.

Vejamos agora o limite newtoniano nas equações de campo. Considerando nula a constante cosmológica Λ e combinando as equações (2.22) e (2.26), obtém-se

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \phi_{,\mu;\nu} - \kappa T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\Box \phi - \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + \kappa T). \quad (2.53)$$

Considerando novamente nossa aproximação do campo fraco, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}$ e $\phi = \epsilon \xi$ independente do tempo, desprezando os termos de segunda ordem em ϵ e v^j , (2.53) fica dada

por

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = \phi_{,\mu;\nu} - \kappa T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\nabla^2(\phi) + \frac{1}{2}\kappa g_{\mu\nu}T. \quad (2.54)$$

Partindo da definição do tensor de Ricci riemanniano, admitindo $\mu = \nu = 0$, encontramos que

$$\tilde{R}_{00} = -\Gamma_{00,\alpha}^\alpha = \frac{1}{2}\nabla^2(\epsilon h_{00}), \quad (2.55)$$

com o que, a partir de (2.54), finalmente temos

$$\frac{1}{2}\nabla^2(\epsilon h_{00} - \phi) = \kappa(T_{00} - \frac{1}{2}(1 + \epsilon h_{00})T). \quad (2.56)$$

Consideremos uma distribuição de matéria correspondendo a um fluido perfeito com baixa densidade de energia $\rho \sim \epsilon$, movendo-se com velocidade não-relativística. De acordo com a regra apresentada para o novo formalismo na seção (2.2.1), partindo da relatividade especial, o tensor momento-energia em um referencial de Weyl arbitrário se escreve como

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)e^{-2\phi}v_\mu v_\nu - pe^{-\phi}g_{\mu\nu}, \quad (2.57)$$

onde $v_\mu = \gamma_{\mu\sigma}v^\sigma$. É importante notar que as quantidades ρ , p e $v^\sigma = \frac{dx^\sigma}{d\tau}$ da relatividade especial permanecem invariantes, o que garante a invariância do tensor momento-energia por transformações de referencial. Na aproximação de campo fraco que estamos considerando, é válido assumir $e^\phi \simeq 1 - \epsilon\xi$ e em um regime não-relativista, p resulta desprezível frente a ρ . Isto implica que na primeira ordem em ϵ temos

$$T_{00} = T \simeq \rho c^2, \quad (2.58)$$

onde tomamos $\rho\epsilon \ll 1$. Finalmente, usando esta última expressão na equação (2.56) e $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, resulta

$$\nabla^2\left(\frac{\epsilon c^2}{2}(h_{00} - \xi)\right) = 4\pi G\rho, \quad (2.59)$$

que é a equação de Poisson para o campo gravitacional $U = \frac{\epsilon c^2}{2}(h_{00} - \xi)$ definido anteriormente.

2.2.5 Testes do sistema solar: desvio espectral gravitacional

Nesta seção, será obtida a fórmula do desvio espectral gravitacional para o caso especial de um espaço-tempo estático em um referencial de Weyl arbitrário $(M, g_{\mu\nu}, \phi)$.

Suponhamos então dois observadores, cada um deles com um relógio atômico ideal, situados nos pontos do espaço $(r_E, \theta_E, \varphi_E)$ e $(r_R, \theta_R, \varphi_R)$ respectivamente. Consideremos que o primeiro observador possui um sistema atômico que emite radiação ao segundo observador (receptor). Denominando t_E e t_R as coordenadas temporais de emissão e recepção, o sinal luminoso que em um referencial de Weyl corresponde a uma geodésica afim nula, conecta os eventos $(t_E, r_E, \theta_E, \varphi_E)$ e $(t_R, r_R, \theta_R, \varphi_R)$. Seja λ um parâmetro afim ao longo desta geodésica com $\lambda = \lambda_E$ no evento de emissão e $\lambda = \lambda_R$ no evento de recepção. Dado que consideramos uma geodésica nula, para o elemento de linha temos que

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{00}(r, \theta, \varphi) dt^2 - g_{jk}(r, \theta, \varphi) dx^j dx^k &= 0 \\ \Rightarrow g_{00}(r, \theta, \varphi) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 &= g_{jk}(r, \theta, \varphi) \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Reescrevendo (2.60) da forma

$$\frac{dt}{d\lambda} = \left(\frac{g_{jk}(r, \theta, \varphi)}{g_{00}(r, \theta, \varphi)} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right)^{1/2}, \quad (2.61)$$

e integrando entre $\lambda = \lambda_E$ e $\lambda = \lambda_R$ obtém-se

$$t_R - t_E = \int_{\lambda_E}^{\lambda_R} \left(\frac{g_{jk}(r, \theta, \varphi)}{g_{00}(r, \theta, \varphi)} \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.62)$$

Como resultado de supor um espaço estático e que o emissor e o receptor estão situados em posições fixas do espaço, temos que $t_R - t_E$ possui o mesmo valor para todos os sinais emitidos. Isto significa que para qualquer par de sinais enviados vale a igualdade

$$t_R^{(1)} - t_E^{(1)} = t_R^{(2)} - t_E^{(2)}, \quad (2.63)$$

ou, de maneira equivalente, que a diferença temporal Δt no observador é igual à diferença no receptor

$$\Delta t_E = t_E^{(2)} - t_E^{(1)} = t_R^{(2)} - t_R^{(1)} = \Delta t_R. \quad (2.64)$$

Por outro lado, consideremos o tempo próprio em um referencial de Weyl arbitrário, definido em (2.6)

$$\Delta\tau = \int_{\lambda_1}^{\lambda_0} e^{-\phi/2} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2.65)$$

Levando em conta essa definição e a equação (2.62), o tempo próprio medido pelos relógios

dos observadores que emitem e recebem o sinal luminoso é dado respectivamente por

$$\Delta\tau_E = e^{-\phi_E/2} \sqrt{g_{00}(r_E, \theta_E, \varphi_E)} \Delta t_E, \quad (2.66)$$

$$\Delta\tau_R = e^{-\phi_R/2} \sqrt{g_{00}(r_R, \theta_R, \varphi_R)} \Delta t_R, \quad (2.67)$$

sendo $\phi_E = \phi(r_E, \theta_E, \varphi_E)$ y $\phi_R = \phi(r_R, \theta_R, \varphi_R)$. Considerando então (2.64), temos que

$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \frac{e^{-\phi_R/2} \sqrt{g_{00}(r_R, \theta_R, \varphi_R)}}{e^{-\phi_E/2} \sqrt{g_{00}(r_E, \theta_E, \varphi_E)}}. \quad (2.68)$$

Suponhamos que n ondas foram emitidas no tempo próprio $\Delta\tau_E$, isto é, com uma frequência $\nu_E = \frac{n}{\Delta\tau_E}$. Por outro lado, o observador situado em $(r_R, \theta_R, \varphi_R)$ receberá n sinais no tempo próprio $\Delta\tau_R$, medindo uma frequência $\nu_R = \frac{n}{\Delta\tau_R}$. Finalmente, teremos

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{e^{-\phi_E/2} \sqrt{g_{00}(r_E, \theta_E, \varphi_E)}}{e^{-\phi_R/2} \sqrt{g_{00}(r_R, \theta_R, \varphi_R)}}. \quad (2.69)$$

É evidente da equação (2.69) que $\nu_R \neq \nu_E$. Em outras palavras, a frequência medida pelo observador é diferente daquela medida no local onde se encontra o emissor. Isto resulta no efeito conhecido como *desvio espectral* cuja expressão em um referencial de Weyl arbitrário é dada por (2.69). É interessante notar que a equação (2.69) é invariante sob transformações de calibre e que se reduz à expressão para o desvio espectral gravitacional da relatividade geral em um referencial de Riemann, isto é, fazendo-se $\phi = \text{constante}$.

2.3 Analogia com a teoria de Brans-Dicke

É interessante notar que (2.15) e as equações de campo (2.21) e (2.25) nos levam a concluir que a teoria da relatividade geral, nesta nova formulação, apresenta semelhanças com a teoria de Brans-Dicke (BD) no vazio, na ausência do potencial escalar V e da constante cosmológica Λ (ver Apêndice B). De fato, as equações de campo são equivalentes para um valor determinado do parâmetro, a saber $\omega = -\frac{3}{2}$, sempre que o campo escalar da teoria de BD seja identificado com o campo auxiliar $\psi = e^{-\phi}$. Nossa intenção nesta seção é explorar esta analogia, embora seja preciso destacar que tal analogia não resulta completa, já que ainda existe uma diferença com relação à natureza das geodésicas que determinam o movimento de partículas em cada uma das teorias. Na teoria de BD é postulado que as geodésicas são

riemannianas, enquanto que no caso da RG formulada na geometria de Weyl integrável, o movimento das partículas obedece a geodésicas calculadas com a conexão de Weyl.

Contudo, as soluções obtidas para a teoria de Brans-Dicke, quando $\omega = -\frac{3}{2}$, podem ser reinterpretadas nesta nova formulação. Começamos estabelecendo uma correspondência entre o campo escalar φ da teoria original de BD e o campo auxiliar ψ definido na subseção (2.2.2) como uma função do campo escalar de Weyl, $\psi = e^{-\phi}$, em um referencial de Weyl arbitrário denotado por $(M, g_{\mu\nu}, \phi)$.

Como exemplo, vejamos a solução de O'Hanlon-Tupper [47]. Para $\omega = -\frac{3}{2}$, o fator de escala e o campo escalar de BD são dados por

$$a(t) = a_0 t, \quad (2.70)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 t^{-2}. \quad (2.71)$$

Neste caso, o elemento de linha da métrica de Friedman-Robertson-Walker com a curvatura da seção espacial nula é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 t^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.72)$$

ou, de maneira equivalente,

$$ds^2 = e^{2a_0\tau} \{d\tau^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)\}, \quad (2.73)$$

onde estamos definindo o tempo conforme $\tau = \frac{1}{a_0} \ln t$.

Aplicamos agora as transformações de Weyl à solução (2.70) e (2.71), com o fim de obter a correspondente solução no referencial de Riemann, isto é, no referencial em que o campo escalar é constante. Como tem sido mencionado, é sempre possível alcançar um referencial dessa natureza por meio de uma correta escolha do fator conforme. Consideremos então, as transformações de Weyl em termos do campo auxiliar ψ

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^f g_{\mu\nu}, \quad (2.74)$$

$$\bar{\psi} = e^{-\bar{\phi}} = e^{-(f+\phi)} = e^{-f} \psi. \quad (2.75)$$

A expressão para o fator f que garante um campo escalar constante é $f = -2 \ln(a_0 t(\tau)) =$

$-2(\ln a_0 + a_0\tau)$. Desta forma obtém-se

$$\bar{\psi} = \phi_0 a_0^2, \quad (2.76)$$

e fazendo uso de (2.74) vemos que

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \frac{1}{(a_0 t(\tau))^2} g_{\mu\nu} = \exp[-2(a_0\tau + \ln a_0)] g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad (2.77)$$

onde η é a métrica plana de Minkowski. Em outras palavras, a solução de O'Hanlon-Tupper na teoria de Brans-Dicke com $\omega = -3/2$, quando é interpretada como solução da relatividade geral em um referencial de Weyl arbitrário, resulta equivalente em um referencial riemanniano, ao espaço-tempo de Minkowski. Neste caso, as linhas geodésicas são dadas por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.78)$$

e como consequência da invariância por transformações de referencial, terão a mesma forma no referencial original $(M, g_{\mu\nu}, \phi = -\ln \psi)$.

É claro que, no que se refere às linhas geodésicas, esta interpretação da solução de O'Hanlon-Tupper é conceptualmente diferente da originalmente dada na teoria de Brans-Dicke. Nesta última, as equações de geodésicas são calculadas com os símbolos de Christoffel, enquanto na primeira, tendo em conta que o campo escalar de BD foi identificado com o campo escalar de Weyl em um referencial de Weyl arbitrário, é parte da geometria e portanto, intervém de maneira explícita nas componentes da conexão afim. Isto quer dizer que o campo escalar na nova formulação weylana participa de forma natural no movimento de partículas e raios de luz, o que não acontece na teoria de Brans-Dicke.

Para finalizar, vejamos de que maneira a equivalência formal apresentada anteriormente pode ser utilizada para gerar um conjunto de soluções para as equações de Brans-Dicke no vazio com $\omega = -3/2$, do qual a solução de O'Hanlon-Tupper é um caso particular. Com esse objetivo, consideremos a forma mais geral para a métrica de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a(t)^2}{1 + \frac{kr^2}{4}} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.79)$$

onde $k = 0, \pm 1$ é a curvatura da seção espacial. Tomemos as equações (2.21) como as equações de campo em um referencial de Weyl $(M, g, \phi = -\ln \psi)$. Então, aplicando as transformações de Weyl considerando $f = \ln \psi$, são obtidas as equações de Einstein em um referencial de

Riemann ($M, \bar{g} = \psi g, \bar{\phi} = 0$)

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.80)$$

onde $\tilde{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein calculado com a métrica riemanniana $\bar{g}_{\mu\nu}$. Nesse referencial, a métrica é dada por

$$d\bar{s}^2 = \psi dt^2 - \frac{\psi a(t)^2}{1 + \frac{kr^2}{4}} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.81)$$

ou, de maneira equivalente,

$$d\bar{s}^2 = d\bar{t}^2 - \frac{\bar{a}(\bar{t})^2}{1 + \frac{k\bar{r}^2}{4}} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \bar{\theta} d\bar{\varphi}^2), \quad (2.82)$$

onde a coordenada temporal foi redefinida por $d\bar{t} = \psi^{1/2} dt$ e o novo fator de escala é dado por $\bar{a}^2(\bar{t}(t)) = \psi a^2(t)$.

Das equações (2.80) e (2.82), obtemos

$$\bar{a}'^2 + \frac{k}{2} = 0, \quad (2.83)$$

onde linha (') indica derivada com respeito ao tempo $\bar{t}$, de onde comprovamos facilmente que não é possível obter soluções para $k = 1$. Para $k = 0$ temos que $\bar{a} = \text{const}$, e lembrando da maneira como foi definido o fator de escala no referencial de Riemann, concluimos que

$$\psi a(t)^2 = \text{const}. \quad (2.84)$$

Portanto, (2.84) implica que temos um número infinito de soluções para $\omega = -\frac{3}{2}$, e a solução de O'Hanlon-Tupper representa um caso particular no qual $a(t) \propto t$.

2.4 Teoria da gravitação no espaço-tempo de Weyl integrável (WIST) e a teoria de Brans-Dicke

Começemos com a ação postulada em WIST

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + \omega \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} + e^{-2\phi} L_m), \quad (2.85)$$

onde R é o escalar de curvatura weyliano, ω é um parâmetro adimensional livre, ϕ é o campo escalar de Weyl e L_m é a Lagrangiana dos campos de matéria, obtida a partir da relatividade especial substituindo as derivadas parciais por derivadas covariantes calculadas com a conexão de Weyl.

Usando a expressão para o escalar de curvatura de Weyl

$$R = \tilde{R} - 3\phi_{;\alpha}^{\alpha} + \frac{3}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}, \quad (2.86)$$

e definindo o parâmetro $\omega' = \omega - \frac{1}{2}$, a ação (2.85) se escreve como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ \tilde{R} + \omega' \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} + e^{-2\phi} L_m \}. \quad (2.87)$$

A partir da ação (2.85) associada a um referencial de Weyl $(M, g_{\mu\nu}, \phi)$, aplicando as transformações (2.1) e (2.2) com $f = -\phi$ obtemos a correspondente ação no referencial riemanniano $(M, \bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}, 0)$:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} e^{\phi} (\tilde{R} + \omega \bar{g}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + L_m), \quad (2.88)$$

sendo $\tilde{R}$ o escalar de curvatura calculado com os símbolos de Christoffel em termos da métrica $\bar{g}$. Efetuando a mudança de variável $\Phi = e^{\phi}$, (2.88) resulta

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\Phi \tilde{R} + \frac{\omega}{\Phi} \bar{g}^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} + L_m \right), \quad (2.89)$$

rapidamente reconhecível como a ação da teoria gravitacional de Brans-Dicke no chamado referencial de Jordan.

É importante notar que da mesma maneira como a partir de (2.87), aplicando as transformações de Weyl com $f = -\phi$, foi obtida (2.88), é possível começar com a ação (2.88) no referencial de Riemann e alcançar (2.87) em um referencial de Weyl por meio das mesmas transformações escolhendo $f = \phi$. Em outras palavras, podemos estabelecer uma conexão biunívoca entre ambos os referenciais.

Portanto, tendo em conta (2.88), é imediato comprovar a equivalência da ação (2.85) no referencial de Riemann com a ação postulada na teoria de Brans-Dicke, no referencial de Jordan. Porém, novamente é interessante ressaltar que esta transformação acarreta uma diferença na natureza do campo escalar: enquanto em (2.88) o campo de Weyl é de caráter geométrico, essa interpretação perde validade quando consideramos (2.89) como ação da

teoria de BD.

No contexto da teoria original de Brans-Dicke, tem particular interesse o estudo das transformações conformes e os diferentes resultados obtidos em ambos os referenciais: Jordan e Einstein. Este assunto tem sido estudado amplamente na literatura e não apenas no que concerne à teoria gravitacional de Brans-Dicke, mas também no estudo das teorias escalares-tensoriais em geral [26]. Embora a técnica das transformações conformes represente uma ferramenta matemática útil, sua aplicação deu origem a um debate sobre se os dois referenciais conformes são fisicamente equivalentes ou, de maneira alternativa, qual dos referenciais possui significado físico. *A priori*, equivalência matemática não implica equivalência física.

O formalismo dos referenciais de Weyl apresenta então, um novo ponto de vista nessa discussão: a passagem do referencial de Jordan ao referencial de Einstein pode ser interpretada como a geometrização da constante gravitacional G , a quantidade física empírica que mede a intensidade da força gravitacional, considerada como campo escalar na teoria de Brans-Dicke. Neste sentido, WIST representa uma maneira de geometrizar o campo escalar de BD, de forma similar à teoria original de Weyl em sua proposta de geometrizar o campo electromagnético [9].

CAPÍTULO 3

Espaço-tempo conformalmente plano e o formalismo dos referenciais de Weyl

Como é sabido, muitos dos espaços-tempo de interesse físico que aparecem na teoria da relatividade geral são conformalmente planos. Por exemplo, já foi demonstrado que todos os modelos cosmológicos de Friedman-Robertson-Walker (FRW) pertencem a esta classe [27]. Na presente seção, concentraremos nossa atenção neste conjunto particular, analisando dentro do formalismo dos referenciais de Weyl a possibilidade de transformar o fator conforme presente na métrica em um campo escalar geométrico atuando no espaço-tempo de Minkowski. Mais tarde, começando com a ação de Einstein-Hilbert, exploraremos os diferentes cenários obtidos por transformações de Weyl. Por exemplo, podemos ter a dinâmica do universo descrita por um campo escalar no espaço-tempo de Minkowski. Veremos que esta interpretação pode ser equivalente a interpretação padrão da relatividade geral.

Para concluir, estudaremos a teoria da gravitação desenvolvida por Nordström na primeira década do século XX . Esta teoria, pode ser interpretada no contexto dos referenciais: a formulação de Einstein e Fokker, e a original proposta por Nordström correspondem a mesma teoria em diferentes referenciais, relacionados por transformações de Weyl.

3.1 Espaços conformalmente planos e referenciais de Weyl

Consideremos um espaço-tempo conformalmente plano arbitrário M , com um tensor métrico definido de maneira geral por $g_{\mu\nu} = e^\phi \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski e ϕ é uma função escalar. No contexto de nosso formalismo, que admite que o espaço-tempo é descrito por uma geometria de Weyl integrável, este cenário pode ser descrito em particular por um referencial de Riemann, $(M, e^\phi \eta, 0)$. Nesse caso, o campo de Weyl é considerado nulo e as componentes da conexão afim são os símbolos de Christoffel calculados com a métrica $g_{\mu\nu}$. Apliquemos agora as transformações de Weyl, (2.1) e (2.2) do capítulo anterior, com ϕ como fator conforme, para alcançar um referencial $(M, \eta, -\phi)$. No novo referencial, a variedade M representa um espaço-tempo plano e $-\phi$ aparece como um campo escalar definido nesse espaço.

Como foi mencionado, no que diz respeito às linhas geodésicas existe uma invariância na forma das equações, implicando em particular, que as geodésicas nulas sejam mapeadas em geodésicas nulas. Todavia, ao mesmo tempo, a passagem de $(M, e^\phi \eta, 0)$ para $(M, \eta, -\phi)$ proporciona um novo cenário: por exemplo, fenômenos cosmológicos como o desvio para vermelho das linhas espectrais de galáxias e a expansão do universo deixam de ser explicados pela ação da curvatura do espaço-tempo. A dinâmica do universo, do ponto de vista de um referencial de Weyl, é governada por um campo escalar dinâmico em um espaço-tempo estático. Além do mais, este campo é o único responsável pela lei de transporte paralelo e pelo comportamento de relógios. Em outras palavras, para cada espaço de Riemann conformalmente plano é possível associar um campo escalar de Weyl num espaço-tempo de Minkowski, cuja dinâmica é a única responsável pelo movimento de partículas e raios de luz.

Este resultado toma particular relevância se atentarmos para o fato de que a métrica de todos os modelos de Friedmann-Robertson-Walker é conformalmente plana [28].

Consideremos então, a forma mais geral do elemento de linha de uma métrica de Friedman-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (3.1)$$

com $k = 0, \pm 1$. Sem perda de generalidade, tomando $k = 0$ e definindo o tempo conforme

$d\tau = \frac{dt}{a(t)}$, (3.1) pode ser escrita como

$$ds^2 = \bar{a}^2(\tau) (d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

onde, por clareza na notação, definimos $\bar{a}(\tau) = a(t(\tau))$. Considerando novamente as transformações de Weyl

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-f} g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

$$\bar{\phi} = \phi - f. \quad (3.4)$$

Escolhendo $e^f = \bar{a}^2(\tau)$ em (3.3) e (3.4), saímos do referencial de Riemann $(M, g, 0)$, para o referencial de Weyl $(M, \eta, -\ln \bar{a}^2(\tau))$. Neste referencial, o campo de 1-forma σ , cujas componentes foram definidas como $\sigma_\alpha = \phi_{,\alpha}$, é dado por $\sigma = (-\frac{2}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{d\tau}, 0, 0, 0)$.

Como primeiro exemplo, consideremos o caso particular dos modelos de Friedman espacialmente planos. A expressão do fator de escala é dada por $a(t) = a_0 t^p$, onde a_0 é uma constante e o expoente p toma o valor $p = \frac{3}{2}$ no caso de um universo dominado pela matéria e $p = \frac{1}{2}$ para um universo dominado por radiação. Considerando a definição do tempo conforme, depois de um cálculo simples, obtém-se

$$\tau = \frac{t^{1-p}}{a_0(1-p)}, \quad (3.5)$$

o que nos leva à seguinte expressão para o campo de Weyl:

$$\phi(\tau) = -2 \ln \left(a_0^{1/p} (1-p) \tau \right)^{\frac{p}{1-p}}. \quad (3.6)$$

Assim, para um universo dominado por matéria, $\phi(\tau) = -2 \ln \left(\frac{1}{3} a_0^{2/3} \tau \right)^2$, enquanto $\phi(\tau) = -2 \ln \left(\frac{1}{2} a_0^{1/2} \tau \right)$, no caso de ser a radiação dominante. Ambas as soluções apresentam uma singularidade para $\tau = 0$.

Para finalizar, tomemos como segundo exemplo o modelo cosmológico de de Sitter-Lemaître. Neste caso, o fator de escala é dado por $a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}$, sendo Λ uma constante positiva. O tempo conforme em termos do tempo coordenado t escreve-se $\tau = -\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{e^{-\sqrt{\Lambda/3} t}}{a_0}$ e para o campo de Weyl temos

$$\phi(\tau) = -2 \ln \left(-\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \frac{1}{\tau} \right). \quad (3.7)$$

Aqui vale a pena ressaltar um ponto interessante, que é a possibilidade de obter um

novo enfoque para o modelo de FRW, onde a curvatura riemanniana deixa de desempenhar um papel determinante na expansão do universo e outros fenômenos cosmológicos, os quais passam a ser uma consequência da presença do campo escalar ϕ . Além do mais, como resultado da invariância das linhas geodésicas frente às transformações de Weyl, as geodésicas métricas num espaço conformalmente plano em um referencial de Riemann $(M, e^\phi \eta, 0)$ são completamente indistinguíveis das geodésicas afins no referencial de Weyl $(M, \eta, -\phi)$, embora neste último tenhamos um cenário completamente diferente, já que o espaço-tempo é estático e plano.

3.2 Espaços conformalmente planos na relatividade geral. Transformações de referencial

Como já mencionamos, enquanto nos limitarmos a espaços-tempo conformalmente planos a gravitação pode ser descrita de forma efetiva por um campo escalar geométrico num espaço-tempo de Minkowski.

Torna-se interessante então, no caso deste tipo de espaço-tempo, explorar os diferentes enfoques que o formalismo dos referenciais de Weyl proporciona. Consideremos a ação de Einstein-Hilbert da teoria da relatividade geral, associada, naturalmente, a um referencial de Riemann $(M, g = e^\phi \eta, 0)$

$$S = \int \sqrt{-g} (\tilde{R} + \kappa L_m) d^4x, \quad (3.8)$$

sendo $\tilde{R}$ o escalar de curvatura riemanniano e L_m a densidade lagrangiana da matéria. A variação de $g_{\mu\nu}$ no caso de um espaço-tempo conformalmente plano se reduz a

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta(e^{-\phi} \eta^{\mu\nu}) = -e^{-\phi} \eta^{\mu\nu} \delta\phi. \quad (3.9)$$

Desse modo, a variação do funcional (3.8) relativamente a $g_{\mu\nu}$ é dada por

$$\delta S = - \int d^4x e^\phi \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \tilde{R} + \tilde{R}_{\mu\nu} + \kappa T_{\mu\nu} \right) \eta^{\mu\nu} \delta\phi, \quad (3.10)$$

onde adotamos a definição usual para o tensor de momento-energia

$$\delta \int d^4x \sqrt{-g} L_m = \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (3.11)$$

e a identidade $\sqrt{-g} = \sqrt{e^{4\phi}\eta} = e^{2\phi}$ foi utilizada. Da arbitrariedade de $\delta\phi$, a partir de (3.10) temos que

$$\tilde{R} = \kappa T, \quad (3.12)$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor momento-energia calculado com a métrica g associada ao referencial de Riemann.

Tentemos agora uma interpretação diferente para a mesma situação física. A partir de (3.8), é claro que a ação de Einstein-Hilbert não resulta invariante por transformações de Weyl. Porém, este fato não impede que apliquemos essas transformações para obter um referencial de Weyl no qual o campo escalar geométrico atua num espaço-tempo de Minkowski. Usando $f = -\phi$, e tendo em mente que o escalar de curvatura transforma-se como $\bar{R} = \bar{g}^{\mu\nu}\bar{R}_{\mu\nu} = e^\phi\tilde{R}$, a equação (3.12) em um referencial $(M, \eta, -\phi)$ resulta

$$3\left(\square\phi + \frac{1}{2}\phi^{,\mu}\phi_{,\mu}\right) = \kappa\mathcal{T}, \quad (3.13)$$

onde o operador d'Alembertiano $\square$ é calculado com a métrica plana η e $\mathcal{T}$ é o traço do tensor momento-energia da relatividade geral dado em (3.11), calculado com a métrica de Minkowski correspondente ao referencial de Weyl. Nesta interpretação, a equação (3.13) pode ser considerada uma equação dinâmica de campo para o campo escalar ϕ . Em outras palavras, embora o lado direito de (3.13) não necessariamente represente o tensor momento-energia da relatividade especial, dado que é construído a partir da definição na relatividade geral, é possível associá-lo ao tensor dos campos de matéria em um espaço de Minkowski e assim, entender (3.13) como a equação do campo geométrico gerador da dinâmica do universo.

Para concluir esta seção, um comentário é pertinente. É fácil ver que a equação (3.12) é o traço da equação de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.14)$$

que para um espaço-tempo conforme, se escreve

$$\partial_\mu\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\square\phi - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{4}\eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\phi\partial^\alpha\phi = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

Assim, o conjunto de soluções de (3.15) está contido no conjunto das soluções de (3.13). Contudo, dado que a primeira é mais simples de resolver, torna-se vantajoso obter soluções resolvendo primeiro (3.13).

3.3 Teoria da gravitação de Nordström

No início do século XX , o físico finlandês Gunnar Nördstrom construiu a primeira teoria relativista da gravitação formulada em termos de um campo escalar sem massa definido no espaço-tempo de Minkowski. Embora a proposta teórica não tenha resultado ser fisicamente correta, alguns anos depois de sua publicação foi considerada uma influente predecessora da teoria da relatividade geral de Einstein.

Estritamente falando, foram duas teorias propostas por Nördstrom, em 1912 [29] e 1913 [30] respectivamente. Sua motivação era obter uma versão relativista no espaço-tempo de Minkowski da teoria newtoniana da gravitação. Nesta última, a equação de campo é a equação de Poisson, $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$, onde ϕ é o potencial gravitacional, G é a constante gravitacional e ρ , a densidade de matéria. Por outro lado, a equação de movimento para uma partícula de prova em um campo gravitacional é obtida a partir da segunda lei de Newton e estabelece que a aceleração da partícula é dada por $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla\phi$, sendo $\vec{v}$ a velocidade da partícula.

Com o objetivo de modificar esta descrição não-relativista, em primeiro lugar Nordström considerou a mais simples das generalizações da equação de campo newtoniana, a saber,

$$\square\phi = -4\pi G\rho, \quad (3.16)$$

sendo $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ o operador d'Alembertiano. O próximo passo foi obter uma equação de movimento para uma partícula em um campo externo. Todavia, a equação proposta implicava que a massa inercial da partícula não era constante e dependia exponencialmente do campo escalar [29]. Nordström supôs então que a força atuando sobre um corpo de massa m é dada por

$$F_\mu = \frac{d(mu_\mu)}{d\tau} = m \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}, \quad (3.17)$$

sendo τ o tempo próprio. A partir da definição (3.17), tem-se que

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} + u_\mu \frac{dm}{d\tau} = m \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (3.18)$$

Multiplicando a equação acima pela velocidade u^μ e após um cálculo simples, chega-se em

$$m \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{dm}{d\tau}, \quad (3.19)$$

onde supomos que $u^\mu u_\mu = 1$, que por sua vez implica $u^\mu \frac{du_\mu}{d\tau} = 0$. Finalmente, substituindo (3.19) na equação (3.17), a quadri-velocidade da partícula u_μ , satisfaz a equação

$$\dot{u}_\mu + \dot{\phi} u_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (3.20)$$

onde o ponto indica derivação em relação ao tempo próprio. Vemos que, segundo a equação acima, as trajetórias das partículas independem de suas massas, o que é consistente com o princípio de equivalência.

Entretanto, havia um problema com esta primeira formulação de Nordström: a teoria não é dedutível de um princípio variacional. Ainda mais importante, o que foi salientado por Einstein, a densidade de massa ρ em (3.16) deveria ser substituída pelo traço T do tensor momento-energia do sistema $T_{\mu\nu}$, pois ρ não é um invariante de Lorentz. Como resultado, a relação entre as massas inercial e gravitacional foi reconsiderada [31].

Na segunda formulação de sua teoria, Nordström assumiu que a densidade de matéria ρ é proporcional ao traço T_m do tensor momento-energia, isto é, $\rho = g(\phi)T_m$, onde o fator de proporcionalidade $g(\phi)$ é uma função escalar determinada. Da condição de proporcionalidade entre as massas inercial e gravitacional, determina-se que $g(\phi) = \frac{1}{\phi}$ e a equação (3.16) é substituída por

$$\phi \square \phi = -4\pi G T_{(m)}, \quad (3.21)$$

que é uma equação não-linear para o campo gravitacional relativístico.

A dinâmica do sistema de partículas pode ser agora derivada de um princípio variacional. Em particular, o movimento de uma partícula em um campo externo obtém-se a partir de

$$\delta \int \phi(x) ds = 0, \quad (3.22)$$

com o elemento de linha dado por $ds = \sqrt{u^\mu u_\mu} d\tau$, onde τ é o tempo próprio. No lugar da equação de movimento newtoniana, chegamos a equação modificada

$$\phi \dot{u}_\mu + \dot{\phi} u_\mu = \partial_\mu \phi, \quad (3.23)$$

que também satisfaz o princípio de equivalência fraco.

Esta segunda teoria proposta por Nordström foi reformulada de maneira mais elegante por Einstein em 1913 e apresentada como a primeira teoria relativista consistente da gravitação. Ela é descrita por um campo escalar sem massa $\phi(x)$, cujo tensor momento-

energia é dado por

$$T_{(g)}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G} \left(\partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right), \quad (3.24)$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski. Além do mais, a densidade da matéria ρ e a quadri-velocidade u^μ contribuem como

$$T_{(m)}^{\mu\nu} = \rho \phi u^\mu u^\nu. \quad (3.25)$$

O tensor momento-energia $T_{(g)}^{\mu\nu} + T_{(m)}^{\mu\nu}$ é agora conservado.

Enquanto Nordström desenvolvia sua teoria escalar da gravitação, Einstein tinha problemas para elaborar uma teoria da gravitação relativística. Ficou claro para ele posteriormente que o princípio variacional (3.22) para o movimento de uma partícula dava como resultado a equação de geodésicas em um espaço-tempo curvo com métrica $g_{\mu\nu}(x) = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$, que corresponde a uma transformação conforme da métrica $\eta_{\mu\nu}$, e que leva a um espaço-tempo com tensor de curvatura não-nulo. Em particular, foi demonstrado por Einstein e Fokker [32], que o escalar de Ricci é dado por

$$R = -\frac{6}{\phi^3} \square \phi. \quad (3.26)$$

Einstein postulou que ao passarmos do espaço-tempo de Minkowski para um espaço-tempo curvo por uma transformação conforme, o traço do tensor momento-energia se transformaria segundo $T \rightarrow T/\phi^4$. Como consequência, a equação de campo de Nordström é reescrita simplesmente como

$$R = 24\pi GT, \quad (3.27)$$

onde no lado direito da equação acima aparecem as contribuições da matéria e outras fontes possíveis. É interessante notar que (3.27) apresenta exatamente a mesma estrutura que a equação proposta por Einstein um ano mais tarde em sua teoria da relatividade geral.

Levando em conta nosso formalismo dos referenciais de Weyl, as teorias propostas em primeiro lugar por Nordström e sua reformulação apresentada por Einstein e Fokker, podem ser consideradas equivalentes [33]. A última, de acordo com as considerações de Einstein, é associada a um referencial de Riemann caracterizado por uma métrica conformalmente plana $g_{\mu\nu} = \phi^2 \eta_{\mu\nu}$, isto é, $(M, \phi^2 \eta, 0)$. Por outro lado, fazendo uma transformação de *gauge* a partir das transformações de Weyl com $f = \phi^{-2}$, obtemos a formulação de Nordström, num referencial de Weyl onde o espaço-tempo é descrito por uma métrica plana e um campo escalar $\bar{\phi} = -2 \ln \phi$, $(M, \eta, -2 \ln \phi)$.

Convencionalismo e relatividade geral

Desde a aparição da teoria da relatividade geral, a força de gravitação tem sido interpretada como sendo um efeito da *curvatura* do espaço-tempo. O êxito da teoria de Einstein, levou a aceitação da concepção geometrodinâmica, a qual segundo John Wheeler [35], afirma que nada mais existe no mundo além de espaço-tempo vazio curvo; a matéria, a carga, o eletromagnetismo são todas manifestações da curvatura do espaço. Como consequência, num certo sentido, o espaço-tempo ganhou uma existência independente, de maneira que o espaço-tempo curvo é considerado como se realmente existisse, em lugar de ser entendido como uma mera representação matemática útil da teoria física.

Embora a linguagem geometrodinâmica possa ser considerada uma ferramenta conveniente para prever o comportamento da matéria, as propriedades intrínsecas do espaço não são suscetíveis a medição através de experimentos. Apenas é possível determinar as propriedades dos objetos *no espaço*. Neste sentido, poder-se-ia afirmar que as propriedades do espaço-tempo não são, rigorosamente falando, empíricas.

Estes argumentos representam algumas das motivações para o trabalho desenvolvido por I. W. Roxburgh e R. T. Tavakol, no artigo *Conventionalism and General Relativity* [34]. Neste capítulo, depois de uma breve descrição do formalismo convencional introduzido nesse trabalho, apresentaremos uma reinterpretação dos resultados obtidos por estes autores no

contexto dos referenciais de Weyl.

4.1 Convencionalismo e relatividade geral

O objetivo do trabalho desenvolvido por Roxburgh e Tavakol foi mostrar que a relatividade geral, formulada na convenção da geometria riemanniana pode ser expressada em outra convenção associada a uma geometria não-riemanniana.

Para esclarecer melhor esta idéia, consideremos o exemplo dado por Poincaré [36]. Imaginemos uma placa aquecida a diferentes temperaturas em diversas partes de sua superfície e um experimentador com uma régua de cobre. Este cientista mede propriedades geométricas dos triângulos usando sua vara de medição e chega a um resultado não-euclidiano. Porém, é possível interpretá-lo de diferentes maneiras. Por exemplo, podemos:

1. definir a régua como rígida e dizer que a geometria real é não-euclidiana;
2. decidir que a geometria real é euclidiana, e que existe um campo de temperaturas que afeta o comprimento da régua. A partir das propriedades euclidianas conhecidas dos triângulos, o cientista pode calcular a variação do campo de temperaturas sobre a placa;
3. considerar que a geometria hiperbólica é a geometria real, com alguma curvatura arbitrária determinada. Partindo dos resultados hiperbólicos, calcular o campo de temperaturas que afeta a vara de medição.

A interpretação padrão para esta situação é aceitar a geometria real como sendo euclidiana e o fato de que a régua de medição se expande ou se contrai como consequência da presença do campo de temperaturas. Contudo, é também possível que o cientista escolha sua geometria e determine, a partir dali, a física consistente com essa geometria. Em qualquer caso, os resultados empíricos previstos pela teoria são idênticos.

4.1.1 Representação convencionalista

Com o intuito de apresentar o argumento convencionalista, consideremos $\{x^i\}$ uma base coordenada e denominemos o tensor completamente arbitrário $p_{ij}(x)$ como o *tensor métrico convencional*. Definimos a distância p por

$$dp^2 = p_{ij} dx^i dx^j. \quad (4.1)$$

Por outro lado, sobre o mesmo espaço consideremos o tensor métrico relativístico $g_{ij}(x)$ definido pelas equações de Einstein. A distância infinitesimal entre dois pontos é dada por

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.2)$$

e o movimento das partículas de prova satisfaz a equação

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (4.3)$$

onde

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad (4.4)$$

são os símbolos de Christoffel.

De maneira análoga, para a métrica convencional $p_{ij}(x)$ definimos a conexão

$$\Lambda_{jk}^i = \frac{1}{2} p^{il} \left(\frac{\partial p_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial p_{kl}}{\partial x^j} - \frac{\partial p_{jk}}{\partial x^l} \right). \quad (4.5)$$

A diferença entre as componentes das conexões afins (4.4) e (4.5) dá como resultado o seguinte tensor

$$S_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Lambda_{jk}^i. \quad (4.6)$$

Partindo das definições (4.4) e (4.5), e após alguns cálculos é possível expressar o tensor (4.6) como

$$S_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (g_{jl;k} + g_{kl;j} - g_{jk;l}), \quad (4.7)$$

onde o ponto e vírgula (;) denota a derivada covariante associada a geometria convencional p_{ij} .

Efetuada uma mudança de variável simples, a equação (4.3) que descreve o movimento das partículas é dada por

$$\frac{1}{H} \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{H} \frac{dx^i}{dp} \right) + \Gamma_{jk}^i \frac{1}{H^2} \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = 0, \quad (4.8)$$

ou eliminando a dependência com a métrica $g_{\mu\nu}$ aplicando (4.6), resulta

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \Lambda_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dp} \frac{dx^i}{dp} - S_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp}; \quad (4.9)$$

onde

$$H^2 = \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp}. \quad (4.10)$$

A partir de (4.9), associamos o termo a direita da igualdade com a aceleração da partícula de prova na geometria p_{ij} , sendo determinada pela quadri-velocidade $\frac{dx^i}{dp}$ na geometria convencional e pelo tensor S_{jk}^i , que é definido em termos da métrica relativística g_{ij} e sua derivada covariante calculada com a conexão Λ_{jk}^i . A expressão a esquerda em (4.9) é a derivada absoluta, a qual é ortogonal a velocidade. Usando esse resultado novamente em (4.9), tem-se

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \Lambda_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = F^i \equiv -S_{jk}^m \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} \left(\delta_m^i - p_{ml} \frac{dx^l}{dp} \right). \quad (4.11)$$

Em outras palavras, (4.11) é a representação convencional da equação de movimento das partículas de prova na métrica convencional p_{ij} .

4.2 Interpretação no formalismo dos referenciais

Como primeiro passo na reinterpretação de [34] e de acordo com o que foi apresentado no capítulo 2 com respeito ao formalismo dos referenciais de Weyl, associemos a chamada *geometria relativística* a um referencial riemanniano denotado por

$$(M, g, 0). \quad (4.12)$$

Por outro lado, sabemos que é possível obter outro referencial de Weyl mantendo invariante as componentes da conexão afim, através das chamadas transformações de Weyl, equações (2.1) e (2.2). Suponhamos, então, que aplicamos a (4.12) as seguintes transformações simultâneas

$$\begin{aligned} p_{ij} &= e^\phi g_{ij}, \\ \bar{\phi} &= \phi, \end{aligned} \quad (4.13)$$

para chegar em um referencial (M, p, ϕ) , naturalmente vinculado a anteriormente definida *geometria convencional*. Neste ponto, torna-se importante introduzir certas aclarações. Enquanto no trabalho desenvolvido por Roxburgh e Tavakol ambas as métricas, relativística e convencional, são apresentadas como totalmente independentes e associadas a *diferentes geometrias*, vale a pena ressaltar que este conceito não guarda o mesmo significado que tem

sido considerado na presente tese. É claro, a partir das definições dadas para as conexões (4.4) e (4.5), que em ambos os casos a geometria do espaço-tempo é suposta riemanniana. Porém, e é neste sentido que é utilizada a expressão, a métrica convencional p_{ij} não representa uma solução das equações de Einstein, enquanto g_{ij} é definida como tal. Em nossa interpretação, pelo contrário, as métricas g_{ij} e p_{ij} não podem ser consideradas como totalmente independentes: estão vinculadas por uma transformação de Weyl. Como contraparte, elas são associadas efetivamente a geometrias diferentes: enquanto g_{ij} é puramente Riemanniana, a métrica que, neste caso chamamos de convencional, responde junto ao campo escalar ϕ a uma condição de não-metricidade.

De acordo com o comentado no capítulo 1, em uma geometria de Weyl integrável as componentes da conexão afim são deduzidas unívocamente a partir da condição de não-metricidade, e para uma métrica arbitrária q_{ij} e um campo de Weyl φ são da forma

$$\Gamma_{jk}^i = \{^i_{jk}\}_q - \frac{1}{2}q^{il}(q_{lj}\varphi_{,k} + q_{lk}\varphi_{,j} + q_{jk}\varphi_{,l}). \quad (4.14)$$

Em particular, para o referencial de Riemann (4.12) as componentes da conexão (4.14) se reduzem aos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = \{^i_{jk}\}_g, \quad (4.15)$$

o que é consistente com a definição (4.4) introduzida por Roxburgh e Tavakol. Por outro lado, de acordo com (4.14), as componentes da conexão de Weyl no referencial (M, p, ϕ) são dadas por

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \{^i_{jk}\}_p - \frac{1}{2}p^{il}(p_{lj}\phi_{,k} + p_{lk}\phi_{,j} + p_{jk}\phi_{,l}), \quad (4.16)$$

onde identificamos $\{^i_{jk}\}_p = \Lambda_{jk}^i$ dada pela equação (4.3).

Segundo o formalismo proposto, as componentes da conexão de Weyl associadas a referenciais relacionados pelas transformações de *gauge* (2.1) e (2.2), são invariantes, isto é

$$\Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i, \quad (4.17)$$

e conseqüentemente, (4.7) toma a forma

$$S_{jk}^i = -\frac{1}{2}p^{il}(p_{lj}\phi_{,k} + p_{lk}\phi_{,j} - p_{jk}\phi_{,l}). \quad (4.18)$$

É fácil ver, fazendo uso de (4.13), que (4.18) pode ser deduzida a partir de (4.7).

Concentremos nossa atenção agora na equação que descreve o movimento das partículas. Como resultado da invariância das componentes da conexão, as linhas geodésicas também permanecem inalteradas quando consideramos uma transformação de referencial. Em outras palavras, se (4.3) é a correspondente equação para o referencial de Riemann, a seguinte expressão:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (4.19)$$

descreverá o comportamento das partículas de prova no referencial associado à métrica p_{ij} . Tendo em consideração que $\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Lambda_{jk}^i + S_{jk}^i$, e aplicando a regra da cadeia para expressar (4.19) em termos do parâmetro afim p , de maneira simples se chega a

$$\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \Lambda_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} = \frac{1}{H} \frac{dH}{dp} \frac{dx^i}{dp} - S_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp}, \quad (4.20)$$

que corresponde exatamente à equação (4.9) da representação convencionalista.

Consideremos agora a interpretação da equação (4.11) no formalismo dos referenciais de Weyl. Com esse objetivo em mente, examinemos a condição de normalização introduzida no capítulo 2 para o referencial convencional (M, p_{ij}, ϕ)

$$p_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} = e^\phi. \quad (4.21)$$

Calculando para esta última equação a derivada covariante de Weyl, isto é, aquela associada a conexão $\bar{\Gamma}_{jk}^i$, temos que

$$\left(p_{ij} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} \right)_{;k} = p_{ij;k} \frac{dx^i}{dp} \frac{dx^j}{dp} + p_{ij} \left(\frac{dx^i}{dp} \right)_{;k} \frac{dx^j}{dp} + p_{ij} \frac{dx^i}{dp} \left(\frac{dx^j}{dp} \right)_{;k} = e^\phi \phi_{,k}. \quad (4.22)$$

Aplicando a condição de não-metricidade e novamente (4.21), chega-se a

$$\left(\frac{dx^i}{dp} \right)_{;k} \frac{dx_i}{dp} = 0. \quad (4.23)$$

Contraindo (4.23) com a quadri-velocidade, finalmente obtemos

$$\frac{dx^k}{dp} \left(\frac{dx^i}{dp} \right)_{;k} \frac{dx_i}{dp} = 0, \quad (4.24)$$

ou

$$\frac{D}{Dp} \left(\frac{dx^i}{dp} \right) \frac{dx_i}{dp} = 0, \quad (4.25)$$

isto é, a derivada absoluta de $\frac{dx^i}{dp}$ calculada com a conexão de Weyl é ortogonal à velocidade. Então

$$\left(\frac{d^2 x^i}{dp^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp} \right) \frac{dx_i}{dp} = 0. \quad (4.26)$$

Tendo em conta (4.20), concluímos que

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dp} = 0. \quad (4.27)$$

Finalmente, (4.20) leva a expressão da força F^i definida na representação convencionalista por (4.11), que em nossa interpretação é dada simplesmente por

$$F^i = -S_{jk}^i \frac{dx^j}{dp} \frac{dx^k}{dp}. \quad (4.28)$$

Neste contexto, a última equação (4.28) pode ser representada de maneira mais clara em termos do campo geométrico e das quadri-velocidades. Para isto, consideremos a definição de S_{jk}^i dada por (4.18). Usando esse resultado em (4.28) e após alguns cálculos, temos

$$F^i = \frac{1}{2} e^{-\phi} \phi^{,i} - \bar{v}^i \frac{d\phi}{dp}, \quad (4.29)$$

onde $\bar{v}^i = \frac{dx^i}{dp}$.

Para concluir, é interessante notar que a equação (4.9), a partir da qual é definida a força externa F^i , é um resultado de (4.16), que determina o movimento de partículas de prova no referencial (M, p, ϕ) . Segundo a interpretação dada no formalismo dos referenciais, não existe força externa nenhuma que rege a dinâmica dos objetos e raios de luz: ela responde a geodésicas de Weyl. Em outras palavras, a causa do movimento no espaço-tempo não é determinada por um campo externo, senão que está ligada à geometria escolhida para descrevê-lo.

CAPÍTULO 5

Uma reinterpretação geométrica da teoria de Brans-Dicke

Neste último capítulo, daremos um enfoque geométrico da teoria de Brans-Dicke (BD), no qual o campo escalar é considerado um campo geométrico. Partindo da ação proposta por Brans e Dicke, e aplicando o método variacional de Palatini, a equação de campo resultante da variação da ação em relação à conexão leva à condição de compatibilidade associada a uma geometria de Weyl integrável, onde o campo de BD é identificado com o campo escalar de Weyl. Admitindo que o espaço-tempo é descrito por uma variedade de Weyl integrável, o acoplamento entre matéria e gravitação introduzido por Brans e Dicke no trabalho original é modificado, de forma a garantir que o princípio de equivalência seja satisfeito.

Embora a teoria gravitacional de Brans-Dicke possa parecer um assunto esgotado, é importante enfatizar que o foco de nosso interesse reside na perspectiva geométrica que o formalismo variacional de Palatini proporciona. Considerar a métrica e a conexão como campos independentes resulta numa modificação da estrutura geométrica do espaço-tempo que deixa de ter um carácter riemanniano, sendo substituída por uma variedade de Weyl.

5.1 Equações de campo.

Primeiramente, consideremos a ação gravitacional da teoria de Brans-Dicke (ver Apêndice B)

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} (\Phi R + \frac{\omega}{\Phi} \Phi_{,\alpha} \Phi_{,\alpha}), \quad (5.1)$$

onde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura, Φ é um campo escalar e ω é um parâmetro adimensional. Efetuando a mudança de variável $\Phi = e^{-\phi}$, (5.1) escreve-se

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + \omega \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha}). \quad (5.2)$$

Esta é a forma da ação que adotaremos no que vem a seguir.

Como mencionamos no início deste capítulo, a fim de obter as equações de campo será utilizado o método variacional de Palatini. Resultam então oportunos alguns comentários sobre esse formalismo.

5.1.1 Princípio variacional de Palatini

Como pode ser visto na literatura [4] [6], existem dois princípios variacionais que podem ser adotados na variação da ação de Einstein-Hilbert na dedução das equações de Einstein: a variação métrica padrão e, a menos conhecida, variação de Palatini. Na realidade, esta última foi introduzida pelo próprio Einstein [48]; no entanto recebeu este nome por causa de um desentendimento histórico [49]. No formalismo de Palatini, quando se varia a ação, a métrica e a conexão são consideradas variáveis independentes. Uma outra hipótese adotada neste formalismo é que a ação da matéria S_m não depende da conexão, isto é, supõe-se que S_m depende unicamente da métrica e dos campos de matéria.

É fácil mostrar que a formulação de Palatini no caso da relatividade geral é equivalente ao formalismo de Hilbert. De fato, a variação da ação relativamente à conexão leva à condição de metricidade e, portanto, à conexão de Levi-Civita [6]. Devido a isso, vemos que não existe razão particular para impor o princípio variacional de Palatini na relatividade geral em lugar do formalismo métrico. Por outro lado, embora ambos os princípios variacionais levem às mesmas equações de campo no caso de uma lagrangiana linear no escalar de curvatura R , em particular no caso da ação de Einstein-Hilbert, isto não é verdade para ações mais gerais, sendo um exemplo deste resultado as teorias $f(R)$ [40][41][42].

5.1.2 Variação com respeito a conexão independente

De acordo com os conceitos mencionados anteriormente, admitindo que a métrica e a conexão são variáveis dinâmicas independentes e que a ação da matéria S_m não depende da conexão, calculemos a variação da ação (5.2):

$$\delta_\Gamma S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} \delta_\Gamma R, \quad (5.3)$$

sendo $\delta_\Gamma R = g^{\mu\nu} \delta_\Gamma R_{\mu\nu}$, e o tensor de Riemann definido de acordo com (A.13), por

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\nu} \Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\nu\mu}. \quad (5.4)$$

Utilizando a identidade de Palatini ¹, temos que

$$\delta R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} = \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu(\delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}), \quad (5.5)$$

onde o sub-índice Γ foi suprimido por simplicidade na notação. Levando em conta (5.5) e após de alguns cálculos simples, (5.3) torna-se

$$\begin{aligned} \delta S = \int d^4x & \left[\nabla_\nu(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}) - \nabla_\alpha(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}) \right] \\ & - \int d^4x \left[\nabla_\nu(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu}) \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \nabla_\alpha(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu}) \right]. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Considerando que os primeiros dois termos à direita em (5.6) são divergências totais, integrando por partes os dois últimos e tomando $\delta S = 0$, obtém-se

$$-\nabla_\beta(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\nu\beta}) \delta^\mu_\alpha + \nabla_\alpha(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.7)$$

Multiplicando a última equação por δ^α_ν , chega-se a

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\alpha}) = 0, \quad (5.8)$$

que, aplicado a (5.6), finalmente dá como resultado

$$\nabla_\alpha(\sqrt{-g} e^{-\phi} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.9)$$

¹Embora esta equação apareça frequentemente na literatura no caso Riemanniano (ver, como exemplo [4]), é simples mostrar que pode ser estendida a uma geometria de Weyl integrável, dado que a única hipótese feita é de que a conexão é simétrica.

Expandindo a derivada covariante em (5.9) é simples ver que o formalismo de Palatini aplicado à ação de Brans-Dicke dá como resultado a condição de não-metricidade Weyliana

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha}, \quad (5.10)$$

onde o campo escalar ϕ é agora interpretado como um campo geométrico, o campo de Weyl.

Levando em consideração que a geometria de Weyl integrável aparece como a linguagem natural para descrever o espaço-tempo, é razoável considerar também a variação da ação (5.2) com respeito ao campo escalar ϕ . Visto que existem três elementos geométricos independentes, a métrica $g_{\mu\nu}$, a conexão simétrica $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ e o campo escalar ϕ , propomos uma extensão do método variacional de Palatini para derivar as equações de campo.

5.1.3 Lagrangiana da matéria. Variação com relação à métrica e ao campo escalar

Antes de considerar a variação de (5.2) com relação a métrica, é preciso especificar a forma da ação da matéria S_m . Em primeiro lugar, veremos quais são as razões pelas quais a ação da matéria original da teoria de Brans-Dicke não resulta, para nosso enfoque, uma escolha certa.

Como primeiro argumento, visto que foi admitido que o espaço-tempo é também caracterizado por um campo escalar, é natural esperar que a matéria acople não apenas com a métrica, mas também com o campo escalar. A segunda, e talvez a razão mais fundamental para não considerar o acoplamento da matéria como é feito na teoria de Brans-Dicke, é que as geodésicas determinadas por este acoplamento não são geodésicas da geometria de Weyl.

Nosso objetivo é, então, encontrar uma ação da matéria que cumpra com esses dois requisitos. Com esse propósito, consideremos a condição (5.10) escrita da seguinte forma:

$$\nabla_\alpha (e^{-\phi} g^{\mu\nu}) = 0. \quad (5.11)$$

Definindo a *métrica efetiva*

$$\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \quad (5.12)$$

é fácil ver que a ação da matéria mais simples que se pode construir levando em conta tanto a métrica $g_{\mu\nu}$ como o campo escalar, corresponde ao acoplamento mínimo de L_m com a métrica

efetiva $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} S_m &= \kappa \int d^4x \sqrt{-\gamma} L_m(\gamma_{\mu\nu}, \xi, \nabla^{(\gamma)} \xi) \\ &= \kappa \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\phi} L_m(e^{-\phi} g_{\mu\nu}, \Psi, \nabla^{(e^{-\phi} g)} \Psi), \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde ξ denota os campos da matéria em geral. Como demonstraremos mais à frente, (5.13) garante a validade do princípio de equivalência de Einstein (PEE).

Retomando a variação da ação (5.2) com respeito a métrica $g_{\mu\nu}$, tendo em conta (5.13), tem-se que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} - \omega(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha}), \quad (5.14)$$

onde o tensor momento-energia é definido como $T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\delta(\sqrt{-\gamma} L_m)}{\delta \gamma^{\mu\nu}}$. Calculando-se, com a métrica $g_{\mu\nu}$, o traço da equação (5.14), obtém-se

$$R + \omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} = \kappa T. \quad (5.15)$$

Finalmente, consideremos a variação da ação em relação ao campo escalar ϕ . Esta dá por resultado

$$R + 3\omega \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} + 2\omega \square \phi = \kappa T, \quad (5.16)$$

onde $T = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, e estamos levando em conta que

$$\delta_\phi S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{\delta(\sqrt{-\gamma} L_m)}{\delta \gamma^{\alpha\beta}} \frac{\delta \gamma^{\alpha\beta}}{\delta \phi} \delta \phi = - \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} T \delta \phi. \quad (5.17)$$

Combinando (5.14) e (5.16), a equação do campo escalar torna-se

$$\square \phi + \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} = 0, \quad (5.18)$$

com $\square \phi = \phi^{;\alpha}_{;\alpha}$ denotando o operador d'Alembertiano calculado com a conexão weyliana. Como esperamos, reescrevendo (5.18) em função de elementos riemannianos, é recuperado o resultado da teoria de Brans-Dicke

$$\bar{\square} \Phi = 0, \quad (5.19)$$

onde $\bar{\square}$ representa o d'Alembertiano definido com a métrica riemanniana e $\Phi = e^{-\phi}$.

5.2 Lei de conservação para a matéria

Nesta seção, consideraremos a lei de conservação do tensor momento-energia, obtida a partir do cálculo da divergência das equações (5.14).

Primeiramente, reescrevamos as equações de campo e a condição de não-metricidade na forma:

$$G^\nu{}_\mu = -\kappa T^\nu{}_\mu - \omega(\phi_{,\mu}\phi^{,\nu} - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}), \quad (5.20)$$

$$\square\phi + \phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} = 0, \quad (5.21)$$

$$g^{\mu\sigma}{}_{;\beta} = -g^{\mu\sigma}\phi_{,\beta}. \quad (5.22)$$

O cálculo da divergência de Weyl da equação (5.20) dá, como resultado,

$$G^\nu{}_{\mu;\nu} = -\kappa T^\nu{}_{\mu;\nu} - \omega\left(\phi^{,\nu}\phi_{,\mu} - \frac{1}{2}\delta^\nu_\mu\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha}\right)_{;\nu}. \quad (5.23)$$

Por outro lado, como consequência da segunda identidade de Bianchi, deduzida na Seção 2.2.3, tem-se

$$G^\nu{}_{\mu;\nu} = -\phi_{,\nu}G^\nu{}_\mu. \quad (5.24)$$

Logo, usando (5.21), (5.22) e (5.24) em (5.23), resulta

$$\kappa T^\nu{}_{\mu;\nu} = \phi_{,\nu}G^\nu{}_\mu + \frac{\omega}{2}\phi_{,\mu}\phi_{,\beta}\phi^{,\beta}. \quad (5.25)$$

Levando em conta (5.20), finalmente chega-se a

$$\nabla_\nu T^\nu{}_\mu = -T^\nu{}_\mu\phi_{,\nu}, \quad (5.26)$$

ou, de maneira análoga,

$$\nabla_\nu(e^\phi T^\nu{}_\mu) = 0. \quad (5.27)$$

Estamos agora em condições de mostrar, como mencionamos anteriormente, que o acoplamento para a matéria dado em (5.13) assegura o cumprimento do princípio de equivalência. É sabido que as equações de geodésicas podem ser diretamente deduzidas das

equações de campo [37][38][39]. Consideremos, então, um *ensemble* de partículas livres, isto é, um *ensemble* suficientemente grande de partículas não interagindo entre si que pode-se interpretar como um fluido perfeito sem pressão (poeira). A forma do tensor momento-energia, neste caso, será $T_{\mu\nu} = \rho \gamma_{\mu\alpha} \gamma_{\nu\beta} u^\alpha u^\beta$, onde ρ denota a densidade de energia e $u^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$ satisfaz a condição de normalização em um referencial de Weyl $\gamma^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$. Partindo da equação (5.27), um cálculo simples permite obter o seguinte resultado:

$$v^\nu v_{\mu;\nu} = 0, \quad (5.28)$$

onde o ponto e vírgula (;) denota a derivada covariante calculada com a conexão de Weyl. Desta maneira, as equações (5.28) são imediatamente identificadas com as equações das geodésicas afins weyllianas.

Por outro lado, a ação da matéria na teoria original de Brans-Dicke, $S_m = \int d^4 \sqrt{-g} L_m$, leva à seguinte divergência covariante de Weyl para o tensor momento-energia:

$$T^\nu_{\mu;\nu}{}^{(g)} = -\frac{\phi_{;\mu}}{2} T^{(g)} - 2\phi_{;\nu} T^\nu_{\mu}{}^{(g)}, \quad (5.29)$$

com $T^{(g)}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} L_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$. Considerando o mesmo raciocínio utilizado no caso anterior, escolhendo $\gamma^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = 1$ e tendo em conta que agora temos $T^{(g)} = g^{\mu\nu} T^{(g)}_{\mu\nu} = -e^{-\phi} \rho$, não é difícil verificar que as linhas do universo das partículas do fluido satisfazem a equação

$$u^\nu u_{\mu;\nu} = \frac{e^{-\phi}}{2} (\dot{\phi} u_\mu + \phi_{;\mu}), \quad (5.30)$$

que claramente não representa a equação das geodésicas, portanto concluímos que não se satisfaz o princípio de equivalência.

5.3 A ação de Brans-Dicke no formalismo dos referenciais de Weyl

Até agora temos trabalhado no chamado referencial de Weyl. Porém, pode ser interessante ver o que acontece quando consideramos a mesma teoria sob um novo ponto de vista, isto é, onde o campo escalar geométrico é nulo, em um referencial de Riemann. Apliquemos então as transformações de Weyl (2.1) e (2.2) à ação (5.2), adotando $f = \phi$. Levando em conta a invariância dos tensores de Riemann e Ricci por este conjunto de transformações, e

que $\bar{R} = e^{-f} R$, a ação de Brans-Dicke (5.2) no novo referencial resulta

$$S = \int d^4x \sqrt{-\gamma} (\bar{R}(\gamma, 0) + \omega \phi^{\cdot\alpha} \phi_{,\alpha}) + S_m(\gamma, \Psi, \nabla^\gamma \Psi). \quad (5.31)$$

Como consequência da invariância da ação da matéria definida em (5.13), o último dos termos em (5.31) preserva sua forma, isto é, $S_m(\gamma, 0) = S_m(g, \phi)$. Neste ponto, poderia se questionar por que após efetuar uma transformação de *gauge* para obter um referencial no qual o campo de Weyl é nulo, este está presente na ação (5.31). Contudo, neste caso o campo escalar ϕ não representa o campo escalar de Weyl, mas aparece associado ao fator conforme escolhido em (2.1) e (2.2). Em outras palavras, ϕ não desempenha mais um papel geométrico e conseqüentemente deve ser interpretado como um campo físico, semelhante àquele da teoria de BD.

Por outro lado, consideremos mais uma vez a equação (5.31). Efetuando a identificação $\varphi = \sqrt{2\omega}\phi$, é simples comprovar que esta teoria no referencial de Weyl corresponde, através de uma transformação de Weyl, a teoria de Einstein minimamente acoplada a um campo escalar sem massa em um referencial de Riemann.

Da mesma maneira, as equações de campo (5.14) e (5.18) no referencial de Riemann escrevem-se

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{R} = -\kappa T_{\mu\nu} - 2(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\varphi^{\cdot\alpha}\varphi_{,\alpha}), \quad (5.32)$$

e

$$\tilde{\square}\varphi = 0, \quad (5.33)$$

onde $\tilde{\square}$ é o operador d'Alembertiano calculado com os símbolos de Christoffel associados a métrica $\gamma_{\mu\nu}$.

Conclusões

Consideramos que o resultado central deste trabalho consiste na demonstração de que a teoria da relatividade geral pode ser completamente reformulada num contexto geométrico não-riemanniano, mais precisamente, em uma geometria de Weyl integrável. Com esta mudança na escolha da geometria, a gravitação deixa de ser associada unicamente ao tensor métrico, e passa a ser descrita por uma combinação de dois elementos, o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e um campo escalar ϕ . Embora a partir dos anos 70 tenham surgido diversas teorias que consideraram a geometria de Weyl integrável como a geometria do espaço-tempo [15][16], ao que sabemos, não foi explorado até agora um ingrediente aqui considerado fundamental. Nossa formulação da teoria geral da relatividade carrega uma propriedade adicional: a invariância sob transformações de Weyl. Os definidos referenciais de Weyl, conectados por estas transformações, proporcionam diversos enfoques do mesmo fenômeno físico, como consequência de ser caracterizados por diferentes geometrias (no sentido da métrica) e por um campo escalar que também assume valores diferentes em diferentes referenciais. Por outro lado, a invariância garante que tanto as equações de campo quanto as equações das geodésicas preservem sua forma, e as soluções das equações que descrevem a dinâmica do universo podem ser reinterpretadas de acordo com o referencial considerado. Além do mais, para um *calibre* específico, o referencial de Riemann, a relatividade geral é recuperada em sua formulação original.

Como exemplo, para o caso particular dos espaços conformalmente planos, mostramos que os efeitos gravitacionais podem ser analisados como se estivéssemos num espaço-

tempo de Minkowski na presença de um campo escalar como o único responsável pela dinâmica das partículas livres ou alternativamente, como efeitos da curvatura de um espaço-tempo curvo em que o campo escalar aparece no tensor métrico.

Por outro lado, baseados no formalismo apresentado, comprovamos que a idéia de considerar a geometria simplesmente como a linguagem para descrever os eventos físicos, escolhida de modo conveniente, é inteiramente consistente com nossos resultados. Em particular, mostramos que o trabalho desenvolvido por Roxburgh e Tavakol [34] pode ser completamente reinterpretado no contexto dos referenciais de Weyl.

Para finalizar, a diferença da hipótese original que supõe como solo matemático uma geometria riemanniana, via o *princípio variacional de Palatini* encontramos que a teoria gravitacional de Brans-Dicke escolhe naturalmente um tipo de estrutura geométrica mais geral, a geometria de Weyl integrável. Este fato proporciona uma nova interpretação para o campo de BD, inicialmente considerado como o inverso da *constante* gravitacional. Nessa versão original, o campo escalar participa na descrição da interação gravitacional, mas não das equações geodésicas. Segundo o novo enfoque, o campo escalar é um objeto de caráter geométrico que define a estrutura espaço-temporal, e desempenha um papel fundamental no movimento de partículas e raios de luz. Mais especificamente, reformulando a proposta de Brans e Dicke as equações de campo estão definidas num espaço de Weyl integrável com uma métrica $g_{\mu\nu}$ e um campo geométrico ϕ . As partículas seguem, então, geodésicas de Weyl, nas que por definição, o campo escalar participa. Contudo, ainda que a teoria original não seja invariante, é possível aplicar uma transformação de Weyl com o intuito de explorar diferentes perspectivas. A escolha imediata foi considerar o referencial de Riemann, onde recuperamos a conhecida geometria e descobrimos que a teoria de Brans-Dicke se transmuta para se tornar a teoria de Einstein minimamente acoplada com um campo escalar sem massa. Ainda mais, os resultados obtidos nesta última podem ser transportados ao contexto da teoria de Brans-Dicke, por uma transformação de Weyl. Este fato proporciona sem dúvidas, novas possibilidades que tentaremos desenvolver em futuros trabalhos.

APÊNDICE A

Relatividade geral e geometria de Riemann

A teoria da relatividade especial, publicada por Einstein em 1905, trata os fenômenos mecânicos e electromagnéticos na ausência de campo gravitacional. A geometria do espaço-tempo o qual é denominado espaço-tempo de Minkowski é definida pelas linhas de universo das partículas livres ou da luz. Duas linhas de universo paralelas podem ser estendidas até o infinito, sem que se interceptem, como na geometria euclidiana. Neste sentido, um espaço de Minkowski é um espaço plano, porque obedece os axiomas do paralelismo euclidiano. Porém, não é exatamente um espaço euclidiano porque sua métrica é diferente: os fótons viajam em linhas de universo de comprimento nulo [3]. Em consequência, a relatividade especial é descrita por uma geometria plana, não-euclidiana.

Por outro lado, na presença de um campo gravitacional as linhas de universo de duas partículas próximas que inicialmente são paralelas, em geral deixarão de sê-lo. Portanto, o espaço-tempo da gravitação não é plano. No contexto da geometria euclidiana, se é abandonado o postulado de paralelismo, obtém-se um espaço curvo. Espaços em que retas inicialmente paralelas (geodésicas) ao serem estendidas não permanecem paralelas incluem a classe dos chamados *espaços riemannianos*.

A grande acerto de Einstein foi descobrir as semelhanças entre os espaços riemannianos e a gravitação. Identificou as trajetórias das partículas livres com linhas geodésicas

de um espaço curvo: as geodésicas substituem as retas do espaço-tempo de Minkowski. A teoria da gravitação criada por Einstein que utiliza o espaço-tempo curvo para representar as trajetórias das partículas livres, é chamada teoria da *relatividade geral*.

Neste apêndice apresentaremos as noções fundamentais da relatividade geral como uma teoria fortemente ligada a sua estrutura geométrica.

A.1 Princípios da relatividade geral

Einstein criou uma teoria do espaço-tempo e gravitação que revolucionou as noções de espaço e tempo ainda mais do que já havia feito com a relatividade especial (RE). Uma das idéias fundamentais que motivou sua formulação reside no fato de que todos os corpos são igualmente afetados pela força gravitacional independentemente de suas massas ou composição interna. Em consequência, dada uma mesma velocidade inicial todos os corpos seguem exatamente a mesma trajetória na presença de um campo gravitacional. Este fato é conhecido como *princípio de equivalência*. Por outro lado, nenhum corpo no universo se move como partícula livre no sentido newtoniano e, portanto, os referenciais inerciais apenas podem ser considerados de maneira aproximada. Além do mais, não existe um padrão natural para as linhas retas na Natureza. Desta maneira, é natural supor que a geometria do espaço-tempo é não-euclidiana, e que nesta geometria as trajetórias das partículas que interagem apenas com o campo gravitacional correspondem as trajetórias das partículas livres no espaço-tempo de Minkowski. Aquilo que na teoria newtoniana da gravitação é chamado de campo gravitacional, na teoria de Einstein é substituído pelos efeitos de um espaço-tempo não-euclidiano. Como foi mencionado, Einstein escolheu esta geometria como a criada por Riemann. Na geometria riemanniana, a generalização das linhas retas de uma geometria euclidiana é dada pelas chamadas *linhas geodésicas*. Naturalmente, este conjunto de curvas preferenciais representam as trajetórias das partículas livres. Em poucas palavras, *na teoria geral, o espaço-tempo não é plano, como na teoria da relatividade especial. As linhas de universo das partículas livres num campo gravitacional são as geodésicas associas a métrica do espaço-tempo curvo* [4].

Uma versão alternativa do princípio de equivalência, conhecido como *princípio de covariância geral*, estabelece que as equações físicas devem ser invariantes por transformações gerais de coordenadas [5] [6]. Isto significa que as equações físicas devem ser escritas de forma invariante, o que implica utilizar na formulação matemática da teoria apenas tensores

do espaço-tempo. Desta maneira, este princípio estabelece que a métrica e combinações covariantes de suas derivadas sejam as únicas grandezas relativas ao espaço-tempo que podem aparecer nas equações físicas. Por outro lado, vale a pena destacar que este princípio não é um princípio de invariância no sentido do princípio da relatividade especial, mas um enunciado sobre os efeitos da gravitação, segundo o qual uma equação física que é válida na ausência da gravitação e como consequência de sua covariância geral, é válida também na presença de gravitação.

Uma segunda idéia que motivou Einstein na construção da sua teoria geral foi o *princípio de Mach*. Como sabemos, a teoria newtoniana supõe a existência de um espaço absoluto, a partir do qual são definidos os *referenciais inerciais*, aqueles em repouso ou que se movem com velocidade constante respeito ao espaço absoluto. Ernest Mach foi, na década de 1880, o autor de uma das mais sólidas críticas a esta concepção. Sua hipótese estabelecia que existe alguma influência *da massa da Terra e outros corpos celestes* que determinam os referenciais inerciais [7]. Da mesma maneira, na teoria da relatividade especial a estrutura do espaço-tempo é dada de forma conclusiva e não afetada pela distribuição de matéria presente no universo. Porém, na elaboração da nova teoria geral da relatividade, Einstein aceitou as idéias de Mach, embora a resposta dada pelo princípio de equivalência ao problema da inércia esteja a meio caminho entre as visões newtoniana e machiana [7].

A.2 Geometria Riemanniana

Como foi mencionado, a geometria Riemanniana foi a linguagem matemática escolhida por Einstein para desenvolver sua teoria física. Nesta seção, apresentaremos os conceitos que definem essa geometria e estudaremos em profundidade as noções matemáticas nas que se assenta a teoria geral da relatividade.

Começemos, então, com a definição de conexão afim para uma geometria arbitrária.

Definição A.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável e seja $T(M)$ o conjunto de vetores diferenciáveis sobre M . Uma **conexão afim** é uma aplicação $\nabla : T(M) \times T(M) \rightarrow T(M)$, denotada por $(U, V) \rightarrow \nabla_U V$ que satisfaz as seguintes propriedades*

$$\nabla_{fV+gU} W = f \nabla_V W + g \nabla_U W, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla_V (U + W) = \nabla_V U + \nabla_V W, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla_V(fU) = V(f)U + f\nabla_V U, \quad (\text{A.3})$$

onde $V, U, W \in T(M)$, e f, g são funções escalares C^∞ definidas sobre M .

A partir dessa definição, deduzimos um resultado importante, que permite definir a derivada covariante ao longo de uma curva diferenciável.

Proposição A.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e seja V um campo vetorial definido ao longo da curva diferenciável $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$. Então existe uma única correspondência que associa outro campo escalar $\frac{DV}{d\lambda}$ ao longo de α , com V , tal que*

$$\frac{D(V + U)}{d\lambda} = \frac{DV}{d\lambda} + \frac{DU}{d\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{D(fV)}{d\lambda} = \frac{df}{d\lambda}V + f\frac{DV}{d\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

onde $\alpha = \alpha(\lambda)$ e $\lambda \in (a, b)$.

Se o campo vetorial $U(\lambda)$ é induzido por um campo de vetores $Y \in T(M)$, então $\frac{DU}{d\lambda} = \nabla_V Y$, onde V é o vetor tangente a curva α , isto é, $V = \frac{d}{d\lambda}$. Para uma demonstração desta proposição, sugerimos a Ref. [19].

Estamos agora em condições de introduzir o conceito de transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva.

Definição A.2.2. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ , $\alpha : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável sobre M e V um campo de vetores definido ao longo de $\alpha = \alpha(\lambda)$. O campo vetorial V se diz **transportado paralelamente** se $\frac{DV}{d\lambda} = 0$ para todo valor do parâmetro $\lambda \in (a, b)$.*

Entre todas as possíveis conexões afins definidas sobre a variedade, as chamadas conexões *simétricas* desempenham um papel importante tanto na geometria riemanniana quanto em geometrias mais gerais.

Definição A.2.3. *Uma conexão afim ∇ definida sobre M é dita **simétrica** se para cada $U, V \in T(M)$ se cumpre a seguinte condição:*

$$\nabla_V U - \nabla_U V = [V, U]. \quad (\text{A.6})$$

A seguir, será apresentada a noção de compatibilidade riemanniana entre métrica e conexão através da seguinte definição:

Definição A.2.4. Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é **compatível** com a métrica se, e somente se,

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W), \quad (\text{A.7})$$

para quaisquer campos de vetores U , V e W .

Neste ponto, estamos em condições de enunciar o teorema de Levi-Civita para uma geometria de Riemann.

Teorema A.2.1. (de Levi-Civita) Dada uma variedade riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M que satisfaz as seguintes condições

- ∇ é simétrica.
- ∇ é compatível com a métrica riemanniana.

A conexão dada por este teorema é chamada *conexão riemanniana* (ou de Levi-Civita) de M . As componentes desta conexão (ou *símbolos de Christoffel*) expressas em um sistema de coordenadas $\{x^a\}$ tomam a conhecida forma

$$\{\Gamma_{jk}^i\} = \frac{1}{2} g^{il} [g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}]. \quad (\text{A.8})$$

Por outro lado, em termos dos símbolos de Christoffel e a partir da proposição (A.2.1), recuperamos a expressão para *derivada covariante* ao longo de uma curva $\alpha(\lambda)$

$$\frac{DV}{d\lambda} = \left\{ \frac{dv^k}{d\lambda} + \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx^i}{d\lambda} \right\} X_k, \quad (\text{A.9})$$

onde $V = v^j X_j$ e $X_j = \frac{\partial}{\partial x^j}(\alpha(\lambda))$ [19].

A.2.1 Equações de geodésicas

Intuitivamente, geodésicas são as linhas "mais retas possíveis" que podem ser traçadas em uma geometria curva. Fisicamente, estas curvas privilegiadas desempenham um papel fundamental como trajetórias de partículas livres e raios de luz.

Para começar, consideremos uma curva C e um campo de vetores ao longo de C , v . De acordo com a definição (A.2.2) em um sistema de coordenadas $\{x^\alpha(\lambda)\}$, dizemos

que os vetores $v(x)$ são transportados paralelamente ao longo da curva quando se cumpre $\frac{Dv^\alpha}{d\lambda} = 0$, sendo λ um parâmetro ao longo de C . Utilizando esta mesma notação, a continuação, introduzimos a definição de *geodésica afim*.

Definição A.2.5. *Uma **geodésica afim** é uma curva C cujo vetor tangente $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ é transportado paralelamente ao longo de C desde $x^\alpha \in C$ até $x^\alpha(\lambda) \in C$, isto é*

$$\frac{D}{D\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Usando (A.9), a equação (A.10) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (\text{A.11})$$

onde $\Gamma_{\nu\beta}^\alpha$ são as componentes da conexão afim.

A forma da equação de geodésica (A.11) é privilegiada no sentido de que o vetor tangente transportado paralelamente ao longo da geodésica preserva seu comprimento. O parâmetro λ é chamado *parâmetro afim* e é definido a menos de uma transformação linear

$$\lambda' = \lambda s + b, \quad (\text{A.12})$$

onde a, b são constantes. Para finalizar, é interessante apresentar o seguinte teorema que estabelece a existência e unicidade das linhas geodésicas.

Teorema A.2.2. *Seja uma variedade M com uma conexão afim. Então, para cada ponto x sobre a variedade e para cada vetor tangente v a M em x , existe uma linha geodésica que passa por x e é tangente a v .*

A demonstração deste teorema é baseada nos teoremas de existência e unicidade das equações diferenciais.

A.2.2 Tensor de Riemann

Segundo o que foi apresentado na primeira parte desta seção, partindo de uma conexão afim dada é possível definir o transporte paralelo de um vetor entre dois pontos p e q , ao longo de uma curva C (A.2.2). Contudo, o vetor V_q obtido após transportar paralelamente o vetor inicial V_p , em geral depende da curva que os conecta. Este fato pode ser utilizado

para definir uma noção intrínseca de curvatura. O tensor de curvatura Riemanniano é então responsável pela variação de um vetor transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada infinitesimal [4].

Para um espaço de Riemann, e um sistema de coordenadas local, as componentes do tensor de curvatura têm a seguinte forma:

$$R^\alpha_{\mu\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\beta} + \Gamma^\alpha_{\rho\nu}\Gamma^\rho_{\beta\mu} - \Gamma^\alpha_{\rho\beta}\Gamma^\rho_{\mu\nu}, \quad (\text{A.13})$$

onde $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christoffel definidos na equação (A.8).

Se em lugar do tensor de Riemann definido acima consideramos sua expressão completamente covariante $R_{\alpha\mu\beta\nu} = g_{\sigma\alpha}R^\sigma_{\mu\beta\nu}$, não é difícil ver que valem as seguintes propriedades:

- $R_{\alpha\mu\beta\nu} = R_{\beta\nu\alpha\mu}$ (*Simetria*);
- $R_{\alpha\mu\beta\nu} = -R_{\mu\alpha\beta\nu} = -R_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\mu\alpha\nu\beta}$ (*Antissimetria*);
- $R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\mu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu}$ (*Propriedade cíclica*);
- $R_{\alpha\mu\beta\nu;\sigma} + R_{\alpha\mu\sigma\beta;\nu} + R_{\alpha\mu\nu\sigma;\beta} = 0$ (*Identidade de Bianchi*).

A contração do tensor de Riemann define, por outro lado, o *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = R^\beta_{\mu\beta\nu}. \quad (\text{A.14})$$

Partindo desta definição e utilizando as propriedades dadas acima é possível demonstrar que o tensor de Ricci é simétrico; isto é, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Para terminar, uma nova contração leva à definição do *escalar de curvatura* Riemanniano

$$R = g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\beta\nu} = g^{\mu\nu}R^\beta_{\mu\beta\nu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.15})$$

A.2.3 Tensor métrico. Geodésicas métricas

Vimos que para definir o conceito de curvatura, o qual é expresso pelo tensor de Riemann, necessitamos apenas de um único objeto geométrico, a saber, a conexão afim. Contudo, não é possível ainda falarmos de *comprimento entre dois pontos* ou *ângulos entre vetores*. Incorporaremos então, um novo elemento, o tensor métrico.

Consideremos um tensor covariante de segunda ordem simétrico, denotado por $g_{\alpha\beta}$, tal que $\det g_{\alpha\beta} \neq 0$. Dizemos que $g_{\alpha\beta}$ é um *tensor métrico*, ou que define uma métrica na variedade. Podemos, agora, definir comprimento de arco entre dois pontos de uma curva da seguinte maneira:

Definição A.2.6. *Seja $x^\alpha(\lambda)$ uma curva parametrizada. O **comprimento de arco** entre dois pontos $x^\alpha(\lambda_0)$ e $x^\alpha(\lambda_1)$ é definido por¹*

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{\left| g_{\alpha\beta}(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right|} d\lambda. \quad (\text{A.16})$$

Vamos supor agora que um vetor $k^\alpha(\lambda_0)$ em um ponto $x^\alpha(\lambda_0)$ de uma curva parametrizada é transportado paralelamente ao longo de $x^\alpha(\lambda)$. Admitamos a hipótese de que no caso da parametrização afim este vetor preserva seu comprimento. Seja $\lambda = s$ o parâmetro afim definido na seção (A.2.1), então temos que

$$0 = \frac{d(g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta)}{ds} = \frac{D(g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta)}{ds} = \frac{Dg_{\alpha\beta}}{ds} k^\alpha k^\beta, \quad (\text{A.17})$$

e da arbitrariedade do campo vetorial k^α

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{ds} = \frac{dx^\mu}{ds} g_{\alpha\beta;\mu} = 0, \quad (\text{A.18})$$

onde o ponto e vírgula (;) denota a derivada covariante ordinária calculada com os símbolos de Christoffel, isto é

$$g_{\alpha\beta;\mu} \equiv \nabla_\mu g_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\nu g_{\nu\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\nu g_{\alpha\nu}. \quad (\text{A.19})$$

Como (A.18) é independente da curva, obtemos

$$g_{\alpha\beta;\mu} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Espaços nos quais o tensor métrico satisfaz a condição (A.20) e, além disso, a conexão afim é simétrica, são chamados *espaços riemannianos*.

A seguir, vejamos uma propriedade adicional das geodésicas a partir de uma métrica dada. Veremos que estas curvas extremizam o comprimento de arco (dado pela métrica) de curvas que passam por dois pontos determinados.

¹É comum simbolizar a equação (A.16) por $l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ds$, escrevendo $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$.

Com esse intuito, consideremos uma curva diferenciável C sobre a variedade M dotada de uma métrica riemanniana $g_{\alpha\beta}$. O comprimento de arco l desta curva é dado por (A.16). Vamos supor inicialmente que $g_{\alpha\beta}(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} > 0$ (curvas do tipo-tempo). Em primeiro lugar, apresentamos a seguinte definição.

Definição A.2.7. *Seja $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ a linha de universo de uma partícula no espaço-tempo. Sejam $x^\mu(\lambda_0)$ e $x^\mu(\lambda_1)$ dois eventos correspondentes a dois pontos parametrizados, respectivamente por λ_0 e λ_1 . Chamamos **tempo próprio** decorrido entre esses dois eventos e denotamos $\Delta\tau$ a expressão ²*

$$\Delta\tau = \int \sqrt{g_{\alpha\beta}(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}} d\lambda. \quad (\text{A.21})$$

É possível mostrar que uma condição necessária e suficiente para que uma determinada curva C extremize (A.21) é que C satisfaça as equações de Euler-Lagrange, dadas por

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial f}{\partial v^\alpha} \right) - \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (\text{A.22})$$

onde f é o integrando em (A.21) e $v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$. Definindo o parâmetro s por

$$\frac{ds}{d\lambda} = \sqrt{g_{\alpha\beta}(\lambda) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}}, \quad (\text{A.23})$$

a equação (A.22) leva a

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (\text{A.24})$$

que é a equação de geodésicas (A.11) para o caso riemanniano [8]. Concluindo, temos que num espaço riemanniano *uma curva extremiza o comprimento entre dois pontos se, e somente se, é uma geodésica*.

Na discussão anterior, apenas foram consideradas curvas do tipo-tempo. No entanto, sabemos que existem geodésicas para as que o comprimento entre dois pontos é zero, as chamadas *geodésicas nulas* [6]. Estas últimas não podem, evidentemente, ser definidas pela variação de $\Delta\tau$ em (A.21).

²É importante notar que na relatividade geral esta definição é alçada ao status de um postulado físico: a chamada *hipótese do relógio* [6].

A.3 Equações de Einstein

Como foi mencionado, a teoria geral de Einstein supõe que o campo gravitacional é uma consequência da geometria não plana. Como resultado, a gravitação deve estar relacionada com o tensor de curvatura, que é construído a partir das derivadas segundas do tensor métrico. Além do mais, inspirando-se de certa maneira nas idéias de Mach (ver Sec. (A.1)), a teoria da relatividade geral considera que as propriedades geométricas do espaço-tempo são determinadas pela distribuição de matéria no universo. Nesta seção, apresentaremos a lei que mostra como as fontes do campo gravitacional determinam a métrica.

Suponhamos que $T_{\mu\nu}$ é o *tensor momento-energia* que permite descrever a distribuição de matéria. Da relatividade especial, a equivalência entre a massa e a energia sugere que todas as formas de energia atuam como fonte do campo gravitacional. Desta maneira, é plausível considerar $T_{\mu\nu}$ como o termo de fonte nas equações de campo. Sabemos que no espaço de Minkowski, o tensor momento-energia deve satisfazer a seguinte condição:

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.25})$$

o que expressa a lei de conservação do momento e da energia da matéria.

Uma técnica derivada do princípio de covariância geral pode ser aplicada para obter a equação equivalente a (A.25) na presença de gravitação. Também chamado na literatura *princípio de acoplamento mínimo*, este estabelece uma prescrição para obter as equações da teoria geral, a partir das equações válidas na relatividade especial: substitui-se a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e as derivadas ordinárias por derivadas covariantes. Assim, a generalização da equação (A.10) para um espaço-tempo curvo nos dá

$$\nabla^\alpha T_{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{A.26})$$

Por outro lado, temos que o tensor de Riemann é um tensor de quarta ordem, enquanto o tensor de momento-energia é de segunda ordem. Em analogia com a equação do potencial gravitacional newtoniano $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$, é natural considerar alguma grandeza construída a partir do tensor de curvatura com a mesma ordem que o tensor $T_{\alpha\beta}$. O tensor de Ricci (A.14), constitui uma possível escolha. As equações de campo poderiam ser dadas por $R_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$, sendo κ uma constante. Porém, estas equações não são consistentes com (A.26) já que em geral, $R^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} \neq 0$. Por outro lado, se consideramos uma contração das

identidades de Bianchi (propriedade dada em (A.2.2)), chegamos a uma equação importante para o tensor de Ricci [7]

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0, \quad (\text{A.27})$$

onde o tensor contravariante de segunda ordem, $G^{\alpha\beta}$, é chamado *tensor de Einstein* e tem a seguinte forma

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R. \quad (\text{A.28})$$

Este tensor é simétrico, linear nas segundas derivadas da métrica e obedece à condição (A.27), que tem a mesma forma que (A.26). Desta maneira, $G^{\alpha\beta}$ constitui um melhor candidato para participar nas equações de campo, que finalmente se escrevem

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.29})$$

Estas são as chamadas *equações de Einstein* e foram deduzidas aqui com os mesmos argumentos utilizados originalmente por Einstein. Contudo, David Hilbert foi o primeiro a obter as mesmas equações a partir de um princípio variacional. Veremos este resultado a seguir.

A.4 Equações de campo a partir do princípio variacional de Hamilton

Hilbert propôs que todas as teorias, físicas e matemáticas deviam ser deduzidas a partir de um conjunto de axiomas, o que contribuiria para esclarecer a estrutura lógica das teorias físicas. Para a teoria da gravitação, os axiomas implicavam usar um *princípio variacional* a partir de uma ação, onde as componentes do tensor métrico são consideradas as grandezas independentes a serem variadas. Além disso, postulou que esta ação deveria ser uma grandeza escalar e que as equações de campo obtidas dessa maneira deveriam ser equações diferenciais de segunda ordem em $g_{\mu\nu}$ [8].

Assim o princípio variacional proposto por Hilbert começa especificando uma densidade lagrangiana, função do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e de suas derivadas, dada por

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(g_{\alpha\beta}, \partial_{\mu}g_{\alpha\beta}) d^4x, \quad (\text{A.30})$$

sendo Ω uma região finita da variedade. O *princípio de ação mínima* estabelece que se fizermos variações arbitrárias da métrica $\delta g_{\alpha\beta}$ que se anulem sobre a superfície do volume Ω ,

então a métrica $g_{\mu\nu}$ buscada deverá ser aquela para a qual S seja um extremo, isto é, $\delta S = 0$ em primeira ordem na variação $\delta g_{\mu\nu}$.

A densidade lagrangiana geométrica $\mathcal{L}_G$ mais simples que pode ser construída usando $g_{\alpha\beta}$ e suas derivadas, envolve o escalar de curvatura R na forma

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g}R. \quad (\text{A.31})$$

Assim, a ação integral torna-se

$$S_G = \int_{\Omega} \sqrt{-g} R d^4x. \quad (\text{A.32})$$

Efetuada a variação de (A.32) na região Ω obtém-se

$$\delta S_G = \int (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}]) d^4x. \quad (\text{A.33})$$

Introduzindo um sistema de coordenadas local onde os símbolos de Christoffel se anulam, a variação das componentes do tensor de Ricci é dada pela *equação de Palatini* [6]

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{,\lambda} - \delta (\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda})_{,\nu}. \quad (\text{A.34})$$

Como as derivadas parciais da métrica se anulam em Ω , (A.34) pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\mu\nu}^{\nu})_{,\lambda} \equiv A_{,\lambda}^{\lambda}. \quad (\text{A.35})$$

Dado que temos uma divergência total, então, pelo teorema de Stokes, a integral do termo acima contribui apenas com um termo de superfície. Já que a métrica e suas derivadas se anulam sobre a superfície de Ω , o primeiro termo de (A.33) não contribui para δS_G .

Consideremos agora o último termo da equação (A.33). Usando $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}$, temos que

$$\delta [g^{\mu\nu} \sqrt{-g}] = \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \left(\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right). \quad (\text{A.36})$$

Substituindo (A.36) em (A.33), obtém-se

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} \left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \right) \delta g^{\alpha\beta} d^4x, \quad (\text{A.37})$$

ou, em termos do tensor de Einstein,

$$\delta S_G = \int \sqrt{-g} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} d^4x. \quad (\text{A.38})$$

Suponhamos agora a presença de outros campos além do campo gravitacional, os quais são descritos por uma densidade lagrangiana $\mathcal{L}_M$, a lagrangiana da matéria. A ação da matéria escreve-se

$$S_M = \kappa \int \mathcal{L}_M \sqrt{-g} d^4x. \quad (\text{A.39})$$

A variação do argumento na equação (A.39) dá como resultado

$$\delta[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M] = \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}, \quad (\text{A.40})$$

uma vez que, em geral, a lagrangiana depende da métrica e das derivadas da métrica. Definimos o vetor $\mathbf{B}$ como

$$B^\lambda = \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.41})$$

cujas divergência ordinária é dada pela seguinte expressão

$$B^\lambda_{,\lambda} = \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}. \quad (\text{A.42})$$

Substituindo este último resultado em (A.40), chega-se a

$$\delta[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M] = \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} - \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \delta g^{\mu\nu} + B^\lambda_{,\lambda}. \quad (\text{A.43})$$

Assim, a integral de $B^\lambda_{,\lambda}$ contribui apenas como um termo de superfície, como consequência do teorema de Gauss. Como $\delta g_{\mu\nu}$ se anula sobre a superfície, esta última integral se anula, o que finalmente leva a

$$\delta S_M = \int \left(\frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \right) \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.44})$$

Definindo

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}} - \left\{ \frac{\partial[\sqrt{-g}\mathcal{L}_M]}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}} \right\}_{,\lambda} \right), \quad (\text{A.45})$$

como o tensor momento-energia simétrico, chega-se a

$$\delta S_M = \kappa \int \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x. \quad (\text{A.46})$$

Finalmente, usando as equações (A.37) e (A.46), o princípio variacional leva as equações de campo para a teoria da relatividade geral

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.47})$$

em concordância com (A.29).

Teoria gravitacional de Brans-Dicke

B.1 Teoria de Brans-Dicke

Em 1961, Brans e Dicke publicaram uma nova teoria que tornou-se o protótipo das teorias alternativas à relatividade geral de Einstein [43]. Esta teoria inclui um campo escalar, o qual, junto com o tensor métrico da relatividade geral, descreve a gravitação. A motivação mais importante provém da cosmologia, a saber, a busca de uma nova teoria que incorporasse explicitamente o princípio de Mach, o qual não aparece de maneira explícita na teoria de Einstein.

A teoria de Brans-Dicke parte de uma ação que, no chamado referencial de Jordan é dada por

$$S^{(BD)} = \int d^4\sqrt{-g} \left[\varphi \tilde{R} + \frac{\omega}{\varphi} g^{\mu\nu} \varphi_{;\mu} \varphi_{;\nu} - V(\varphi) \right] + S^{(m)}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$S^{(m)} = \frac{16\pi}{c^4} \int d^4x \sqrt{-g} L^{(m)}, \quad (\text{B.2})$$

é a ação que descreve a matéria ordinária e ω um parâmetro sem dimensões. O fator φ no denominador do segundo termo entre colchetes em (B.1) é introduzido para tornar ω adimensional. A matéria não se acopla diretamente com φ , no sentido que a densidade

lagrangiana $L^{(m)}$ não depende de φ (acoplamento mínimo com a matéria), porém φ se acopla diretamente com o escalar de Ricci. Assim, o campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e pelo campo escalar de Brans-Dicke φ , os quais descrevem a dinâmica juntamente com os campos variáveis da matéria. O potencial escalar $V(\varphi)$ constitui uma generalização natural da constante cosmológica e se reduz a uma constante ou a um termo de massa; frequentemente é considerado quando a teoria de BD é usada na construção de modelos do universo primordial ou em cenários onde se faz a hipótese de quintessência.

Como já foi comentado, a motivação original para introduzir a teoria gravitacional de Brans-Dicke foi a procura de uma teoria que contivesse o princípio de Mach. Um problema local como o estudo da solução de BD, equivalente à solução de Schwarzschild da relatividade geral, leva em consideração a matéria cosmológica distribuída no universo e o fato de que o acoplamento gravitacional é gerado por esta matéria através do campo cosmológico φ . Ao contrário, na teoria da relatividade geral o acoplamento gravitacional é constante e é possível considerar que a solução de Schwarzschild despreza os efeitos do resto do universo [26].

Variando a ação (B.1) em relação a $g_{\mu\nu}$ e usando as relações já conhecidas

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.3})$$

$$\delta(\sqrt{-g}\tilde{R}) = \sqrt{-g}\left(\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\tilde{R}\right)\delta g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}\tilde{G}_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

onde $\tilde{G}_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein calculado com os símbolos de Christoffel, obtém-se a equação de campo

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa'}{\varphi}T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{\omega}{\varphi^2}\left(\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^{;\alpha}\varphi_{,\alpha}\right) - \frac{1}{\varphi}(\varphi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\varphi^{;\alpha}_{;\alpha}) - \frac{V}{2\varphi}g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.5})$$

onde

$$T_{\mu\nu}^{(m)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}L^{(m)})}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (\text{B.6})$$

é o tensor momento-energia associado à matéria. A variação com respeito a φ , por outro lado, fornece

$$\tilde{R} - \frac{2\omega}{\varphi}\varphi^{;\alpha}_{;\alpha} + \frac{\omega}{\varphi^2}\varphi^{,\alpha}\varphi_{,\alpha} - \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (\text{B.7})$$

Tomando o traço de (B.5), segue

$$\tilde{R} = \kappa'\frac{T^{(m)}}{\varphi} + \frac{\omega}{\varphi^2}\varphi^{,\alpha}\varphi_{,\alpha} - 3\frac{\varphi^{;\alpha}_{;\alpha}}{\varphi} + 2\frac{V}{\varphi}, \quad (\text{B.8})$$

e, usando esse resultado em (B.5) para eliminar $\tilde{R}$ da equação (B.7), tem-se

$$\varphi_{;\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\omega + 3} \left(\kappa' T^{(m)} + \varphi \frac{dV}{d\varphi} - 2V \right) \quad (\text{B.9})$$

sempre que $\omega \neq -\frac{3}{2}$. Para este valor determinado do parâmetro, é necessário recorrer à equação (B.7), a qual resulta

$$\tilde{R} + \frac{3}{\varphi} \varphi_{;\alpha}^{\alpha} - \frac{3}{2\varphi^2} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha} - \frac{dV}{d\varphi} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Por outro lado, para $\omega = -\frac{3}{2}$, (B.5) escreve-se

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = -\frac{\kappa'}{\varphi} T_{\mu\nu}^{(m)} - \frac{3}{2\varphi^2} \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha} \right) - \frac{1}{\varphi} (\varphi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \varphi_{;\alpha}^{\alpha}) - \frac{V}{2\varphi} g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.11})$$

e o traço é dado por

$$\tilde{R} = \kappa' \frac{T^{(m)}}{\varphi} - \frac{3}{2\varphi^2} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha} - 3 \frac{\varphi_{;\alpha}^{\alpha}}{\varphi} + 2 \frac{V}{\varphi}. \quad (\text{B.12})$$

É claro que as equações (B.10) e (B.12) são incompatíveis, a menos que $T = 0$ e $V = \varphi^2$. Isto significa que para $\omega = -\frac{3}{2}$ o sistema de equações diferenciais para $g_{\mu\nu}$ e φ , (B.5) e (B.7), fica indeterminado. Consequentemente, é possível obter uma solução para $g_{\mu\nu}$ escolhendo um valor fixo para o campo escalar. Por exemplo, tomando $\varphi = \varphi_0$ constante, (B.5) torna-se as equações de Einstein sem constante cosmológica onde a constante gravitacional G é substituída por φ_0 . Por outro lado, obtém-se um resultado semelhante considerando-se o potencial escalar como sendo nulo e efetuando a transformação conforme $\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\varphi} g_{\mu\nu}$, dado que a transformação do tensor de Einstein é da forma

$$\bar{G}_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu} - \frac{3}{2\varphi^2} \left(\varphi_{,\mu} \varphi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varphi^{\alpha} \varphi_{,\alpha} \right) - \frac{1}{\varphi} (\varphi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \varphi_{;\alpha}^{\alpha}). \quad (\text{B.13})$$

Este fato matemático é interpretado na literatura como a equivalência conforme entre a teoria gravitacional de Brans-Dicke e a relatividade geral para o caso em que $\omega = -3/2$ [44][45].

Considerando novamente um valor arbitrário para o parâmetro ω , a partir de (B.9) vemos que o campo φ tem como fonte a matéria não-conforme, exceto no caso em que $T^{(m)} \equiv T^{(m)\mu}_{\mu} = 0$. No entanto, φ não acopla diretamente com $T_{\mu\nu}^{(m)}$ ou $L^{(m)}$. O campo escalar φ interfere com a matéria apenas através do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ segundo a expressão (B.9).

Por outro lado, é importante destacar que a forma da ação (B.1) sugere que o campo escalar de BD desempenha o papel de acoplamento gravitacional, já que

$$G(\varphi) = \frac{1}{\varphi}. \quad (\text{B.14})$$

Outra característica desta teoria é que no limite do parâmetro $\omega \rightarrow \infty$, na maioria dos casos ela é indistinguível da relatividade geral. De fato, embora esta situação seja comumente citada na literatura, é verdade que muitas soluções exatas da teoria de BD não reproduzem a correspondente solução da RG quando $\omega \rightarrow \infty$. As exceções parecem estar associadas a soluções onde o traço do tensor momento-energia é nulo, isto é, $T^{(m)} = 0$. O fato de que o limite $\omega \rightarrow \infty$ da teoria de BD nem sempre reproduz a relatividade geral assinala uma diferença conceitual entre ambas as teorias. Na teoria de BD o acoplamento gravitacional é determinado por toda a matéria presente no universo, de acordo com o princípio de Mach. Portanto, carece de sentido considerar soluções para o vazio, que trivialmente têm $T^{(m)} = 0$. Ao contrário, a teoria de Einstein, com um acoplamento gravitacional constante, permite considerar soluções no vazio com $R_{\mu\nu} = 0$. Assim, o limite $\omega \rightarrow \infty$ não reduzirá as soluções de BD com $T^{(m)} = 0$ às soluções da RG, as quais correspondem a uma situação física basicamente diferente [26] [46].

Como comentário final, é interessante destacar que a teoria proposta por Brans e Dicke tem servido como base para várias teorias da gravitação alternativas à relatividade geral. Entre muitas destas que aparecem na literatura, as que parecem mais interessantes são as teorias escalares-tensoriais, as quais generalizam a teoria de BD. Estas incluem também teorias em que o campo escalar não se acopla minimamente com a geometria e as teorias de matéria induzida [26].

B.2 Soluções cosmológicas na teoria de Brans-Dicke

Nesta seção, apresentaremos soluções do tipo Friedman-Robertson-Walker para a teoria de Brans-Dicke no referencial de Jordan. Consideremos a métrica dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (\text{B.15})$$

em coordenadas polares co-móveis. As soluções de vazio ($a(t), \varphi(t)$) correspondem a $T_{\mu\nu}^{(m)} = 0$ e têm o campo escalar gravitacional como única fonte formal de gravidade, enquanto na

presença de matéria as soluções são obtidas admitindo-se que a matéria ordinária é descrita por um fluido perfeito com tensor momento-energia escrito na forma

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (p^{(m)} + \rho^{(m)})u_\mu u_\nu + p^{(m)}g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.16})$$

com equação barotrópica de estado dada por

$$p^{(m)} = (\alpha - 1)\rho^{(m)}, \quad (\text{B.17})$$

sendo α uma constante que toma valores no intervalo $0 \leq \alpha \leq 2$. Aqui podemos incluir a constante cosmológica Λ reinterpretando-a como se tivéssemos um fluido obedecendo à equação (B.17) com $\alpha = 0$.

Como vimos, dado que φ não se acopla diretamente com a matéria em (B.1) e a densidade Lagrangiana $L^{(m)}$ não depende de φ , $T_{\mu\nu}^{(m)}$ é covariantemente conservado, isto é,

$$\tilde{\nabla}^\nu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0. \quad (\text{B.18})$$

Usando este resultado para um fluido perfeito, temos

$$\frac{d\rho^{(m)}}{dt} + 3H(\rho^{(m)} + p^{(m)}) = 0, \quad (\text{B.19})$$

sendo $H = \frac{\dot{a}}{a}$ o parâmetro de Hubble. Aplicando a condição (B.17), é possível integrar (B.19) para obter

$$\rho^{(m)} = \frac{C}{a^{3\alpha}}, \quad (\text{B.20})$$

onde C é uma constante associada às condições iniciais.

Consideremos agora as soluções cosmológicas exatas para a teoria de Brans-Dicke. Muitos dos trabalhos realizados considerando estas soluções supõem a condição de contorno

$$\lim_{t \rightarrow 0} a^3(t)\dot{\varphi}(t) = 0 \quad (\text{B.21})$$

quando nos aproximamos da singularidade cosmológica, isto é, do *big bang* [26].

Quando a matéria é descrita por um fluido perfeito como em (B.16) e $V(\varphi) = 0$, usando (B.20) a equação satisfeita pelo campo escalar de BD se reduz a

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} = \frac{8\pi}{2\omega + 3}(4 - 3\alpha)\frac{C}{a^{3\alpha}}. \quad (\text{B.22})$$

Supondo uma solução para o fator de escala do tipo lei de potência

$$a = a_0 t^q, \quad (\text{B.23})$$

a equação para o campo de BD torna-se

$$\ddot{\varphi} + \frac{3q}{t} \dot{\varphi} = \frac{8\pi(4-3\alpha)C}{(2\omega+3)a_0^{3\alpha}} t^{-3\alpha q}. \quad (\text{B.24})$$

B.3 Solução de O'Hanlon e Tupper

A solução apresentada por O'Hanlon e Tupper [47] corresponde ao vazio, $V(\varphi) = 0$ e aos valores do parâmetro de BD $\omega > -\frac{3}{2}$, $\omega \neq 0, -\frac{4}{3}$, e é dada por

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{q_{\pm}}, \quad (\text{B.25})$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{s_{\pm}}, \quad (\text{B.26})$$

com

$$q_{\pm} = \frac{1}{3\omega+4} \left(\omega + 1 \pm \sqrt{\frac{2\omega+3}{3}} \right), \quad (\text{B.27})$$

$$s_{\pm} = \frac{1 \mp \sqrt{3(2\omega+3)}}{3\omega+4}, \quad (\text{B.28})$$

satisfazendo $3q + s = 1$. Esta solução apresenta uma singularidade quando $t \rightarrow 0$, e não é consistente com a condição inicial (B.21). Quando $\omega \rightarrow +\infty$, o limite da solução é

$$a(t) \propto t^{1/3}, \varphi = \text{const.} \quad (\text{B.29})$$

Este resultado não reproduz a correspondente solução da RG, que é o espaço-tempo de Minkowski.

Outro fato interessante é que no limite quando $\omega = -4/3$, a solução de O'Hanlon-Tupper aproxima-se do espaço de de Sitter

$$a(t) = a_0 e^{Ht}, \quad (\text{B.30})$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-3Ht}, \quad (\text{B.31})$$

com H constante. Esta solução difere do modelo de Sitter, o qual é obtido na teoria de Einstein tomando-se o campo escalar constante [26].

Referências Bibliográficas

- [1] H. Goenner, *Living Reviews in Relativity* **7**, 2, (2004).
- [2] Hans Reichenbach, *The philosophy of Space and Time*, Dover Publications, Inc., New York, (1958).
- [3] Bernard F. Schutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, (1985).
- [4] Robert M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, (1984).
- [5] Oeyvind Groen and S. Hervik, *Einstein's General Theory of Relativity*, Springer, (2007).
- [6] Ray D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford, (1992).
- [7] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley and Sons, (1972).
- [8] J. Plebański and A. Kasiński, *An introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, (2006).
- [9] Hermann Weyl, *Space-Time-Matter*, Dover Publications, Inc., (1922).
- [10] A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge University Press, Fetter Lane, London, (1930).

- [11] L. O’Raifeartaigh, *The dawning of gauge theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press, (1997).
- [12] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. Lond.* **333**, 403, (1973).
- [13] Nathan Rosen, *Foundations of Physics* **12**, 213, (1982).
- [14] E. Scholz, *Weyl geometry in the late 20th century physics*, arXiv:1111.3220[math.HO], (2011).
- [15] D. K. Ross, *Phys. Rev. D* **5**, 284, (1972).
- [16] V. Canuto, P. J. Adams, S. H. Hsieh, E. Tsiang, *Physical Review D* **16**, 1643, (1977).
- [17] K.A.Bronnikov, M.Yu.Konstantinov, V.N.Melnikov, *Gravitation and Cosmology* **1**, 1, (1995).
- [18] Mário Novello, *Cosmologia*, Editora Livraria da Física, São Paulo, (2010).
- [19] Manfredo Perdigão do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, (2008).
- [20] F. Dahia, G. A. T. Gomez, C. Romero, *Journal of Mathematical Physics* **49**, 102501, (2008).
- [21] K. A. Brading, *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **33**, 3, (2002).
- [22] R. Adler, M. Bazin and M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York, (1975).
- [23] Jürgen Ehlers, Félix A. E. Pirani, Alfred Schild, *Gen. Relativ. Gravit.* **44**, 1587, (2012).
- [24] J. M. Salim, S. L. Sautú, *Class. Quantum Grav.* **13**, 353, (1996).
- [25] C. Romero, J. B. Fonseca Neto and M. L. Pucheu, *Class. Quantum Grav.* **29**, (2012).
- [26] Valerio Faraoni, *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2004).
- [27] L. Infeld and A. Schild, *Phys. Rev.* **68**, 250, (1945).
- [28] M. Ibison, *J. Math. Phys* **48**, 122501, (2007).

- [29] G. Nordström, *Phys. Zeit.* **13**, 1126, (1912).
- [30] G. Nordström. *Ann. d. Phys.* **42**, 533, (1913).
- [31] G. Nordström. *Ann. d. Phys.* **40**, 856, (1913).
- [32] A. Einstein and A. D. Fokker, *Ann. d. Phys.* **44**, 321, (1914).
- [33] T. S. Almeida, *Geometria de Weyl e teoria gravitacional de Nordström*, Dissertação de Maestrado, UFPb, (2010).
- [34] I. W. Roxburgh, R. K. Tavakol, *Foundations of Physics* **8**, 229, (1978).
- [35] J. A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic Press, New York, (1962).
- [36] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Gauthier-Villars, Paris, (1902).
- [37] A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffmann, *Ann. Math.*, Princeton, **39** (1938).
- [38] A. Papapetrou, *Proc. Roy. Soc.*, A209, 248 (1951).
- [39] A. Papapetrou and E. Corinaldesi, *Proc. Roy. Soc.*, A209, 259 (1951).
- [40] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni, *Reviews of Modern Physics* **82**, 451, (2010).
- [41] Santiago E. Perez Bergliaffa, *An overview of $F(R)$ theories*, arXiv: 1107.5183[gr-qc], (2011).
- [42] Salvatore Capozziello and Valerio Faraoni, *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Springer, (2011).
- [43] C. H. Brans and R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925, (1961).
- [44] M. P. Dabrowski, T. Denkiewicz and D. Blaschke, *Ann. Phys.* **16**, 237, (2007).
- [45] C. Romero, J. B. Fonseca and M. L. Pucheu, *Found. Phys.* **42**, 224, (2012).
- [46] C. Romero and A. Barros, *Phys. Lett. A* **173**, (1993).
- [47] J. O'Hanlon and B. Tupper, *Nuovo Cimento B* **7**, 305, (1972).
- [48] A. Einstein, *Sitzung-ber. Preuss. Akad. Wiss.*, 414, (1925).
- [49] M. Ferraris, M. Francaviglia, C. Reina, *General Relativity and Gravitation* **14**, 243, (1982).