



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

SINGULARIDADES COSMOLÓGICAS NO
ESPAÇO-TEMPO DE WEYL INTEGRÁVEL
ASPECTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS

ADRIANO BRAGA BARRETO

João Pessoa – PB
Fevereiro de 2016

ADRIANO BRAGA BARRETO

SINGULARIDADES COSMOLÓGICAS NO
ESPAÇO-TEMPO DE WEYL INTEGRÁVEL
ASPECTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, do
Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, como
requisito parcial para a obtenção do título de doutor em física.*

Orientador: Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

João Pessoa – PB

Fevereiro de 2016

B273s Barreto, Adriano Braga.
Singularidades cosmológicas no espaço-tempo de Weyl
integrável: aspectos clássicos e quânticos / Adriano Braga
Barreto.- João Pessoa, 2016.
89f. : il.
Orientador: Carlos Augusto Romero Filho
Tese (Doutorado) - UFPB/CCEN
1. Física. 2. Geometria de Weyl. 3. Singularidades
cosmológicas. 4. Cosmologia quântica. 5. Transformações
canônicas.

UFPB/BC

CDU: 53(043)

Ata da Sessão Pública da Defesa de Tese de
Doutorado do aluno **Adriano Braga Barreto**,
candidato ao Título de Doutor em Física na
Área de Concentração Gravitação e
Cosmologia.

1 Aos vinte e seis dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezesseis, às 09h00, no
2 Auditório da Pós-Graduação em Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da
3 Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora
4 constituída para examinar o candidato ao grau de Doutor em Física na área de
5 Gravitação e Cosmologia, **Adriano Braga Barreto**. A comissão examinadora foi
6 composta pelos professores doutores: *Carlos Augusto Romero Filho* (UFPB), orientador
7 e presidente da banca examinadora, *Fábio Dahia* (UFPB), *Jorge Gabriel Gomes de*
8 *Souza Ramos* (UFPB), *Raimundo Silva Júnior* (UFRN) e *Janilo Santos* (UFRN). Dando
9 início aos trabalhos, o Prof. *Carlos Augusto Romero Filho* comunicou aos presentes a
10 finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra ao candidato para que o mesmo
11 fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de tese intitulado "*Singularidades*
12 *cosmológicas no espaço-tempo de Weyl integrável: aspectos clássicos e quânticos*".
13 Concluída a exposição, o candidato foi argüido pela Banca Examinadora que emitiu o
14 seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba
15 expedir o respectivo diploma de Doutor em Física na forma da lei. E para constar,
16 Danilo Wilson Lemos Menezes, servindo de Secretário, redigiu a presente ata que vai
17 assinada pelo mesmo e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, Paraíba,
18 26 de fevereiro de 2016.

19

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho

Orientador - UFPB

Prof. Dr. Fábio Dahia

UFPB

Prof. Dr. Jorge Gabriel Gomes de Souza

Ramos

UFPB

Prof. Dr. Raimundo Silva Júnior

UFRN

Prof. Dr. Janilo Santos

UFRN

Danilo Wilson Lemos Menezes

Secretário



CCEN

Aos meus pais, Cremilda e Oziel, que me garantiram o
suficiente e me forneceram o necessário para que eu
pudesse alcançar o que eles sequer sonharam.

AGRADECIMENTOS

Gostaria inicialmente de declarar meu agradecimento àqueles que colaboraram para uma rica discussão dos resultados apresentados nesta tese. Ao professor Carlos Augusto Romero Filho que, na posição de orientador, forneceu, ao mesmo tempo, suporte e liberdade para que esta pesquisa se desenvolvesse. À Maria Laura Pucheu que, na posição de companheira e colaboradora, levantou amavelmente rigorosas e pertinentes questões sobre os procedimentos estudados. Agradeço também a Francisco Artur Pinheiros Alves Junior, um inexorável colaborador cujo julgamento sagaz permitiu-nos corrigir erros fundamentais nas nossas análises. Muito embora esta tese sumarie o período em que realizei este doutorado, houveram muitos outros eventos externos à mesma que considero relevantes para sua elaboração. Devo assim então agradecer as discussões esclarecedoras que tivemos nos seminários do Grupo de Cosmologia e Gravitação do Departamento de Física da Universidade Federal da Paraíba, organizados pelo professor Carlos Romero. Agradeço nominalmente aos colegas Iarley Pereira Lobo, Tony Silva Almeida, Rodrigo Avalos, Thais Akemi Tokubo Sanomiya, Ruydeiglan Gomes Lima, Adiel da Silva Lemos, Danilo Cesar Moreira e Eugenio Bastos Maciel. Participaram também destas discussões os professores Fabio Leal de Melo Dahia, Joel Batista da Fonseca Neto, Valdir Barbosa Bezerra e Albert Petrov. Agradeço ainda a oportunidade que tivemos de receber os professores Nivaldo Lemos, Nelson Pinto-Neto e Júlio Fabris, especialistas nos temas tratados nesta tese, que se prontificaram a esclarecer nossas dúvidas sobre o assunto. Em especial ao professor Júlio Fabris, agradeço pela hospitalidade em nos receber na UFES. Gostaria de agradecer também ao professor Eugênio Ramos Bezerra de Mello pelas excelentes disciplinas ministradas na pós-graduação e sua postura sempre solícita no âmbito acadêmico. Tive uma boa convivência durante o doutorado, graças aos colegas André Manzoni de Lima, Antônio de Pádua Santos, Cláudio Farias, Eduardo André de Figueiredo Bragança, Felipe Ferreira de Freitas, João Paulo Moraes Graça, Júlio César Mota Silva e Thiago Ferreira do Nascimento, além dos demais colegas do departamento. Gostaria de agradecer também ao coordenador da Pós-graduação, professor Laércio Losano, e ao secretário, Danilo Wilson Lemos Menezes, pelos esforços em administrar a pós-graduação. Em especial agradeço a senhora Josefa pelo árduo e dedicado trabalho em manter as dependências do departamento em condições confortáveis para um convívio agradável.

Por fim agradeço à coragem e determinação da excelentíssima presidenta Dilma Rousseff na missão de promover um país mais justo e democrático.

*“Esta conexão (ou ajustamento)
entre todas as coisas criadas
faz com que cada substância simples
tenha relações que expressam todas as outras,
e, conseqüentemente,
que cada substância simples
seja um espelho vivo perpétuo do universo.
Do mesmo modo como uma mesma cidade
vista a partir de ângulos diferentes
parece ser totalmente diferente
e, por assim dizer, ter se multiplicado de vários ângulos,
da mesma maneira
acontece que,
por causa da profusão infinita de substâncias simples,
existe, por assim dizer, um número igualmente infinito de universos diferentes,
que são, no entanto,
apenas ângulos de um único universo...
E este é o modo de se ter a maior variedade possível,
mas com a maior ordem possível,
ou seja, este é o modo de se ter a maior perfeição possível.”*

G.W. Leibniz – A Monadologia [Smolin 2005]

Resumo

Investigamos a cosmologia de modelos regidos por uma teoria escalar-tensorial geométrica, construída numa geometria de Weyl integrável. Tal teoria corresponde à teoria da Relatividade Geral, minimamente acoplada à um campo escalar sem massa, no referencial onde a geometria é Riemanniana. Apresentamos os elementos fundamentais da geometria de Weyl e estendemos o formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral para esta geometria, preparando assim o formalismo para descrever teorias ambientadas na geometria de Weyl. Propomos uma folheação invariante por transformações de Weyl, a qual emprega o campo escalar de Weyl, oriundo da geometria, como um relógio natural para a evolução do universo. Singularidades cosmológicas são verificadas nas predições das soluções clássicas do modelo FLRW e removidas quando tratamos a cosmologia quântica deste modelo. As transformações de Weyl são investigadas no espaço de fase, onde induzem transformações canônicas que viabilizam a equivalência física entre os referenciais de Riemann e Weyl tanto no regime clássico como no quântico.

PALAVRAS-CHAVE: *Geometria de Weyl, singularidades cosmológicas, cosmologia quântica, transformações canônicas.*

Abstract

We have investigated cosmological models governed by a geometrical scalar-tensor theory in the framework of the Weyl integrable manifolds. Such as theory corresponds to the general relativity, minimally coupled to a massless scalar field, in the frame where the geometry is riemannian. We present the fundamental elements of the Weyl geometry and we extend the hamiltonian formalism of the general relativity to this geometry. We propose a foliation invariant by Weyl transformations, in which the Weyl scalar field plays the role of a clock to measure the evolution of the foliation. Cosmological singularities are verified in the classical solutions of the FLRW model and avoided in the quantum cosmology approach. The Weyl transformations provides a canonical transformations between two related frames and a unitary operator is defined to map these two frame in the quantum regime. The physical equivalence in the quantum level is discussed.

KEYWORDS: *Weyl geometry, cosmological singularities, quantum cosmology, canonical transformations.*

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Elementos da Geometria de Weyl	7
2.1 Conexão afim de Weyl	8
2.2 Espaço-tempo de Weyl integrável	12
3 Extensão do Formalismo ADM	16
3.1 Decomposição do espaço-tempo na forma (1+3)	17
3.2 Formalismo Hamiltoniano	23
3.3 Folheação invariante por transformações de Weyl	26

4	Cosmologia Clássica	30
4.1	Hamiltoniana no referencial de Riemann	31
4.2	Hamiltoniana no referencial de Weyl	33
4.3	Mudança de referencial como uma transformação canônica	35
4.4	Função geradora das transformações canônicas de Weyl	37
4.5	Soluções das equações de Hamilton em cada referencial	39
4.5.1	Equações de movimento no referencial de Riemann	39
4.5.2	Equações de movimento no referencial de Weyl	46
4.6	Singularidades cosmológicas	49
4.6.1	Equação de Raychaudhuri	49
4.6.2	Extensão dos teoremas de singularidade	52
5	Cosmologia Quântica	56
5.1	Equação de Wheeler-DeWitt	57
5.2	Transformação canônica e equação de Schrödinger	59
5.3	Soluções físicas	61
5.4	Transformações de Weyl no regime quântico	66
6	Conclusão	70
	Referências bibliográficas	73

Lista de Figuras

3.1	Folheação do espaço-tempo por um família de hipersuperfícies tipo-espaço. . .	18
3.2	Diagrama do espaço-tempo representando o significado geométrico da função lapso e do vetor desvio.	19
4.1	Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = 0$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.70). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3$	42
4.2	Comportamento de $b(t)$ para $\bar{N} = 1$ (curva contínua) e $\bar{N} = b$ (curva tracejada). Neste gráfico estamos assumindo $\Lambda = 1 = \omega$	43
4.3	Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = 1$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.80). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 0,5$ e $\Lambda = 1$	44
4.4	Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = -1$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.87). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 1,5$ e $\Lambda = 1$	45
4.5	Comportamentos de $b(t)$ e $\sigma(t)$ no tempo conforme para $k = -1, 0$ e 1	46
4.6	Comportamento de $a(t)$ no tempo conforme. Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3/8$ e $\Lambda = 3$	49

5.1	Comportamento de $ \Psi ^2$ no caso $k = 0$ do referencial de Riemann em acordo com a relação de dispersão do pacote de onda dada na eq.(5.42).	64
5.2	Comportamento de $\langle b \rangle$ para $k = 0$, dado na eq.(5.46). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3$ e $\hbar = \alpha = 1$	65

Lista de Tabelas

4.1	Variáveis canônicas	37
4.2	Soluções para $\sigma(t)$ no caso com potencial $\mathcal{V}(\sigma)$. Os parâmetros $\{\mathcal{V}_o, \lambda, m, \Lambda$ e $\phi_o\}$ são constantes.	55
4.3	Soluções para $b(t)$ no caso com potencial $\mathcal{V}(\sigma)$. Os parâmetros são os mesmo das Tabela 4.2 e b_o é também uma constante.	55

CAPÍTULO 1

Introdução

Como em outros momentos, a física trava uma constante e instigante batalha pelo entendimento dos fenômenos naturais. Diversos grupos de pesquisa em todo o mundo buscam teorias para explicar observações experimentais e outros inúmeros grupos buscam observar experimentalmente predições teóricas. Dentre as questões que propulsionam esta busca por explicações, está a conciliação da relatividade geral com a teoria quântica dos campos, ou seja, a busca por uma teoria quântica da gravitação. Pode-se afirmar então que a *gravitação quântica* é uma das mais ativas áreas da pesquisa em física teórica. No vasto panorama da gravidade quântica, a *cosmologia quântica* [DeWitt 1967] surge como uma importante e ativa abordagem para o entendimento dos efeitos quânticos na dinâmica do universo, sendo um de seus alvos o problema da singularidade cosmológica. Nesta abordagem aplica-se a física quântica ao universo como um todo com o intuito de tratar de questões conceituais enquanto ainda não dispomos de uma completa e consistente teoria quântica para a interação gravitacional [Bojowald 2015]. Foi mostrado em diversos trabalhos, vide [Halliwell 1990], que a quantização canônica de modelos cosmológicos evita singularidades previstas classicamente, substituindo-as por soluções onde o universo atingiria um valor finito do seu fator de escala, ditos *bounces* [Novello e Bergliaffa 2008]. É fato que esta abordagem também apresenta problemas conceituais, como o dito *problema do tempo* abordado em [Isham 1992, Kiefer 2000]. Contudo, advoga-se que problemas estruturais de teorias são também justificativas para se

investigá-las. De fato, apesar de sua simplicidade teórica e eficiência experimental, a teoria da relatividade geral sofre também de problemas conceituais, dentre eles a predição de singularidades presentes nas principais soluções desta teoria [Belinski 2014, Hawking e Ellis 1973]. A investigação destas e demais questões trazem à tona a necessidade de correções nas teorias vigentes, sejam essas mudanças na dinâmica do modelo cosmológico padrão e/ou a contribuição dos efeitos quânticos dos campos de matéria que alimentam a geometria [Shapiro 2008].

É possível então que o problema das singularidades deve ter sua solução via a conciliação da interação gravitacional clássica com sua versão quântica. Contudo, efeitos quânticos não são os únicos tratamentos para a predição de singularidades no modelo cosmológico padrão. Há também abordagens puramente clássicas onde a geometria subjacente ao espaço-tempo é estendida para uma classe de geometrias não-Riemannianas, vide [Almeida et al. 2014, Scholz 2009, Lobo et al. 2015, Sotiriou 2006]. Os graus de liberdade geométricos adicionais fornecidos por esta generalização são capazes de ampliar as possibilidades de soluções não-singulares, sem, com isso, lançar mão da existência de energia e matéria exóticas.

A motivação para investigar modificações da Relatividade Geral vem da física de altas-energias, pois quando se toma em consideração correções quânticas, as ações gravitacionais efetivas requerem termos de alta ordem do escalar de curvatura R , e/ou campos escalares não-minimamente acoplados ao R [Shapiro 2008]. É importante citar que a semelhança entre estas ações efetivas e as teorias $f(R)$, ou escalares-tensoriais, não implica uma relação direta entre elas. Contudo, tais semelhanças são úteis para um estudo qualitativo dos fenômenos destas modificações da teoria de Einstein [Sotiriou 2006]. De fato, se nosso alvo são as singularidades, é coerente tratar com uma teoria gravitacional que considere este regime, pois espera-se que as energias envolvidas nos processos nas proximidades das singularidades sejam altíssimas.

Tanto a cosmologia quântica como as teorias escalares-tensoriais têm permitido possibilidades de se evitarem singularidades e até mesmo explicar as fases de expansão acelerada do universo. Muitas investigações estão sendo conduzidas por meio destes dois ramos. A combinação destas duas linhas pode, então, enriquecer ainda mais o entendimento sobre os processos gravitacionais. Como exemplo, na referência [Fabris et al. 1999] os autores estudam a cosmologia quântica de teorias escalares-tensoriais com acoplamento não-mínimo. A obtenção de soluções foi possível graças a um procedimento comum no estudo de teorias escalares-tensoriais, que são as transformações conformes na métrica. Contudo, trabalharemos na incorporação das *transformações de Weyl* nos procedimentos da cosmologia quântica.

Nossa expectativa está no fato que teorias com acoplamento mínimo e não-mínimo estão relacionadas por estas transformações. Na verdade, a *geometria de Weyl* fornece uma classe de referenciais ligados por um campo escalar que participa diretamente na geometria do espaço-tempo, assim como o tensor métrico. Isto se assemelha ao papel desempenhado pelos campos de *calibre* que compensam os termos devido a invariância local de uma teoria frente a mudança de calibre.

Apresentaremos aqui a análise de um modelo cosmológico espacialmente homogêneo e isotrópico, o modelo de Friedmann-Lemaître, descrito pelo elemento de linha de Robertson-Walker. A dinâmica deste modelo será regida por uma teoria da gravitação ambientada em uma geometria não-riemanniana, dita geometria de Weyl. No capítulo 2 os principais elementos da geometria de Weyl serão apresentados. Veremos que a generalização da geometria riemanniana promovida por Weyl definirá uma classe de variedades geometricamente equivalentes. Denotaremos assim cada uma das variedades desta classe como um *referencial*, onde as suas propriedades geométricas serão bem entendidas. Vemos com grande relevância esta generalização pois surge naturalmente da geometria da variedade um campo escalar em pé de igualdade com o tensor métrico no que diz respeito as quantidades geométricas definidas sobre as variedades.

Campos escalares vêm sendo empregados em diversos modelos e teorias com o intuito de solucionar predições problemáticas das teorias vigentes. Contudo, sua natureza é dificilmente esclarecida. Geralmente tais campos são inseridos nas teorias e modelos *ad hoc*. Veremos então como um campo escalar é fornecido naturalmente pela geometria e discutiremos alguns pontos que achamos relevante desfrutar quando nos é fornecido um campo oriundo da geometria do espaço-tempo. Além da questão citada acima, vamos nos ater bastante ao fato da geometria de Weyl permitir um conjunto de transformações que relaciona as variedades da sua classe de equivalência. Veremos que estas transformações farão corresponder uma teoria escalar-tensorial com acoplamento não-mínimo à uma teoria minimamente acoplada a um campo escalar não-massivo. Esta última teoria é nada mais que a teoria da relatividade geral minimamente acoplada a um campo escalar sem massa em um referencial onde a geometria retoma seu caráter riemanniano.

As ditas transformações de Weyl relacionarão dois referenciais que classicamente se mostram equivalentes, porém suas equivalências físicas são bastante discutidas, tendo um consenso majoritário que em um regime quântico tal equivalência é perdida. Para uma esclarecedora discussão sobre o tema vide [Faraoni e Nadeau 2007]. Porém a equivalência discutida em [Faraoni e Nadeau 2007] é promovida por uma transformação conforme no ten-

sor métrico entre os dois referenciais, conhecidos como referenciais de Jordan e Einstein. Nós mostraremos que no caso dos referenciais relacionados pelas transformações de Weyl a equivalência física será mantida no regime quântico, sob a perspectiva da cosmologia quântica.

Quando nos referimos a cosmologia quântica, estamos considerando a quantização canônica de um modelo cosmológico, como feito seminalmente em [DeWitt 1967]. Ou seja, dado um modelo cosmológico descrito por um elemento de linha e a respectiva ação que dará a dinâmica deste modelo, a função lagrangiana associada ao modelo é obtida e dela é construído uma descrição hamiltoniana do modelo, via transformada de Legendre. Desta maneira, o modelo cosmológico tendo sua dinâmica descrita no espaço de fase se adequa ao formalismo de quantização canônica, onde as variáveis canônica, coordenada e momento canonicamente conjugado à coordenada, são promovidos a operadores que atuam num espaço de Hilbert construído com as ditas *funções de onda*. Desde que o sistema físico a ser quantizado é um modelo cosmológico, logo tais funções de onda levam a alcunha de *funções de onda do universo*. A obtenção dessas funções de onda se faz mediante a solução da equação de Wheeler-DeWitt. Tal equação, que na mecânica quântica de sistemas não-relativísticos, desempenha o papel da equação de Schrödinger, é obtida ao se promover à operador a função hamiltoniana obtida via transformada de Legendre da lagrangiana do modelo. Como veremos no capítulo 3 esta função hamiltoniana desempenha o papel de vínculo entre as variáveis canônicas, reflexo da invariância da teoria dinâmica frente reparametrizações. Portanto dedicamos o capítulo 3 para uma análise do formalismo hamiltoniano de teorias ambientadas numa geometria de Weyl. Teremos que uma construção que deixa invariante por mudança de referencial as quantidades físicas possibilitará uma extensão direta do formalismo ADM [Arnowitt et al. 2008], diferentemente do que fizemos em [Barreto et al. 2015], onde esta invariância não foi imposta e termos adicionais surgiram na obtenção da lagrangiana ADM. Entretanto, deve-se salientar que em ambas as extensões que fizemos, o formalismo ADM riemanniano é recuperado quando o campo de Weyl é constante. Como já havíamos comentado, este resultado nos serve de bússola para não nos afastarmos de maneira irretornável aos resultados já bem estabelecidos da teoria da relatividade geral e da cosmologia relativística padrão.

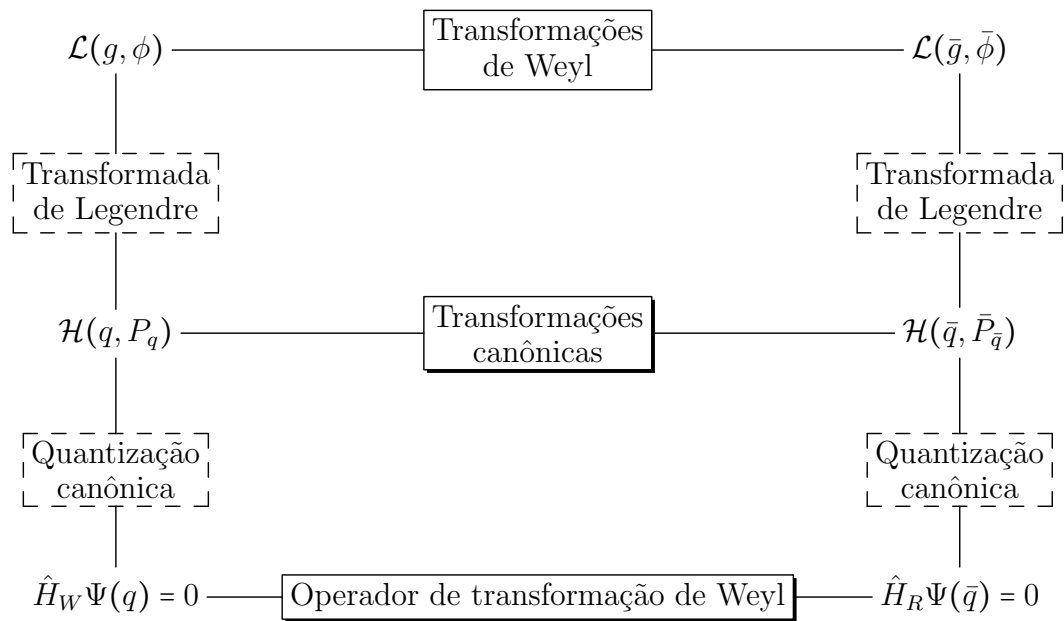
Consideraremos no capítulo 4 a comparação entre duas representações do mesmo modelo. Devido a imensa importância e abrangência de modelos cosmológicos regidos pela relatividade geral minimamente acoplada a um campo escalar não-massivo, nós consideraremos um modelo que corresponde a estes modelos padrões via transformação de Weyl. Quando cada um desses modelos for representado no formalismo hamiltoniano, poderemos

mostrar que há uma transformação canônica que relaciona os dois espaços de fase. Ou seja, as transformações de Weyl induzem transformações canônicas que mantêm esta correspondência ainda no formalismo hamiltoniano. Estudando as soluções clássicas do modelo em um referencial podemos obter as soluções para o modelo descrito no outro referencial. Analisaremos a existência de singularidades cosmológicas nestes modelos mediante análise das soluções obtidas e discutiremos brevemente a extensão dos teoremas de singularidade de Hawking-Penrose para o caso de teorias gravitacionais ambientadas na geometria de Weyl integrável. Desde que estes teoremas evidenciam de maneira geral a existência de singularidades, poderemos usá-los para corroborar nossas conclusões sobre as soluções particulares obtidas em cada referencial.

É portanto interessante analisar em seguida se a quantização canônica destes modelos é capaz de curar as singularidades previstas classicamente. Procederemos então realizando a quantização canônica dos modelos em cada referencial e mostraremos que a equivalência física entre estes referenciais será mantida no regime quântico, entre os resultados físicos obtidos da cosmologia quântica de cada modelo. O problema da singularidade cosmológica será então tratado no capítulo 5 onde também definiremos um operador que desempenhará o papel das transformações de Weyl no regime quântico. Esta definição será viabilizada desde que no capítulo 4 iremos obter a função geradora das transformações canônicas que desempenham o papel das transformações de Weyl no espaço de fase. Podemos assim esquematizar o emprego das transformações de Weyl no nosso trabalho no diagrama apresentado no final deste capítulo.

De fato, veremos que pode-se construir um conjunto de transformações canônicas que levam as hamiltonianas dos dois referenciais a uma hamiltoniana com a mesma forma funcional. Mostraremos que esta última é mais facilmente quantizada pois leva diretamente a uma equação de Wheeler-DeWitt com a mesma forma funcional da equação de Schrödinger, onde a variável canônica transformada do campo de Weyl desempenhará o papel de parâmetro temporal na evolução do sistema quântico. Sob esta perspectiva, os valores esperados e demais quantidades fisicamente relevantes mostram-se qualitativamente idênticas, evidenciando assim a equivalência física entre os referenciais no regime quântico.

Acreditamos que este resultado dá uma nova luz sobre a discussão da equivalência física entre representações distintas de modelos cosmológicos em teorias escalares-tensoriais. Pois, diferente do que trata-se comumente, as transformações de Weyl podem conter a peça perdida para se provar tal equivalência. Veremos como isso se estabelece nos capítulos seguintes.



CAPÍTULO 2

Elementos da Geometria de Weyl

Neste capítulo trataremos de apresentar os principais elementos da geometria de Weyl. Tendo em mente que consideraremos teorias de gravitação ambientadas nesta geometria, devemos portanto conhecer e apresentar as diferentes características trazidas à tona por esta generalização direta da geometria pseudo-Riemanniana. Contudo, apesar de ser um simples procedimento, os novos elementos que nascem com tal generalização desempenham um papel sutil, porém fundamental, na compreensão dos fenômenos físicos sob o ponto de vista de um grupo de referenciais mais amplo que os difeomorfismos da teoria da relatividade geral. Deste modo, a geometria de Weyl mostrará-se não só como uma única geometria, mas sim como uma classe de equivalência entre geometrias que estão ligadas por transformações que preservam o caráter geométrico da mesma. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos em [Lobo 2013] e [Lobo et al. 2015].

2.1 Conexão afim de Weyl

A geometria de Weyl resulta de uma generalização que, de maneira sucinta, trata-se de um mero enfraquecimento de um dos postulados da geometria riemanniana: o *postulado de metricidade* (ou condição de compatibilidade riemanniana). A própria geometria riemanniana desenvolveu-se também do enfraquecimento de um dos postulados de sua precursora, a geometria euclidiana. O abandono do quinto postulado da geometria euclidiana, *postulado das paralelas*, fez nascer o estudo de uma nova classe de geometrias, ditas geometrias não-euclidianas, da qual a geometria Riemanniana faz parte. Agora o que iremos abandonar da geometria riemanniana é a *condição de compatibilidade riemanniana*, a qual estabelece o seguinte postulado:

Postulado 2.1.1 (Condição de compatibilidade riemanniana). *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável dotada com uma conexão afim ∇ e um tensor métrico g . Para qualquer campo de vetores $U, V, W \in T(\mathcal{M})$, nós requeremos que*

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W). \quad (2.1)$$

Tal condição é equivalente ao requerimento que a derivada covariante do tensor métrico seja zero. Isso implica que o comprimento de um vetor preserva-se inalterado por um transporte paralelo. Ou seja, uma das propriedades do vetor é privilegiada perante as outras, as quais se alteram por meio de tal transporte quando há curvatura não-nula. Além disso, temos na geometria riemanniana o postulado que a conexão ∇ seja livre de torção, ou simétrica. Isto se representa pelo fato que para quaisquer campos vetoriais $U, V \in T(\mathcal{M})$, a seguinte condição é assegurada:

$$\nabla_V U - \nabla_U V = [V, U]. \quad (2.2)$$

O lado direito da eq.(2.2) é a definição de *Derivada de Lie*, $\mathcal{L}_V U \doteq [V, U]$, a qual não depende da conexão. Porém, se a derivada covariante está associada a uma conexão livre de torção, ou simétrica, as derivadas parciais da definição da derivada de Lie podem ser substituídas por derivadas covariantes. Estes postulados enunciados acima nos levam ao famoso *teorema de Levi-Civita*, o qual afirma que na geometria riemanniana a conexão afim é completamente determinada pelo tensor métrico [Carmo 1988, Berger 2007].

Em meados de 1918, Hermann Weyl decidiu rever a geometria riemanniana fazendo

justiça aos iguais diretos entre as propriedades dos vetores [Afriat 2009]. O comprimento dos vetores agora poderiam sofrer as consequências de um transporte paralelo em uma variedade com curvatura não-nula. Tal ideia o levou a assumir uma nova condição de compatibilidade, a saber:

Postulado 2.1.2 (Condição de compatibilidade weylana). *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável dotada com uma conexão afim ∇ , um tensor métrico g e um campo de 1-forma σ , chamado campo de Weyl, globalmente definido em $\mathcal{M}$. Teremos que ∇ é Weyl-compatível com g se para quaisquer campos de vetores $U, V, W \in T(M)$, a seguinte condição é satisfeita:*

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W). \quad (2.3)$$

Claramente esta é uma generalização do conceito riemanniano de compatibilidade entre a conexão e o tensor métrico. Se o campo de Weyl for nulo, nós recuperamos a condição de metricidade riemanniana.

É portanto bastante natural esperar que uma versão generalizada do teorema de Levi-Civita seja assegurada se nós nos restringimos à conexões simétricas, ou seja, livres de torção. De fato, nós temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1.3 (Levi-Civita estendido). *Em uma dada variedade diferenciável $\mathcal{M}$ dotada com um tensor métrico g e um campo de 1-forma diferenciável σ definido em $\mathcal{M}$, existe somente uma única conexão afim ∇ tal que ela seja simétrica e Weyl-compatível.*

Demonstração. Vamos inicialmente supor que ∇ existe. Então, da eq.(2.3) nós temos as seguintes equações

$$U[g(W, V)] = g(\nabla_U W, V) + g(W, \nabla_U V) + \sigma(U)g(V, W), \quad (2.4)$$

$$V[g(U, W)] = g(\nabla_V U, W) + g(U, \nabla_V W) + \sigma(V)g(U, W), \quad (2.5)$$

$$W[g(V, U)] = g(\nabla_W V, U) + g(V, \nabla_W U) + \sigma(W)g(U, V), \quad (2.6)$$

resultante das permutações dos três campos vetoriais. Logo, somando eq.(2.4) e (2.5), e subtraindo (2.6), além de considerar a simetria da eq.(2.2), nós iremos obter

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U V, W) &= U[g(V, W)] + V[g(U, W)] - W[g(U, V)] \\ &\quad - g([V, W], U) - g([U, W], V) - g([U, V], W) \\ &\quad - \sigma(U)g(V, W) - \sigma(V)g(U, W) + \sigma(W)g(U, V). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Se a conexão afim ∇ existe, a eq.(2.7) mostra que esta é univocamente determinada pelo tensor métrico g e o campo de Weyl de 1-forma σ . Neste ponto torna-se interessante assumir uma parametrização definida em um sistema de coordenadas local $\{x^a\}$, com $a = 1, \dots, n$ (onde n é a dimensão da variedade). Desta maneira, sendo as componentes da conexão afim neste sistema de coordenadas dadas em termos da base natural $\{\partial_a\}$ por [Schutz 1980]

$$\Gamma_{bc}^a \partial_a \doteq \nabla_{\partial_b} \partial_c, \quad (2.8)$$

nós podemos mostrar, via eqs.(2.2 e 2.7), que as componentes da conexão afim são completamente expressas em termos das componentes do tensor métrico g e do campo de Weyl σ na referida base:

$$\Gamma_{bc}^a = \{^a_{bc}\} - \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db} \sigma_c + g_{dc} \sigma_b - g_{bc} \sigma_d), \quad (2.9)$$

onde $\{^a_{bc}\} \equiv \frac{1}{2} g^{ad} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d})$ denota os *símbolos de Christoffel de segunda espécie*. $\square$

É importante notar que a condição de compatibilidade de Weyl, expressa na eq.(2.3), pode ser interpretada como o requerimento que a derivada covariante do tensor métrico g , na direção de um dado campo vetorial $V \in T(M)$, não seja nula. Portanto, diferente do que ocorre na geometria riemanniana, a derivada covariante do tensor métrico é proporcional ao campo de Weyl σ , definido na variedade $\mathcal{M}$. Em outras palavras, nós devemos ter

$$\nabla g = \sigma \otimes g \quad (2.10)$$

onde $\sigma \otimes g$ denota o produto direto de σ e g . Como foi mostrado, este novo requerimento, que generaliza a geometria riemanniana, não interfere na determinação da conexão ∇ unicamente em termos de g e σ . Podemos obter uma compreensão clara do papel geométrico do campo de Weyl através do transporte paralelo de campos de vetores nesta geometria. Apresentamos a seguinte proposição:

Corolário 2.1.4. *Seja $\mathcal{M}$ uma variedade diferenciável dotada com uma conexão afim ∇ , um tensor métrico g e um campo de Weyl de 1-formas σ . Se ∇ é Weyl-compatível, então para qualquer curva suave $\alpha = \alpha(\lambda)$ e quaisquer pares de campos vetoriais V e U , transportados paralelamente ao longo de α , teremos,*

$$\frac{d}{d\lambda} g(V, U) = \sigma \left(\frac{d}{d\lambda} \right) g(V, U), \quad (2.11)$$

onde $\frac{d}{d\lambda}$ denota o vetor tangente à curva α .

Se nós integrarmos a eq.(2.11) ao longo da curva α , começando de um ponto $P_0 = \alpha(\lambda_0)$, então nós iremos obter:

$$g(V(\lambda), U(\lambda)) = g(V(\lambda_0), U(\lambda_0)) e^{\int_{\lambda_0}^{\lambda} \sigma(\frac{d}{d\rho}) d\rho}. \quad (2.12)$$

No caso de $U = V$, e denotando por $L(\lambda)$ o comprimento do vetor $V(\lambda)$ em um dado ponto $P = \alpha(\lambda)$ da curva, é possível mostrar que em um sistema de coordenadas local $\{x^a\}$ a eq.(2.11) torna-se

$$\frac{dL}{d\lambda} = \frac{\sigma_a}{2} \frac{dx^a}{d\lambda} L. \quad (2.13)$$

Vamos considerar agora o conjunto de todas as curvas fechadas $\alpha : [a, b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, ou seja, com $\alpha(a) = \alpha(b)$. Então, a seguinte equação

$$g(V(b), U(b)) = g(V(a), U(a)) e^{\int_a^b \sigma(\frac{d}{d\lambda}) d\lambda} \quad (2.14)$$

definirá um grupo de holonomia, cujos elementos são, em geral, uma composição de uma transformação homotética e uma isométrica. Se estamos interessados em preservar o comprimento de vetores transportados ao longo da curva fechada, então devemos tratar apenas com os elementos deste grupo que correspondem a uma isometria. Deste modo, nós devemos requerer que

$$\oint \sigma(\frac{d}{d\lambda}) d\lambda = 0 \quad (2.15)$$

para qualquer curva fechada (*loop*). Nos valendo do *teorema de Stokes*, temos que, para atender este requerimento, o campo de Weyl σ deve ser uma forma exata, isto é, deve existir uma função escalar ϕ , tal que $\sigma = d\phi$. Neste caso nós estaremos tratando com o que é frequentemente referido como uma *variedade de Weyl integrável* (no inglês **W**eyl **I**ntegrable **S**pace-**T**ime, *WIST*). Estes variedades foram estudadas em [Novello et al. 1992], [Romero et al. 2012], [Poulis e Salim 2014] e [Almeida et al. 2014].

A geometria de Weyl fornece portanto uma classe de variedades que são distinguidas pela tríple $(\mathcal{M}, g, \sigma)$, cuja qual nós chamamos de um *referencial de Weyl*. Esta classe de variedades tem como característica comum a condição de compatibilidade de Weyl, dada na eq.(2.11). É possível relacionar dois referenciais de Weyl mediante uma transformação que preserva a eq.(2.11). Portanto, para ir de um referencial $(\mathcal{M}, g, \sigma)$ para um outro referencial

$(\mathcal{M}, \bar{g}, \bar{\sigma})$, nós realizamos a seguinte transformações simultâneas em g e σ :

$$\bar{g} = e^f g, \quad (2.16)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma + df, \quad (2.17)$$

onde f é uma função escalar arbitrária definida em $\mathcal{M}$. Evidentemente o mapeamento conforme, eq.(2.16), e a transformação de calibre, eq.(2.17), estabelecem uma classe de equivalência ao conjunto dos referenciais de Weyl. É importante mencionar que o descobrimento da invariância da compatibilidade de Weyl sob este grupo de transformações foi a motivação que levou Hermann Weyl a sua tentativa de unificar gravidade e eletromagnetismo. Weyl estendeu o conceito de espaço-tempo para uma coleção de variedades equipadas com uma estrutura conforme, ou seja, o espaço-tempo seria visto como uma classe de métricas lorentzianas $[g]$ conformalmente equivalentes [Weyl 1952].

2.2 Espaço-tempo de Weyl integrável

De agora em diante focaremos nossa atenção ao caso particular de um espaço-tempo de Weyl integrável (WIST). Como já foi mencionado, o conjunto $(\mathcal{M}, g, \phi)$, consistindo de uma variedade diferenciável $\mathcal{M}$ dotada com uma métrica g e um campo escalar de Weyl ϕ , será chamada de um *referencial de Weyl*. Neste caso particular de um espaço-tempo de Weyl integrável a eq.(2.17) torna-se

$$\bar{\phi} = \phi + f. \quad (2.18)$$

É importante notar que a arbitrariedade de f permite-nos escolhê-lo de tal maneira que $\bar{\phi} = 0$. Ou seja, se tomarmos $f = -\phi$ na equação acima, iremos obter um referencial denotado por $(\mathcal{M}, \bar{g} = e^{-\phi} g, \bar{\phi} = 0)$. Este é um referencial especial que chamaremos *Referencial de Riemann*, pois no sentido da condição de compatibilidade este referencial apresenta uma geometria riemanniana, $\nabla_\alpha \bar{g}_{\mu\nu} = 0$. Este simples fato tem consequências úteis e interessantes. Uma consequência é que sendo $\bar{g} = e^{-\phi} g$ invariante sob as transformações de Weyl, dadas nas eqs.(2.16) e (2.17), logo qualquer quantidade geométrica construída exclusivamente com $\bar{g}$ é também invariante. Outros objetos geométricos, tais como as componentes do tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, as componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar $e^\phi g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ são evidentemente invariantes sob as transformações de Weyl.

Devemos enfatizar que devido as transformações de Weyl estabelecerem uma relação

de equivalência entre os referenciais $(\mathcal{M}, g, \phi)$, é mais natural focar nossa atenção sobre esta equivalência entre os referenciais antes que sobre um particular referencial. Deste modo, uma variedade de Weyl deve ser considerada como um referencial $(\mathcal{M}, g, \phi)$ que é somente definido “a menos de uma transformação de Weyl”. Logo uma variedade de Weyl deve ser tratada selecionando um referencial na classe de equivalência, e aplicando somente construções invariantes ao referencial escolhido. Deste ponto em diante, seria mais natural redefinir alguns conceitos riemannianos para se enquadrar aos requerimentos de invariância de Weyl.

Este ponto de vista é análogo ao modo como é tratado a *geometria conforme*, um ramo da geometria no qual os objetos geométricos de interesse são aqueles os quais são invariantes sob transformações conformes. Como exemplo, poderíamos citar o ângulo entre duas direções [Kobayashi 2012]. Neste mesmo espírito poderia-se naturalmente modificar a definição de todas as integrais invariantes quando tratarmos com a integração de uma forma exterior. Vamos considerar a forma p-dimensional de volume riemanniana definida como $\Omega = \sqrt{-g} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p$, a qual não é invariante sob transformações de Weyl. Podemos redefinir este elemento para torná-lo invariante sob transformações de Weyl da seguinte maneira:

$$\Omega = \sqrt{-g} e^{-\frac{p}{2}\phi} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^p, \quad (2.19)$$

Em acordo com uma variedade de Weyl integrável, seria mais natural redefinir o conceito de “comprimento de uma curva” para também ser um invariante. Como uma consequência, nossa noção de *tempo-próprio* como o comprimento de arco de linhas de mundo em espaço-tempo lorentziano 4-dimensional deve também sofrer modificações. Em face disto, iremos redefinir o tempo próprio $\Delta\tau$, medido por um relógio movendo-se ao longo de uma curva tipo-tempo parametrizada $x^\mu = x^\mu(\lambda)$ entre os pontos $x^\mu(a)$ e $x^\mu(b)$, de tal modo que $\Delta\tau$ seja o mesmo para qualquer referencial. Assim como ocorre na teoria da relatividade geral, somos motivados a tornar tudo que é físico independente do referencial. Isto nos levará a seguinte definição:

$$\Delta\tau \doteq \int_a^b \left(\bar{g}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda \equiv \int_a^b e^{-\frac{\phi}{2}} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} d\lambda. \quad (2.20)$$

Deve-se notar ainda que a expressão acima pode ser também obtida da definição de tempo próprio na teoria da relatividade restrita pelo o uso da prescrição $\eta_{\mu\nu} \rightarrow e^{-\phi} g_{\mu\nu}$. Claramente o lado direito desta equação é invariante sob transformações de Weyl e reduz-se à expressão conhecida do tempo próprio na teoria da relatividade geral em um referencial de Riemann.

Tomamos $\Delta\tau$, dado na eq.(2.20), como a extensão da hipótese do relógio¹ para um referencial de Weyl arbitrário, ou seja, consideraremos que $\Delta\tau$ é o tempo próprio medido por um relógio preso a partícula que segue sua linha de mundo. A *extremização* desta nova definição do funcional tempo-próprio invariante (2.20) leva as equações

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \left[\{\mu_{\alpha\beta}\} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu}\phi_{,\beta} + g_{\beta\nu}\phi_{,\alpha} - g_{\alpha\beta}\phi_{,\nu}) \right] \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.21)$$

Temos escolhido o parâmetro λ de tal modo que

$$e^{-\phi} g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = K = \text{constante}. \quad (2.22)$$

Sendo a eq.(2.22) constante ao longo da curva, podemos, mediante uma transformação afim, identificar o parâmetro λ como o tempo próprio τ . Devemos salientar ainda que a eq.(2.22) é uma maneira de tornar o comprimento do vetor tangente a uma curva independente do referencial. Outra consequência é que a métrica invariante preserva a dualidade entre vetores covariantes e contravariantes (ou a relação unívoca entre um vetor e sua correspondente 1-forma) independente de referencial. Requerer esta invariância implica usar a métrica invariante para levantar ou subir índices das componentes dos vetores. Podemos escrever a eq.(2.21) como

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (2.23)$$

e perceber que se trata exatamente das equações das geodésicas afim em um espaço-tempo de Weyl integrável onde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \{\mu_{\alpha\beta}\} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu}\phi_{,\beta} + g_{\beta\nu}\phi_{,\alpha} - g_{\alpha\beta}\phi_{,\nu})$, concordando com a eq.(2.9), é a conexão de Weyl integrável.

Portanto, a extensão do postulado geodésico pelo requerimento que o funcional dado na eq.(2.20) seja um extremo é equivalente a postular que as partículas devem seguir as geodésicas afim definidas pela conexão de Weyl, $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Naturalmente, desde que a conexão de Weyl e o parâmetro tempo próprio τ são invariantes quando mudamos de um referencial de Weyl para outro, logo as equações das geodésicas afim, dadas pela eq.(2.23), são também invariantes sob transformações de Weyl. Devemos acrescentar que, como é conhecido, o postulado geodésico também aborda a propagação de raios de luz no espaço-tempo. Contudo, devido a luz se propagar em curvas tipo-luz, não podemos usar o tempo próprio para para-

¹A hipótese do relógio surge implicitamente no trabalho de Albert Einstein sobre a teoria da relatividade restrita, em 1905, como a suposição que a marcha de um relógio anexo a uma partícula não depende da aceleração desta partícula, mas somente da velocidade instantânea da mesma. Isto equivale ao fato que este relógio medirá o tempo próprio no intervalo entre dois eventos na linha de mundo da partícula.

metrizar tais curvas. De fato, os raios de luz devem seguir geodésicas afim nulas, as quais não estão definidas em termos do funcional dado pela eq.(2.20). Entretanto a propagação da luz é caracterizada pelo seu comportamento com respeito ao transporte paralelo. Logo estenderemos este postulado simplesmente assumindo que os raios de luz seguirão as geodésicas afim nulas da geometria de Weyl.

CAPÍTULO 3

Extensão do Formalismo ADM

Com o intuito de aplicar a quantização canônica em modelos cosmológicos regidos por uma teoria gravitacional ambientada em uma variedade de Weyl integrável, nós trataremos neste capítulo de estender o formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) considerando a condição de compatibilidade de Weyl, dada pela eq.(2.3) no Postulado 1.1.2. Nesta extensão iremos assumir que a 1-forma de Weyl é a diferencial exata de um campo escalar, caracterizando assim a variedade como Weyl integrável. Contudo não fixaremos nenhuma ação *a priori*. Desta maneira, portanto, esta extensão do formalismo ADM se aplicará para uma classe de teorias gravitacionais ambientadas em uma variedade de Weyl integrável. Ao final do capítulo apresentaremos uma proposta de folheação invariante que surge naturalmente em espaços-tempos de Weyl integrável.

3.1 Decomposição do espaço-tempo na forma (1+3)

O formalismo ADM [Arnowitt et al. 2008], que é uma maneira de representar a teoria da Relatividade Geral no formalismo hamiltoniano, consiste em descrever a dinâmica gravitacional do espaço-tempo quadridimensional como a evolução temporal de hipersuperfícies tipo-espaço. Ou seja, o problema de obter soluções para as equações de campo de Einstein é convertido em um problema de valores iniciais onde, dada a configuração inicial da hipersuperfície, é possível determinar sua configuração em um instante posterior. Contudo, diferentemente do formalismo lagrangiano, o formalismo hamiltoniano requer a quebra da covariância do espaço-tempo separando-o em espaço e tempo, em uma forma (1+3) [Wald 2010]. Portanto, o primeiro ponto que se deve considerar na construção hamiltoniana de uma teoria métrica da gravitação é sobre a viabilidade em folhear o espaço-tempo quadridimensional $\mathcal{M}$ na forma (1+3). Tal viabilidade requer condições sobre a estrutura causal da variedade $\mathcal{M}$.

Para que a variedade $\mathcal{M}$ possa ser folheada em uma sucessão temporal de hipersuperfícies à tempo constante Σ_t , a variedade precisa ser *globalmente hiperbólica*. Foi mostrado em [Geroch 1970] que a condição necessária e suficiente para uma variedade ser globalmente hiperbólica é que exista uma *superfície de Cauchy* para $\mathcal{M}$. Isto implica que $\mathcal{M}$ é topologicamente equivalente à $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ é alguma superfície de Cauchy. Deste modo, teremos

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t. \quad (3.1)$$

Para um estudo mais detalhado da relação entre a estrutura causal e a topologia de uma variedade, sugerimos [Wald 2010] e [Joshi 2007].

Portanto, desde que $t = \text{constante}$ define uma folha Σ , podemos definir um vetor unitário tipo-tempo n normal à Σ_t e direcionado para o futuro. A 1-forma associada com n é proporcional ao gradiente de t , em termos de suas componentes em uma base coordenada temos

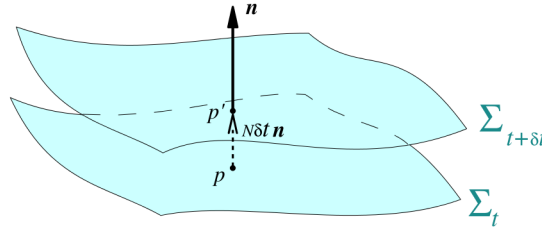
$$n_\mu = N \nabla_\mu t, \quad (3.2)$$

onde

$$N \doteq \frac{1}{\sqrt{\gamma^{\mu\nu} \nabla_\mu t \nabla_\nu t}}, \quad (3.3)$$

é a *função lapso*, a qual mede a variação no tempo próprio $\delta\tau = N\delta t$ entre os eventos p e p' , como mostra a figura 3.1 [Gourgoulhon 2012]. Note que a função lapso está sendo definida de maneira invariante frente transformações de Weyl. Isto está de acordo com nosso interesse

em estender o formalismo ADM para comportar variedades de Weyl integrável.



Fonte: [Gourgoulhon 2012], p. 58.

Figura 3.1: Folheação do espaço-tempo por uma família de hipersuperfícies tipo-espaço.

É importante agora definir o *operador de projeção* $\Pi_{\mu\nu}$, o qual representa a *primeira forma fundamental* de Σ induzida pela métrica $\gamma_{\mu\nu}$ e atua projetando qualquer vetor de $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$ sobre $\mathbf{T}_p\Sigma$, o espaço tangente à subvariedade Σ . Segue a definição do projetor $\Pi_{\mu\nu}$:

$$\Pi_{\mu\nu} \doteq \gamma_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu. \quad (3.4)$$

Naturalmente, verifica-se as propriedades de um operador de projeção, ou seja

$$\Pi_{\mu\alpha}\Pi^{\alpha\nu} = \Pi_\mu^\nu \equiv \delta_\mu^\nu - n^\nu n_\mu, \quad (3.5)$$

onde temos definido de maneira análoga a eq.(3.4) que $\Pi_\mu^\nu \doteq \gamma^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu$ e temos usado o fato que $n^\alpha n_\alpha = 1$. Além disso, por definição teremos que $\Pi_{\mu\alpha}n^\alpha = 0$.

Agora seja t^μ um campo vetorial tipo-tempo correspondendo ao fluxo dado pela função *tempo global* t , o qual deve obedecer a equação

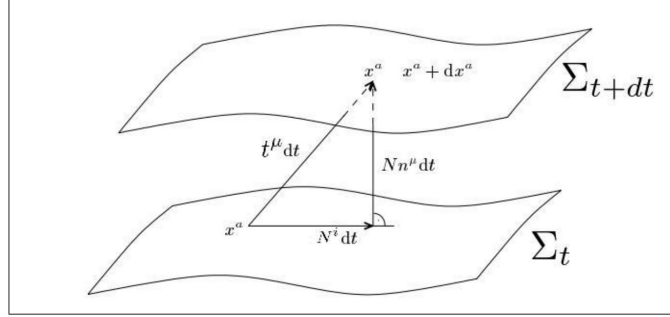
$$t^\mu \nabla_\mu t = 1. \quad (3.6)$$

Tal campo vetorial, que pode ser interpretado como observadores, gera as curvas que interceptam eventos em $\mathcal{M}$ de modo que toda a variedade é varrida por uma congruência de curvas tangenciadas por t^μ . Desde que t^μ não é necessariamente ortogonal a Σ_t , podemos decompô-lo nas suas componentes paralela e perpendicular a Σ_t ,

$$t^\mu \equiv N n^\mu + N^\mu, \quad (3.7)$$

onde $N^\mu \doteq \Pi_\alpha^\mu t^\alpha$ são as componentes do *vetor desvio*, o qual determina a projeção de t^μ em Σ_t . Fica nítido assim que N^μ representa as componentes de um vetor tipo-espaço, pois

$N^\mu n_\nu = 0$. Isso nos permite definir $N_\mu \doteq \Pi_{\mu\nu} N^\nu \equiv \gamma_{\mu\nu} N^\nu$. A interpretação geométrica desta decomposição é representada na figura 3.2



Fonte: [Moura 2010], p. 11.

Figura 3.2: Diagrama do espaço-tempo representando o significado geométrico da função lapso e do vetor desvio.

No caso de t^μ ser perpendicular a Σ_t , teremos $N^\mu = 0$. Se os observadores são identificados com o vetor unitário ortogonal n^μ , estes são chamados de observadores *Eulerianos* ou *fiduciais*. Fisicamente isto significa que, para os observadores Eulerianos, Σ_t é localmente uma superfície de simultaneidade [Gourgoulhon 2012]. Neste sentido, podemos definir um sistema de coordenadas adaptado à folheação do espaço-tempo onde sobre cada folha Σ_t nós introduzimos o *sistema de coordenadas espaciais* $x^i = (x^1, x^2, x^3)$. O sistema de coordenadas $x^\mu = (t, x^i)$ será bem comportado sobre $\mathcal{M}$ desde que o sistema de coordenadas varie suavemente ente superfícies vizinhas [Gourgoulhon 2012]. Este sistema de coordenadas x^μ está associado a base natural ∂_μ de $\mathbf{T}_p\mathcal{M}$,

$$\partial_0 \doteq \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \partial_i \doteq \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.8)$$

Logo, teremos da eq.(3.2) e da eq.(3.3) que

$$n_\mu \equiv N \delta_\mu^0, \quad (3.9)$$

enquanto que, devido a isso a eq.(3.6), teremos

$$t^\mu \delta_\mu^0 = 1. \quad (3.10)$$

Podemos ainda obter as componentes contravariantes $n^\mu = \gamma^{\mu\nu} n_\nu$, como

$$n^\mu = (\Pi^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu) n_\nu \equiv \frac{1}{N^2} (t^\mu - N^\mu) (t^\nu - N^\nu) n_\nu. \quad (3.11)$$

Logo, teremos que $n_\mu = (N, \vec{0})$ e $n^\mu = (1/N, -N^i/N)$. Estes resultados nos permitem obter as componentes do tensor métrico $\gamma_{\mu\nu}$ em termos das quantidades decorrentes da folheação, ou seja, em termos de $h_{\mu\nu}$, N e N^μ . Das eqs.(3.2, 3.4 e 3.7) podemos escrever

$$\gamma^{\mu\nu} \equiv \Pi^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu. \quad (3.12)$$

Como as componentes Π^{00} , $\Pi^{0\nu}$ e Π_0^μ são nulas neste sistema de coordenadas, teremos que

$$(\gamma^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{N^2} & -\frac{N^i}{N^2} \\ -\frac{N^j}{N^2} & \Pi^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

a qual pode ser invertida para fornecer as componentes do tensor covariante $\gamma_{\mu\nu}$,

$$(\gamma_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} N^2 + N^k N_k & N_j \\ N_i & \Pi_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Além disso, no caso onde as coordenadas espaciais são co-móveis, tal que $N^0 = 0$, é imediato obter da matriz acima a seguinte identidade

$$\sqrt{-\gamma} d^4 x \equiv N \sqrt{-\Pi} dt d^3 x, \quad (3.15)$$

que será utilizada na decomposição da lagrangiana de uma dada teoria na forma 1+3. Finalmente podemos escrever o elemento de linha infinitesimal $ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ em termos das variáveis decorrentes da folheação do espaço tempo, ou seja

$$ds^2 = (N^2 + N_k N^k) dt^2 + 2N_k dx^k dt + \Pi_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.16)$$

O espaço-tempo $\mathcal{M}$ passa agora a ser descrito pelas *variáveis ADM*: $\{N, N^i, \Pi_{ij}\}$.

Além da decomposição do tensor métrico em termos das variáveis ADM, é importante obtermos uma relação que informe como a subvariedade Σ se encontra imersa na variedade maior $\mathcal{M}$. Ou seja, estamos interessados em obter a curvatura de Σ com respeito a $\mathcal{M}$. Esta

informação será dada pelo tensor de curvatura extrínseca $K_{\mu\nu}$, o qual é definido como segue

$$K_{\mu\nu} \doteq \Pi_\mu^\alpha \Pi_\nu^\beta \nabla_\alpha n_\beta. \quad (3.17)$$

Este tensor será invariante por transformações de Weyl e é uma quantidade puramente espacial, pois podemos verificar que $K_{\mu\nu} n^\mu = 0$ e $\Pi_\alpha^\mu K_{\mu\beta} \equiv K_{\alpha\beta}$. Além disso, pode-se verificar que $K_{\mu\nu}$ é simétrico, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. A curvatura extrínseca surgirá naturalmente na decomposição do tensor de curvatura da variedade $\mathcal{M}$ em termos da folheação, na forma 1+3. Via *equações de Gauss–Codazzi*, poderemos decompor o tensor de curvatura quadridimensional ${}^{(4)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$ em termos do tensor de curvatura intrínseca, ${}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, e a curvatura extrínseca, $K_{\mu\nu}$, da hipersuperfície Σ imersa em $\mathcal{M}$.

Análoga a definição do tensor de curvatura quadridimensional, o qual é obtido calculando o seguinte comutador

$$\nabla_\mu \nabla_\nu V_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu V_\beta = {}^{(4)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha V_\alpha, \quad (3.18)$$

nos casos livres de torção ($\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha$), teremos que a definição do tensor de curvatura intrínseco será decorrente do seguinte comutador:

$$D_\mu D_\nu V_\beta - D_\nu D_\mu V_\beta = {}^{(3)}R_{\beta\mu\nu}^\alpha V_\alpha, \quad (3.19)$$

onde $D_\mu V_\sigma$ representa a projeção da derivada covariante de um vetor arbitrário V sobre a hipersuperfície Σ . Ou seja, definimos a derivada covariante de um dado tensor $T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ sobre a hipersuperfície como sendo dada por

$$D_\mu T_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} = \Pi_\mu^\nu \Pi_{\gamma_1}^{\alpha_1} \dots \Pi_{\gamma_r}^{\alpha_r} \Pi_{\beta_1}^{\sigma_1} \dots \Pi_{\beta_s}^{\sigma_s} \nabla_\nu T_{\sigma_1 \dots \sigma_s}^{\gamma_1 \dots \gamma_r}. \quad (3.20)$$

Seguimos o formalismo ADM considerando as modificações para incorporar a geometria de Weyl. De fato temos simplesmente considerado redefinir as quantidades geométricas do formalismo de maneira que sejam invariantes por uma transformação de Weyl. Esta construção invariante resulta em expressões idênticas as equações obtidas no formalismo ADM na geometria Riemanniana. Contudo, deve-se ter em mente que incorporado à estas quantidades geométricas está o campo de Weyl. Da equação de Gauss-Codazzi teremos [Bojowald 2010],

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta\mu\nu} = \Pi_\alpha^\delta \Pi_\beta^\rho \Pi_\mu^\sigma \Pi_\nu^\gamma {}^{(4)}R_{\delta\rho\sigma\gamma} - K_{\alpha\mu} K_{\beta\nu} + K_{\alpha\nu} K_{\beta\mu}. \quad (3.21)$$

Note que o primeiro termo à direita da igualdade é a projeção do tensor ${}^{(4)}R_{\delta\rho\sigma\gamma}$ na hipersuperfície Σ . Como pretendemos tratar com teorias métricas que envolvem o escalar de curvatura R , podemos obter uma expressão para ele em termos desta folheação. No caso da ação de Einstein-Hilbert, o qual o setor gravitacional é descrito simplesmente por R , essa decomposição levará a conhecida *Lagrangiana ADM* [Arnowitt et al. 2008].

Seja então o escalar de curvatura definido como,

$${}^{(4)}R \doteq \gamma^{\mu\nu} \gamma^{\alpha\beta} {}^{(4)}R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (3.22)$$

logo, podemos escrever que

$${}^{(4)}R \equiv (\Pi^{\mu\nu} + n^\mu n^\nu)(\Pi^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta) {}^{(4)}R_{\alpha\mu\beta\nu}. \quad (3.23)$$

Devido as simetrias nos índices das componentes do tensor de curvatura, teremos que a equação acima resulta em

$${}^{(4)}R = \Pi^{\lambda\sigma} \Pi^{\xi\epsilon} \Pi^\mu_\lambda \Pi^\nu_\sigma \Pi^\alpha_\xi \Pi^\beta_\epsilon {}^{(4)}R_{\alpha\mu\beta\nu} + 2 {}^{(4)}R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta. \quad (3.24)$$

Usando a eq.(3.21) na equação acima, teremos

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + K^2 - K^{\mu\nu} K_{\mu\nu} + 2 {}^{(4)}R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad (3.25)$$

onde temos feito as seguintes contrações

$${}^{(3)}R = \Pi^{\lambda\sigma} \Pi^{\xi\epsilon} {}^{(3)}R_{\xi\lambda\epsilon\sigma} \quad \text{e} \quad K = \Pi^{\mu\nu} K_{\mu\nu}. \quad (3.26)$$

Ou seja, ${}^{(3)}R$ é o escalar de curvatura intrínseca e K o traço da curvatura extrínseca de Σ . O ultimo termo da eq.(3.25) pode ser escrito em termos da folheação desde que

$${}^{(4)}R_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta \equiv K_{\alpha\beta} K^{\alpha\beta} - K^2 + \nabla_\beta (n^\beta K - \gamma^{\sigma\beta} a_\sigma), \quad (3.27)$$

onde $a_\sigma \doteq n^\alpha \nabla_\alpha n_\sigma$ é a quadriaceleração medida pelos observadores Eulerianos. Finalmente, usando a eq.(3.27) na eq.(3.25), obtemos a decomposição do escalar de curvatura quadridimensional em termos das quantidades definidas na folheação do espaço-tempo na forma 1+3,

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} + 2 \nabla_\mu A^\mu, \quad (3.28)$$

onde definimos o vetor $A^\mu \doteq n^\mu K - \gamma^{\mu\nu} a_\nu$. Deste modo, se estivermos tratando com uma teoria descrita pela ação

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{\gamma} R, \quad (3.29)$$

logo poderemos escrever

$$\mathcal{S} \equiv \int d^4x \sqrt{\gamma} \mathcal{L}_{ADM} + 2 \int d^4x \sqrt{\gamma} \nabla_\mu A^\mu, \quad (3.30)$$

onde identificamos a Lagrangiana ADM,

$$\mathcal{L}_{ADM} \doteq {}^{(3)}R - K^2 + K_{\mu\nu} K^{\mu\nu}. \quad (3.31)$$

Já o último termo da eq.(3.30) costuma ser desconsiderado, pois, por ser um termo de divergência total, não colaborará para as equações de movimento dos principais modelos físicos estudados.

3.2 Formalismo Hamiltoniano

A representação da teoria gravitacional no formalismo hamiltoniano parte da transformação das variáveis no espaço de configuração para o conjunto das variáveis que descrevem o sistema físico no espaço de fase. Este procedimento ocorre via *transformada de Legendre*, a qual associa a lagrangiana do sistema no espaço de configuração, o funcional $L(q, \dot{q}, t)$, a uma função definida no espaço de fase, a hamiltoniana $H(q, p, t)$, da seguinte maneira

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_a \dot{q}^a p_a - H(q, p, t), \quad (3.32)$$

onde q são as coordenadas generalizadas e p os respectivos momentos canonicamente conjugados $p = \partial L / \partial \dot{q}$.

Devemos inicialmente obter as expressões para os momentos canonicamente conjugados à cada variável ADM. Denotaremos por π^o , π^i e π^{ij} os momentos canonicamente conjugados a N , N_i e Π_{ij} , respectivamente. No caso da ação dada na eq.(3.30), teremos:

$$\pi^o \doteq \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}}, \quad \pi^i \doteq \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{N}_i} \quad \text{e} \quad \pi^{ij} \doteq \frac{\partial \mathcal{L}_{ADM}}{\partial \dot{\Pi}_{ij}}, \quad (3.33)$$

onde o ponto denota derivada ao longo do campo de vetores t^μ , que no sistema de coordenadas

adaptado corresponde a coordenada temporal t . Contudo, notemos da eq.(3.31) que o escalar de curvatura intrínseca à Σ não possui termos com derivadas na direção de t^μ , pois este escalar é depende apenas das partes espaciais da métrica e suas derivadas espaciais. Por outro lado, a curvatura extrínseca, que carrega a informação sobre a imersão de Σ em $\mathcal{M}$, deve possuir termos de derivada em t . De fato, podemos verificar que, pela definição de $K_{\mu\nu}$, teremos

$$K_{00} = 0 = K_{0i}, \quad (3.34)$$

enquanto que as componentes não-nulas serão dadas pela seguinte relação

$$K_{ij} \equiv -N\Gamma_{ij}^0, \quad (3.35)$$

a qual, calculando as componentes da conexão com a métrica invariante dada na eq.(3.13) e eq.(3.14), fornece a expressão

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} \left[2D_{(i}N_{j)} - \partial_0(\gamma_{ij}) \right], \quad (3.36)$$

onde utilizamos a seguinte notação

$$D_{(i}N_{j)} \doteq \frac{1}{2} \left[\partial_i N_j - \Gamma_{ij}^k N_k + \partial_j N_i - \Gamma_{ij}^k N_k \right]. \quad (3.37)$$

Concluí-se com isto que a única variável que possui derivadas no tempo é a 3-métrica invariante $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi}g_{ij}$. É útil neste ponto considerar a métrica de DeWitt, também chamada *supermétrica*, definida como

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{\Pi}} \left(\Pi_{ik}\Pi_{jl} + \Pi_{il}\Pi_{jk} - \Pi_{ij}\Pi_{kl} \right), \quad (3.38)$$

cujas inversa é dada por,

$$G^{ijkl} = \sqrt{\Pi} \left[\frac{1}{2} \left(\Pi^{ik}\Pi^{jl} + \Pi^{il}\Pi^{jk} \right) - \Pi^{ij}\Pi^{kl} \right], \quad (3.39)$$

para expressar a eq.(3.31) como,

$$\mathcal{L}_{ADM} = N \left(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{\Pi} {}^{(3)}R \right). \quad (3.40)$$

Finalmente, teremos que os momentos canonicamente conjugados, definidos na eq.(3.33),

resultarão nas seguintes expressões:

$$\pi^o = 0 \quad , \quad \pi^i = 0 \quad \text{e} \quad \pi^{ij} = -G^{ijkl}K_{kl}, \quad (3.41)$$

onde o fato dos momentos π^o e π^i caracteriza as variáveis N e N^i como *multiplicadores de Lagrange*, reflexo da covariância da ação original.

Tendo obtido as expressões para os momentos canonicamente conjugados, podemos agora obter a hamiltoniana associada a $\mathcal{L}_{ADM}$, via transformada de Legendre, dada na eq.(3.32). Teremos,

$$\mathcal{H} \equiv \dot{N}\pi^o + \dot{N}_i\pi^i + \dot{\gamma}_{ij}\pi^{ij} - \mathcal{L}_{ADM}. \quad (3.42)$$

Logo, obtemos que

$$\mathcal{H} = N\mathcal{H}^o + N_i\mathcal{H}^i, \quad (3.43)$$

onde definimos

$$\mathcal{H}^o \doteq G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{\Pi} {}^{(3)}R, \quad (3.44)$$

$$\mathcal{H}^i \doteq 2D_j\pi^{ij}. \quad (3.45)$$

Desde que π^o e π^i são nulos, as equações de movimento hamiltonianas implicam que $\mathcal{H}^o$ e $\mathcal{H}^i$ desempenham o papel de vínculos. Chamaremos portanto $\mathcal{H}^o$ de vínculo hamiltoniano, ou *super-hamiltoniana*, o qual é responsável por gerar a dinâmica da geometria espacial, enquanto que $\mathcal{H}^i$ será chamado *vínculo dos momentos* e é responsável por gerar os difeomorfismos da métrica tridimensional γ_{ij} [Moura 2010].

Temos feito em [Barreto et al. 2015] a extensão do formalismo ADM sem considerar uma construção invariante das quantidades geométricas envolvidas neste procedimento. Em [Barreto et al. 2015] obtivemos expressões diferentes das apresentadas aqui, posto que a formulação não invariante dá origem a termos não presentes nas expressões acima. Contudo, como era de se esperar, ao tomar o caso $\phi = \text{constante}$, o formalismo ADM original é recuperado. Optamos pela construção invariante devido aos pontos que já temos esclarecidos ao logo deste texto.

3.3 Folheação invariante por transformações de Weyl

Gostaríamos agora de explorar outra vertente da estrutura geométrica das variedades de Weyl integrável, propondo uma maneira natural de folhear o espaço-tempo. Consideramos natural pois, diferente do que foi feito nas seções anteriores onde a folheação depende do campo de vetores (observadores) escolhidos para realização a folheação, nossa proposta emprega o campo de Weyl, um campo escalar fornecido naturalmente pela geometria, como o parâmetro de folheação do espaço-tempo. Temos visto que há um formalismo que realiza algo semelhante. Tal formalismo considera um campo escalar dinâmico $\varphi(x^\mu)$, chamado *Khronon*, para definir as hipersuperfícies da folheação do espaço-tempo¹. Como exemplo, gostaríamos de citar que esta folheação foi utilizada para um modelo de gravidade modificada relativística [Blanchet e Marsat 2011], também em uma extensão da teoria de Hořava [Blas et al. 2011] e na extensão da teoria de Horndeski [Gleyzes et al. 2015].

Em [Blas et al. 2011] a estrutura da folheação é codificada no campo escalar φ identificando as folhas com as hipersuperfícies $\varphi = \text{constante}$. Desta maneira, φ define um tempo absoluto que permite uma definição covariante da folheação. Naturalmente, deve-se impor que o gradiente do campo φ seja tipo-tempo, para que a folheação seja bem definida como uma sucessão temporal de hipersuperfícies tipo-espaço. Há uma escolha particular onde o tempo coordenado t coincide com φ , chamada de *calibre unitário*, onde se recupera a folheação usual na forma (1+3). O papel fundamental na construção deste formalismo é desempenhado pelo vetor unitário ortogonal às hipersuperfícies $\varphi = \text{constante}$, definido como segue

$$u_\mu \doteq \frac{\partial_\mu \varphi}{\sqrt{g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}}. \quad (3.46)$$

A invariância de u_μ sob a reparametrização de φ ,

$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi} = f(\varphi), \quad (3.47)$$

onde f é uma função crescente e monótona de φ , é um reflexo da invariância da estrutura da folheação frente uma reparametrização de φ . Contudo, é fácil verificar que a eq.(3.46) não será invariante frente uma transformação de Weyl. Desta forma, o caráter absoluto desta folheação é perdido se estendemos a geometria subjacente ao espaço-tempo à uma geometria de Weyl. Portanto, com o intuito de preservar esta invariância quando realizamos uma mudança de

¹Este formalismo é também referido como uma folheação preferencial, do inglês *a preferred time foliation*, e implica uma violação local da invariância de Lorentz.

referencial no sentido das transformações de Weyl, precisamos definir um outro escalar que seja invariante por transformação de Weyl, e empregá-lo na folheação. Temos conhecimento de um escalar que cumpre este requerimento, o qual é definido em [Adler et al. 1975] como segue

$$\mathfrak{s} \doteq \phi + \ln(R), \quad (3.48)$$

onde ϕ é o campo escalar de Weyl e R é o escalar de curvatura, ambos quantidades intrínsecas à geometria do espaço-tempo de Weyl integrável. Sabendo que, sob transformações de Weyl, estas quantidades se transformam como

$$\phi \mapsto \bar{\phi} = \phi + f \quad \text{e} \quad R \mapsto \bar{R} = e^{-f} R, \quad (3.49)$$

podemos verificar que $\mathfrak{s} \mapsto \bar{\mathfrak{s}} = \mathfrak{s}$. Porém, a dependência em R do escalar $\mathfrak{s}$ definido na eq.(3.48) pode trazer problemas quando o gradiente de $\mathfrak{s}$ for utilizado para construir as quantidades geométricas da folheação. Isso se deve ao fato de estarmos interessados em decompor uma dada teoria métrica da gravitação em termos desta folheação. Portanto, eventualmente teremos que decompor o escalar de curvatura R em termos das variáveis advindas de uma folheação construída a partir de uma quantidade que depende de R . Além disto, a definição de $\mathfrak{s}$ impõe restrições sobre a variedade, desde que não se deve admitir um espaço-tempo onde $R \leq 0$. Deste modo, construímos um outro escalar invariante que dependa apenas das quantidades geométricas mais fundamentais do espaço-tempo de Weyl integrável e que não impõe restrições tão fortes sobre a variedade. Nossa proposta é o escalar invariante w definido a seguir:

$$w \doteq \phi - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{-g}). \quad (3.50)$$

Desde que $\sqrt{-g}$ se transforma como $\sqrt{-g} \mapsto e^{-2f} \sqrt{-g}$, podemos novamente verificar que o escalar w é um invariante. Note que a definição dada na eq.(3.50) só é invariante em variedades 4-dimensionais. Para variedades n -dimensionais esta definição deve ser modificada para $w_n \doteq \phi - \frac{2}{n} \ln(\sqrt{|g|})$. Portanto, seguido a ideia do campo Khronon, podemos definir uma folheação covariante, invariante por transformação de Weyl, construída por hipersuperfícies $w = \text{constante}$ e ortogonais à um vetor unitário redefinido como segue,

$$n_\mu \doteq \frac{\partial_\mu w}{\sqrt{\gamma^{\mu\nu} \partial_\mu w \partial_\nu w}}, \quad (3.51)$$

Agora gostaríamos de verificar se a restrição imposta sobre as variedades que podem ser decompostas por meio do gradiente do campo escalar invariante w não descarta espaços-

tempos fisicamente relevantes. Ou seja, queremos investigar se $g^{\mu\nu}\partial_\mu w\partial_\nu w > 0$ em casos particulares de interesse físico. Como exemplo, mostraremos que tal restrição é satisfeita em variedades de Weyl onde a métrica é obtida do elemento de linha de Robertson-Walker do modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître, e, em outro caso, para métricas conformalmente planas.

i) Caso FLRW

Seja a métrica deste modelo dada pela matriz diagonal

$$[g_{\mu\nu}] = \text{diag} [N^2(t), -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)]. \quad (3.52)$$

Além disto, teremos que impor que $\phi = \phi(t)$ para que as simetrias do modelo sejam respeitadas. Portanto,

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu w\partial_\nu w \equiv g^{00}\partial_0 w\partial_0 w + 2g^{0i}\partial_0 w\partial_i w + g^{ij}\partial_i w\partial_j w. \quad (3.53)$$

Como $g_{\mu\nu}$ e ϕ são depende apenas do tempo coordenado t , teremos que

$$w = \phi(t) - \frac{3}{2} \ln[a(t)], \quad (3.54)$$

logo, obtemos

$$g^{\mu\nu}\partial_\mu w\partial_\nu w = \frac{1}{N^2} \left(\dot{\phi} - \frac{3}{2} \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 \quad (3.55)$$

que é sempre positivo. Portanto em modelos homogêneos e isotrópicos sempre será possível utilizar o escalar w , definido na eq.(3.50), para folhear o espaço-tempo. É importante frisar que pela invariância de w frente a uma transformação de Weyl, este resultado é válido em uma classe de variedades de Weyl relacionadas a métrica (3.52) via tais transformações.

ii) Caso conformalmente plano

Seja um espaço-tempo em um referencial $(\mathcal{M}, \eta_{\mu\nu}, \phi)$. Sabemos que este espaço-tempo corresponde a um espaço-tempo conformalmente plano no referencial de Riemann $(\mathcal{M}, \bar{g}, 0)$, onde $\bar{\phi} = 0$ e $\bar{g} \equiv e^{-\phi}\eta_{\mu\nu}$. É possível verificar que em ambos os referenciais teremos

$$w = \phi. \quad (3.56)$$

Contudo, podemos definir um sistema de coordenadas adaptado a folheação tal que w coincida com o tempo coordenado t , o calibre unitário do formalismo do campo Khronon, de modo que novamente a restrição para a variedade ser folheado é satisfeita, $g^{\mu\nu}\partial_\mu w\partial_\nu w > 0$.

Concluimos verificando que tal restrição poderia ser violada caso a métrica do espaço-tempo possuíisse termos g_{i0} não-nulos. Porém, variedades métricas que apresentam termos desse tipo podem eventualmente causar um problema mais fundamental para a folheação, que é a variedade não ser globalmente hiperbólica. Portanto, a restrição imposta por w para folhear uma dada variedade física parece ser plausivelmente satisfeita na maioria dos casos fisicamente relevantes, ou seja, variedades globalmente hiperbólicas.

CAPÍTULO 4

Cosmologia Clássica

Neste capítulo obtemos as hamiltonianas associadas ao modelo cosmológico de Friedmann regido pela dinâmica gravitacional em cada referencial, Riemann e Weyl. Nosso intuito é analisar a dinâmica clássica deste modelo e estabelecer as correspondências entre sua representação em cada referencial. Mostraremos neste capítulo que as transformações de Weyl induzem uma transformação canônica quando o modelo está expresso no formalismo hamiltoniano. Estas transformações canônicas induzidas pelas transformações de Weyl estabelecem a ponte entre os dois referenciais e nos serão úteis na formulação de uma transformação unitária entre os espaços de Hilbert definidos pela quantização do modelo cosmológico em cada referencial. Finalmente obtemos as soluções clássicas para o fator de escala em cada referencial e analisamos a presença de singularidades cosmológicas.

4.1 Hamiltoniana no referencial de Riemann

Consideraremos que a teoria gravitacional representada no referencial riemanniano é descrita pela ação de Einstein-Hilbert minimamente acoplada a um campo escalar sem massa. A motivação em considerar esta teoria é devido ao fato dela corresponder a teoria de Brans-Dicke Geométrico, apresentada em [Almeida et al. 2014], no referencial weyliano. Tanto a teoria de Einstein-Hilbert como teorias escalares-tensoriais foram amplamente estudadas no âmbito da cosmologia quântica, portanto poderemos aqui confrontar esta abordagem sob o ponto de vista da geometria de Weyl. Deste modo, partiremos considerando a ação representada no referencial de Riemann dada por,

$$\bar{\mathcal{S}} = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(\bar{R} + \omega \sigma_{,\mu} \sigma^{,\mu} \right), \quad (4.1)$$

onde estamos redefinindo $\phi \equiv \sigma$ neste referencial para que não haja confusão entre o campo escalar em cada referencial. Trataremos da cosmologia do modelo de Friedmann com o elemento de linha de Roberston-Walker

$$d\bar{s}^2 = \bar{N}^2(t) dt^2 - b^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (4.2)$$

Identificando as componentes do tensor métrico neste referencial, onde $\bar{\phi} = 0$,

$$(\bar{g}_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \bar{N}^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b^2(t)/(1 - kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

podemos calcular o escalar de Ricci obtendo

$$\bar{R} = \frac{6}{b^2 \bar{N}^3} \left(k \bar{N}^3 + b \ddot{b} \bar{N} - b \dot{b} \dot{\bar{N}} + \dot{b}^2 \bar{N} \right). \quad (4.4)$$

Além disto, para que o modelo cosmológico seja espacialmente homogêneo e isotrópico, devemos impor que $\sigma = \sigma(t)$. Portanto, teremos que

$$\omega g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu} = \frac{\omega}{\bar{N}^2} \dot{\sigma}^2. \quad (4.5)$$

Deste modo, usando as eqs.(4.4, 4.5) na eq.(4.1), teremos

$$\bar{\mathcal{S}} = V_o \int dt \left[6 \frac{b}{\bar{N}^2} \left(k\bar{N}^3 + b\ddot{b}\bar{N} - b\dot{b}\dot{\bar{N}} + \dot{b}^2\bar{N} \right) + \omega \frac{b^3}{\bar{N}^2} \dot{\sigma}^2 \right], \quad (4.6)$$

onde definimos

$$V_o \doteq \int_{\mathcal{M}} d^3x \sqrt{h} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - kr^2}} dr d\theta d\varphi. \quad (4.7)$$

Note que,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{b^2 \dot{b}}{\bar{N}} \right) = 2 \frac{b}{\bar{N}} \dot{b}^2 + \frac{b^2}{\bar{N}} \ddot{b} - \frac{b^2}{\bar{N}} \dot{b} \dot{\bar{N}}, \quad (4.8)$$

portanto a eq.(4.6) pode ser integrada por partes e obtemos

$$\bar{\mathcal{S}} = V_o \int dt \left[6 \left(kb\bar{N} - \frac{b}{\bar{N}} \dot{b}^2 \right) + \omega \frac{b^3}{\bar{N}^2} \dot{\sigma}^2 \right] + 6 \int dt \frac{d}{dt} \left(\frac{b^2 \dot{b}}{\bar{N}} \right), \quad (4.9)$$

onde o último termo da eq.(4.9) é uma derivada total de uma função das variáveis $(b, \bar{N})$, não contribuindo portanto para as equações de movimento obtidas desta ação. Por fim, ficamos com a ação reduzida, dada por

$$\bar{\mathcal{S}} = \int \bar{L}(b, \dot{b}, \dot{\sigma}, \bar{N}, t) dt, \quad (4.10)$$

onde definimos a função lagrangiana

$$\bar{L} \doteq 6 \left(kb\bar{N} - \frac{b}{\bar{N}} \dot{b}^2 \right) + \omega \frac{b^3}{\bar{N}^2} \dot{\sigma}^2. \quad (4.11)$$

Dois pontos relevantes são notados na eq.(4.11). Temos encontrado uma função lagrangiana, associada ao modelo adotado, que não depende explicitamente da variável σ , somente de sua derivada com respeito ao tempo coordenado, $\dot{\sigma}$. Deste modo, a variável σ se apresenta como uma *variável cíclica*. Uma consequência direta deste fato é a conservação do momento canonicamente conjugado a variável σ com respeito ao tempo coordenado t [Lemos 2007]. O segundo ponto se refere a eq.(4.11) não depender explicitamente de $\dot{\bar{N}}$, o que implica que o momento canonicamente conjugado a variável $\bar{N}$ é nulo. Isto sugere a $\bar{N}$ o papel de um *multiplicador de Lagrange*, decorrente do vínculo existente entre as variáveis do modelo devido sua invariância por reparametrização do tempo coordenado.

Agora de posse da eq.(4.11) estamos aptos a obter a hamiltoniana associada ao modelo, mediante uma transformada de Legendre. Embora a matriz Hessiana obtida da

eq.(4.11) seja singular, isto não nos impede de obter a função hamiltoniana. De fato, tendo por definição os seguintes momentos canonicamente conjugados:

$$p_b \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{b}} \equiv -\frac{12}{\bar{N}} b \dot{b}, \quad (4.12)$$

$$p_\sigma \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\sigma}} \equiv \frac{2}{\bar{N}} \omega b^3 \dot{\sigma}, \quad (4.13)$$

$$p_{\bar{N}} \doteq \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{N}}} \equiv 0, \quad (4.14)$$

obtemos a hamiltoniana associada ao modelo como sendo dada por,

$$\bar{H} = \bar{N} \bar{\mathcal{H}}, \quad (4.15)$$

onde definimos a *superhamiltoniana* do modelo

$$\bar{\mathcal{H}} \doteq -\frac{p_b^2}{24b} + \frac{p_\sigma^2}{4\omega b^3} - 6kb. \quad (4.16)$$

Agora iremos deduzir a superhamiltoniana no correspondente modelo no referencial de Weyl. Estas superhamiltonianas nos darão as equações de movimento para as variáveis canônicas. Deste modo poderemos analisar a evolução do modelo cosmológico em cada referencial.

4.2 Hamiltoniana no referencial de Weyl

Neste referencial a eq.(4.1) torna-se

$$S_{BDG} = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} (R + \omega \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}) \quad (4.17)$$

onde temos agora que o escalar de Ricci R é escrito em termos da conexão de Weyl $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, definida na eq.(2.9). Transformando o elemento de linha da eq.(4.2) para este referencial, teremos que $\bar{g} = e^{-\phi} g_{\mu\nu}$, onde

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} N^2(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2(t)/(1-kr^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

logo o escalar de Ricci será expresso como

$$R = \frac{3}{2N^3a^2} \left[Na \left(a\dot{\phi}^2 - 6\dot{\phi}\dot{a} + 2a\phi\frac{\dot{N}}{N} - 2a\ddot{\phi} \right) + 4 \left(kN^3 + a\ddot{a}N - a\dot{a}\dot{N} + \dot{a}^2N \right) \right]. \quad (4.19)$$

Devemos novamente considerar que $\phi = \phi(t)$. Portanto, teremos que

$$\omega g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} = \frac{\omega}{N^2} \dot{\phi}^2. \quad (4.20)$$

Deste modo, usando as eqs.(4.19, 4.20) na eq.(4.17), teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{BDG} = V_o \int dt e^{-\phi} & \left[6 \left(kNa + \frac{a^2}{N} \ddot{a} + \frac{a}{N} \dot{a}^2 - \frac{a}{N^2} \dot{a}\dot{N} \right) + \omega \frac{a^3}{N} \dot{\phi}^2 \right] + \\ & V_o \int dt e^{-\phi} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{a^3}{N} \dot{\phi}^2 - 6 \frac{a^2}{N} \dot{\phi}\dot{a} + 2 \frac{a^3}{N^2} \dot{\phi}\dot{N} - 2 \frac{a^3}{N} \ddot{\phi} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde já temos definido V_o na eq.(4.7). A eq.(4.21) pode ser integrada por partes para separar termos de derivada total, o qual não contribuirão para as equações de movimento. Realizando este procedimento obtemos a seguinte ação reduzida

$$\mathcal{S}_{BDG} = V_o \int dt \left\{ e^{-\phi} \left[\left(\omega - \frac{3}{2} \right) \frac{a^3}{N} \dot{\phi}^2 + 6 \left(kNa - \frac{a}{N} \dot{a}^2 + \frac{a^2}{N} \dot{a}\dot{\phi} \right) \right] + \frac{d}{dt} \left[e^{-\phi} \frac{a^2}{N} (\dot{a} - 3a\dot{\phi}) \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Sendo portanto o último termo na eq.(4.22) um termo de derivada total, podemos desconsiderá-lo e definir a lagrangiana associada ao modelo com o sendo dada por

$$L_{BDG} \doteq e^{-\phi} \left[\left(\omega - \frac{3}{2} \right) \frac{a^3}{N} \dot{\phi}^2 + 6 \left(kNa - \frac{a}{N} \dot{a}^2 + \frac{a^2}{N} \dot{a}\dot{\phi} \right) \right]. \quad (4.23)$$

Note que agora, neste referencial, o campo escalar não se apresenta mais como uma coordenada cíclica, pois

$$\frac{\partial}{\partial \phi} L_{BDG} = -L_{BDG} \neq 0. \quad (4.24)$$

Portanto p_ϕ não é uma constante do movimento, como era o caso de p_σ no referencial de Riemann. Pela definição do momento canonicamente conjugado, obtemos que

$$p_a \doteq \frac{\partial L_{BDG}}{\partial \dot{a}} \equiv \frac{6e^{-\phi}}{N} (a^2\dot{\phi} - 2a\dot{a}), \quad (4.25)$$

$$p_\phi \doteq \frac{\partial L_{BDG}}{\partial \dot{\phi}} \equiv \frac{e^{-\phi}}{N} [(2\omega - 3)a^3\dot{\phi} + 6a^2\dot{a}], \quad (4.26)$$

$$p_N \doteq \frac{\partial L_{BDG}}{\partial \dot{N}} \equiv 0, \quad (4.27)$$

Finalmente obtemos a hamiltoniana associada ao modelo como sendo dada por,

$$H_{BDG} = N\mathcal{H}_{BDG}, \quad (4.28)$$

onde definimos a *superhamiltoniana* do modelo

$$\mathcal{H}_{BDG} \doteq \frac{e^\phi}{4\omega a} \left[\frac{(3-2\omega)}{12} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{a^2} + \frac{p_a p_\phi}{a} \right] - 6kae^{-\phi}. \quad (4.29)$$

Uma vez que $\bar{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{H}_{BDG}$ são provenientes de lagrangianas relacionadas por uma transformação de Weyl, queremos verificar que existe uma transformação de $\bar{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{H}_{BDG}$ e vice versa. Desde que agora estamos formulando a dinâmica do modelo no espaço de fase, tal transformação, pelos critérios do formalismo hamiltoniano, deve ser uma *transformação canônica*. Na próxima seção nós mostraremos que de fato as transformações de Weyl induzem as transformações canônicas que fazem corresponder o espaço de fase do sistema representado no referencial riemanniano com sua representação no referencial weyliano.

4.3 Mudança de referencial como uma transformação canônica

Nas seções anteriores, derivamos os vínculos hamiltonianos em cada referencial, contudo temos visto que estes dois referenciais estão relacionados por uma transformação de Weyl. Ou seja, a ação dada na eq.(4.1), representada no referencial riemanniano $(\mathcal{M}, \bar{g}, 0)$, é mapeada na ação dada pela eq.(4.17), representada no referencial weyliano $(\mathcal{M}, g, \phi)$, mediante a transformação de Weyl com $f = -\phi$. Relembramos ainda que temos redefinido $\phi = \sigma$ no referencial riemanniano para fins de distinção entre o campo escalar em cada referencial. O reflexo destas transformações no elemento de linha do modelo cosmológico em cada referencial é obviamente uma transformações entre as variáveis de cada modelo. Seja a transformação entre os referenciais dada por,

$$\bar{g}_{\mu\nu} = e^{-\phi} g_{\mu\nu} \quad , \quad \bar{\phi} = 0. \quad (4.30)$$

Comparando a eq.(4.3) com a eq.(4.18), podemos inferir as seguintes relações:

$$b = ae^{-\phi/2} \quad , \quad \bar{N} = Ne^{-\phi/2}. \quad (4.31)$$

Realizando estas transformações na eq.(4.11) obtemos a eq.(4.23). A transformação inversa também é verificada.

Uma vez que procedemos com a transformação de Legendre para representar a teoria no formalismo hamiltoniano, podemos traduzir as transformações de Weyl entre estes dois referenciais como sendo uma transformação canônica entre os espaços de fase associados a cada modelo. Então, tais transformações canônicas, decorrentes das transformações de Weyl, devem levar a eq.(4.16) na eq.(4.29), ao passo que a forma das equações de movimento de Hamilton sejam preservadas com respeito as variáveis canônicas de cada espaço de fase. As transformações dadas na eq.(4.31) podem ser usadas nas eqs.(4.12, 4.13, 4.25, 4.26) para obter as seguintes relações:

$$p_b = p_a e^{\phi/2} \quad , \quad p_\sigma = p_\phi + \frac{a}{2} p_a. \quad (4.32)$$

Desde que $ap_a \equiv bp_b$ é invariante perante as transformações propostas, podemos definir as seguintes transformações que relacionam $\bar{H}$ e H_{BDG} :

$$a = b e^{\sigma/2} \quad (4.33)$$

$$\phi = \sigma \quad (4.34)$$

$$p_a = p_b e^{-\sigma/2} \quad (4.35)$$

$$p_\phi = p_\sigma - \frac{b}{2} p_b, \quad (4.36)$$

além da transformação $N = \bar{N} e^{\sigma/2}$. Ou seja, realizando as transformações acima teremos que,

$$\bar{H} \doteq \bar{N} \bar{\mathcal{H}} \equiv N \mathcal{H}_{BDG} \doteq H_{BDG}. \quad (4.37)$$

Podemos além disso verificar a canonicidade destas transformações mediante a definição dos *parênteses de Lagrange* [Lemos 2007].

Definição 4.3.1 (Parêntese de Lagrange). *Seja (η, ξ) um conjunto de $2n$ variáveis canônicas dependentes dos parâmetros u, v . O parêntese de Lagrange de u, v em relação a (η, ξ) , denotado por $[u, v]_{(\eta, \xi)}$, é definido por:*

$$[u, v]_{(\eta, \xi)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \eta_k}{\partial u} \frac{\partial \xi_k}{\partial v} - \frac{\partial \eta_k}{\partial v} \frac{\partial \xi_k}{\partial u} \right). \quad (4.38)$$

Teorema 4.3.1. *A transformação $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ é canônica se e somente se*

$$[q_i, q_j]_{(Q, P)} = 0 = [p_i, p_j]_{(Q, P)} \quad e \quad [q_i, p_j]_{(Q, P)} = \delta_{ij} \quad (4.39)$$

As variáveis canônicas em cada referencial estão representadas na Tabela 4.1:

Referencial de Weyl (Q, P)	Referencial de Riemann (q, p)
a	b
p_a	p_b
ϕ	σ
p_ϕ	p_σ

Tabela 4.1: Variáveis canônicas

Podemos portanto verificar pelo teorema acima que as transformações nas variáveis canônicas, induzidas pelas transformações de Weyl, são de fato uma transformações canônica. Usando a definição da eq.(4.38) iremos obter que

$$[b, \sigma]_{(Q, P)} = 0 = [p_b, p_\sigma]_{(Q, P)} \quad e \quad [b, p_b]_{(Q, P)} = 1 = [\sigma, p_\sigma]_{(Q, P)} \quad (4.40)$$

Nesta seção estamos verificando que quando as transformações de Weyl são encaradas sob o ponto de vista do formalismo hamiltoniano, elas adquirem as características das transformações canônicas. Este resultado permite mostrar a equivalência física entre duas representações de um sistema físico relacionadas por uma transformação de Weyl. Na próxima seção trataremos de deduzir a função geradora destas transformações canônicas. Isso será relevante quando estivermos interessados na transformação unitária que relaciona estes dois referenciais no regime quântico.

4.4 Função geradora das transformações canônicas de Weyl

As transformações canônicas entre as variáveis representadas na Tabela 4.1 devem ser geradas por alguma função geradora $F(q, p; Q, P)$ que relaciona os vínculos hamiltonianas

$\bar{H}$ e H_{BDG} . Das eqs.(4.33, 4.34, 4.35, 4.36), podemos obter as seguintes relações:

$$\phi \equiv 2 \log \left(\frac{p_b}{p_a} \right) \quad (4.41)$$

$$\sigma \equiv 2 \log \left(\frac{p_b}{p_a} \right) \quad (4.42)$$

$$a \equiv \frac{2}{p_a} (p_\sigma - p_\phi) \quad (4.43)$$

$$b \equiv \frac{2}{p_b} (p_\sigma - p_\phi). \quad (4.44)$$

Denotando o conjunto das variáveis canônicas em cada referencial como segue,

$$(q, p) \implies (b, \sigma, p_b, p_\sigma) \quad \text{e} \quad (Q, P) \implies (a, \phi, p_a, p_\phi), \quad (4.45)$$

teremos que a função geradora é do tipo $F_4(p; P)$. Esta função geradora leva às seguintes relações [Lemos 2007]

$$q = -\frac{\partial}{\partial p} F_4(p; P) \quad \text{e} \quad Q = \frac{\partial}{\partial P} F_4(p; P). \quad (4.46)$$

Logo teremos que

$$a = \frac{\partial}{\partial p_a} F(p_b, p_\sigma; p_a, p_\phi) \quad (4.47)$$

$$\phi = \frac{\partial}{\partial p_\phi} F(p_b, p_\sigma; p_a, p_\phi) \quad (4.48)$$

$$b = -\frac{\partial}{\partial p_b} F(p_b, p_\sigma; p_a, p_\phi) \quad (4.49)$$

$$\sigma = -\frac{\partial}{\partial p_\sigma} F(p_b, p_\sigma; p_a, p_\phi). \quad (4.50)$$

As equações acima podem ser integradas usando as relações dadas nas eqs.(4.33, 4.34, 4.35, 4.36). Por fim teremos que a função geradora é dada por

$$F_4 = 2 \log \left(\frac{p_b}{p_a} \right) (p_\sigma - p_\phi). \quad (4.51)$$

De fato esta função geradora fornece as transformações canônicas induzidas pelas transformações de Weyl. Contudo, podemos ainda nos valer das relações entre as variáveis canônicas para escrever a função geradora F_4 em termos de somente um dos conjuntos de

variáveis. Dessa maneira podemos expressar a eq.(4.51) como sendo dada por

$$F_4 = \frac{1}{2} \sigma b p_b. \quad (4.52)$$

Esta forma da função geradora será mais útil quando formos definir um operador unitário que desempenhe o papel desta função geradora no regime quântico.

4.5 Soluções das equações de Hamilton em cada referencial

Nesta seção trataremos de resolver as equações de movimento hamiltonianas em cada referencial com o intuito de analisar o comportamento clássico do modelo cosmológico e identificar possíveis singularidades cosmológicas. O conhecimento do comportamento clássico do modelo é importante para uma futura comparação com as correções advindas do procedimento de quantização canônica.

Dada uma hamiltoniana, obtida por uma transformação de Legendre no espaço de configuração de uma dada teoria, o sistema passa a ser descrito no espaço de fase pelas variáveis canônicas (q, p) que obedecem as seguintes equações dinâmicas

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{e} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (4.53)$$

Diante disto, podemos resolver as equações de movimento para cada referencial, com suas respectivas hamiltonianas dadas nas eqs.(4.16, 4.29).

4.5.1 Equações de movimento no referencial de Riemann

A transformada de Legendre do modelo cosmológico no referencial de Riemann nos levou ao vínculo hamiltoniano dado na eq.(4.16). Logo, as equações de movimento hamiltoniana neste referencial, onde as variáveis canônicas são dadas pelo conjunto $(b, \sigma, p_b, p_\sigma)$, são

escritas como segue

$$\dot{b} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_b} \equiv -\frac{\bar{N}}{12b} p_b \quad (4.54)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_\sigma} \equiv \frac{\bar{N}}{2\omega b^3} p_\sigma \quad (4.55)$$

$$\dot{p}_b = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial b} \equiv \frac{\bar{N}}{b} \left(-\frac{p_b^2}{24b} + \frac{3p_\sigma^2}{4\omega b^3} + 6kb \right) \quad (4.56)$$

$$\dot{p}_\sigma = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \sigma} \equiv 0. \quad (4.57)$$

Portanto, teremos que $p_\sigma = \Lambda$, onde Λ é uma constante do movimento. Naturalmente essa constante de movimento é devido ao fato de σ ser uma *variável cíclica* neste referencial [Lemos 2007]. Além das equações acima, temos que a eq.(4.16) estabelece um vínculo entre as variáveis canônicas tal que,

$$-\frac{p_b^2}{24b} + \frac{\Lambda^2}{4\omega b^3} - 6kb = 0. \quad (4.58)$$

Podemos obter as equações de movimento da variável b em termos da variável σ , definindo

$$q' \doteq \frac{dq}{d\sigma}, \quad (4.59)$$

e usando a eq.(4.55) para escrever $\dot{b}$ como segue

$$\dot{b} \equiv \frac{d\sigma}{dt} \frac{db}{d\sigma} = \frac{\bar{N}\Lambda}{2\omega b^3} b'. \quad (4.60)$$

Ou seja, a eq.(4.54) torna-se

$$b' = -\frac{\omega}{6\Lambda} b^2 p_b. \quad (4.61)$$

Analogamente, a eq.(4.56) torna-se

$$p'_b = \frac{2\omega}{\Lambda} b^2 \left(-\frac{p_b^2}{24b} + \frac{3\Lambda^2}{4\omega b^3} + 6kb \right). \quad (4.62)$$

Estas equações, que descrevem a evolução de uma das variáveis canônicas com respeito a outra, não depende da função lapso $\bar{N}$, a qual determina a parametrização do tempo coordenado do modelo cosmológico. Com o auxílio do vínculo dado pela eq.(4.58) a equação para b' torna-se

$$b' = \pm \sqrt{\frac{\omega}{6} b^2 - \frac{4\omega^2 k}{\Lambda^2} b^6}. \quad (4.63)$$

A eq.(4.63) pode ser integrada por separação de variáveis, ou seja

$$\int \left(\frac{\omega}{6} b^2 - \frac{4\omega^2 k}{\Lambda^2} b^6 \right)^{-1/2} db = \pm \int d\sigma. \quad (4.64)$$

Comparando a integral do lado esquerdo da igualdade da equação acima com a seguinte integral [Jeffrey e Zwillinger 2000]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2 + \beta x^6}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \log \left[\frac{x^2}{\alpha + \sqrt{\alpha(\alpha + \beta x^4)}} \right], \quad (4.65)$$

teremos então que

$$x \rightarrow b, \quad \alpha \equiv \frac{\omega}{6} \quad \text{e} \quad \beta \equiv -\frac{4\omega^2 k}{\Lambda^2}. \quad (4.66)$$

Portanto,

$$\frac{b^2(\sigma)}{1 + \sqrt{1 - \frac{24k\omega}{\Lambda^2} b^4(\sigma)}} = \frac{\omega}{6} \exp \left[\pm 2\sqrt{\frac{\omega}{6}} \sigma \right]. \quad (4.67)$$

Resolvendo a equação acima para $b_k(\sigma)$, teremos

$$b_k(\sigma) = \Lambda \exp \left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{6}} \sigma \right) \left[\frac{3\Lambda^2}{\omega} + 2k\omega^2 \exp \left(\pm 2\sqrt{\frac{2\omega}{3}} \sigma \right) \right]^{-1/2} \quad (4.68)$$

Iremos agora analisar as soluções para o fator de escala b em termos do campo escalar σ para cada valor de k .

Caso $k = 0$ (seção espacial plana)

Neste caso a eq.(4.63) fica simplesmente dada por

$$b' = \pm \sqrt{\frac{\omega}{6}} b. \quad (4.69)$$

Pela eq.(4.68) temos que a equação acima admite a seguinte solução

$$b(\sigma) = \sqrt{\frac{\omega}{3}} \exp \left[\pm \sqrt{\frac{\omega}{6}} \sigma \right], \quad (4.70)$$

O comportamento de $b(\sigma)$ é demonstrado na Figura 4.1.

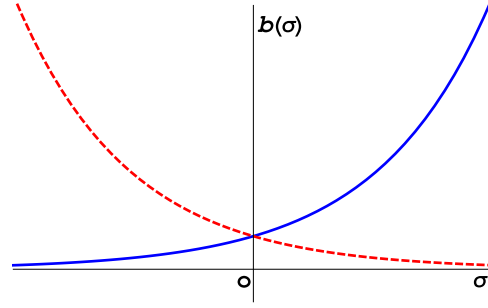


Figura 4.1: Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = 0$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.70). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3$.

Contudo, devemos principalmente analisar o comportamento do fator de escalar e do campo escalar em função do tempo cósmico. Esta análise será possível desde que consideramos um observador có-móvel, tal que o tempo coordenado t coincida com o tempo-próprio τ medido por esta classe de observadores. Esta igualdade entre t e τ requer que a função lapso seja $\bar{N} = 1$. Desta maneira, as eqs.(4.54 e 4.55) tornam-se

$$\dot{b} = -\frac{p_b}{12b} \quad (4.71)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\Lambda}{2\omega b^3}. \quad (4.72)$$

Novamente, podemos resolver as equações acima com o auxílio da eq.(4.58) para $k = 0$. Iremos obter que

$$b(t) = \left(\frac{3\Lambda}{2\sqrt{6\omega}} t \right)^{1/3} \quad (4.73)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{6}{\omega}} \log(t). \quad (4.74)$$

Já para a parametrização do tempo conforme, que implica $\bar{N} = b$, teremos que as eqs.(4.54 e 4.55) tornam-se

$$\dot{b} = -\frac{p_b}{12} \quad (4.75)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\Lambda}{2\omega b^2}, \quad (4.76)$$

as quais admitem as seguintes soluções,

$$b(t) = \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{6\omega}} t \right)^{1/2} \quad (4.77)$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{3}{2\omega}} \log(t). \quad (4.78)$$

Os comportamentos de $b(t)$ para estas duas escolhas da função lapso $\bar{N}$ são apresentados abaixo, na Figura 4.2.

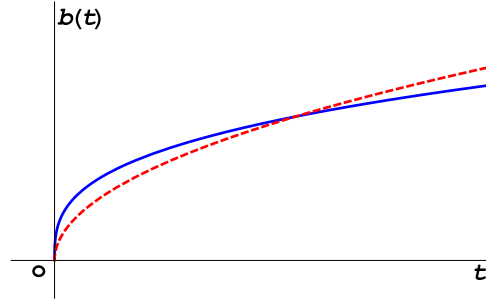


Figura 4.2: Comportamento de $b(t)$ para $\bar{N} = 1$ (curva contínua) e $\bar{N} = b$ (curva tracejada). Neste gráfico estamos assumindo $\Lambda = 1 = \omega$.

Caso $k = 1$ (seção espacial fechada)

Neste caso a eq.(4.63) ficará

$$b' = \pm \sqrt{\frac{\omega}{6} b^2 - \frac{4\omega^2}{\Lambda^2} b^6}. \quad (4.79)$$

De acordo com a eq.(4.68) a equação acima admite a seguinte solução

$$b(\sigma) = \Lambda \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{6}} \sigma\right) \left[\frac{3\Lambda^2}{\omega} + 2\omega^2 \exp\left(\pm 2\sqrt{\frac{2\omega}{3}} \sigma\right) \right]^{-1/2} \quad (4.80)$$

O comportamento da eq.(4.80) é representado na Figura 4.3

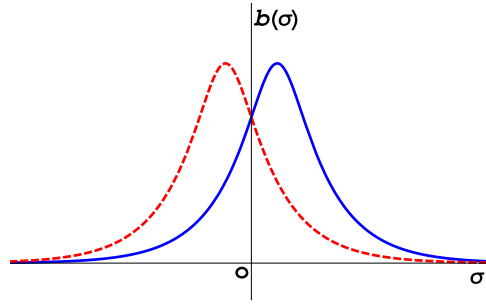


Figura 4.3: Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = 1$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.80). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 0,5$ e $\Lambda = 1$.

Assim como foi feito no caso de $k = 0$, podemos resolver as equações de movimento em termos do tempo coordenado para uma dada escolha de $\bar{N}$. As equações de movimento para $k \neq 0$ são mais facilmente resolvidas para $\bar{N} = b$, ou seja no tempo conforme. Portanto, tomando $\bar{N} = b$ nas eqs.(4.54 e 4.55), teremos

$$\dot{b} = -\frac{p_b}{12} \quad (4.81)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\Lambda}{2\omega b^2}. \quad (4.82)$$

Com o auxílio da eq.(4.58), considerando $k = 1$,

$$p_b = \pm \left(\frac{6\Lambda^2}{\omega b^2} - 144b^2 \right)^{1/2}, \quad (4.83)$$

a equação para $b(t)$ pode ser integrada em t fornecendo

$$b(t) = \left(\frac{\Lambda^2}{24\omega} \right)^{1/4} \sqrt{\sin(2t)}. \quad (4.84)$$

Agora podemos usar a eq.(4.84) para integrar a eq.(4.82) obtendo,

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{3}{2\omega}} \log[\tan(t)]. \quad (4.85)$$

Caso $k = -1$ (seção espacial aberta)

Já neste caso a eq.(4.63) torna-se

$$b' = \pm \sqrt{\frac{\omega}{6}b^2 + \frac{4\omega^2}{\Lambda^2}b^6}, \quad (4.86)$$

a qual admite como solução

$$b(\sigma) = \Lambda \exp\left(\pm \sqrt{\frac{\omega}{6}}\sigma\right) \left[\frac{3\Lambda^2}{\omega} - 2\omega^2 \exp\left(\pm 2\sqrt{\frac{2\omega}{3}}\sigma\right) \right]^{-1/2}. \quad (4.87)$$

O comportamento da eq.(4.87) é representado na Figura 4.4

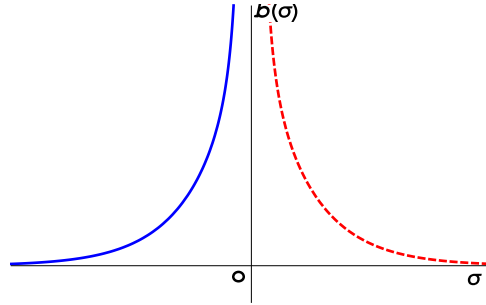


Figura 4.4: Comportamento de $b(\sigma)$ para $k = -1$, onde a curva contínua descreve o ramo positivo, e a curva tracejada o ramo negativo, da eq.(4.87). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 1,5$ e $\Lambda = 1$.

Novamente vamos resolver as equações de movimento em termos do tempo conforme. Tomando $\tilde{N} = b$ nas eqs.(4.54 e 4.55), teremos

$$\dot{b} = -\frac{p_b}{12} \quad (4.88)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\Lambda}{2\omega b^2}. \quad (4.89)$$

Porém agora a eq.(4.58), para $k = -1$, torna-se

$$p_b = \pm \left(\frac{6\Lambda^2}{\omega b^2} + 144b^2 \right)^{1/2}. \quad (4.90)$$

Utilizando a equação acima podemos integrar $b(t)$ obtendo

$$b(t) = \left(\frac{\Lambda^2}{24\omega} \right)^{1/4} \sqrt{\sinh(2t)}. \quad (4.91)$$

Substituindo a eq.(4.91) na eq.(4.89) podemos integrá-la e obter a seguinte expressão para $\sigma(t)$,

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{3}{2\omega}} \log [\tanh(t)]. \quad (4.92)$$

Os comportamentos clássicos de $b(t)$ e $\sigma(t)$ para cada tipo de seção espacial, no tempo conforme, são representados na Figura 4.5. Os comportamentos para $b(t)$ estão de acordo com as soluções conhecidas na literatura para este modelo. Todos os comportamentos de $b = b(\sigma)$, mostrados nas Figuras 4.1, 4.3 e 4.4, são idênticos aos obtidos por [Vakili 2012]

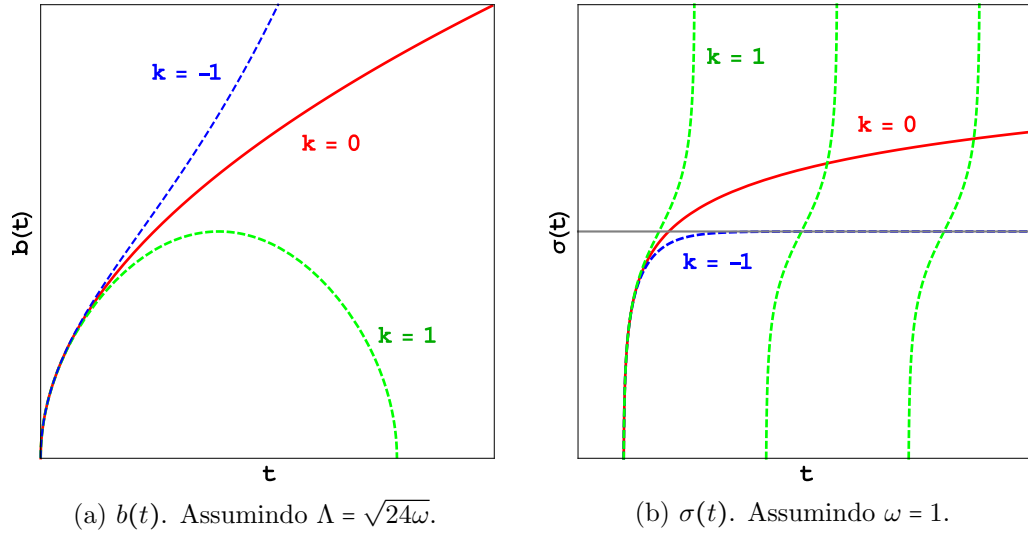


Figura 4.5: Comportamentos de $b(t)$ e $\sigma(t)$ no tempo conforme para $k = -1, 0$ e 1 .

4.5.2 Equações de movimento no referencial de Weyl

Na seção anterior analisamos as soluções para as equações de movimento hamiltonianas do modelo cosmológico representado no referencial de Riemann. Nesta seção trataremos de obter as soluções das equações de movimento no referencial de Weyl. Já temos deduzido a forma da super-hamiltoniana neste referencial, dado na eq.(4.29). Portanto temos o seguinte vínculo entre as variáveis canônicas neste referencial,

$$\frac{(3 - 2\omega)p_a^2}{12} + \frac{p_\phi^2}{a^2} + \frac{p_a p_\phi}{a} - 24\omega k a^2 e^{-2\phi} = 0. \quad (4.93)$$

Já as equações de movimento hamiltonianas neste referencial serão as seguintes

$$\dot{a} = \frac{Ne^\phi}{4\omega a} \left[\frac{(3-2\omega)p_a}{6} + \frac{p_\phi}{a} \right], \quad (4.94)$$

$$\dot{\phi} = \frac{Ne^\phi}{4\omega a} \left[\frac{p_a}{a} + \frac{2p_\phi}{a^2} \right], \quad (4.95)$$

$$\dot{p}_a = \frac{Ne^\phi}{4\omega a^2} \left[\frac{p_a p_\phi}{a} + \frac{2p_\phi^2}{a^2} \right] + 12Nke^{-\phi}, \quad (4.96)$$

$$\dot{p}_\phi = -12Nkae^{-\phi}, \quad (4.97)$$

onde temos usado a eq.(4.93) para anular alguns termos nas equações acima. Essas equações são mais complicadas que aquelas obtidas no referencial de Riemann, contudo temos visto que as variáveis canônicas dos dois referenciais estão relacionadas pelas transformações canônicas induzidas pelas transformações de Weyl entre os dois referenciais. É portanto de grande valia utilizar esta correspondência para obter as soluções das equações de movimento acima. Alguns pontos devem ser evidenciados agora que temos a forma das equações de movimento em cada referencial. Temos já indicado que o termo qp_q é um invariante por estas transformações canônicas, ou seja

$$bp_b \rightarrow ap_a. \quad (4.98)$$

Então, tomemos com o exemplo o caso $k = 0$. Neste caso teremos que os vínculos hamiltonianos em cada referencial fornecem que,

$$p_b = \pm \frac{p_\sigma}{b} \sqrt{\frac{6}{\omega}}, \quad (4.99)$$

$$p_a = \pm \frac{p_\phi}{a} \left(\frac{6 + \sqrt{24\omega}}{3 - 2\omega} \right). \quad (4.100)$$

Porém, de acordo com as eqs.(4.57, 4.97), p_σ é uma constante do movimento e p_ϕ será também uma constantes do movimento quando consideramos $k = 0$. Logo se multiplicamos a eq.(4.99) por b e a eq.(4.100) por a , e depois as igualamos, pois estes termos são invariantes, teremos uma relação entre as constantes $p_\sigma = \Lambda_\sigma$ e $p_\phi = \Lambda_\phi$. De fato, esta relação corresponde a transformação canônica entre p_σ e p_ϕ , dada na eq.(4.36).

$$\Lambda_\sigma = \Lambda_\phi \left(\frac{2\omega + \sqrt{6\omega}}{2\omega - 3} \right). \quad (4.101)$$

Pode-se verificar que para termos $\Lambda_\sigma = \Lambda_\phi$, é necessário tomar $\omega = 3/2$, o qual não é um valor permitido para este parâmetro nesta teoria. Contudo, podemos ter $\Lambda_\sigma = -\Lambda_\phi$ desde que

escolhamos $\omega = 3/8$, o qual é permitido. Ou seja, para o caso $k = 0$ a constante do movimento Λ tem seu sinal definido pelo referencial no qual ela está sendo representada. É interessante explorar ainda mais a invariância deste termo na busca de soluções para as equações de movimento. Continuando no caso $k = 0$, temos que $ap_a \equiv bp_b = \text{constante}$. Portanto,

$$\frac{d}{dt}(ap_a) = 0 = \frac{d}{dt}(bp_b), \quad (4.102)$$

ou seja,

$$\dot{a}p_a = -a\dot{p}_a \quad \text{e} \quad \dot{b}p_b = -b\dot{p}_b \quad (4.103)$$

Desde que conhecemos as soluções para $b(t)$ e $\sigma(t)$, podemos inferir as soluções para $a(t)$ e $\phi(t)$. Na seção anterior obtemos as seguintes soluções para o fator de escala no referencial de Riemann:

$$b_k(t) = \left(\frac{\Lambda_\sigma^2}{24\omega}\right)^{1/4} \chi_k(2t) \quad \text{e} \quad \sigma_k(t) = \left(\frac{3}{2\omega}\right)^{1/2} \Xi_k(t), \quad (4.104)$$

onde temos escrito as soluções de uma maneira sucinta definindo os funcionais $\chi_k[f(t)]$ e $\Xi_k[f(t)]$ como são dados a seguir

$$\chi_k[f(t)] = \begin{cases} \sqrt{f(t)}, & \text{se } k = 0, \\ \sqrt{\sin[f(t)]}, & \text{se } k = 1, \\ \sqrt{\sinh[f(t)]}, & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (4.105)$$

$$\Xi_k[f(t)] = \begin{cases} \log[f(t)], & \text{se } k = 0, \\ \log\{\tan[f(t)]\}, & \text{se } k = 1, \\ \log\{\tanh[f(t)]\}, & \text{se } k = -1. \end{cases} \quad (4.106)$$

Agora podemos inferir a forma das soluções para $a(t)$ e $\phi(t)$ transformando a eq.(4.104) mediante as transformações dadas nas eqs.(4.33, 4.34). Ou seja,

$$a_k(t) = \left(\frac{\Lambda_\sigma^2}{24\omega}\right)^{1/4} \chi_k(2t) \exp\left[\frac{1}{2}\phi_k(t)\right] \quad \text{e} \quad \phi_k(t) = \left(\frac{3}{2\omega}\right)^{1/2} \Xi_k(t). \quad (4.107)$$

Logo podemos ver o comportamento para o fator de escala $a(t)$ do modelo cosmológico representado no referencial de Weyl, dado na Figura 4.6. O comportamento de $\phi(t)$ é o mesmo de $\sigma(t)$, já que a transformação é a identidade.

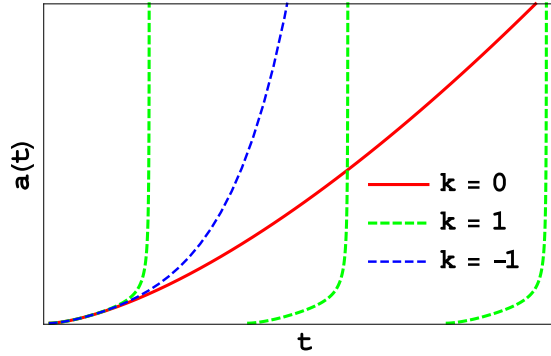


Figura 4.6: Comportamento de $a(t)$ no tempo conforme. Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3/8$ e $\Lambda = 3$.

4.6 Singularidades cosmológicas

Trataremos agora de identificar as singularidades cosmológicas nas soluções que obtivemos nas seções anteriores. Temos estendido os teoremas de singularidade de Hawking-Penrose para caso de variedades de Weyl integrável em [Lobo et al. 2015], onde a adoção de um formalismo invariante torna os teoremas independentes de referencial de Weyl. Tais teoremas visam provar a presença de singularidades cosmológicas independente das simetrias do modelo. Contudo, a presença de singularidades atestada pelo teoremas de Hawking-Penrose se caracteriza pela inextensividade das geodésicas do espaço-tempo, ou, em outras palavras, da *incompleteza* geodésica da variedade.

Portanto, apresentaremos nesta seção a extensão dos teoremas de Hawking-Penrose que realizamos em [Lobo et al. 2015] e confrontaremos com as soluções cosmológicas obtidas nas seções anteriores para caracterizar os modelos cosmológicos como singulares ou não-singulares.

4.6.1 Equação de Raychaudhuri

A equação de Raychaudhuri desempenha um papel fundamental na derivação dos teoremas de singularidade de Hawking-Penrose. Contudo, foi assumido nessa derivação que a geometria subjacente ao espaço-tempo era riemanniana. Portanto iniciaremos estendendo esta equação para comportar os aspectos do espaço-tempo de Weyl integrável.

Primeiramente consideramos que partículas livres devem seguir as geodésicas de Weyl tipo-tempo, como já afirmamos na extensão do postulado geodésico para variedade de Weyl. Em seguida consideramos uma congruência de geodésicas tipo-tempo, Γ , correspondendo

as *linhas de universo* de uma classe de observadores, parametrizados pelo tempo próprio invariante τ definido na eq.(2.20). Consequentemente, as tangentes a congruência geram um campo vetorial V normalizado para a unidade de comprimento. Como já fizemos em capítulos anteriores, iremos normalizar V com respeito à métrica invariante $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi}g_{\mu\nu}$ de modo que o parâmetro afim da congruência é o comprimento de arco invariante de Weyl

$$\gamma(V(\tau), V(\tau)) = 1. \quad (4.108)$$

Portanto, em um sistema de coordenadas local, a curva geodésica descrita por $x^\mu(\tau)$ satisfaz $V^\mu \nabla_\mu V^\alpha = 0$, onde $V^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ nos leva à geodésica afim em um espaço-tempo de Weyl integrável mostrado na eq.(2.23). Além disso, desde que normalizamos o campo de vetores tangentes com a métrica invariante $\gamma_{\mu\nu}$, teremos

$$V_\mu \nabla_\alpha V^\mu = 0 = V^\nu \nabla_\alpha V_\nu, \quad (4.109)$$

Similar ao que fizemos para folhear o espaço-tempo, vamos considerar agora uma hipersuperfície Σ ortogonal ao campo de vetores V em um dado ponto p de $\mathcal{M}$. Novamente definiremos, de maneira invariante, o operador de projeção para essa classe de observadores V , o qual projeta vetores de $T_p\mathcal{M}$ em $T_p\Sigma$,

$$\Pi_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - V_\mu V_\nu. \quad (4.110)$$

Então, seja um subfamília $\alpha_s(\tau)$ de geodésicas na congruência de V e η o vetor que representa um deslocamento infinitesimal de uma dada geodésica $\alpha_o(\tau)$ para uma geodésica vizinha nesta subfamília. Um campo de vetores η ao longo da subfamília pode ser definido via *transporte de Lie* ao longo de V , o que implica o requerimento a seguir

$$\mathcal{L}_V(\eta) = 0. \quad (4.111)$$

Pela definição da derivada de Lie e pelo fato da conexão ser simétrica, obtemos a seguinte expressão

$$V^\mu \nabla_\mu \eta^\alpha = \eta^\mu \nabla_\mu V^\alpha, \quad (4.112)$$

que mostra como o vetor η muda ao longo da congruência. Estamos interessados na informação sobre como as geodésicas vizinhas se comportam ao longo da congruência. Esta

importante informação está contida no *tensor de deformação* $Q_{\mu\nu}$, definido como

$$Q_{\mu\nu} = \nabla_\nu V_\mu. \quad (4.113)$$

Em termos de $Q_{\mu\nu}$ podemos reescrever (4.112) como

$$V^\mu \nabla_\mu \eta^\alpha \equiv Q^\alpha_\mu \eta^\mu, \quad (4.114)$$

a qual significa que $Q_{\mu\nu}$ mede a taxa em η^μ ser paralelamente transportada [Wald 2010]. Note que como $Q_{\mu\nu} V^\mu = 0 = Q_{\mu\nu} V^\nu$, logo $Q_{\mu\nu}$ é um tensor puramente espacial. A interpretação física dos aspectos cinemáticos da congruência é feita quando decompomos $Q_{\mu\nu}$ em suas partes irredutíveis:

$$Q_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{3} \Theta \Pi_{\mu\nu} + \zeta_{\mu\nu} + \vartheta_{\mu\nu}, \quad (4.115)$$

onde os parâmetros Θ , $\zeta_{\mu\nu}$ e $\vartheta_{\mu\nu}$ são chamados, respectivamente, como *fator de expansão*, *tensor de cisalhamento* e *tensor de vorticidade* da congruência. Da equação acima podemos escrever

$$\Theta = \Pi^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}, \quad (4.116)$$

$$\zeta_{\mu\nu} = Q_{(\mu\nu)} - \frac{1}{3} \Theta \Pi_{\mu\nu}, \quad (4.117)$$

$$\vartheta_{\mu\nu} = Q_{[\mu\nu]}. \quad (4.118)$$

No caso onde a classe de observadores é Euleriana, ou seja a congruência é localmente ortogonal a hipersuperfície Σ , teremos $\vartheta_{\mu\nu} = 0$.

Como estamos interessados nos teoremas de singularidade, iremos nos restringir ao comportamento de Θ , o qual pode evidenciar a existência de *pontos conjugados* na congruência [Wald 2010]. Logo, com o intuito de obter a equação de Raychaudhuri, nós devemos obter a taxa de variação de Θ ao longo da congruência. Portanto, pela definição, $\Theta = \nabla_\alpha V^\alpha$, devemos calcular $V^\mu \nabla_\mu \Theta = V^\mu \nabla_\mu [\nabla_\alpha V^\alpha]$. Finalmente, iremos obter

$$V^\mu \nabla_\mu \Theta = -\frac{1}{3} \Theta^2 - 2(\zeta^2 - \vartheta^2) + R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu, \quad (4.119)$$

onde estamos denotando $\zeta^2 = \zeta_{\mu\nu} \zeta^{\mu\nu}$, $\vartheta^2 = \vartheta_{\mu\nu} \vartheta^{\mu\nu}$, e o termo $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$ é usualmente referido como *escalar de Raychaudhuri*. Definindo $\dot{\Theta} = V^\mu \nabla_\mu \Theta$, nós podemos escrever (4.119) na

forma conhecida como equação de Raychaudhuri:

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{3}\Theta^2 + 2(\zeta^2 - \vartheta^2) = R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu. \quad (4.120)$$

Deve-se notar que (4.120) tem a mesma forma que o caso de um espaço-tempo riemanniano, embora deve-se lembrar que o tensor de Ricci é construído com a conexão de Weyl. De fato, isso não é uma surpresa, pois nós temos definido o tempo próprio de maneira invariante, usando a métrica $\gamma_{\mu\nu} = e^{-\phi}g_{\mu\nu}$. Na próxima seção iremos analisar as condições gerais que levam as singularidades do espaço-tempo, no sentido da incompleteza geodésica.

4.6.2 Extensão dos teoremas de singularidade

Devido a equação de Raychaudhuri no espaço-tempo de Weyl ter a mesma forma que a deduzida na geometria de Riemann, a descrição dos pontos conjugados será a mesma nestas duas geometrias: se $\theta_0 = \theta(\tau_0) < 0$, para algum $\tau = \tau_0$, e $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$, então a congruência irá desenvolver um ponto conjugado $\theta \rightarrow -\infty$ em um tempo próprio finito $\tau \leq 3/|\theta_0|$. É relevante citar que qualquer teorema da geometria riemanniana pode ser trivialmente estendido para a geometria de Weyl integrável desde que consideremos a métrica invariante $\gamma = e^{-\phi}g$. Por exemplo, como já temos mencionado, a extremização do funcional tempo próprio, dado na eq.(2.20) leva diretamente às geodésicas de Weyl. Ao mesmo passo, resultados advindos da *topologia diferencial* e estrutura causal do espaço-tempo que são válidos em um espaço-tempo de Riemann são também válidos no espaço-tempo de Weyl integrável, pois transformações conformes não afetam a estrutura do cone de luz nem a orientação da variedade. De fato, iremos enunciar agora a prova de um dos mais importantes resultados obtidos em [Lobo et al. 2015], que trata da extensão do *teorema de Jacobi*, seguindo o mesmo procedimento realizado no caso riemanniano, contudo substituindo a métrica $g_{\mu\nu}$ pela métrica invariante $\gamma_{\mu\nu}$.

Teorema 4.6.1 (Jacobi). *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ uma curva tipo-tempo diferenciável conectando dois pontos, p e $q \in \mathcal{M}$. Então uma condição necessária e suficiente para γ maximizar localmente o comprimento de arco invariante entre p e q é que γ seja uma geodésica sem pontos conjugados entre p e q .*

Devemos notar a relação entre o fator de expansão Θ e a curvatura extrínseca da variedade ortogonal à congruência geodésica, a qual, seguindo a definição da eq.(3.17), é dada

por

$$K_{\mu\nu} \equiv Q_{\mu\nu} = \Pi_\mu^\alpha \Pi_\nu^\beta \nabla_\alpha V_\beta \quad (4.121)$$

Logo, teremos que para o caso de um congruência geodésica ortogonal à hipersuperfície Σ , e parametrizada pelo comprimento de arco invariante, o traço da curvatura extrínseca desse Σ será igual ao fator de expansão Θ ,

$$K = \Theta. \quad (4.122)$$

Agora podemos provar a seguinte proposição:

Teorema 4.6.2. *Seja $(\mathcal{M}, g, \phi)$ um espaço-tempo de Weyl integrável globalmente hiperbólico com $R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0$ para todos os vetores tipo-tempo V . Supondo que exista uma hipersuperfície de Cauchy tipo-espaço Σ , tal que o traço de sua curvatura extrínseca (para a congruência ortogonal de geodésicas direcionadas para o passado) satisfaz $K \leq C < 0$ sobre toda a hipersuperfície, onde C é uma constante, então nenhuma curva tipo-tempo saindo de Σ direcionada para o passado pode ter um comprimento de arco invariante maior que $3/|C|$. Em particular, todas as geodésicas tipo-tempo direcionadas para o passado serão incompletas.*

Prova: Provaremos este teorema por contradição. Suponha que exista uma curva tipo-tempo $\lambda = \lambda(\tau)$ saindo de Σ , direcionada para o passado, cujo valor do comprimento de arco invariante τ em algum ponto $p \in \lambda$ é maior que $3/|C|$. Sabe-se que o conjunto das curvas ligando dois pontos de uma variedade globalmente hiperbólica deve ser compacto, logo a função comprimento de arco deve ter um valor máximo para uma dada curva. Então, esta curva deve ser uma geodésica. Portanto, deve existir uma geodésica γ , com o comprimento de arco invariante maior que $3/|C|$, ligando p à Σ . Isto significa que não existe pontos conjugados entre p e Σ . Mas, da inequação de Raychaudhuri, nós sabemos que γ deve ter pontos conjugados entre p e Σ . Por contradição nós concluimos que a curva λ não pode existir.

No caso da relatividade geral, onde o espaço-tempo tem uma estrutura geométrica riemanniana, a condição geométrica

$$R_{\mu\nu} V^\mu V^\nu \leq 0 \quad (4.123)$$

é equivalente a *condição de energia forte*

$$T_{\mu\nu} V^\mu V^\nu - T/2 \geq 0, \quad (4.124)$$

e o requerimento $K < 0$ é equivalente a assumir que a evolução cósmica do universo sofre um período de expansão. Portanto, do que temos visto nos teoremas acima, um universo modelado pela relatividade geral deve necessariamente ter iniciado em um estado singular.

Nos casos que estamos tratando aqui, temos a ação dada na eq.(4.1), que é idêntica, a menos do parâmetro livre ω , à ação de Einstein-Hilbert minimamente acoplado com um campo escalar sem massa, e temos sua correspondente no referencial de Weyl, descrita pela eq.(4.17). Como $R_{\mu\nu}$ é um invariante de Weyl, temos que em ambos os referenciais o escalar de Raychaudhuri terá a mesma forma. Mediante as equações de campo em cada referencial, podemos escrever

$$\bar{R}_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -\omega\dot{\sigma}^2 \equiv R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = -\omega\dot{\phi}^2, \quad (4.125)$$

onde o ponto denota a derivada do campo escalar na direção do campo vetorial V que descreve a classe de observadores (por exemplo, $V^\mu = \delta_0^\mu$). Claramente o escalar de Raychaudhuri em ambos os referenciais é negativo, desde que $\omega > 0$. Isso implica que esse modelos inevitavelmente possuirão singularidades, no sentido de geodésicas incompletas. Deve-se ter claro que estamos considerando apenas o setor gravitacional, sem as contribuições de matéria. Em [Lobo et al. 2015] a análise do sinal do escalar de Raychaudhuri é realizado com teorias mais completas, que incluem termos de potencial para o campo escalar de Weyl e também considera campos de matéria através do tensor momento energia $T_{\mu\nu}$. Estes elementos podem ampliar as possibilidades de se evitar a singularidade, permitindo o sinal que viola os teoremas de singularidade estendidos. Como exemplo, para uma teoria descrita pela seguinte ação

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-\phi} [R + \omega g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \mathcal{V}(\phi)], \quad (4.126)$$

a condição sobre o escalar de Raychaudhuri para que exista singularidade, $R_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \leq 0$, implicaria que

$$\omega\dot{\phi}^2 - e^\phi \mathcal{V}(\phi) \geq 0. \quad (4.127)$$

Em [Pucheu et al. 2016] foram obtidas as soluções para esta teoria para vários potenciais de interesse físico, no caso de um modelo de Friedmann, no referencial de Riemann. De fato, ao se considerar tais soluções na inequação dada na eq.(4.127) podemos verificar se o modelo viola ou não os teoremas de singularidade, concordando assim com o caráter singular ou não-singular das soluções para o fator de escala neste referencial. Reunimos as soluções com potencial no referencial de Riemann nas Tabelas 4.2 e 4.3, exemplificando as restrições para se ter comportamento singular e não-singular.:

Potencial $\mathcal{V}(\sigma)$	Soluções para $\sigma(t)$	Onde
$e^{-2\sigma}\Lambda$	$\sigma(t) = \sigma_o \pm \sqrt{\frac{2}{3 \omega }} \arctan \left[\sinh \left(\frac{\sqrt{6\Lambda}}{2}(t - t_0) \right) \right]$	$\omega < 0$ e $\Lambda > 0$
$e^{-(\lambda+2)\sigma}\mathcal{V}_o$	$\sigma(t) = \frac{2}{\lambda} \ln \left(\frac{H_o\lambda^2}{2\omega}t + e^{\frac{\lambda}{2}\sigma_o} \right)$	$H_o = \pm \sqrt{\frac{\omega\mathcal{V}_o}{6\omega - \lambda^2}}$
$e^{-2\sigma}(m\sigma^2 + \Lambda)$	$\sigma(t) = \sigma_o - \frac{2\alpha}{\omega}t$	$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{\omega\Lambda}{4}}$
$e^{-2\sigma}2\lambda(\sigma^2 - 2/3\omega)^2$	$\sigma(t) = \sigma_o \exp \left(-\frac{4A}{\omega}t \right)$	$A = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{3}}$

Tabela 4.2: Soluções para $\sigma(t)$ no caso com potencial $\mathcal{V}(\sigma)$. Os parâmetros $\{\mathcal{V}_o, \lambda, m, \Lambda$ e $\phi_o\}$ são constantes.

Potencial $\mathcal{V}(\sigma)$	Soluções para $b(t)$	Singularidade em t finito
$e^{-2\sigma}\Lambda$	$b(t) = b_o \cosh \left[\frac{\sqrt{6\Lambda}}{2}(t - t_0) \right]^{1/3}$	Não
$e^{-(\lambda+2)\sigma}\mathcal{V}_o$	$b(t) = b_o \left[\frac{\lambda^2 H_o}{2\omega} e^{-\frac{\lambda}{2}\sigma_o t} + 1 \right]^{2\omega/\lambda^2}$	Singular se $\omega > \lambda^2/6$
$e^{-2\sigma}(m\sigma^2 + \Lambda)$	$b(t) = b_o \exp \left[\alpha t \left(\sigma_o - \frac{\alpha}{\omega}t \right) \right]$	Não-singular se $\omega < 0$
$e^{-2\sigma}2\lambda \left(\sigma^2 - \frac{2}{3\omega} \right)^2$	$b(t) = b_o \exp \left[-\frac{\omega\sigma_o^2}{8} \exp \left(-\frac{8A}{\omega}t - 1 \right) + \frac{2}{3\omega}At \right]$	Singular se $\omega > 0$

Tabela 4.3: Soluções para $b(t)$ no caso com potencial $\mathcal{V}(\sigma)$. Os parâmetros são os mesmo das Tabela 4.2 e b_o é também uma constante.

Estamos assim concluindo que, de maneira geral, sem se considerar um modelo cosmológico, as teorias que estamos considerando em cada referencial estão fadadas a apresentar uma singularidade cosmológica, pois no nosso caso estamos tomando $\mathcal{V} = 0$. Isso fica reforçado pelas soluções cosmológicas obtidas na seção 4.5, as quais são claramente singulares. Queremos agora analisar o comportamento do modelo cosmológico quantizado canonicamente. Além do interesse na remoção da singularidade quando o modelo é regido pela estrutura da *cosmologia quântica*, estaremos também interessados nos aspectos quânticos das transformações de Weyl entre os referenciais. Esta abordagem será realizada no próximo capítulo.

CAPÍTULO 5

Cosmologia Quântica

Nesta seção iremos proceder com a quantização canônica do modelo cosmológico que temos analisado classicamente no capítulo 4. Desde que temos obtido as hamiltonianas correspondentes a representação do modelo em cada referencial, podemos derivar a equação de Wheeler-DeWitt em cada referencial e buscar suas soluções. Estas soluções serão as candidatas à *função de onda do universo*. Com a função de onda do universo calcularemos, via *interpretação de vários mundos*, o valor esperado do fator de escalar do universo em cada referencial. Finalmente poderemos confrontar o comportamento clássico obtido no capítulo 4 com o comportamento dos valores esperados obtidos neste capítulo. Esperamos que as singularidades previstas classicamente desapareçam nas soluções quânticas. Nesta seção também iremos analisar o papel das transformações de Weyl no regime quântico. Neste último tópico, estaremos interessados em verificar a comutação entre as operações de mudança de referencial e quantização canônica e a equivalência física entre os dois referenciais neste regime quântico.

5.1 Equação de Wheeler-DeWitt

Realizamos no capítulo 3 o estudo do formalismo ADM, que consistiu na descrição hamiltoniana da teoria da gravitação. Este procedimento torna direto o processo de quantização canônica do modelo, pois dispondo das variáveis canônicas e seus *parênteses de Poisson*, assim como a função hamiltoniana do sistema, podemos seguir a prescrição de quantização canônica de Dirac. Ou seja, as variáveis canônicas são promovidas a operadores e as relações dadas pelo parênteses de Poisson transformam-se em comutadores dos operadores associados. Portanto, dada uma hamiltoniana $\mathcal{H}(q, p)$, a quantização *a la Dirac* para sistemas hamiltonianos vinculados requer que

$$\mathcal{H}(q, p) = 0 \longrightarrow \hat{H}(\hat{q}, \hat{p})\Psi(q) = 0, \quad (5.1)$$

onde $\hat{q}$ e $\hat{p}$ denotam os operadores associados às variáveis canônicas q e p , respectivamente. Teremos que o então vínculo no espaço de fase passará a ser um operador no espaço de Hilbert que aniquila a função de onda do universo, $\Psi(q)$. Temos ainda que o operador $\hat{H}$ é construído com a representação de Schrödinger convencional, onde

$$\hat{p}\Psi(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}\Psi(q) \quad \text{e} \quad \hat{q}\Psi(q) = q\Psi(q). \quad (5.2)$$

Como os parênteses de Poisson entre as variáveis são promovidos à relações de comutação como segue,

$$\{q, p\} = 1 \longrightarrow [\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (5.3)$$

logo a eventual existência de termos cruzados $q^n p^m$, sendo n e m número reais, pode vir a causar ambiguidades de ordenamento destes termos. Para transpor esta dificuldade é comum se considerar o *ordenamento covariante* (ou *ordenamento de Laplace-Beltrami*), a saber: Este ordenamento se vale da estrutura métrica do superspaço, descrita pela métrica de deWitt dada na eq.(3.38), onde podemos escrever o vínculo hamiltoniano como dado na eq.(3.44). Ou seja, os termos relevantes para o ordenamento são os termos envolvendo os momentos canonicamente conjugados, pois

$$G^{\alpha\beta}(q)p_\alpha p_\beta \longrightarrow G^{\alpha\beta}(\hat{q})\hat{p}_\alpha \hat{p}_\beta. \quad (5.4)$$

Representando os operadores segundo a eq.(5.2), teremos

$$G^{\alpha\beta}(\hat{q})\hat{p}_\alpha\hat{p}_\beta = -\hbar^2 G^{\alpha\beta}(q)\partial_\alpha\partial_\beta \equiv -\hbar^2 \nabla_{LB}^2, \quad (5.5)$$

onde $G^{\alpha\beta}$ é identificado como a métrica do mini-superespaço e ∇_{LB}^2 é o *operador de Laplace-Beltrami*:

$$\nabla_{LB}^2 \doteq \frac{1}{\sqrt{-G}} \partial_\alpha \left(\sqrt{-G} G^{\alpha\beta} \partial_\beta \right). \quad (5.6)$$

Desse modo teremos que o vínculo $\mathcal{H}$ será promovido a operador fornecendo a seguinte equação diferencial

$$\left[-\hbar^2 \nabla_{LB}^2 + \mathbf{U}(q) \right] \Psi(q) = 0, \quad (5.7)$$

onde os termos que dependem apenas de q dão origem à $\mathbf{U}(q)$, que desempenha o papel de potencial na dinâmica do modelo quântico. Agora, colocando a eq.(4.16) e eq.(4.29) na forma

$$\mathcal{H} = G^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta + \mathbf{U}(\alpha, \beta), \quad (5.8)$$

identificamos $G^{\alpha\beta}$ e $\mathbf{U}(\alpha, \beta)$ em cada referencial. Teremos

$$[\bar{G}^{\alpha\beta}] \equiv \begin{bmatrix} -\frac{1}{24b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\omega b^3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{\mathbf{U}}(\alpha, \beta) \equiv -6kb \quad (5.9)$$

para o referencial de Riemann e

$$[G_{BDG}^{\alpha\beta}] \equiv \begin{bmatrix} \frac{(3-2\omega e^\phi)}{48\omega a} & \frac{e^\phi}{8\omega a} \\ \frac{e^\phi}{8\omega a} & \frac{e^\phi}{4\omega a^3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_{BDG}(\alpha, \beta) \equiv -6kae^{-\phi} \quad (5.10)$$

no referencial de Weyl. Portanto, o procedimento de quantização canônica com ordenamento covariante fornecerá a equação de Wheeler-DeWitt no referencial de Riemann, $\hat{H}_R \Psi(b, \sigma) = 0$, dada por

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial b^2} - \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial b} + \frac{6}{\omega b^2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \mu b^2 \right] \Psi(b, \sigma) = 0, \quad (5.11)$$

onde definimos $\mu \doteq 144k/\hbar^2$, e analogamente teremos que no referencial de Weyl a equação de Wheeler-DeWitt $\hat{H}_W \Psi(a, \phi) = 0$ ficará

$$\left[\frac{(3-2\omega)}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial a} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \phi} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\xi \omega a^2}{e^{2\phi}} \right] \Psi(a, \phi) = 0, \quad (5.12)$$

onde definimos $\xi = 24k/\hbar^2 \equiv \mu/6$. Contudo, temos obtido uma equação diferencial parcial de segunda ordem nas variáveis canônicas do modelo. Esta equação tem então a mesma forma da *equação de Klein-Gordon*. Diferente da *equação de Schrödinger*, nenhuma variável assume o papel do *tempo*. Além do mais, as soluções destas equações levam a funções de onda cuja densidade de probabilidade não é positiva definida, um problema já bem conhecido da equação de Klein-Gordon. Logo, na próxima seção iremos propor transformações canônicas que facilitam o tratamento quântico do modelo, posto que é obtido uma equação tipo-Schrödinger com um operador hamiltoniano hermitiano com respeito ao produto interno L^2 , onde, dado duas funções de onda $\alpha(q)$ e $\beta(q)$, teremos

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \int_{\Omega} \alpha^* \beta dq \quad (5.13)$$

sendo Ω o domínio da variável q .

5.2 Transformação canônica e equação de Schrödinger

Como foi feito em [Alves-Jr. et al. 2016], realizaremos uma transformação canônica para obter uma hamiltoniana que, ao ser quantizada, forneça uma equação tipo-Schrödinger com o operador hamiltoniano hermitiano com respeito ao produto interno convencional, como dado na eq.(5.13). No referencial de Riemann as transformações são dadas a seguir:

$$T = \frac{\sigma}{p_{\sigma}} \quad \text{e} \quad P_T = \frac{p_{\sigma}^2}{2}, \quad (5.14)$$

$$B = \ln b \quad \text{e} \quad P_B = bp_b, \quad (5.15)$$

onde a transformação dada na eq.(5.14) foi motivada em [Farajollahi et al. 2010] e terá como consequência que a equação de Wheeler-DeWitt tome a forma da equação de Schrödinger, com a variável T assumindo o papel do tempo na evolução do sistema. Uma transformação com esse mesmo propósito foi feita em [Moura 2010] com o intuito de empregar o campo escalar proveniente da ação que descreve os campos de matéria como o *relógio* da evolução da função de onda. Já a eq.(5.15) é motivada em [Falciano et al. 2007] e deixa o operador hamiltoniano transformado hermitiano com respeito ao produto interno convencional L^2 . As transformações dadas nas eq.(5.14) e eq.(5.15) são de fato canônicas, como pode ser verificado

mediante o cálculo dos parênteses de Lagrange¹. Logo, a super-hamiltoniana $\bar{\mathcal{H}}(b, \sigma, p_b, p_\sigma)$, dada na eq.(4.16), será transformada em $\bar{\mathcal{H}}_c(B, T, P_B, P_T)$, a qual chamaremos de *super-hamiltoniana canônica* no referencial de Riemann, como segue:

$$\bar{\mathcal{H}}_c(B, T, P_B, P_T) = -\frac{P_B^2}{24} + \frac{P_T}{2\omega} - 6k \exp(4B). \quad (5.16)$$

Devido a transformação ser canônica, preserva-se ainda o vínculo,

$$-\frac{P_B^2}{24} + \frac{P_T}{2\omega} - 6k \exp(4B) = 0. \quad (5.17)$$

Estamos assim empregando o campo escalar σ , de origem geométrica, como o *relógio* que mede a evolução do nosso modelo quântico. Naturalmente a quantização da hamiltoniana dada na eq.(5.16) leva a uma equação tipo-Schrödinger dada a seguir,

$$\left[\frac{\hbar^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial B^2} - 6k e^{4B} \right] \Psi(B, T) = \frac{i\hbar}{2\omega} \frac{\partial}{\partial T} \Psi(B, T), \quad (5.18)$$

onde

$$\hat{H}_{Rc} \doteq \frac{\hbar^2}{24} \frac{\partial^2}{\partial B^2} - 6k e^{4B} \quad (5.19)$$

é hermitiano frente o produto interno

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^* \beta dB, \quad (5.20)$$

salvo as condições de contorno

$$\left(\alpha^* \frac{\partial \beta}{\partial B} - \beta \frac{\partial \alpha^*}{\partial B} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (5.21)$$

Para o referencial de Weyl, nós podemos compor a transformação que leva de $\mathcal{H}_{BDG}$ para $\bar{\mathcal{H}}$ com a transformações dadas na eq.(5.14) e eq.(5.15) e obter a mesma equação tipo-Schrödinger dada na eq.(5.18). A composição destas transformações fornecerá

$$T = \frac{\phi}{p_\phi + \frac{a}{2} p_a} \quad \text{e} \quad P_T = \frac{1}{2} \left(p_\phi + \frac{a}{2} p_a \right)^2, \quad (5.22)$$

$$A = \ln(ae^{-\phi/2}) \quad \text{e} \quad P_A = ap_a. \quad (5.23)$$

¹Ver Definição 4.3.1 e Teorema 4.3.1

Logo, tomando estas transformações faremos $\hat{H}_W \rightarrow \hat{H}_{Wc}$, o qual terá a mesma forma funcional da eq.(5.19), salvo a variável A ao invés de B . Desde que estas transformações são todas canônicas, a correspondência entre os dois referenciais garante uma equivalência física entre os modelos em cada representação. Podemos assim resolver a equação mais simples, no referencial de Riemann, e depois obter as soluções no outro referencial mediante estas transformações. Trataremos de fazer isso na próxima seção, onde obteremos as soluções físicas para eq.(5.18) no referencial de Riemann.

5.3 Soluções físicas

Queremos obter as soluções da eq.(5.19). Como estamos interessados em confrontar estas soluções com o respectivos casos clássicos, vamos nos restringir à $\omega > 0$. Para resolver a eq.(5.19) partiremos assumindo o seguinte *Ansatz*:

$$\Psi(B, T) = \beta(B)\tau(T), \quad (5.24)$$

onde $\tau(T) = \exp[iET/\hbar]$ e E é uma constante de separação positiva. Portanto, considerando a eq.(5.24) na eq.(5.19), teremos a seguinte equação diferencial ordinária para $\beta(B)$

$$\frac{d^2\beta}{dB^2} + (\nu - \mu e^{4B})\beta = 0, \quad (5.25)$$

sendo

$$\mu = 144 \frac{k}{\hbar^2} \quad \text{e} \quad \nu \doteq \frac{12E}{\omega \hbar^2}. \quad (5.26)$$

Note que assim como E , o parâmetro ν é sempre positivo desde que estamos assumindo $\omega > 0$. Já o sinal de μ dependerá da topologia da seção espacial do modelo que estamos considerando. Estudaremos agora as soluções para o caso μ nulo.

Caso μ nulo

Neste caso teremos que a eq.(5.19) se reduz a equação para oscilações livres. Portanto, esta equação admite a seguinte soluções

$$\beta_0(B) = c_1 \sin(B\sqrt{\nu}) + c_2 \cos(B\sqrt{\nu}). \quad (5.27)$$

Logo a função de onda Ψ para este caso ficará

$$\Psi(B, T) = \sin \left(B \sqrt{\frac{12E}{\omega \hbar^2}} \right) \exp [iET/\hbar] \quad (5.28)$$

onde tomamos $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$ na eq.(5.27), assumindo uma solução particular que não restringirá em nada nossa análise geral. É fato que a função de onda acima não é normalizável no produto interno L^2 que estamos tratando. Deste modo, iremos construir um *pacote de onda*, que será nossa solução geral para a eq.(5.19), como a superposição das autofunções

$$\Psi_E(B, T) = \sin \left(B \sqrt{\frac{12E}{\omega \hbar^2}} \right) \exp [iET/\hbar]. \quad (5.29)$$

Portanto, teremos que

$$\Psi(B, T) = \int_0^\infty f(E) \Psi_E(B, T) dE, \quad (5.30)$$

onde $f(E)$ será a função peso adequada para construção do pacote de onda. Este resultado é bastante semelhante ao obtido em [Vakili 2012], onde a função $f(E)$ escolhida foi a semi-gaussiana

$$f(E) = e^{-\alpha E}, \quad (5.31)$$

sendo α uma constante positiva arbitrária. Então, da identidade²

$$\int_0^\infty e^{-\gamma x} \sin(\sqrt{mx}) dx = \frac{\sqrt{\pi m}}{2\gamma^{3/2}} \exp \left[-\frac{m}{4\gamma} \right], \quad (5.32)$$

teremos

$$\int_0^\infty e^{-\alpha E} e^{iET/\hbar} \sin \left(B \sqrt{\frac{12E}{\omega \hbar^2}} \right) dE \equiv \sqrt{\frac{12\pi}{\omega \hbar^2}} \frac{B}{2(\alpha - iT/\hbar)^{3/2}} \exp \left[-\frac{12}{\omega \hbar^2} \frac{B^2}{4(\alpha - iT/\hbar)} \right], \quad (5.33)$$

ou seja,

$$\Psi(B, T) = \frac{\mathcal{N}}{2} \frac{B}{(\alpha - iT/\hbar)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{4\pi} \frac{B^2}{(\alpha - iT/\hbar)} \right], \quad (5.34)$$

onde $\mathcal{N} = \sqrt{12\pi/\omega \hbar^2}$ é um fator numérico. A função de onda acima é qualitativamente idêntica a obtida em [Vakili 2012]. Podemos calcular o módulo quadrado da função de onda

²Ver eq.(24) em [Vakili 2012].

$|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ e obter

$$|\Psi|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{4} \frac{B^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{2\pi} \frac{\alpha B^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)} \right]. \quad (5.35)$$

De fato, da eq.(5.35), podemos ver que a função de onda dada na eq.(5.34) tem norma finita, ou seja

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dB \equiv \sqrt{\frac{\omega \hbar \pi^3}{96 \alpha^3}}. \quad (5.36)$$

Deste modo, podemos nos valer da *interpretação de vários mundos*, vide [Everett 1957], [Tipler 1986] e [Pinto-Neto 2010], para calcular o valor esperado de B , o qual será dado por

$$\langle B \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B |\Psi|^2 dB}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (5.37)$$

Portanto, iremos obter

$$\langle B \rangle = 0. \quad (5.38)$$

Já para o valor esperado de B^2 , teremos

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B^2 |\Psi|^2 dB}{\langle \Psi | \Psi \rangle}. \quad (5.39)$$

Ou seja,

$$\langle B^2 \rangle = \frac{\omega \hbar}{4\pi} (\alpha^2 + T^2/\hbar^2). \quad (5.40)$$

Com isso podemos calcular a *relação de dispersão* do pacote de onda, definido como

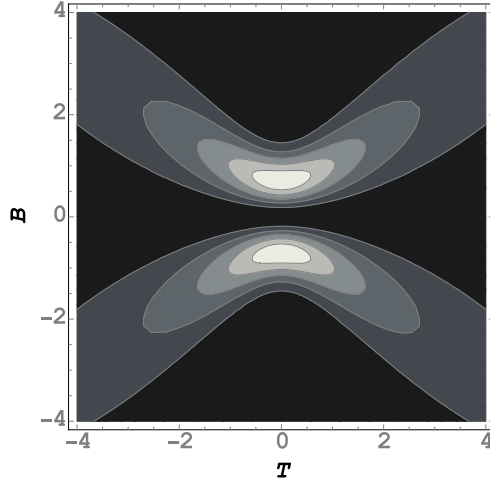
$$(\Delta B)^2 \doteq \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2, \quad (5.41)$$

e obtemos

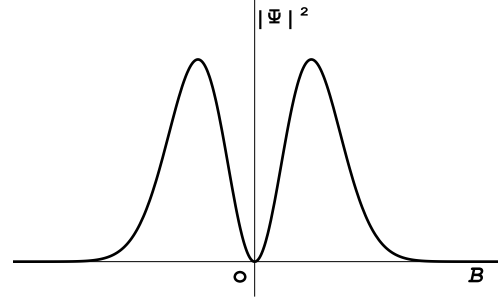
$$\Delta B = \sqrt{\frac{\omega \hbar}{4\alpha}} (\alpha^2 + T^2/\hbar^2)^{1/2}. \quad (5.42)$$

A análise que podemos fazer destes resultados é similar a feita em [Alvarenga e Lemos 1998], a saber: Temos da eq.(5.42) que o pacote de onda irá dispersar-se a medida que T se distancia de zero, sendo $T = 0$ o instante onde o pacote está mais concentrado, atingindo sua menor espessura. Quanto mais o pacote for concentrado em torno de $T = 0$, mais rápido será a sua dispersão. Portanto, concluimos com esta análise que efeitos quânticos se fazem relevantes somente para pequenos valores de T . Para grandes valores de T o modelo deve adquirir o comportamento clássico descrito no capítulo anterior. Esta análise está ilustrada nos gráficos

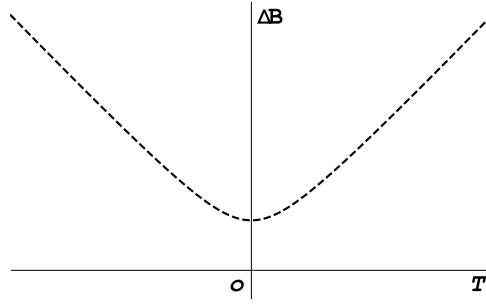
da figura 5.1 abaixo:



(a) Gráfico de contorno de $|\Psi|^2$ em função de T e B



(b) Gráfico de $|\Psi|^2$ em função de B quando $T = 0$



(c) Gráfico da relação de dispersão dada na eq.(5.42)

Figura 5.1: Comportamento de $|\Psi|^2$ no caso $k = 0$ do referencial de Riemann em acordo com a relação de dispersão do pacote de onda dada na eq.(5.42).

Contudo, para fins de comparação com os resultados clássicos que obtivemos, precisamos expressar os resultados desta seção em termos da variável b , que é o fator de escala original do modelo no referencial de Riemann. Desta maneira, poderemos ver as correções quânticas feitas no comportamento do fator de escala descrito na figura 4.1.

Logo, sendo $B = \log(b)$, teremos que a função de onda dada na eq.(5.34) toma a forma

$$\Psi(b, T) = \frac{\mathcal{N}}{2} \frac{\log(b)}{(\alpha - iT/\hbar)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{4\pi} \frac{\log(b)^2}{(\alpha - iT/\hbar)} \right], \quad (5.43)$$

e o módulo quadrado da função de onda $|\Psi|^2 = \Psi^* \Psi$ fica

$$|\Psi|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{4} \frac{\log(b)^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{2\pi} \frac{\alpha \log(b)^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)} \right]. \quad (5.44)$$

Novamente, da eq.(5.44), podemos ver que a função de onda dada na eq.(5.43) tem norma finita, ou seja

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \frac{db}{b} \equiv \sqrt{\frac{\omega \hbar \pi^3}{96 \alpha^3}}, \quad (5.45)$$

onde deve-se notar que o produto interno para a função de onda descrita em termos da variável b foi modificado. De fato, o que temos aqui é que transformações canônicas entre espaços de fase induzem transformações entre espaços de Hilbert que preservam a norma de vetores. Em [Anderson 1993] estas transformações levam o nome de *transformações canônicas quânticas*. Além disso, em [Anderson 1993] é afirmado que duas teorias quânticas serão fisicamente equivalentes se elas são relacionadas por este tipo de transformação, e não por uma transformação unitária. De fato, temos visto em [Lemos 2013] que transformações que preservam a norma de vetores no espaço de Hilbert são ditas *transformações isométricas*, cujas quais as transformações unitárias são incluídas como um caso particular. Portanto, o espaço de Hilbert onde b é a variável em questão, tem o produto interno definido como na eq.(5.44) e o domínio de b é agora $(0, \infty)$. Seguindo [Anderson 1993] afirmamos que há uma equivalência física entre as teorias descritas em termos de B e b .

Tendo esclarecido este ponto, podemos então calcular o valor esperado de b , obtendo

$$\langle b \rangle = \left[1 + \frac{\omega \hbar}{12 \alpha} (\alpha^2 + T^2 / \hbar^2) \right] \exp \left[\frac{\omega \hbar}{24 \alpha} (\alpha^2 + T^2 / \hbar^2) \right]. \quad (5.46)$$

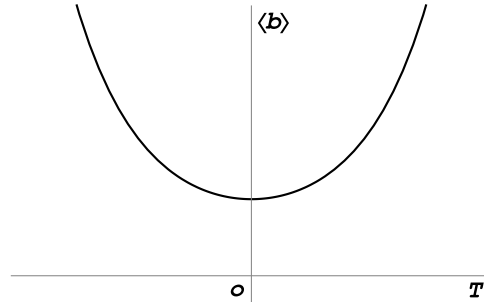


Figura 5.2: Comportamento de $\langle b \rangle$ para $k = 0$, dado na eq.(5.46). Neste gráfico estamos assumindo $\omega = 3$ e $\hbar = \alpha = 1$.

Na figura 5.2 fica evidente que efeitos quânticos são relevantes somente para pequenos T , onde consequentemente haverá pequenos valores de $\langle b \rangle$. Porém $\langle b \rangle$ nunca se anula. Ou seja, temos aqui a remoção da singularidade prevista classicamente. Além disso, $\langle b \rangle$ tende assintoticamente ao comportamento clássico de b , descrito pela eq.(4.70) e na figura 4.1. Contudo, temos que as duas soluções desconectadas da eq.(4.70) estão agora unidas pelos efeitos quânticos. Um universo que atinge um volume mínimo após uma fase de contração

e depois segue uma fase de expansão. Um mesmo resultado é obtido em [Vakili 2012]. Um outro argumento é empregado em [Alvarenga e Lemos 1998] o qual afirma que a singularidade clássica, $b = 0$, é *evitada* desde que a densidade de probabilidade da função de onda do universo se anula para $b = 0$, como pode ser confirmado na eq.(5.44). Deste modo temos que esta solução implica em um modelo cosmológico não-singular.

5.4 Transformações de Weyl no regime quântico

Nesta seção iremos nos ater a analisar a versão quântica das transformações de Weyl. Vimos no capítulo 4 que as transformações de Weyl induziam transformações canônicas capazes de mapear a dinâmica do modelo descrito no referencial de Riemann na sua correspondente representação no referencial de Weyl. Vimos ainda que era possível obter a forma da função geradora de tais transformações canônicas, dada na eq.(4.52), a qual agora denotaremos como $\mathcal{W}_{Rc}$ no referencial de Riemann

$$\mathcal{W}_{Rc} = \frac{1}{2}\sigma b p_b. \quad (5.47)$$

Esta função geradora é de fato invariante por transformações de Weyl, ou seja,

$$\mathcal{W}_{Rc} \longmapsto \mathcal{W}_{Wc} = \frac{1}{2}\phi a p_a, \quad (5.48)$$

por isso usaremos daqui para frente a notação reduzida $\mathcal{W}_c$, onde suas variáveis dependerão do referencial o qual se está descrevendo o modelo. Portanto, nós empregaremos estas funções geradoras para definir o operador unitário que realiza a mesma transformação no espaço de Hilbert.

Seja então o operador de transformação de Weyl, $\hat{W}$, definido como segue

$$\hat{W} \doteq \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b \right], \quad (5.49)$$

podemos verificar que este operador promove as mesmas relações que temos obtido nas transformações canônicas dadas na eqs.(4.33, 4.34, 4.35 e 4.36). Tomemos inicialmente a transformação do operador $\hat{\sigma}$ segundo a operação a seguir

$$\hat{\sigma} \rightarrow \hat{W} \hat{\sigma} \hat{W}^\dagger \equiv \exp \left[\frac{i}{2\hbar} \hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b \right] \hat{\sigma} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b \right]. \quad (5.50)$$

Logo, pela fórmula de *Baker-Campbell-Hausdorff* (fórmula BCH), onde

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots + \frac{1}{n!} \overbrace{[A, [A, \dots [A, B]]]}^{n \text{ vezes}}, \quad (5.51)$$

teremos que

$$\exp \left[\frac{i}{2\hbar} \hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b \right] \hat{\sigma} \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b \right] = \hat{\sigma}, \quad (5.52)$$

pois todas as variáveis envolvidas nos comutadores comutam entre si. Portanto, obtemos a versão quântica da transformação canônica entre ϕ e σ , dada na eq.(4.34),

$$\hat{W} \hat{\sigma} \hat{W}^\dagger \equiv \hat{\phi} = \hat{\sigma}. \quad (5.53)$$

A mesma conta pode ser feita para as demais transformações canônicas. No caso da relação dada na eq.(4.36) teremos que

$$\hat{p}_\phi = \hat{W} \hat{p}_\sigma \hat{W}^\dagger. \quad (5.54)$$

Como o primeiro comutador $[\hat{\sigma} \hat{b} \hat{p}_b, \hat{p}_\sigma]$ é igual a $i\hbar \hat{b} \hat{p}_b$, os demais comutadores serão nulos. Logo obtemos,

$$\hat{W} \hat{p}_\sigma \hat{W}^\dagger \equiv \hat{p}_\phi = \hat{p}_\sigma - \frac{1}{2} \hat{b} \hat{p}_b. \quad (5.55)$$

Novamente a forma funcional da eq.(4.36) é recuperada. As duas outras transformações são também recuperadas, porém diferente dos dois primeiros casos, nenhum comutador da fórmula BCH se anula. Contudo, é possível identificar estes comutadores com a expansão da função exponencial em séries de potências, ou seja

$$e^{\hat{\sigma}/2} \equiv \sum_n \frac{1}{n!} \left(\frac{\hat{\sigma}}{2} \right)^n. \quad (5.56)$$

Podemos obter então que,

$$\hat{a} = \hat{b} e^{\hat{\sigma}/2} \quad \text{e} \quad \hat{p}_a = \hat{p}_b e^{-\hat{\sigma}/2} \quad (5.57)$$

Temos assim verificado que o operador de transformação de Weyl, dado na eq.(5.49), cumpre em transformar os operadores canônicos preservando a mesma correspondência clássica. Portanto, desde que este operador unitário mapeia os espaços de Hilbert dos modelos representados em cada referencial, argumentamos que há sim uma equivalência física entre estes referenciais no regime quântico. Contudo, uma análise mais direta dessa correspondência e a atuação do campo de Weyl como o relógio natural da evolução de modelos cosmológicos requer a dedução de um operador unitário relacionado as transformações canônicas definidas

nas eqs.(5.14, 5.15, 5.22, 5.23), que levam à equações de Wheller-DeWitt com a mesma forma funcional, pois já temos afirmado que se aplicarmos as transformações canônicas, dadas na eq.(5.22) e eq.(5.23), na super-hamiltoniana obtida no referencial de Weyl

$$\mathcal{H}_{BDG} = \frac{e^\phi}{4\omega a} \left[\frac{(3-2\omega)}{12} p_a^2 + \frac{p_\phi^2}{a^2} + \frac{p_a p_\phi}{a} \right] - 6kae^{-\phi}, \quad (5.58)$$

iremos obter a seguinte super-hamiltoniana canônica no referencial de Weyl

$$\mathcal{H}_{BDGc}(A, T, P_A, P_T) = -\frac{P_A^2}{24} + \frac{P_T}{2\omega} - 6k \exp(4A). \quad (5.59)$$

Portanto sua quantização canônica leva à mesma equação diferencial obtida na seção anterior e a análise é idêntica, salvo a importante diferença que agora a variável A se corresponde com o fator de escala original neste referencial via a transformação $A = \log(ae^{-\phi/2})$. Contudo, desde que todas estas representações se correspondem mediante uma transformação canônica, deve haver uma equivalência física entre as representações de cada referencial no regime quântico.

Vejamos o comportamento do fator de escala original no referencial de Weyl, ou seja a . Seguindo o que fizemos na seção anterior, podemos dizer que a quantização do modelo descrito pela super-hamiltoniana dada na eq.(5.59) leva a seguinte função de onda, para o caso μ nulo:

$$\Psi(A, T) = \frac{\mathcal{N}}{2} \frac{A}{(\alpha - iT/\hbar)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{4\pi} \frac{A^2}{(\alpha - iT/\hbar)} \right], \quad (5.60)$$

enquanto que o módulo quadrado da função de onda é dado por

$$|\Psi|^2 = \frac{\mathcal{N}^2}{4} \frac{A^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)^{3/2}} \exp \left[-\frac{\mathcal{N}^2}{2\pi} \frac{\alpha A^2}{(\alpha^2 + T^2/\hbar^2)} \right]. \quad (5.61)$$

Temos da eq.(5.61) que de fato a norma fica invariante, ou seja

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dA \equiv \sqrt{\frac{\omega \hbar \pi^3}{96\alpha^3}}, \quad (5.62)$$

o que nos faz recuperar os mesmos resultados para valores esperados e relação de dispersão obtidos para a variável B . Entretanto, queremos novamente retornar para a representação em termos da variável a , para fins de comparação com o caso clássico. Deste modo, teremos que o produto interno calculado em termos da variável b pode ser transformado via eq.(4.33)

e eq.(4.34), obtemos assim que

$$\int \frac{db}{b} \equiv \int \frac{da}{a}. \quad (5.63)$$

Consequentemente todos os demais resultados de valores esperados para a variável a terá igual comportamento que aqueles obtidos em termos de b . Como era esperado, verificamos uma equivalência física no regime quântico entre dois modelos relacionados por transformações de Weyl. Tal resultado se opõe a discussão conhecida na literatura onde os referenciais de Jordan e Einstein, relacionados por uma transformação conforme na métrica, não mantém uma relação de equivalência física no regime quântico, como afirmado em [Faraoni e Nadeau 2007]. Parece assim para nós que a estrutura geométrica de variedades de Weyl integrável é capaz de suportar naturalmente a equivalência física entre teorias físicas, clássica e quânticas, representadas em uma classe de referenciais relacionados pelas transformações de Weyl.

CAPÍTULO 6

Conclusão

“Science does not purvey absolute truth, science is a mechanism. It’s a way of trying to improve your knowledge of nature, it’s a system for testing your thoughts against the universe and seeing whether they match.”

Isaac Asimov

Nesta tese temos abordado os aspectos clássicos e quânticos de modelos cosmológicos espacialmente homogêneos e isotrópicos regidos por uma teoria gravitacional ambientada numa geometria de Weyl integrável. A abordagem quântica foi feita mediante o formalismo da cosmologia quântica, que trata o universo como um sistema físico fechado a ser quantizado canonicamente, isto é, *a la Dirac*. Por estarmos interessados em um espaço-tempo de Weyl integrável, fizemos *a priori* a extensão do formalismo ADM para este tipo de geometria. Devido a uma construção invariante pudemos obter expressões idênticas às aquelas obtidas no formalismo ADM padrão. Contudo, o campo escalar de Weyl surge implicitamente nestas expressões. Portanto, como era esperado, tal campo escalar tem papel fundamental nas propriedades métricas do formalismo.

Propomos, após a extensão do formalismo ADM, a utilização do campo escalar de Weyl, de origem geométrica, como constituindo um parâmetro natural para se folhear o espaço-tempo na forma (1+3). Essa proposta se deve à ideia de que o campo escalar

naturalmente fornecido pela estrutura geométrica do espaço-tempo possa ser empregado como o relógio da evolução deste espaço-tempo, como uma sucessão de hipersuperfícies 3-dimensionais definidas por ϕ constante. Dessa maneira teríamos não só uma folheação natural, mas também um parâmetro temporal puramente geométrico. Mostramos que para alguns exemplos de espaços-tempos de interesse físico tal proposta é viável e conjecturamos que qualquer espaço-tempo globalmente hiperbólico pode ser decomposto em termos da folheação invariante que propomos.

Ao abordarmos o modelo cosmológico de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker classicamente, obtivemos as soluções para as seções espaciais plana, aberta e fechada. Estudamos as singularidades cosmológicas deste modelo para cada tipo de seção espacial e comparamos nossos resultados com aqueles obtidos por [Vakili 2012] ao considerar o campo escalar oriundo da geometria como definindo o parâmetro de evolução do modelo, medindo a evolução do fator de escala do universo com respeito ao grau de liberdade fornecido pelo campo escalar. Esta abordagem é útil quando queremos empregar o campo escalar como o relógio do modelo cosmológico no regime quântico, descrito pela cosmologia quântica.

Ao tratarmos do modelo quantizado, escolhemos a seção espacial plana para mostrar que a singularidade cosmológica predita classicamente seria evitada pelo modelo quântico. A região onde classicamente a singularidade estaria localizada no espaço de configuração do modelo é corrigida quanticamente passando a apresentar um comportamento do tipo *bouncing*. Desta maneira, o modelo cosmológico de FLRW passa a ser não-singular, devido às correções quânticas trazidas pelo procedimento da quantização canônica. Quando tomamos o limite da solução quântica para grandes fatores de escala, onde espera-se que efeitos quânticos não sejam mais relevantes, recuperamos o comportamento clássico. Portanto, a correspondência quântico-clássico, é verificada na nossa análise.

Além da remoção da singularidade cosmológica no modelo quântico, nós pudemos obter o operador unitário que corresponderia as transformações de Weyl no regime quântico. Foi possível obtê-lo uma vez que classicamente pudemos verificar que as transformações de Weyl induziam transformações canônicas entre os modelos representados no formalismo hamiltoniano. Ou seja, as variáveis canônicas de dois modelos cosmológicos representados em referenciais relacionados por uma transformação de Weyl, estavam conectadas por transformações canônicas geradas pelas transformações de Weyl. Desta maneira, deduzimos a função geradora destas transformações canônicas, que foi utilizada na definição do operador unitário que desempenha o papel das transformações de Weyl no regime quântico, relacionando os operadores de cada referencial. Devido à equivalência física entre sistemas quânticos

relacionados por transformações isométricas, nós pudemos concluir que os dois referenciais tratados aqui eram fisicamente equivalentes, mesmo no regime quântico. Esta equivalência é perdida quando as transformações envolvidas no mapeamento de dois referenciais são meramente transformações conformes do tensor métrico. Portanto, a geometria de Weyl parece ser um ambiente propício para tratar da correspondência clássica e quântica de teorias escalares-tensoriais com acoplamento mínimo e não-mínimo.

Como perspectiva futura, pretendemos explorar ainda mais o campo escalar de Weyl como o relógio natural de modelos cosmológicos, clássicos e quânticos, e gostaríamos de implementar esta ideia em teorias de gravidade quântica, como a *loop quantum gravity*. Esperamos que o grau de liberdade adicional fornecido naturalmente pela geometria de Weyl possa abrir um novo panorama na busca de uma teoria quântica da gravitação e do entendimento do universo primordial.

Referências Bibliográficas

- [Adler et al. 1975]ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. *Introduction to general relativity*. : McGraw-Hill, 1975. (International series in pure and applied physics).
- [Afriat 2009]AFRIAT, A. How weyl stumbled across electricity while pursuing mathematical justice. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, v. 40, n. 1, p. 20 – 25, 2009.
- [Almeida et al. 2014]ALMEIDA, T. S.; PUCHEU, M. L.; ROMERO, C.; FORMIGA, J. B. From Brans-Dicke gravity to a geometrical scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D*, v. 89, p. 064047, 2014.
- [Alvarenga e Lemos 1998]ALVARENGA, F. G.; LEMOS, N. A. Dynamical vacuum in quantum cosmology. *Gen. Rel. Grav.*, v. 30, p. 681–694, 1998.
- [Alves-Jr. et al. 2016]ALVES-JR., F. A. P.; PUCHEU, M. L.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. Quantum cosmology of a n-dimensional anisotropic universe. *Em preparação*, 2016.
- [Anderson 1993]ANDERSON, A. Quantum canonical transformations: Physical evidence of quantum theories. *Phys. Lett.*, B305, p. 67–70, 1993.
- [Arnowitt et al. 2008]ARNOWITT, R. L.; DESER, S.; MISNER, C. W. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 40, p. 1997–2027, 2008.
- [Barreto et al. 2015]BARRETO, A. B.; ALMEIDA, T. S.; ROMERO, C. Extending the ADM formalism to Weyl geometry. *AIP Conf. Proc.*, v. 1647, p. 89–93, 2015.

- [Belinski 2014]BELINSKI, V. A. On the cosmological singularity. *Int. J. Mod. Phys. D*, v. 23, p. 1430016, 2014.
- [Berger 2007]BERGER, M. *A Panoramic View of Riemannian Geometry*. : Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [Blanchet e Marsat 2011]BLANCHET, L.; MARSAT, S. Modified gravity approach based on a preferred time foliation. *Phys. Rev.*, D84, p. 044056, 2011.
- [Blas et al. 2011]BLAS, D.; PUJOLAS, O.; SIBIRYAKOV, S. Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy. *JHEP*, v. 04, p. 018, 2011.
- [Bojowald 2010]BOJOWALD, M. *Canonical Gravity and Applications: Cosmology, Black Holes, and Quantum Gravity*. : Cambridge University Press, 2010.
- [Bojowald 2015]BOJOWALD, M. Quantum cosmology: a review. *Rept. Prog. Phys.*, v. 78, p. 023901, 2015.
- [Carmo 1988]CARMO, M. do. *Geometria riemanniana*. : Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988. (Projeto Euclides).
- [DeWitt 1967]DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. i. the canonical theory. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 160, p. 1113–1148, 1967.
- [Everett 1957]EVERETT, H. Relative state formulation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, v. 29, p. 454–462, 1957.
- [Fabris et al. 1999]FABRIS, J. C.; PINTO-NETO, N.; VELASCO, A. F. Quantum cosmology in scalar tensor theories with nonminimal coupling. *Class. Quant. Grav.*, v. 16, p. 3807–3822, 1999.
- [Falciano et al. 2007]FALCIANO, F. T.; PINTO-NETO, N.; SANTINI, E. S. Inflationary nonsingular quantum cosmological model. *Phys. Rev. D*, v. 76, p. 083521, 2007.
- [Farajollahi et al. 2010]FARAJOLLAHI, H.; FARHOUDI, M.; SHOJAIE, H. On dynamics of brans-dicke theory of gravitation. *Int. J. Theor. Phys.*, v. 49, p. 2558–2568, 2010.
- [Faraoni e Nadeau 2007]FARAONI, V.; NADEAU, S. The (pseudo)issue of the conformal frame revisited. *Phys. Rev. D*, v. 75, p. 023501, 2007.

- [Geroch 1970]GEROCH, R. Domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, v. 11, n. 2, p. 437–449, 1970.
- [Gleyzes et al. 2015]GLEYZES, J.; LANGLOIS, D.; PIAZZA, F.; VERNIZZI, F. Healthy theories beyond Horndeski. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, n. 21, p. 211101, 2015.
- [Gourgoulhon 2012]GOURGOULHON, É. *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. : Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Lecture Notes in Physics).
- [Halliwell 1990]HALLIWELL, J. J. Introductory lectures on quantum cosmology. In: *7th Jerusalem Winter School for Theoretical Physics: Quantum Cosmology and Baby Universes Jerusalem*. 1990.
- [Hawking e Ellis 1973]HAWKING, S.; ELLIS, G. *The Large Scale Structure of Space-Time*. : Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [Isham 1992]ISHAM, C. J. Canonical quantum gravity and the problem of time. In: *19th International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (ICGTMP 92)*. 1992.
- [Jeffrey e Zwillinger 2000]JEFFREY, A.; ZWILLINGER, D. *Table of Integrals, Series, and Products*. : Elsevier Science, 2000.
- [Joshi 2007]JOSHI, P. *Gravitational Collapse and Spacetime Singularities*. : Cambridge University Press, 2007. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [Kiefer 2000]KIEFER, C. Conceptual issues in quantum cosmology. *Lect. Notes Phys.*, v. 541, p. 158–187, 2000.
- [Kobayashi 2012]KOBAYASHI, S. *Transformation Groups in Differential Geometry*. : Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Classics in Mathematics).
- [Lemos 2007]LEMOs, N. *Mecânica Analítica*. : Livraria da Física, 2007.
- [Lemos 2013]LEMOs, N. *Convite à física matemática*. : Livraria da Física, 2013.
- [Lobo et al. 2015]LOBO, I.; BARRETO, A.; ROMERO, C. Space-time singularities in weyl manifolds. *The European Physical Journal C*, Springer Berlin Heidelberg, v. 75, n. 9, 2015.
- [Lobo 2013]LOBO, I. P. *Singularidades do espaço-tempo em variedades de Weyl*. 85 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Programa de Pós-graduação em Física, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

- [Moura 2010]MOURA, F. F. *Quantização do modelo de mini-superespaço de Friedmann-Robertson-Walker permeado por poeira e uma constante cosmológica*. 63 f. Dissertação (Mestrado em Física) — Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2010.
- [Novello e Bergliaffa 2008]NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. E. P. Bouncing Cosmologies. *Phys. Rept.*, v. 463, p. 127–213, 2008.
- [Novello et al. 1992]NOVELLO, M.; OLIVEIRA, L. A. R.; SALIM, J. M.; ELBAZ, E. Geometrized instantons and the creation of the universe. *Int. J. Mod. Phys.*, D1, p. 641–677, 1992.
- [Pinto-Neto 2010]PINTO-NETO, N. *Teorias e interpretações da mecânica quântica*. : Editora Livraria da Física, 2010.
- [Poulis e Salim 2014]POULIS, F. P.; SALIM, J. M. Weyl geometry and gauge-invariant gravitation. *Int. J. Mod. Phys.*, D23, n. 11, p. 1450091, 2014.
- [Pucheu et al. 2016]PUCHEU, M. L.; ALVES-JR., F. A. P.; BARRETO, A. B.; ROMERO, C. Cosmological models in geometrical scalar-tensor theories. *Em preparação*, 2016.
- [Romero et al. 2012]ROMERO, C.; FONSECA-NETO, J. B.; PUCHEU, M. L. General Relativity and Weyl Geometry. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 155015, 2012.
- [Scholz 2009]SCHOLZ, E. Cosmological spacetimes balanced by a scale covariant scalar field. *Found. Phys.*, v. 39, p. 45–72, 2009.
- [Schutz 1980]SCHUTZ, B. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. : Cambridge University Press, 1980.
- [Shapiro 2008]SHAPIRO, I. L. Effective Action of Vacuum: Semiclassical Approach. *Class. Quant. Grav.*, v. 25, p. 103001, 2008.
- [Smolin 2005]SMOLIN, L. *A vida do cosmos*. : Editora Unisinos, 2005. (Coleção Idéias).
- [Sotiriou 2006]SOTIRIOU, T. P. $f(R)$ gravity and scalar-tensor theory. *Class. Quant. Grav.*, v. 23, p. 5117–5128, 2006.
- [Tipler 1986]TIPLER, F. J. Interpreting the wave function of the universe. *Physics Reports*, v. 137, n. 4, p. 231 – 275, 1986. ISSN 0370-1573.

- [Vakili 2012]VAKILI, B. Scalar field quantum cosmology: A Schrödinger picture. *Phys. Lett.*, B718, p. 34–42, 2012.
- [Wald 2010]WALD, R. *General Relativity*. : University of Chicago Press, 2010.
- [Weyl 1952]WEYL, H. *Space, Time, Matter*. : Dover Publications, 1952. (Dover Books on Advanced Mathematics).