

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

ANNA KAROLLYNA ALBINO BRITO

**OTIMIZAÇÃO DE UM PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO VIA PROGRAMAÇÃO
GEOMÉTRICA**

JOÃO PESSOA

2016

ANNA KAROLLYNA ALBINO BRITO

OTIMIZAÇÃO DE UM PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO VIA PROGRAMAÇÃO
GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como requisito final para obtenção do Grau de Mestre
Área de Concentração: Pesquisa Operacional

Orientador: Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento

JOÃO PESSOA

2016

B862o Brito, Anna Karollyna Albino.
Otimização de um problema de arranjo físico via
programação geométrica / Anna Karollyna Albino Brito.- João
Pessoa, 2016.
69f. : il.
Orientador: Roberto Quirino do Nascimento
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CT
1. Engenharia de produção. 2. Pesquisa operacional.
3. Layout. 4. Programação geométrica.

UFPB/BC

CDU: 62:658.5(043)

ANNA KAROLLYNA ALBINO BRITO

OTIMIZAÇÃO DE UM PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO VIA PROGRAMAÇÃO
GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal da Paraíba, como requisito final para obtenção do Grau de Mestre
Área de Concentração: Pesquisa Operacional

Aprovado em ____/____/____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Roberto Quirino do Nascimento – UFPB
Orientador

Prof. Dr. Lucídio dos Anjos Formiga Cabral - UFPB
Examinador Interno

Prof. Dra. Rubia Mara de Oliveira Santos - UFMS
Examinador Externo

Dedico esta dissertação à minha família: Ailton, Joseilda e Edyppo Gabriel, alicerce, equilíbrio e norte da minha vida.

Se a vida lhe roubar o chão, abra suas asas.

(Autor desconhecido)

RESUMO

O planejamento de um arranjo físico (layout) de uma dada instalação significa tomar decisões sobre a forma de como serão dispostos os seus centros de trabalho (MOREIRA, 2012). O projeto deste layout deve identificar onde deverão ser alocadas as instalações de forma que mitigue processos que não fornecem valor as atividades operacionais. Esta dissertação trabalha frente à otimização de um problema de arranjo físico, formulando-o como um problema de programação geométrica signomial e resolvendo-o por meio de funções representáveis, como a diferença entre funções convexas na sua forma padrão. Desenvolveu-se um algoritmo para resolver o problema, e o mesmo deve ser implementado e testado para que o problema em estudo obtenha uma solução global eficiente.

Palavras-chave: Layout, Programação geométrica.

ABSTRACT

Planning a physical arrangement (layout) of a given installation means making decisions on how to be prepared their work centers (MOREIRA, 2012). The design of this layout should identify where facilities are supposed to be, so that mitigates processes that do not provide operational value that activities should be allocated. This dissertation work forward the optimization of a physical arrangement problem by formulating it as a signomial geometric programming problem and solving it through representable functions as the difference between convex functions in its standard form. It was developed an algorithm to solve the problem and it should be implemented and tested to for the problem under study obtain an efficient global solution.

Key-words: Layout, Geometric programming.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	10
1.1 DEFINIÇÃO DO TEMA E DO PROBLEMA DE PESQUISA.....	11
1.2 OBJETIVOS.....	13
1.2.1 Objetivo Geral.....	13
1.2.2 Objetivos Específicos.....	13
1.3 JUSTIFICATIVA.....	13
1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO.....	14
2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO.....	16
2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DE ARRANJO FÍSICO.....	16
2.2 PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	20
2.2.1 Problema Primal de Programação Geométrica Posinomial.....	22
2.2.2 Problema de Programação Geométrica na Forma Convexa.....	22
2.2.3 Problema Dual de Programação Geométrica.....	22
2.2.4 Problema Primal de Programação Geométrica Signomial.....	24
2.3 OTIMIZAÇÃO DC.....	25
2.3.1 Conceitos e Propriedades.....	25
2.3.1.1 O Espaço das Funções DC.....	26
2.3.1.2 Condições de Otimalidade de Funções DC.....	27
2.3.1.3 Transformações de Problemas DC na Forma Canônica DC.....	29
2.3.1.4 Condições de Otimalidade para o Problema CDC.....	29
2.4 TRABALHOS RELACIONADOS.....	30
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	32
3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA.....	32
3.2 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA.....	33
3.3 LIMITAÇÕES.....	34
4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO.....	35
4.1 ABORDAGEM DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO.....	38
5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	39
5.1 TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO COMO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	39
5.2 O PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO VIA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA.....	40
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
Referências.....	64

1 INTRODUÇÃO

Projetar segundo Slack, Chambers e Johnston (2009) é conceber a aparência, o arranjo e a estrutura de algo antes de construí-lo. Neste âmbito, é um exercício conceitual. Não obstante, é uma atividade que necessita conceber uma solução que funcione na prática.

Um layout segundo Olivério (1985) é um estudo sistemático que busca uma combinação ótima das instalações industriais dentro de um espaço disponível de acordo com o critério de medida de eficiência adotado.

O planejamento de um arranjo físico (layout) de uma dada instalação significa tomar decisões sobre a forma de como serão dispostos os seus centros de trabalho (MOREIRA, 2012).

Em grande parte, os objetivos de qualquer arranjo físico dependerão dos objetivos estratégicos de uma operação, mas Slack, Chambers e Johnston (2009) citam alguns pontos que são gerais para o projeto de qualquer arranjo físico:

- A segurança do processo;
- O fluxo de materiais;
- Todo o fluxo de materiais deve ser sinalizado de forma clara e evidente para funcionários e clientes;
- Os funcionários devem ser localizados longe das partes barulhentas da operação, dando o conforto necessário para os mesmos;
- A comunicação deve ser facilitada pela localização;
- Todas as máquinas, instalações e equipamentos devem apresentar um nível de acessibilidade suficiente para limpeza e manutenção adequadas;
- Uso adequado de espaço disponível da operação;
- Flexibilidade de longo prazo.

Com os objetivos estratégicos conhecidos, deve-se adequar o estudo do layout a determinadas características, quantidades, diversidade e movimentações dos materiais dentro da fábrica (CAMAROTTO, 1998). Disto, é possível conceber o tipo de arranjo físico em que a empresa se estrutura. Sabe-se que existem cinco tipos básicos de arranjo físico (PEINADO; GRAEML, 2007):

- Por produto (as máquinas, equipamentos e estações de trabalho são colocados em uma sequência de montagem e o material segue o roteiro determinado);
- Por processo (possui várias máquinas de uso genérico separadas por setores de acordo com a similaridade de operações, e o produto segue um roteiro de acordo com suas necessidades);
- Celular (as máquinas e equipamentos necessários para as operações de produção de uma família de produtos são agrupados em células produtivas, de forma a inimizarem a movimentação de materiais entre operações);
- Por posição fixa (o produto ou cliente ficam estacionários, enquanto as máquinas e equipamentos movem-se conforme necessário);
- Arranjo misto (as operações podem combinar elementos de diversos tipos de layout, de forma a aumentar o desempenho do sistema produtivo).

Pode haver ainda combinações destes tipos básicos, onde se faz necessário que a escolha do arranjo físico seja realizada de acordo com os tipos de produtos e serviços produzidos pela empresa.

1.1 DEFINIÇÃO DO TEMA E DO PROBLEMA DE PESQUISA

Como já mencionado, independentemente do tipo de layout, uma empresa que visa obter um bom arranjo físico deve saber adequar seus recursos dentro do espaço que é disponibilizado para a operação. O projeto deste layout deve identificar onde deverão ser alocadas as instalações de forma que mitigue processos que não fornecem valor as atividades operacionais. Para isto, deve-se satisfazer algumas restrições como: espaço mínimo de trabalho (dimensão do espaço físico), classificação do processo (determinando o tipo de processo), extensão e clareza de fluxo (para que cada máquina possa ser disposta na sequência correta), segurança (apresentando uma distância mínima em regimento às normas) e acessibilidade (de modo que o maquinário seja de fácil acesso para eventuais atividades, como uma manutenção).

Trein (2001) ressalta que a análise e a melhoria de layout permitem reduzir o tempo de processo e a movimentação da matéria prima dentro do sistema produtivo, de forma que o fluxo da produção transcorra o mais linear possível sem grandes e desnecessários deslocamentos.

O planejamento do espaço físico, antigamente, em sua maioria, era elaborado empiricamente onde realizava-se um diagrama das facilidades e este era processado por tentativa e erro até que obtivesse êxito (TOMPKINS et al., 1996; CAMAROTTO, 1998).

Ao buscar a menor utilização do espaço físico de uma fábrica com a melhor localização de seus recursos, diante de todos os objetivos operacionais que nela existe, observa-se que estas indagações resultam em um problema de minimização de espaço diante de algumas restrições.

Atualmente, com a dispersão e acessibilidade da tecnologia, uma ótima forma de resolução para trabalhar com restrições de um problema é a modelagem matemática, já que, existem algoritmos eficientes que podem resolver rapidamente este tipo de problema.

De fato, para Buffa, Armour e Vollman (1964) uma planta de um arranjo físico pode ser vista como um número finito de figuras geométricas e suas dadas áreas, arranjadas no chão de fábrica de um estabelecimento qualquer. O problema de rearranjar estas áreas de forma eficiente é conhecido como problema de facilidade ou facility layout problem (FLP).

Este problema é vastamente difundido na literatura, com relatos de pesquisas existentes desde a construção de novos modelos que possam resolver de forma eficiente este tipo de problema (KUSIAK; HERAGU, 1991), como surveys que mostram diferentes abordagens existentes na literatura (KOUVELIS; CHIANG; KIRAN, 1992), onde estas abordagens são comparadas entre si, mencionados pontos a serem debatidos, fornecem perspectiva e preveem o futuro nesta área (HERAGU, 1992; MELLER; GAU, 1996; DOMSCHKER; KRISPIN, 1997; SINGH; SHARMA, 2006; DRIRA; PIERREVAL; HAJRI-GABOUJJ, 2007).

Askin e Standridge (1993) observaram que, normalmente, os recursos de um layout são representados em forma de retângulos. Corroborando com isto, Hicks (2006) observou que uma fraqueza dos métodos relatados é que o tamanho dos equipamentos (recursos) e sua geometria não são geralmente levadas em conta, desde que estas unidades são alocadas em posições já predeterminados. Isto pode resultar em uma superestimação ou subestimação da área total e da área dos requeridas pelos recursos (por exemplo se um pequeno recurso é alocado em uma grande área) e isto pode impor limitações significantes às próximas estratégias.

Existe diversas pesquisas relacionando o layout com os recursos em formatos retangulares, porém existe uma lacuna entre os pesquisadores na busca de layouts que confortem recursos em outras formas geométricas (círculos e elipses, por exemplo). Em virtude disto, com o intuito de explorar esta área, de acordo com as características e vantagens explicitadas anteriormente, este trabalho versa sobre a seguinte indagação: Como dispor recursos em um chão de fábrica visando a utilização do menor espaço possível?

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Configurar recursos de diferentes geometrias em um problema de arranjo físico.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudar o problema de arranjo físico;
- Tratar o problema de arranjo físico como problemas que são redutíveis a programação geométrica posinomial ou signomial;
- Tratar o problema de programação geométrica resultando em um problema de otimização como a diferença entre funções convexas (otimização DC) na sua forma padrão;
- Estudar um algoritmo para o problema de arranjo físico.

1.3 JUSTIFICATIVA

Trabalhar com problemas de arranjo físico remete a três quesitos importantes em um processo produtivo, são eles: a dimensão do espaço físico, os equipamentos que ali estarão e o investimento. O espaço e o maquinário acometem na natureza da estrutura fabril, após implementados, em que se forem mal elaborados, por possuírem grande dificuldade de modificação e manuseio causam efeitos a longo prazo e que resultam em um gasto, ou seja, um dispêndio de dinheiro que poderia ter sido evitado se houvesse um planejamento inicial correto do layout.

Em termos acadêmicos, desde 1950 problemas de facilidades tem sido formalmente estudado (BENJAAFAR; HERAGU; IRANI, 2002), resultando na apresentação de várias formulações e suas diferentes resoluções na literatura (genetic algorithms, tabu search, simulated annealing, ant colony etc), assuntos estes que relacionam-se com a proposição de técnicas de projeto de layout e algoritmos de otimização (AROSTEGUI JR.; KADIPASAOGLU; AROSTEGUI JR.; KADIPASAOGLU; KHUMAWALA, 2006; SAHIN, 2011; SADRZADEH, 2012; KULTUREL-KONAK, 2012; CHEN, 2013). Como esse tipo de problema geralmente é complexo e tratado como \mathcal{NP} -Difícil (GAREY; JOHNSTON, 1979), inúmeras pesquisas têm voltado atenção especial nesta área, demonstrando que este é um assunto que tende a se manter em discussão.

Já em termos práticos, estudos por meio de simulações são frequentemente utilizados para medir os benefícios e o desempenho destes layouts (ALEISA; LIN, 2005; RAMAN; NAGALINGAM; LIN, 2009). As dificuldades evidenciadas em Lima Júnior (2008) analisando as divergências entre como a empresa realiza a concepção de um novo layout e o que a literatura atual dispõe sobre sistemáticas dessa implantação de arranjo físico e a modelagem matemática operacionalizada por Almeida (2008) com objetivo de minimizar um layout industrial através de funções e restrições analisadas pelos critérios de espaço para a segurança, operação e manutenção da planta, justificam a utilização e o contínuo estudo de técnicas formais para planejamento de arranjos físicos.

Aproximadamente 8% do produto interno bruto dos Estados Unidos da América tem sido gasto anualmente em novos projetos de layout. A dimensão desse investimento e seu potencial impacto sobre o mercado aumentam a importância de um planejamento estruturado do arranjo de fábricas (TOMPKINS et al., 1996).

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O projeto divide-se nas seguintes etapas:

No primeiro capítulo é dada a introdução ao tema, o problema em questão e são apresentados os objetivos gerais e específicos, a justificativa e a estrutura do trabalho.

O segundo capítulo contempla a fundamentação teórica, com o intuito de buscar informações bibliográficas necessárias para o correto entendimento da modelagem do problema de layout e suas etapas até transcorrer a etapa final do estudo do algoritmo.

O terceiro capítulo define o tipo de pesquisa, isto é, a metodologia que foi aplicada neste estudo, bem como suas fases de realização e a dificuldade relevante para o trabalho.

O capítulo quatro e cinco descrevem a formulação do problema de arranjo físico e o algoritmo para resolução do mesmo, e a resolução do problema.

O capítulo seis contém as considerações finais e propostas futuras para continuar o desenvolvimento deste trabalho.

2 REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DE ARRANJO FÍSICO

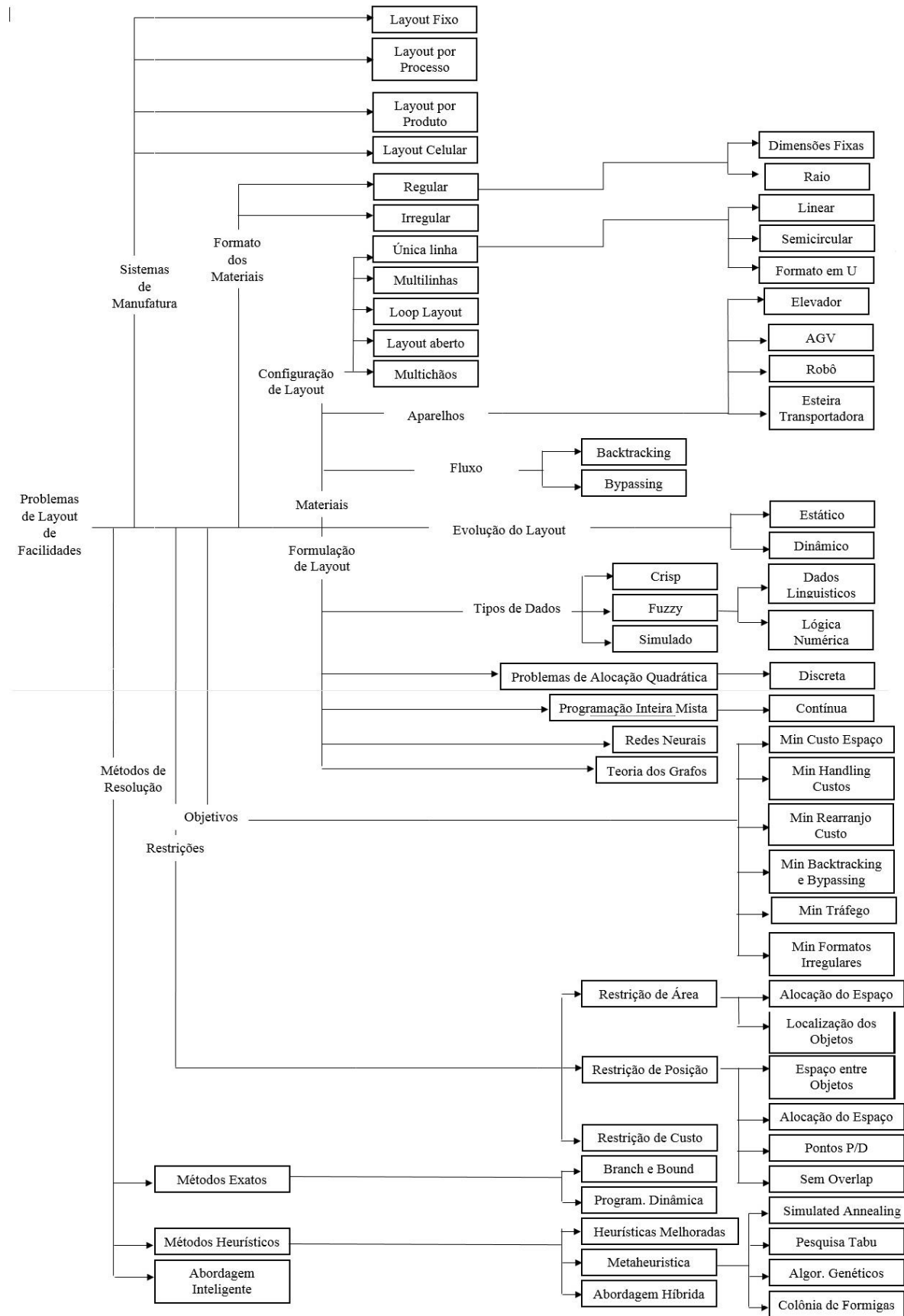
Planejamento de arranjo físico envolve a geometria do design das facilidades e a localização dos recursos, sendo estes os pontos cruciais de um eficiente planejamento (GEN; LIN; ZHANG, 2009). Estes autores ressaltam que a localização é tão importante quanto dinheiro, tempo, materiais, trabalhadores e equipamentos. Apesar de tal comentário, engenheiros costumam negligenciar este fato, dando preferência a ajeitar o projeto de layout de acordo com o progresso da organização.

O problema de facilidades busca o melhor arranjo e a melhor configuração de suas facilidades, expressando seus objetivos comumente em forma de minimizar o fluxo entre os seus produtos e maximizar a proximidade de suas facilidades (HASSAN; HOGG, 1987).

O FLP tem sido formulado por vários tipos de problemas, tais como: quadratic assignment problem, quadratic set covering problem, linear integer programming problem, mixed integer programming problem e graph-theoretic problem (HICKS, 2006). Estas formulações matemáticas e a forma de como resolvê-los podem ser observadas no artigo de Kusiak e Heragu (1987), e também, algumas características desses modelos em Levary e Kalchik (1985).

Drira, Pierreval e Hajri-Gaboujj (2007) desenvolveram uma árvore (Figura 1) onde exibem exemplos da abordagem do FLP e ressaltam que dependendo das características do problema a ser formulado, sejam discreto ou contínuo, as formulações encontradas na literatura são mais direcionadas aos problemas de alocação quadrática (quadratic assignment problems – QAP) ou programação inteira mista (mixed integer programming – MIP), que são os problemas normalmente encontrados.

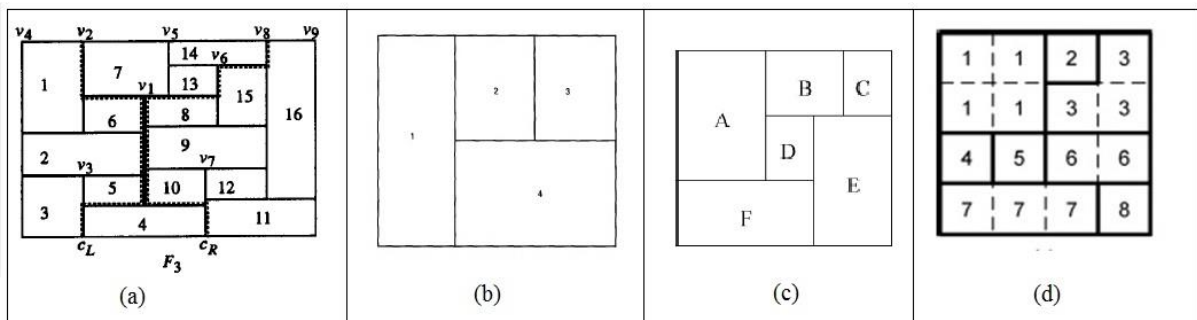
Figura 1 - Árvore de representação de problemas de layout



Um outro problema que também pode ser considerado como um problema de modelagem de arranjo físico é o floorplan. Esse tipo de problema é vastamente abordado nas engenharias elétrica e de computação para resolução de problemas de VLSI (very-large-scale integration) design, pois os seus resultados determinam a melhor configuração para construção de um chip (WIMER; KOREN; CEDERBAUM, 1988).

O floorplan pode ser dividido em 3 passos: particionar (partitioning), localizar (placement) e roteirizar (routing). Inicialmente particiona-se a placa em busca de obter o design da mesma, criando-se o seu espaço físico. Após isto, o processo de alocar os recursos dentro da partição de forma que não haja sobreposição entre as mesmas e preservar suas posições é chamado de localizar. Com os recursos posicionados almeja-se conectá-los entre si, isto diz-se que é a fase de roteirização. Este processo de floorplan é comumente desenvolvido em forma retangular a exemplo da Figura 2 (2a, 2b, 2c e 2d) exposta a seguir.

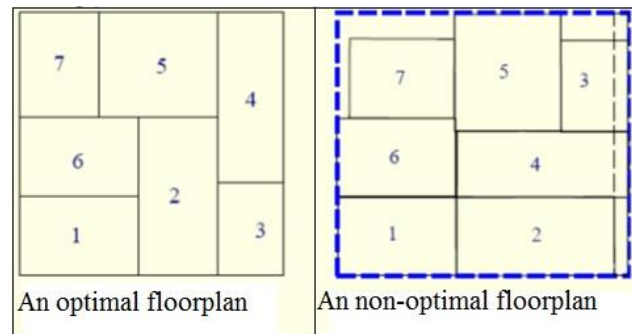
Figura 2 - Exemplos de floorplan



Fonte: Pan e Liu (1995); Meller e Gau (1996); Yao et al. (2003); Drira, Pierreval e Ghajri-Aboujj (2007)

O problema de floorplan pode ser formulado segundo seu objetivo e suas restrições. São critérios utilizados como objetivo: minimizar a área, redução do comprimento, maximizar a rotabilidade, determinar formatos dos blocos; segundo restrições: formato dos blocos, área, raio e local do pin (LIM, 2008). A seguir, a Figura 3 exibe um exemplo de floorplan com resultado ótimo e seu correspondente não ótimo floorplan segundo critérios de área.

Figura 3 - Resultado de um floorplan



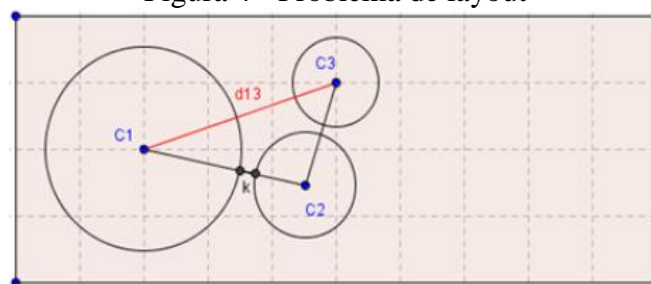
Fonte: Lim (2008)

Amplamente estudado, o floorplan também já foi abordado pelos seguintes métodos: simulated annealing (WONG; LIU, 1989; CHEN; CHANG, 2006), algoritmos genéticos (COHOON et al., 1991; VALENZUELA; WANG, 2002) e teoria dos grafos (DIAZ; PETIT; SERNA, 2002).

Claramente, o FLP tem relevância em muitas áreas, seja trabalhando com equipamentos ou departamentos, desde o desenho de layout de salas até desenho do layout de chips de placas de circuitos eletrônicos (BUFFA; ARMOUR; VOLLMAN, 1964).

Fernandes (2012), por sua vez, modelou um problema de arranjo físico onde aloca um número de utilidades (recursos), de geometria circular, dispostas em um espaço e obedecendo algumas restrições, visando minimizar o espaço total disponível (ver Figura 4).

Figura 4 - Problema de layout



Fonte: Fernandes (2012)

Para resolver este problema, calcula-se as distâncias entre os pontos c , assim, após uma mudança de variáveis, o problema resulta-se em uma diferença de funções convexas (ou problemas DC). Por outro lado, a melhor maneira de trabalhar este tipo de problema é por meio de programação geométrica, pois pode-se achar algoritmos eficientes para resolver tal modelo,

garantindo a otimalidade global do sistema. Nesta perspectiva, aborda-se Moh, Chang e Hakimi (1993) que utilizaram a teoria dos grafos e programação geométrica para solucionar os problemas de facilidades.

2.2 PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

A programação geométrica (GP – geometric programming) é uma técnica de otimização utilizada para resolver algebricamente problemas de otimização não-linear. Ela surgiu com Clarence Zener; o matemático Richard Duffin, comprometido com o desenvolvimento da teoria de dualidade, solidificou a proposta de Zener aplicando-a em suas teorias, veja Beightler e Phillips (1976). Foi desenvolvido em 1967 por Duffin, Petterson e Zener e é utilizado para definir um tipo de problema de otimização matemática onde a função objetivo é uma função posinomial (ZENER, 1961; DUFFIN; PETTERSON; ZENER, 1967).

O desenvolvimento matemático da GP está baseado na relação da desigualdade da média aritmética e geométrica entre somatórios e produtórios de números positivos. Duffin, Petterson e Zener (1967) e Beightler e Phillips (1976) expõem detalhadamente sobre a GP e Bazaraa, Sherali e Shetty (1993) sobre suas aplicações.

Foi realizada com o objetivo de resolver problemas do mundo real e desenvolveu-se com problemas de design (DUFFIN; PETTERSON; ZENER, 1967). Desde então este tipo de problema de otimização é utilizado vastamente em diversos campos como em engenharias, ciências e gestões (para exemplos de aplicações ver Xu (2014)). Acha-se em demasia aplicações da GP frente a problemas para modelar projetos de circuitos integrados, como abordado em Castellanos (2010), Hincapie (2010) e Posser et al. (2012), sempre com intuito de dar robustez aos problemas em estudo e obter o ótimo global eficientemente.

Deve-se evidenciar que a utilização crescente da GP em diversos campos de conhecimento ocorreu em vista da evolução na obtenção de suas soluções. Inicialmente, Duffin, Peterson e Zener utilizavam-se da abordagem analítica, sendo possível a obtenção de soluções apenas para pequenos problemas.

Métodos numéricos para a obtenção de soluções foram concebidos na década de 70 (LEDUR, 2009). Entretanto, métodos computacionais mais robustos, como por exemplo o

método de ponto interior para programação geométrica, foram desenvolvidos a partir de 1994 (NESTEROV; NEMIROVSKY, 1994).

A formulação do problema de GP é expressa por termos de uma classe de função, conhecidas por funções posinomiais (DUFFIN; PETERSON; ZENER, 1967). A diferença entre posinômios é chamado de signômio (DUFFIN; PETERSON, 1973).

Problemas de GP que contem expressão signomial em sua função objetivo e restrições são usualmente chamadas de problemas de programação geométrica signomial (SGP - signomial geometric programming). Muitos outros importantes problemas de otimização podem ser modelados precisamente apenas usando signômios e mais alguns tipos de funções algébricas (DUFFIN; PETERSON, 1973). Portanto, como forma de ilustração das abordagens atualmente praticadas na SGP, realizou-se um resumo de periódicos que pode ser visualizado no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – Abordagens atualmente utilizadas para resolução de SGP

REFERÊNCIA	ABORDAGEM
Toscano e Amouri (2012)	Introdução de uma abordagem para resolução de problemas não convexos de SGP chamada de <i>quasi geometric programming</i>
Lange e Zhou (2012)	Aplicou desigualdade da geometria aritmética em suporte a desigualdade de um hiperplano para derivar um algoritmo MM
Lin e Tsai (2012)	Funções separáveis utilizando funções superior <i>piecewise-linear</i> e várias transformações eficientes
Xu (2014)	Transformação de problemas não convexos SGP na forma padrão de problema de GP utilizando de transformações simples e técnicas de condensação
Hou, Shen e Chen (2014)	Propôs um novo algoritmo <i>branch-reduce-bound</i> baseado na equivalência monotônica de problemas de otimização com método de relaxação linear
Liu, Wang e Liu (2010)	Abordou uma nova técnica de relaxação linear convertida por um algoritmo <i>branch and bound</i> em uma série linear de problemas de programação
Shen e Li (2012)	Abordou um algoritmo <i>branch-reduction-bound</i>
Tseng et al. (2015)	Conversão de um problema de SGP para um problema MILP usando <i>piecewise-linear approximations</i>

Nos tópicos seguintes apresentam-se alguns conceitos básicos necessários, primordialmente, para a melhor execução deste trabalho.

2.2.1 Problema Primal de Programação Geométrica Posinomial

Um problema de programação geométrica é um problema de otimização na forma:

$$\min g_0(t) \quad (1)$$

sujeito a

$$g_k(t) \leq 1, \dots, p, t > 0$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n$$

as constantes c_i são reais positivas e a_{ij} são números reais quaisquer.

Este desenvolvimento teórico chamado problema primal é também conhecido como programação posinomial.

A função g_k é chamada posinômio e se $n_k = 1$, poderá ser denominada de monômio. Para o caso de alguma constante c_i seja negativa, então será signômio.

2.2.2 Problema de Programação Geométrica na Forma Convexa

GP na forma padrão não é um problema de otimização convexa por que posinômios não são funções convexas (BOYD et al., 2007). Então, o truque para resolver eficientemente um problema de GP é converter esta função para problema de otimização não-linear, ou seja, ter um problema com função objetivo convexa e restrições de desigualdade, e restrições de igualdade lineares (DUFFIN; PETERSON, 1973).

A conversão de um GP para um problema convexo é baseado numa mudança logarítmica de variáveis e na transformação logarítmica de restrições e da função objetivo (DUFFIN; PETERSON, 1973). Disto, tem-se que:

$$\min f_0(z) \quad (2)$$

sujeito a

$$f_k(z) \leq 0, k = 1, \dots, p$$

onde

$$f_k(z) = \log \sum_{i \in J[k]} e^{\sum_{j=1}^m a_{ij} z_j + \tilde{c}_i}$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n$$

2.2.3 Problema Dual de Programação Geométrica

Associado ao problema primal de programação geométrica tem-se o seu dual, dado por:

$$\max v(\delta, \lambda) = \prod_{k=1}^p \left\{ \lambda_k^{\lambda_k} \prod_{i \in J[k]} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \right\} \quad (3)$$

sujeito a

$$\sum_{i \in J[k]} \delta_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} \delta_i = 0, j = 1, \dots, m$$

$$\delta_i \geq 0$$

Destaca-se que a função dual v supracitada não é uma função côncava, no entanto a função:

$$f(\delta) = \ln(v(\delta)) = \sum_{i=1}^n \{ \delta_i \ln(c_i) - \delta_i \ln \delta_i \} + \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \ln \left(\sum_{i \in J[k]} \delta_i \right) \quad (4)$$

Satisfaz esta propriedade, sendo a mesma duas vezes diferenciável com matriz Hessiana dada por:

$$\nabla^2 f(\delta) = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & H_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde

$$H_0 = \begin{bmatrix} -\delta_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\delta_1^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_2^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\delta_{n_0}^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$H_k = \begin{bmatrix} (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \lambda_k^{-1} & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) & \dots & \lambda_k^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \lambda_k^{-1} & \dots & (\lambda_k^{-1} - \delta_{m_k}^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$k = 1, \dots, p$$

O relacionamento entre as variáveis primais e duais de um problema de PG é dado por:

$$\delta_i g_k(t) = \lambda_k c_{ij} \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}}, i \in J[k] \quad (6)$$

2.2.4 Problema Primal de Programação Geométrica Signomial

Caracterizam-se por funções objetivos e restrições descritas como a diferença de dois posinômios. O problema primal de SGP é uma generalização do problema posinomial e pode ser escrito na seguinte forma:

$$\text{ming}_0(t) \quad (7)$$

sujeito a

$$g_k(t) \leq 1, k = 1, \dots, p, t > 0$$

onde

$$g_k(t) = \sum_{i \in J[k]} \sigma_i c_i \prod_{j=1}^m t_j^{a_{ij}} \quad k = 0, 1, \dots, p$$

$$J[k] = \{m_k, m_{k+1}, \dots, n_k\}, k = 0, 1, \dots, p$$

$$m_0 = 1, m_1 = n_0 + 1, m_2 = n_1 + 1, \dots, m_p = n_{p-1} + 1, n_p = n$$

as constantes c_i são positivas, a_{ij} são números reais e $\sigma_i = \pm 1$.

Os problemas de SGP não são convexos em sua maioria, devido ao fato da existência de termos negativos, assim o problema acima não pode ser convertido para um problema convexo usando-se transformações de variáveis, pois a mudança de variáveis transforma a função objetivo e as restrições em diferença de funções convexas.

2.3 OTIMIZAÇÃO DC

Na área de otimização não convexa, a programação DC possui um importante e interessante papel por causa de suas referências assim como de suas aplicações. É chamada de função DC se esta pode ser representada como a diferença entre duas funções convexas. Problemas de programação matemática que lidam com funções DC são conhecidas como Problemas de Programação DC. Um grande número de funções podem ser representadas como a diferença entre funções convexas pois é sabido que toda função de classe C^2 tem uma representação como diferença entre duas funções convexas (DC), embora não haja uma representação geral dessa forma, bastando exibir uma representação DC qualquer (HORST; THOAI, 1999).

Para conhecimento mais profundo sobre otimização DC deve-se ler Horst e Thoai (1999) pois estes autores relatam as abordagens básicas e representação de problemas de otimização DC em suas formas geral e canônica (CDC), em que todos estes problemas gozam de algumas propriedades matemáticas especiais e suas aplicações motivaram algumas abordagens distintas para sua solução.

Os próximos tópicos apresentam algumas definições e propriedades das funções DC e condições de otimalidade para problemas de otimização DC na sua forma geral e canônica.

2.3.1 Conceitos e Propriedades

Definição 1: Uma função f definida em um conjunto convexo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é dita DC em X se, para todo $x \in X$, f pode ser expressada como $f(x) = p(x) - q(x)$ onde p e q são funções convexas em X . Uma função que é DC em \mathbb{R}^n é chamada DC. A representação $f(x) = p(x) - q(x)$ é dita ser uma decomposição DC de f .

Definição 2: Um problema de otimização global é chamado um problema de programação DC se ele possui a forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f_0(x) & (8) \\ & \text{DC s.a. } x \in X, \\ & f_i(x) \leq 0, (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

Uma característica interessante da programação DC é que alguns problemas da forma (8) podem ser reduzido ao problema canônico de minimizar uma função linear sobre a intersecção de um conjunto convexo com o complementar de um conjunto convexo aberto. O complementar de um conjunto convexo aberto é usualmente descrito como uma restrição convexa reversa, e tem a forma

$$g(x) \geq 0 \quad (9)$$

onde $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa.

Definição 3: Um problema canônico DC (CDC – do inglês canonical DC problems) é um problema de otimização da forma

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } c^T x & (10) \\ & \text{CDC s.a. } x \in D, \\ & g(x) \geq 0, (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

onde $c \in \mathbb{R}^n$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é convexo, e D é um subconjunto fechado do \mathbb{R}^n .

2.3.1.1 O Espaço das Funções DC

As funções DC são fechadas para muitas das operações comumente encontradas em otimização. As provas de alguns teoremas e propriedades podem ser vistas, em detalhes, em Horst, Pardalos e Thoai (2000).

Teorema 1: Seja $f, f_i (i = 1, \dots, m)$ funções DC, então as seguintes funções também são DC:

1. $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ para algum número real λ_i ;
2. $\max f_i(x)$ e $\min f_i(x)$ com $i = 1, \dots, m$;
3. $|f(x)|, f^+ := \max\{0, f(x)\}, f^- := \min\{0, f(x)\}$;

$$4. O \text{ produto } \prod_{i=1}^m f_i(x).$$

Teorema 2: Toda função localmente DC é DC (para ver a prova consultar Hartman (1959)).

Corolário 1: Toda função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ cuja segunda derivada parcial é contínua em todos os pontos é DC.

Corolário 2: Toda função real continua em um conjunto convexo compacto $C \in \mathbb{R}^n$ é o limite de uma sequência de funções DC que converge uniformemente em C .

Corolário 3: Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ DC e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Então a composição $g \circ f$ é DC.

Teorema 4: O quadrado $d_M^2(x)$ da função distância é DC para algum subconjunto fechado não vazio M do \mathbb{R}^n .

2.3.1.2 Condições de Otimalidade de Funções DC

Considere um par de problemas de programação dados por:

$$\omega_\delta^* = \inf\{\omega(z): z \in Z, \psi(z) \leq \delta\} \quad (11)$$

$$\psi_\eta^* = \inf\{\psi(z): z \in Z, \omega(z) \leq \eta\} \quad (12)$$

onde $Z \subseteq \mathbb{R}^p$, $\delta, \eta \in \mathbb{R}$ e ω e ψ são funções finitas em \mathbb{R}^p . Seja Ω_δ^* e Ψ_η^* o conjunto das soluções ótimas dos problemas (11) e (12), respectivamente.

Definição 5: Diz-se que os problemas (11) e (12) são recíprocos se $\Omega_\delta^* = \Psi_\eta^*$ (neste caso o princípio da reciprocidade é válido).

Proposição 1: Se $Z = \mathbb{R}^p$, $\omega(z) = \|z\|$ e $\eta = \omega_\delta^*$, então o princípio da reciprocidade vale para alguma função contínua $\psi(z)$ sempre que $\{z \in Z: \psi(z) \leq \delta\} \neq \emptyset$ (a prova encontra-se em Tikhonov (1980)).

Proposição 2: Assuma nos problemas (11) e (12) que $\eta = \omega_\delta^*$ e que $\psi_\eta^* = \delta$. Então o princípio da reciprocidade vale para todo conjunto Z e nas funções arbitrárias $\omega(z)$ e $\psi(z)$ (a prova encontra-se em Thoai (1998)).

Deve-se agora introduzir o conceito de subconjunto robusto do \mathbb{R}^p , para a seguir estabelecer as condições de otimalidade para o problema de otimização DC derivadas da proposição anterior, então:

Definição 6: Seja $Z \subset \mathfrak{R}^p$, $f: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, e $\delta \in \mathfrak{R}$. O conjunto

$$S(Z, f, \delta) = \{z \in Z: f(z) \leq \delta\}$$

é dito robusto se

$$S(Z, f, \delta) = cl(\{z \in Z: f(z) < \delta\})$$

Onde para cada conjunto S , $cl(S)$ é o fecho de S .

Lema 1: Se nos problemas (11) e (12) a função ω é convexa e a seguinte condição satisfeita

$$\exists z^0 \in Z: w(z^0) < \omega^* \tag{13}$$

onde o conjunto $S(Z, \omega, \eta)$ é robusto para cada $\eta \geq \omega^*$ (a prova encontra-se em Thoai (1998)).

A seguinte condição de otimalidade para o problema (11) é um corolário da proposição 2.

Proposição 3: Assuma que no problema (11) a função ω é convexa, o conjunto $S(Z, \psi, 0) = \{z \in Z: \psi(z) \leq 0\}$ é robusto e a condição (13) é satisfeita. Então o ponto viável z^* de (11) é uma solução ótima se e somente se

$$0 = \inf\{\psi(z): z \in Z, \omega(z) \leq \omega(z^*)\} \tag{14}$$

(a prova encontra-se em Thoai (1998)).

Uma importante classe de problemas de otimização DC é a seguinte

$$\omega^* = \inf\{g(x) - h(x): x \in X\} \tag{15}$$

onde g e h são duas funções convexas em \mathbb{R}^n e X é um subconjunto fechado convexo do \mathbb{R}^n . O resultado seguinte fornece uma condição de otimalidade para o problema (15).

Proposição 4: Assuma que o problema (15) tem solução. Então, o ponto $x^* \in X$ é uma solução ótima se e somente se existe $t^* \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \inf\{-h(x) + t : x \in X, t \in \mathfrak{R}, g(x) - t \leq g(x^*) - t^*\} \quad (16)$$

2.3.1.3 Transformações de Problemas DC na Forma Canônica DC

O problema CDC

$$\min\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\} \quad (17)$$

onde c é uma função linear, D é um subconjunto convexo fechado do \mathbb{R}^n e g é uma restrição convexa reversa, ou simplesmente, restrição reversa.

Teorema 3: Todo problema de Otimização DC é equivalente a um problema na forma CDC em \mathbb{R}^{n+2} .

2.3.1.4 Condições de Otimalidade para o Problema CDC

Considerando o problema CDC com o conjunto viável $F = \{x \in D, g(x) \geq 0\}$. Assumindo que F não é vazio, é possível ver que $F = \emptyset$ pode ser detectado frequentemente pelos algoritmos. Na sequência, é possível ver que o problema CDC cumpre algumas das hipóteses naturais adicionais seguintes. Suponha que:

Hipótese 1: D é compacto e $\text{int}D \neq \emptyset$;

Hipótese 2: Existe um ponto $x^0 \in D$ satisfazendo $g(x^0) < 0$ e $c^T x^0 < \min\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\}$.

Essa hipótese significa que a restrição convexa reversa $g(x) \geq 0$ é essencial, porque se não for satisfeito, o problema CDC deve ser equivalente ao problema de minimização convexo

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^T x \\ & \text{s. a. } x \in D \end{aligned}$$

Hipótese 3: $F = \text{cl}(\text{int}F)$

Essa hipótese representa a robustez do conjunto viável $F = \{x \in D: g(x) \geq 0\}$ de CDC. Em particular, exclui-se o caso onde a intersecção dos conjuntos $\{x: g(x) \geq 0\}$ e D é uma parte da fronteira D .

Seja $G = \{x \in \mathbb{R}^n: g(x) \leq 0\}$ e seja ∂A a fronteira do conjunto $A \in \mathbb{R}^n$:

Teorema 4: No problema CDC, assume-se que D é limitado, F é não vazio e a restrição reversa $g(x) \geq 0$ é essencial. Então, existe uma solução ótima na intersecção $\partial D \cap \partial G$ que são as fronteiras D e G .

Proposição 5: No problema CDC sejam as hipóteses 1 e 2 satisfeitas, então toda solução ótima \bar{x} de CDC satisfaz

$$\max\{g(x): x \in D, c^T x \leq c^T \bar{x}\} = 0 \quad (18)$$

Esta é chamada de **condição de otimalidade necessária** (a prova encontra-se em Horst, Pardalos e Thoai (2000)).

Proposição 6: Assume-se que no problema CDC o conjunto viável F é robusto (hipótese 3 é satisfeita) e que o ponto x^0 satisfazendo $g(x^0) < 0$ existe. Seja $\bar{x} \in F$ e $S \supseteq F$ tal que

$$\max\{g(x): x \in S, c^T x \leq c^T \bar{x}\} = 0 \quad (19)$$

Então \bar{x} é solução ótima de CDC, e esta proposição é conhecida como a **condição de otimalidade suficiente** (a prova encontra-se em Horst, Pardalos e Thoai (2000)).

2.4 TRABALHOS RELACIONADOS

Nesta seção observa-se que há duas lacunas existentes na literatura. Primeiramente, a pouca utilização da GP para resolução de problemas de arranjo físico, e também, o uso escasso de otimização DC como técnica de suporte para convergência do problema.

Os problemas de arranjo físico geralmente são modelados como FLP, fato exposto tópicos a cima, e estes trabalhos sempre procuram linearizar a função. Já os problemas de GP utilizam, em sua maioria, transformações e técnicas de condensação para encontrar a função.

No entanto, apesar da dispersão literária, encontrou-se alguns trabalhos correlacionados com este tema. A seguir, explicita-se sobre alguns deles:

- Moh, Chang e Hakimi (1996): Reformulou, apropriadamente, o problema-modelo de Wimer, Koren e Cederbaum em 1988 como um problema de programação geométrica, resolvendo-o por qualquer forma de otimização convexa. Os autores utilizaram uma partição deixando os objetos pré alocados e minimizaram a área retangular de todo o layout do projeto segundo esta partição;
- Fernandes (2012): Utilizou otimização DC para encontrar a melhor forma de alocar recursos circulares dentro de um espaço, porém neste caso não usou os recursos da programação geométrica, com o objetivo de minimizar o espaço total existente. Um ponto a ser observado na técnica deste autor é que o mesmo não usufruiu de partição para alocar os objetos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

3.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa científica pode ser classificada de acordo com diversos critérios, dentre os quais pode-se citar a classificação quanto a natureza, aos objetivos, aos procedimentos e objeto do problema em estudo.

Quanto a natureza a pesquisa constitui-se de um resumo de assunto, este trata-se de uma pesquisa fundamentada em trabalhos mais avançados com o enfoque do tema de um ponto de vista original, contendo a análise e interpretação dos fatos e ideias e a utilização de metodologia adequada (MORETTI, 2008).

Através da análise exploratória avalia-se a possibilidade de desenvolver uma boa pesquisa sobre determinado assunto, já que, por definição, esta desenvolve, esclarece e modifica conceitos e ideias na formulação de problemas mais precisos, assim, denota-se quanto ao objetivo deste trabalho (MORETTI, 2008; GIL, 2008).

Quanto aos procedimentos é dito quantitativo em virtude de que os modelos quantitativos são abstratos e descritos em linguagem matemática e computacional, apresentando variáveis causais e utilizando-se de técnicas analíticas e experimentais para calcular valores numéricos de processos reais ou parte dos problemas de tomada de decisão encontrados nesses processos, conseqüentemente, esses modelos podem ser usados para prever o estado futuro dos processos modelados, gerando resultados não-ambíguos e verificáveis (MORABITO; PUREZA, 2010).

Ainda mais, quanto ao objeto por fazer parte deste tipo de procedimento, a pesquisa é dita axiomática quantitativa normativa haja vista que estuda um problema já existente na literatura (por meio de uma pesquisa bibliográfica), mas utiliza-se de novas técnicas que garantem melhores resultados do que os até então conhecidos, estes pode-se ser provado como sendo os melhores possíveis para o problema estudado (BERTRAND; FRANSOO, 2002).

3.2 PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

Para alcançar o objetivo deste trabalho, tem-se que seguir algumas etapas. Estas são ilustradas na figura 5 a seguir:

Figura 5 - Procedimento da pesquisa



Primeiramente, deve-se estudar o problema de arranjo físico modelado por Fernandes (2012) com intuito de detectar o comportamento deste problema.

A programação geométrica permite uma ampla classes de problemas, e em contrapartida, fornece dados quantitativamente úteis (AFONSO, 2013). O problema de arranjo físico encaixa-se neste tipo de resolução de problemas pois a SGP trata os problemas de otimização não-linear em que a função objetivo e restrições são descritos como a diferença de dois posinômios.

A característica que torna a GP especial é porque através de mudanças de variáveis e transformações matemáticas, este tipo de problema pode ser transformado em um problema de otimização convexa, portanto aproveitando-se de suas 3 propriedades (BOYD et al., 2007):

- O ótimo global do problema é sempre atingido;
- É identificado sempre se o problema não tem solução factível;
- Alta velocidade na convergência do problema.

E assim ser solucionado como um problema de otimização como a diferença entre funções convexas (funções DC).

Após toda caracterização do problema, deve-se formular o problema de arranjo físico como um problema de programação geométrica signomial via otimização DC na sua forma padrão com o objetivo final de testá-lo em um algoritmo para o problema de AF e obter uma solução global eficiente para o problema.

Enfim, o teste para verificar a eficiência do algoritmo deve ser feito com um número finito de objetos alocados dentro do arranjo com raios distintos e, assim, compara-las com as variáveis obtidas na literatura.

3.3 LIMITAÇÕES

Do ponto de vista computacional, segundo Vavasis (1995) problemas de otimização global pertencem à classe dos problemas \mathcal{NP} -Completo, que são problemas em que o tempo computacional cresce exponencialmente com o tamanho da entrada de dados para todo método conhecido. Portanto, as implementações computacionais podem trazer dificuldades para a conclusão deste trabalho.

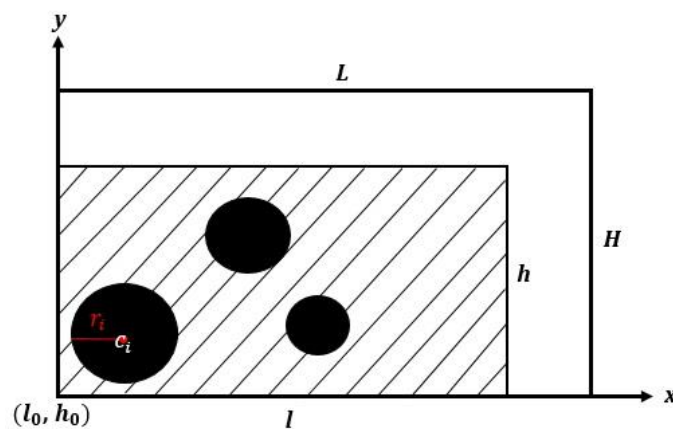
4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO

A representação do problema de interesse está na maneira em que n máquinas/operações podem ser dispostas dentro de um arranjo físico satisfazendo suas necessidades previamente estabelecidas pelos seus objetivos gerais. Mais à frente demonstram-se tais casos.

Antes de mais nada, há a necessidade de se estabelecer a forma do arranjo físico e do espaço ocupado por cada máquina/operação. Ademais, máquina/operação representar-se-á como objeto.

Considera-se que o layout é uma região retangular LH pertencente ao plano cartesiano. Para melhor utilizar a área total deste layout (minimizar o espaço total LH), reservou-se um outro retângulo lh de menor área para que os objetos se disponham, como pode-se observar na figura 6. Neste problema, os objetos são caracterizados por possuir diferentes regiões circulares, de raio r_i , onde i refere-se a máquina $i = 1, 2, \dots, n$ e com centro c_i em que $i = 1, 2, \dots, n$.

Figura 6 – Definição do problema



Para tornar o problema factível com a realidade, cada objeto não deve ocupar o espaço de outro e deve limitar-se a área da região lh , obedecendo as condições de espaço e possíveis deslocamentos, respectivamente, de forma que todos permaneçam o mais próximo possível de si, gerando a menor utilização do arranjo físico.

Observando a Figura 6, extrai-se as restrições que garantem a permanência dos objetos dentro da área lh :

$$x_i \geq l_0 + r_i \quad (20)$$

$$y_i \geq h_0 + r_i \quad (21)$$

$$x_i \leq l_0 + l - r_j \quad (22)$$

$$y_i \leq h_0 + h - r_j \quad (23)$$

com $i = 1, \dots, n$.

onde:

$c_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ é o centro do objeto i ;

l é o comprimento da área lh ;

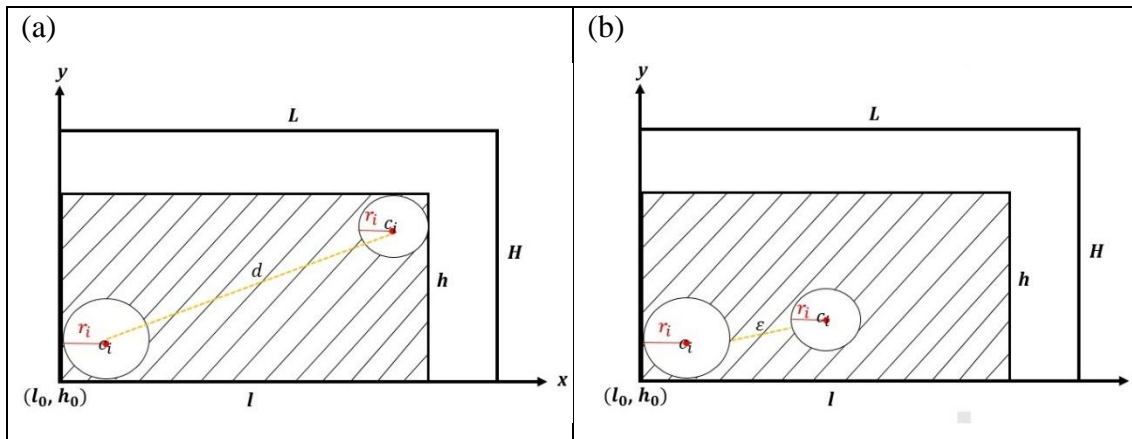
h é a altura da área lh ;

l_0 é o comprimento inicial da área lh ;

h_0 é a altura inicial da área lh .

Como já foi dito que nenhum objeto pode ocupar o espaço de outro e que não pode ultrapassar a fronteira lh , também deve-se obter estas restrições de espaço, observe a Figura 7.

Figura 7 - Definição do problema



A Figura 7(a) exemplifica a restrição em que dois objetos permanecem no espaço lh e comportam a distância máxima a ser mantida entre os mesmos; da mesma forma, tem-se na Figura 7(b) a ilustração de que dois objetos encontram-se na área retangular lh e respeitam uma distância mínima ϵ para se manter afastadas uma das outras. Disto, tem-se que:

$$d(c_i, c_j)^2 \leq (l - (r_i + r_j))^2 + (h - (r_i + r_j))^2 \quad (24)$$

$$d(c_i, c_j)^2 \geq r_i + r_j + \varepsilon \quad (25)$$

com $i = 1, \dots, n - 1$ e $j = i + 1, \dots, n$.

onde:

$c_i = (x_i, y_i)$ é o centro do objeto i ;

$c_j = (x_j, y_j)$ é o centro do objeto j ;

ε é uma distância de segurança entre um objeto e o outro;

r_i é o raio do objeto i ;

r_j é o raio do objeto j .

E, como o objetivo do problema é de reduzir a utilização do espaço total, obtém-se como função principal a minimização da área do retângulo lh , sendo assim, garante-se mais uma restrição:

$$\text{Minimizar } lh \quad (26)$$

com

$$0 \leq l \leq L \quad (27)$$

$$0 \leq h \leq H \quad (28)$$

$$l_0 \leq l \leq L + l_0 \quad (29)$$

$$h_0 \leq h \leq H + h_0 \quad (30)$$

onde:

l é o comprimento da área lh ;

L é o comprimento total do arranjo físico;

h é a altura da área lh ;

H é a altura total do arranjo físico;

l_0 é o comprimento inicial da área lh ;

h_0 é a altura inicial da área lh .

Em suma, obtém-se o seguinte problema modelo de otimização:

Função objetivo

$$\text{Minimizar } lh \quad (31)$$

Sujeito a

$$x_i \geq l_0 + r_i, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

$$y_i \geq h_0 + r_i, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

$$x_i \leq l_0 + l - r_j, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

$$y_i \leq h_0 + h - r_j, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

$$d(c_i, c_j)^2 \leq (l - (r_i + r_j))^2 + ((h - (r_i + r_j)))^2,$$

$$\text{com } i = 1, \dots, n - 1 \text{ e } j = i + 1, \dots, n.$$

$$d(c_i, c_j)^2 \geq r_i + r_j + \varepsilon, \text{ com } i = 1, \dots, n - 1 \text{ e } j = i + 1, \dots, n.$$

onde:

$c_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ é o centro do objeto i ;

l é o comprimento da área lh ;

h é a altura da área lh ;

l_0 é o comprimento inicial da área lh ;

h_0 é a altura inicial da área lh .

ε é uma distância de segurança entre um objeto e o outro;

r_i é o raio do objeto i ;

r_j é o raio do objeto j .

$c_i = (x_i, y_i)$ é o centro do objeto i ;

$c_j = (x_j, y_j)$ é o centro do objeto j ;

4.1 ABORDAGEM DO ALGORITMO PARA O PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO

Suponha que exista um algoritmo que resolva o problema de programação geométrica na forma DC (PPGDC). Então o problema de layout é escrito como um problema de programação geométrica signomial e resolvido pelo algoritmo PPGDC. A Figura 8 é um resumo do passo a passo de como se resolve o algoritmo.

Figura 8 – Procedimento do algoritmo



Com o problema de layout em mãos escreve-o como um problema de programação geométrica signomial (PGS) e assim resolve-o por uma rotina chamada de PGDCSQP. Após este passo escreve-se como um problema de diferença de funções convexas (otimização DC) na forma padrão com auxílio da rotina PADRÃOODC, obtendo o problema DC padrão e o resolvendo é equivalente a resolver o problema de layout, de maneira que a solução deste problema é convertida para o problema de layout.

5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

5.1 TRANSFORMAÇÃO DO PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO COMO UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

Como mencionado, a maior motivação para modelar o problema de layout como um problema de programação geométrica é devido ao problema encontrar o ótimo global com velocidade na convergência do problema, como atestado por Moh, Chang e Hakimi (1996).

Para transformar a equação (31) em um problema de programação geométrica deve-se deixá-lo com a cara da equação (1). Disto, obteve-se que:

$$\frac{l_0+r_i}{x_i} \leq 1 \text{ ou } l_0x_i^{-1} + r_ix_i^{-1} \leq 1 \quad (32)$$

$$\frac{h_0+r_i}{y_i} \leq 1 \text{ ou } hy_i^{-1} + r_iy_i^{-1} \leq 1 \quad (33)$$

$$\frac{l_0+l-r_i}{x_i} \leq 1 \text{ ou } l_0x_i^{-1} + lx_i^{-1} - r_ix_i^{-1} \leq 1 \quad (34)$$

$$\frac{h_0+h-r_i}{y_i} \leq 1 \text{ ou } h_0y_i^{-1} + hy_i^{-1} - r_iy_i^{-1} \leq 1 \quad (35)$$

$$\frac{2x_ix_j + 2y_iy_j - x_i^2 - x_j^2 - y_i^2 - y_j^2 - l^2 - h^2 + 2l(r_i + r_j) + 2h(r_i + r_j)}{2(r_i + r_j)^2} \leq 1 \quad (36)$$

ou

$$(2(r_i + r_j)^{-2}) [2x_ix_j + 2y_iy_j - x_i^2 - y_i^2 - x_j^2 - y_j^2 - l^2 - h^2] + (2(r_i + r_j)^{-1}) [2l + 2h] \leq 1$$

$$\frac{2x_ix_j + 2y_iy_j + (r_i + r_j + \varepsilon)^2}{\underbrace{-x_i^2}_{(I)}} \frac{-x_j^2 - y_i^2 - y_j^2}{\underbrace{-x_i^2}_{(II)}} \leq 1 \quad (37)$$

ou

$$-y_i^2x_i^{-2} - x_j^2x_i^{-2} - y_j^2x_i^{-2} + 2x_i^{-1}x_j + 2y_iy_jx_i^{-2} + (r_i + r_j + \varepsilon)^2x_i^{-2} \leq 1$$

Até aqui demonstrou-se que o problema de layout pode ser formulado como um problema de programação geométrica. De fato, na equação (36) já é possível atestar que a transformação em um problema de GP resultou em um problema de diferença de funções convexas, isto porque (I) e (II) são convexas. Portanto, as transformações aqui usadas ainda podem ser aplicadas equivalentemente em um problema de otimização convexa.

5.2 O PROBLEMA DE ARRANJO FÍSICO VIA PROGRAMAÇÃO GEOMÉTRICA

Após realizar a transformação do problema de arranjo físico como um problema de programação geométrica, pode-se reescrever os problemas exemplos como tais para aplica-los e avalia-los. Assim, demonstram-se os problemas P01, P02, P03, P04 e P05 para exemplificar como os mesmos foram construídos e aplicados.

No quadro 2 encontra-se a resolução do problema P01 onde são alocados dois discos (dois objetos circulares) ao problema de layout.

Quadro 2 - PAF/PG (dois discos)

P01- Dois discos
$l_0x_1^{-1} + r_1x_1^{-1} \leq 1$ $hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} \leq 1$ $h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} \leq 1$ $hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} \leq 1$ $l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} \leq 1$ $h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} \leq 1$ $(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$ $-y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$

No quadro 3 encontra-se a resolução do problema P02 onde são alocados três discos (objetos circulares) ao problema de layout, ou seja, acrescentou-se mais uma variável ao problema.

Quadro 3 - PAF/PG (três discos)

P02- Três discos
$l_0x_1^{-1} + r_1x_1^{-1} \leq 1$ $hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} \leq 1$ $h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} \leq 1$ $hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} \leq 1$ $l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} \leq 1$ $h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} \leq 1$ $l_0x_3^{-1} + r_3x_3^{-1} \leq 1$ $hy_3^{-1} + r_3y_3^{-1} \leq 1$ $l_0x_3^{-1} + lx_3^{-1} - r_3x_3^{-1} \leq 1$ $h_0y_3^{-1} + hy_3^{-1} - r_3y_3^{-1} \leq 1$ $(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$ $(2(r_1 + r_3)^{-2})[2x_1x_3 + 2y_1y_3 - x_1^2 - y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$ $(2(r_2 + r_3)^{-2})[2x_2x_3 + 2y_2y_3 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$ $-y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$ $-y_1^2x_1^{-2} - x_3^2x_1^{-2} - y_3^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_3 + 2y_1y_3x_1^{-2} + (r_1 + r_3 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$ $-y_2^2x_2^{-2} - x_3^2x_2^{-2} - y_3^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_3 + 2y_2y_3x_2^{-2} + (r_2 + r_3 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1$

No quadro 4 encontra-se a resolução do problema P03 onde são alocados cinco discos (objetos circulares) ao problema de layout, ou seja, acrescentou-se mais duas variáveis com relação ao problema P02.

Quadro 4 - PAF/PG (cinco discos)

P03- Cinco discos
$l_0x_1^{-1} + r_1x_1^{-1} \leq 1$ $hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} \leq 1$ $h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} \leq 1$ $l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} \leq 1$

$$hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_3^{-1} + r_3x_3^{-1} \leq 1$$

$$hy_3^{-1} + r_3y_3^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_3^{-1} + lx_3^{-1} - r_3x_3^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_3^{-1} + hy_3^{-1} - r_3y_3^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_4^{-1} + r_4x_4^{-1} \leq 1$$

$$hy_4^{-1} + r_4y_4^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_4^{-1} + lx_4^{-1} - r_4x_4^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_4^{-1} + hy_4^{-1} - r_4y_4^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_5^{-1} + r_5x_5^{-1} \leq 1$$

$$hy_5^{-1} + r_5y_5^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_5^{-1} + lx_5^{-1} - r_5x_5^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_5^{-1} + hy_5^{-1} - r_5y_5^{-1} \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_3)^{-2})[2x_1x_3 + 2y_1y_3 - x_1^2 - y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_3)^{-2})[2x_2x_3 + 2y_2y_3 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_4)^{-2})[2x_1x_4 + 2y_1y_4 - x_1^2 - y_1^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_4)^{-2})[2x_2x_4 + 2y_2y_4 - x_2^2 - y_2^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_4)^{-2})[2x_3x_4 + 2y_3y_4 - x_3^2 - y_3^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_5)^{-2})[2x_1x_5 + 2y_1y_5 - x_1^2 - y_1^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_5)^{-2})[2x_2x_5 + 2y_2y_5 - x_2^2 - y_2^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_5)^{-2})[2x_3x_5 + 2y_3y_5 - x_3^2 - y_3^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_5)^{-2})[2x_4x_5 + 2y_4y_5 - x_4^2 - y_4^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_3^2x_1^{-2} - y_3^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_3 + 2y_1y_3x_1^{-2} + (r_1 + r_3 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_2^2x_2^{-2} - x_3^2x_2^{-2} - y_3^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_3 + 2y_2y_3x_2^{-2} + (r_2 + r_3 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_4^2x_1^{-2} - y_4^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_4 + 2y_1y_4x_1^{-2} + (r_1 + r_4 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_2^2x_2^{-2} - x_4^2x_2^{-2} - y_4^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_4 + 2y_2y_4x_2^{-2} + (r_2 + r_4 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1$$

$$-y_3^2x_3^{-2} - x_4^2x_3^{-2} - y_4^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_4 + 2y_3y_4x_3^{-2} + (r_3 + r_4 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_5^2x_1^{-2} - y_5^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_5 + 2y_1y_5x_1^{-2} + (r_1 + r_5 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_2^2x_2^{-2} - x_5^2x_2^{-2} - y_5^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_5 + 2y_2y_5x_2^{-2} + (r_2 + r_5 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1$$

$$-y_3^2x_3^{-2} - x_5^2x_3^{-2} - y_5^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_5 + 2y_3y_5x_3^{-2} + (r_3 + r_5 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1$$

$$-y_4^2x_4^{-2} - x_5^2x_4^{-2} - y_5^2x_4^{-2} + 2x_4^{-1}x_5 + 2y_4y_5x_4^{-2} + (r_4 + r_5 + \varepsilon)^2x_4^{-2} \leq 1$$

No quadro 5 encontra-se a resolução do problema P04 onde são alocados oito discos ao problema de layout, ou seja, acrescentou-se mais três variáveis com relação ao problema P03.

Quadro 5 - PAF/PG (oito discos)

P04 – Oito discos
$l_0x_1^{-1} + r_1x_1^{-1} \leq 1$
$hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} \leq 1$
$l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} \leq 1$
$h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} \leq 1$
$l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} \leq 1$
$hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} \leq 1$
$l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} \leq 1$
$h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} \leq 1$
$l_0x_3^{-1} + r_3x_3^{-1} \leq 1$
$hy_3^{-1} + r_3y_3^{-1} \leq 1$
$l_0x_3^{-1} + lx_3^{-1} - r_3x_3^{-1} \leq 1$
$h_0y_3^{-1} + hy_3^{-1} - r_3y_3^{-1} \leq 1$
$l_0x_4^{-1} + r_4x_4^{-1} \leq 1$
$hy_4^{-1} + r_4y_4^{-1} \leq 1$
$l_0x_4^{-1} + lx_4^{-1} - r_4x_4^{-1} \leq 1$
$h_0y_4^{-1} + hy_4^{-1} - r_4y_4^{-1} \leq 1$
$l_0x_5^{-1} + r_5x_5^{-1} \leq 1$
$hy_5^{-1} + r_5y_5^{-1} \leq 1$
$l_0x_5^{-1} + lx_5^{-1} - r_5x_5^{-1} \leq 1$
$h_0y_5^{-1} + hy_5^{-1} - r_5y_5^{-1} \leq 1$
$l_0x_6^{-1} + r_6x_6^{-1} \leq 1$
$hy_6^{-1} + r_6y_6^{-1} \leq 1$
$l_0x_6^{-1} + lx_6^{-1} - r_6x_6^{-1} \leq 1$
$h_0y_6^{-1} + hy_6^{-1} - r_6y_6^{-1} \leq 1$
$l_0x_7^{-1} + r_7x_7^{-1} \leq 1$

$$hy_7^{-1} + r_7y_7^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_7^{-1} + lx_7^{-1} - r_7x_7^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_7^{-1} + hy_7^{-1} - r_7y_7^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_8^{-1} + r_8x_8^{-1} \leq 1$$

$$hy_8^{-1} + r_8y_8^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_8^{-1} + lx_8^{-1} - r_8x_8^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_8^{-1} + hy_8^{-1} - r_8y_8^{-1} \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_3)^{-2})[2x_1x_3 + 2y_1y_3 - x_1^2 - y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_3)^{-2})[2x_2x_3 + 2y_2y_3 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_4)^{-2})[2x_1x_4 + 2y_1y_4 - x_1^2 - y_1^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_4)^{-2})[2x_2x_4 + 2y_2y_4 - x_2^2 - y_2^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_4)^{-2})[2x_3x_4 + 2y_3y_4 - x_3^2 - y_3^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_5)^{-2})[2x_1x_5 + 2y_1y_5 - x_1^2 - y_1^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_5)^{-2})[2x_2x_5 + 2y_2y_5 - x_2^2 - y_2^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_5)^{-2})[2x_3x_5 + 2y_3y_5 - x_3^2 - y_3^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_5)^{-2})[2x_4x_5 + 2y_4y_5 - x_4^2 - y_4^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_6)^{-2})[2x_1x_6 + 2y_1y_6 - x_1^2 - y_1^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_6)^{-2})[2x_2x_6 + 2y_2y_6 - x_2^2 - y_2^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_6)^{-2})[2x_3x_6 + 2y_3y_6 - x_3^2 - y_3^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_6)^{-2})[2x_4x_6 + 2y_4y_6 - x_4^2 - y_4^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_6)^{-2})[2x_5x_6 + 2y_5y_6 - x_5^2 - y_5^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_7)^{-2})[2x_1x_7 + 2y_1y_7 - x_1^2 - y_1^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_7)^{-2})[2x_2x_7 + 2y_2y_7 - x_2^2 - y_2^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_7)^{-2})[2x_3x_7 + 2y_3y_7 - x_3^2 - y_3^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_7)^{-2})[2x_4x_7 + 2y_4y_7 - x_4^2 - y_4^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_7)^{-2})[2x_5x_7 + 2y_5y_7 - x_5^2 - y_5^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_6 + r_7)^{-2})[2x_6x_7 + 2y_6y_7 - x_6^2 - y_6^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_8)^{-2})[2x_1x_8 + 2y_1y_8 - x_1^2 - y_1^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_8)^{-2})[2x_2x_8 + 2y_2y_8 - x_2^2 - y_2^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_8)^{-2})[2x_3x_8 + 2y_3y_8 - x_3^2 - y_3^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_8)^{-2})[2x_4x_8 + 2y_4y_8 - x_4^2 - y_4^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_8)^{-2})[2x_5x_8 + 2y_5y_8 - x_5^2 - y_5^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_6 + r_8)^{-2})[2x_6x_8 + 2y_6y_8 - x_6^2 - y_6^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_7 + r_8)^{-2})[2x_7x_8 + 2y_7y_8 - x_7^2 - y_7^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_3^2x_1^{-2} - y_3^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_3 + 2y_1y_3x_1^{-2} + (r_1 + r_3 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$-y_2^2x_2^{-2} - x_3^2x_2^{-2} - y_3^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_3 + 2y_2y_3x_2^{-2} + (r_2 + r_3 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1$$

$$-y_1^2x_1^{-2} - x_4^2x_1^{-2} - y_4^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_4 + 2y_1y_4x_1^{-2} + (r_1 + r_4 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1$$

$$\begin{aligned}
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_4^2 x_2^{-2} - y_4^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_4 + 2y_2 y_4 x_2^{-2} + (r_2 + r_4 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_4^2 x_3^{-2} - y_4^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_4 + 2y_3 y_4 x_3^{-2} + (r_3 + r_4 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_5^2 x_1^{-2} - y_5^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_5 + 2y_1 y_5 x_1^{-2} + (r_1 + r_5 + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_5^2 x_2^{-2} - y_5^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_5 + 2y_2 y_5 x_2^{-2} + (r_2 + r_5 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_5^2 x_3^{-2} - y_5^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_5 + 2y_3 y_5 x_3^{-2} + (r_3 + r_5 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_5^2 x_4^{-2} - y_5^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_5 + 2y_4 y_5 x_4^{-2} + (r_4 + r_5 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_6^2 x_1^{-2} - y_6^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_6 + 2y_1 y_6 x_1^{-2} + (r_1 + r_6 + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_6^2 x_2^{-2} - y_6^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_6 + 2y_2 y_6 x_2^{-2} + (r_2 + r_6 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_6^2 x_3^{-2} - y_6^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_6 + 2y_3 y_6 x_3^{-2} + (r_3 + r_6 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_6^2 x_4^{-2} - y_6^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_6 + 2y_4 y_6 x_4^{-2} + (r_4 + r_6 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_6^2 x_5^{-2} - y_6^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_6 + 2y_5 y_6 x_5^{-2} + (r_5 + r_6 + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_7^2 x_1^{-2} - y_7^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_7 + 2y_1 y_7 x_1^{-2} + (r_1 + r_7 + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_7^2 x_2^{-2} - y_7^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_7 + 2y_2 y_7 x_2^{-2} + (r_2 + r_7 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_7^2 x_3^{-2} - y_7^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_7 + 2y_3 y_7 x_3^{-2} + (r_3 + r_7 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_7^2 x_4^{-2} - y_7^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_7 + 2y_4 y_7 x_4^{-2} + (r_4 + r_7 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_7^2 x_5^{-2} - y_7^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_7 + 2y_5 y_7 x_5^{-2} + (r_5 + r_7 + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_7^2 x_6^{-2} - y_7^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_7 + 2y_6 y_7 x_6^{-2} + (r_6 + r_7 + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_8^2 x_1^{-2} - y_8^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_8 + 2y_1 y_8 x_1^{-2} + (r_1 + r_8 + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_8^2 x_2^{-2} - y_8^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_8 + 2y_2 y_8 x_2^{-2} + (r_2 + r_8 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_8^2 x_3^{-2} - y_8^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_8 + 2y_3 y_8 x_3^{-2} + (r_3 + r_8 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_8^2 x_4^{-2} - y_8^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_8 + 2y_4 y_8 x_4^{-2} + (r_4 + r_8 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_8^2 x_5^{-2} - y_8^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_8 + 2y_5 y_8 x_5^{-2} + (r_5 + r_8 + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_8^2 x_6^{-2} - y_8^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_8 + 2y_6 y_8 x_6^{-2} + (r_6 + r_8 + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_8^2 x_7^{-2} - y_8^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_8 + 2y_7 y_8 x_7^{-2} + (r_7 + r_8 + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

No quadro 6 encontra-se a resolução do problema P05 onde são alocados dez discos ao problema de layout, ou seja, acrescentou-se mais duas variáveis com relação ao problema P04.

Quadro 6 - PAF/PG (dez discos)

P05- Dez discos

$$\begin{aligned}
l_0x_1^{-1} + r_1x_1^{-1} &\leq 1 \\
hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} &\leq 1 \\
hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_3^{-1} + r_3x_3^{-1} &\leq 1 \\
hy_3^{-1} + r_3y_3^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_3^{-1} + lx_3^{-1} - r_3x_3^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_3^{-1} + hy_3^{-1} - r_3y_3^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_4^{-1} + r_4x_4^{-1} &\leq 1 \\
hy_4^{-1} + r_4y_4^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_4^{-1} + lx_4^{-1} - r_4x_4^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_4^{-1} + hy_4^{-1} - r_4y_4^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_5^{-1} + r_5x_5^{-1} &\leq 1 \\
hy_5^{-1} + r_5y_5^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_5^{-1} + lx_5^{-1} - r_5x_5^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_5^{-1} + hy_5^{-1} - r_5y_5^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_6^{-1} + r_6x_6^{-1} &\leq 1 \\
hy_6^{-1} + r_6y_6^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_6^{-1} + lx_6^{-1} - r_6x_6^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_6^{-1} + hy_6^{-1} - r_6y_6^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_7^{-1} + r_7x_7^{-1} &\leq 1 \\
hy_7^{-1} + r_7y_7^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_7^{-1} + lx_7^{-1} - r_7x_7^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_7^{-1} + hy_7^{-1} - r_7y_7^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_8^{-1} + r_8x_8^{-1} &\leq 1 \\
hy_8^{-1} + r_8y_8^{-1} &\leq 1 \\
l_0x_8^{-1} + lx_8^{-1} - r_8x_8^{-1} &\leq 1 \\
h_0y_8^{-1} + hy_8^{-1} - r_8y_8^{-1} &\leq 1
\end{aligned}$$

$$l_0x_9^{-1} + r_9x_9^{-1} \leq 1$$

$$hy_9^{-1} + r_9y_9^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_9^{-1} + lx_9^{-1} - r_9x_9^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_9^{-1} + hy_9^{-1} - r_9y_9^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{10}^{-1} + r_{10}x_{10}^{-1} \leq 1$$

$$hy_{10}^{-1} + r_{10}y_{10}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{10}^{-1} + lx_{10}^{-1} - r_{10}x_{10}^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_{10}^{-1} + hy_{10}^{-1} - r_{10}y_{10}^{-1} \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_3)^{-2})[2x_1x_3 + 2y_1y_3 - x_1^2 - y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_3)^{-2})[2x_2x_3 + 2y_2y_3 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_4)^{-2})[2x_1x_4 + 2y_1y_4 - x_1^2 - y_1^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_4)^{-2})[2x_2x_4 + 2y_2y_4 - x_2^2 - y_2^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_4)^{-2})[2x_3x_4 + 2y_3y_4 - x_3^2 - y_3^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_5)^{-2})[2x_1x_5 + 2y_1y_5 - x_1^2 - y_1^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_5)^{-2})[2x_2x_5 + 2y_2y_5 - x_2^2 - y_2^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_5)^{-2})[2x_3x_5 + 2y_3y_5 - x_3^2 - y_3^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_5)^{-2})[2x_4x_5 + 2y_4y_5 - x_4^2 - y_4^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_6)^{-2})[2x_1x_6 + 2y_1y_6 - x_1^2 - y_1^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_6)^{-2})[2x_2x_6 + 2y_2y_6 - x_2^2 - y_2^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_6)^{-2})[2x_3x_6 + 2y_3y_6 - x_3^2 - y_3^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_6)^{-2})[2x_4x_6 + 2y_4y_6 - x_4^2 - y_4^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_6)^{-2})[2x_5x_6 + 2y_5y_6 - x_5^2 - y_5^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_7)^{-2})[2x_1x_7 + 2y_1y_7 - x_1^2 - y_1^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_7)^{-2})[2x_2x_7 + 2y_2y_7 - x_2^2 - y_2^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_7)^{-2})[2x_3x_7 + 2y_3y_7 - x_3^2 - y_3^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_7)^{-2})[2x_4x_7 + 2y_4y_7 - x_4^2 - y_4^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_7)^{-2})[2x_5x_7 + 2y_5y_7 - x_5^2 - y_5^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_6 + r_7)^{-2})[2x_6x_7 + 2y_6y_7 - x_6^2 - y_6^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_8)^{-2})[2x_1x_8 + 2y_1y_8 - x_1^2 - y_1^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_8)^{-2})[2x_2x_8 + 2y_2y_8 - x_2^2 - y_2^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_8)^{-2})[2x_3x_8 + 2y_3y_8 - x_3^2 - y_3^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_8)^{-2})[2x_4x_8 + 2y_4y_8 - x_4^2 - y_4^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_8)^{-2})[2x_5x_8 + 2y_5y_8 - x_5^2 - y_5^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_6 + r_8)^{-2})[2x_6x_8 + 2y_6y_8 - x_6^2 - y_6^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_7 + r_8)^{-2})[2x_7x_8 + 2y_7y_8 - x_7^2 - y_7^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_9)^{-2})[2x_1x_9 + 2y_1y_9 - x_1^2 - y_1^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_9)^{-2})[2x_2x_9 + 2y_2y_9 - x_2^2 - y_2^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_9)^{-2})[2x_3x_9 + 2y_3y_9 - x_3^2 - y_3^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_9)^{-2})[2x_4x_9 + 2y_4y_9 - x_4^2 - y_4^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$\begin{aligned}
& (2(r_5 + r_9)^{-2})[2x_5x_9 + 2y_5y_9 - x_5^2 - y_5^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_6 + r_9)^{-2})[2x_6x_9 + 2y_6y_9 - x_6^2 - y_6^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_7 + r_9)^{-2})[2x_7x_9 + 2y_7y_9 - x_7^2 - y_7^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_8 + r_9)^{-2})[2x_8x_9 + 2y_8y_9 - x_8^2 - y_8^2 - x_9^2 - y_9^2 - l^2 - h^2] + (2(r_8 + r_9)^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_1 + r_{10})^{-2})[2x_1x_{10} + 2y_1y_{10} - x_1^2 - y_1^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_2 + r_{10})^{-2})[2x_2x_{10} + 2y_2y_{10} - x_2^2 - y_2^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_3 + r_{10})^{-2})[2x_3x_{10} + 2y_3y_{10} - x_3^2 - y_3^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_4 + r_{10})^{-2})[2x_4x_{10} + 2y_4y_{10} - x_4^2 - y_4^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_5 + r_{10})^{-2})[2x_5x_{10} + 2y_5y_{10} - x_5^2 - y_5^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_6 + r_{10})^{-2})[2x_6x_{10} + 2y_6y_{10} - x_6^2 - y_6^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_7 + r_{10})^{-2})[2x_7x_{10} + 2y_7y_{10} - x_7^2 - y_7^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_8 + r_{10})^{-2})[2x_8x_{10} + 2y_8y_{10} - x_8^2 - y_8^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_8 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_9 + r_{10})^{-2})[2x_9x_{10} + 2y_9y_{10} - x_9^2 - y_9^2 - x_{10}^2 - y_{10}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_9 + r_{10})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_3^2x_1^{-2} - y_3^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_3 + 2y_1y_3x_1^{-2} + (r_1 + r_3 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_3^2x_2^{-2} - y_3^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_3 + 2y_2y_3x_2^{-2} + (r_2 + r_3 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_4^2x_1^{-2} - y_4^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_4 + 2y_1y_4x_1^{-2} + (r_1 + r_4 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_4^2x_2^{-2} - y_4^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_4 + 2y_2y_4x_2^{-2} + (r_2 + r_4 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2x_3^{-2} - x_4^2x_3^{-2} - y_4^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_4 + 2y_3y_4x_3^{-2} + (r_3 + r_4 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_5^2x_1^{-2} - y_5^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_5 + 2y_1y_5x_1^{-2} + (r_1 + r_5 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_5^2x_2^{-2} - y_5^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_5 + 2y_2y_5x_2^{-2} + (r_2 + r_5 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2x_3^{-2} - x_5^2x_3^{-2} - y_5^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_5 + 2y_3y_5x_3^{-2} + (r_3 + r_5 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2x_4^{-2} - x_5^2x_4^{-2} - y_5^2x_4^{-2} + 2x_4^{-1}x_5 + 2y_4y_5x_4^{-2} + (r_4 + r_5 + \varepsilon)^2x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_6^2x_1^{-2} - y_6^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_6 + 2y_1y_6x_1^{-2} + (r_1 + r_6 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_6^2x_2^{-2} - y_6^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_6 + 2y_2y_6x_2^{-2} + (r_2 + r_6 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2x_3^{-2} - x_6^2x_3^{-2} - y_6^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_6 + 2y_3y_6x_3^{-2} + (r_3 + r_6 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2x_4^{-2} - x_6^2x_4^{-2} - y_6^2x_4^{-2} + 2x_4^{-1}x_6 + 2y_4y_6x_4^{-2} + (r_4 + r_6 + \varepsilon)^2x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2x_5^{-2} - x_6^2x_5^{-2} - y_6^2x_5^{-2} + 2x_5^{-1}x_6 + 2y_5y_6x_5^{-2} + (r_5 + r_6 + \varepsilon)^2x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_7^2x_1^{-2} - y_7^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_7 + 2y_1y_7x_1^{-2} + (r_1 + r_7 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_7^2x_2^{-2} - y_7^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_7 + 2y_2y_7x_2^{-2} + (r_2 + r_7 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2x_3^{-2} - x_7^2x_3^{-2} - y_7^2x_3^{-2} + 2x_3^{-1}x_7 + 2y_3y_7x_3^{-2} + (r_3 + r_7 + \varepsilon)^2x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2x_4^{-2} - x_7^2x_4^{-2} - y_7^2x_4^{-2} + 2x_4^{-1}x_7 + 2y_4y_7x_4^{-2} + (r_4 + r_7 + \varepsilon)^2x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2x_5^{-2} - x_7^2x_5^{-2} - y_7^2x_5^{-2} + 2x_5^{-1}x_7 + 2y_5y_7x_5^{-2} + (r_5 + r_7 + \varepsilon)^2x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2x_6^{-2} - x_7^2x_6^{-2} - y_7^2x_6^{-2} + 2x_6^{-1}x_7 + 2y_6y_7x_6^{-2} + (r_6 + r_7 + \varepsilon)^2x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_8^2x_1^{-2} - y_8^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_8 + 2y_1y_8x_1^{-2} + (r_1 + r_8 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_8^2 x_2^{-2} - y_8^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_8 + 2y_2 y_8 x_1^{-2} + (r_2 + r_8 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_8^2 x_3^{-2} - y_8^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_8 + 2y_3 y_8 x_3^{-2} + (r_3 + r_8 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_8^2 x_4^{-2} - y_8^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_8 + 2y_4 y_8 x_4^{-2} + (r_4 + r_8 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_8^2 x_5^{-2} - y_8^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_8 + 2y_5 y_8 x_5^{-2} + (r_5 + r_8 + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_8^2 x_6^{-2} - y_8^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_8 + 2y_6 y_8 x_6^{-2} + (r_6 + r_8 + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_8^2 x_7^{-2} - y_8^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_8 + 2y_7 y_8 x_7^{-2} + (r_7 + r_8 + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_9^2 x_1^{-2} - y_9^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_9 + 2y_1 y_9 x_1^{-2} + (r_1 + r_9 + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_9^2 x_2^{-2} - y_9^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_9 + 2y_2 y_9 x_1^{-2} + (r_2 + r_9 + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_9^2 x_3^{-2} - y_9^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_9 + 2y_3 y_9 x_3^{-2} + (r_3 + r_9 + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_9^2 x_4^{-2} - y_9^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_9 + 2y_4 y_9 x_4^{-2} + (r_4 + r_9 + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_9^2 x_5^{-2} - y_9^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_9 + 2y_5 y_9 x_5^{-2} + (r_5 + r_9 + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_9^2 x_6^{-2} - y_9^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_9 + 2y_6 y_9 x_6^{-2} + (r_6 + r_9 + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_9^2 x_7^{-2} - y_9^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_9 + 2y_7 y_9 x_7^{-2} + (r_7 + r_9 + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_9^2 x_8^{-2} - y_9^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_9 + 2y_8 y_9 x_7^{-2} + (r_8 + r_9 + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{10}^2 x_1^{-2} - y_{10}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{10} + 2y_1 y_{10} x_1^{-2} + (r_1 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{10}^2 x_2^{-2} - y_{10}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{10} + 2y_2 y_{10} x_1^{-2} + (r_2 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{10}^2 x_3^{-2} - y_{10}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{10} + 2y_3 y_{10} x_3^{-2} + (r_3 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{10}^2 x_4^{-2} - y_{10}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{10} + 2y_4 y_{10} x_4^{-2} + (r_4 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{10}^2 x_5^{-2} - y_{10}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{10} + 2y_5 y_{10} x_5^{-2} + (r_5 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{10}^2 x_6^{-2} - y_{10}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{10} + 2y_6 y_{10} x_6^{-2} + (r_6 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{10}^2 x_7^{-2} - y_{10}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{10} + 2y_7 y_{10} x_7^{-2} + (r_7 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{10}^2 x_8^{-2} - y_{10}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{10} + 2y_8 y_{10} x_7^{-2} + (r_8 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{10}^2 x_9^{-2} - y_{10}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{10} + 2y_9 y_{10} x_7^{-2} + (r_9 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

No quadro 7 encontra-se a resolução do problema P06 onde são alocados vinte discos ao problema de layout, ou seja, acrescentou-se mais dez variáveis com relação ao problema P05.

Quadro 7 - PAF/PG (vinte discos)

P06- Vinte discos
$l_0 x_1^{-1} + r_1 x_1^{-1} \leq 1$

$$\begin{aligned}
& hy_1^{-1} + r_1y_1^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_1^{-1} + lx_1^{-1} - r_1x_1^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_1^{-1} + hy_1^{-1} - r_1y_1^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_2^{-1} + r_2x_2^{-1} \leq 1 \\
& hy_2^{-1} + r_2y_2^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_2^{-1} + lx_2^{-1} - r_2x_2^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_2^{-1} + hy_2^{-1} - r_2y_2^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_3^{-1} + r_3x_3^{-1} \leq 1 \\
& hy_3^{-1} + r_3y_3^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_3^{-1} + lx_3^{-1} - r_3x_3^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_3^{-1} + hy_3^{-1} - r_3y_3^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_4^{-1} + r_4x_4^{-1} \leq 1 \\
& hy_4^{-1} + r_4y_4^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_4^{-1} + lx_4^{-1} - r_4x_4^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_4^{-1} + hy_4^{-1} - r_4y_4^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_5^{-1} + r_5x_5^{-1} \leq 1 \\
& hy_5^{-1} + r_5y_5^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_5^{-1} + lx_5^{-1} - r_5x_5^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_5^{-1} + hy_5^{-1} - r_5y_5^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_6^{-1} + r_6x_6^{-1} \leq 1 \\
& hy_6^{-1} + r_6y_6^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_6^{-1} + lx_6^{-1} - r_6x_6^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_6^{-1} + hy_6^{-1} - r_6y_6^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_7^{-1} + r_7x_7^{-1} \leq 1 \\
& hy_7^{-1} + r_7y_7^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_7^{-1} + lx_7^{-1} - r_7x_7^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_7^{-1} + hy_7^{-1} - r_7y_7^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_8^{-1} + r_8x_8^{-1} \leq 1 \\
& hy_8^{-1} + r_8y_8^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_8^{-1} + lx_8^{-1} - r_8x_8^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_8^{-1} + hy_8^{-1} - r_8y_8^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_9^{-1} + r_9x_9^{-1} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& hy_9^{-1} + r_9y_9^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_9^{-1} + lx_9^{-1} - r_9x_9^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_9^{-1} + hy_9^{-1} - r_9y_9^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{10}^{-1} + r_{10}x_{10}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{10}^{-1} + r_{10}y_{10}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{10}^{-1} + lx_{10}^{-1} - r_{10}x_{10}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{10}^{-1} + hy_{10}^{-1} - r_{10}y_{10}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{11}^{-1} + r_{11}x_{11}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{11}^{-1} + r_{11}y_{11}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{11}^{-1} + lx_{11}^{-1} - r_{11}x_{11}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{11}^{-1} + hy_{11}^{-1} - r_{11}y_{11}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{12}^{-1} + r_{12}x_{12}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{12}^{-1} + r_{12}y_{12}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{12}^{-1} + lx_{12}^{-1} - r_{12}x_{12}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{12}^{-1} + hy_{12}^{-1} - r_{12}y_{12}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{13}^{-1} + r_{13}x_{13}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{13}^{-1} + r_{13}y_{13}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{13}^{-1} + lx_{13}^{-1} - r_{13}x_{13}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{13}^{-1} + hy_{13}^{-1} - r_{13}y_{13}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{14}^{-1} + r_{14}x_{14}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{14}^{-1} + r_{14}y_{14}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{14}^{-1} + lx_{14}^{-1} - r_{14}x_{14}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{14}^{-1} + hy_{14}^{-1} - r_{14}y_{14}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{15}^{-1} + r_{15}x_{15}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{15}^{-1} + r_{15}y_{15}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{15}^{-1} + lx_{15}^{-1} - r_{15}x_{15}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{15}^{-1} + hy_{15}^{-1} - r_{15}y_{15}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{16}^{-1} + r_{16}x_{16}^{-1} \leq 1 \\
& hy_{16}^{-1} + r_{16}y_{16}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{16}^{-1} + lx_{16}^{-1} - r_{16}x_{16}^{-1} \leq 1 \\
& h_0y_{16}^{-1} + hy_{16}^{-1} - r_{16}y_{16}^{-1} \leq 1 \\
& l_0x_{17}^{-1} + r_{17}x_{17}^{-1} \leq 1
\end{aligned}$$

$$hy_{17}^{-1} + r_{17}y_{17}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{17}^{-1} + lx_{17}^{-1} - r_{17}x_{17}^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_{17}^{-1} + hy_{17}^{-1} - r_{17}y_{17}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{18}^{-1} + r_{18}x_{18}^{-1} \leq 1$$

$$hy_{18}^{-1} + r_{18}y_{18}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{18}^{-1} + lx_{18}^{-1} - r_{18}x_{18}^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_{18}^{-1} + hy_{18}^{-1} - r_{18}y_{18}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{19}^{-1} + r_{19}x_{19}^{-1} \leq 1$$

$$hy_{19}^{-1} + r_{19}y_{19}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{19}^{-1} + lx_{19}^{-1} - r_{19}x_{19}^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_{19}^{-1} + hy_{19}^{-1} - r_{19}y_{19}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{20}^{-1} + r_{20}x_{20}^{-1} \leq 1$$

$$hy_{20}^{-1} + r_{20}y_{20}^{-1} \leq 1$$

$$l_0x_{20}^{-1} + lx_{20}^{-1} - r_{20}x_{20}^{-1} \leq 1$$

$$h_0y_{20}^{-1} + hy_{20}^{-1} - r_{20}y_{20}^{-1} \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_2)^{-2})[2x_1x_2 + 2y_1y_2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_2)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_3)^{-2})[2x_1x_3 + 2y_1y_3 - x_1^2 - y_1^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_3)^{-2})[2x_2x_3 + 2y_2y_3 - x_2^2 - y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_3)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_4)^{-2})[2x_1x_4 + 2y_1y_4 - x_1^2 - y_1^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_4)^{-2})[2x_2x_4 + 2y_2y_4 - x_2^2 - y_2^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_4)^{-2})[2x_3x_4 + 2y_3y_4 - x_3^2 - y_3^2 - x_4^2 - y_4^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_4)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_5)^{-2})[2x_1x_5 + 2y_1y_5 - x_1^2 - y_1^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_5)^{-2})[2x_2x_5 + 2y_2y_5 - x_2^2 - y_2^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_5)^{-2})[2x_3x_5 + 2y_3y_5 - x_3^2 - y_3^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_5)^{-2})[2x_4x_5 + 2y_4y_5 - x_4^2 - y_4^2 - x_5^2 - y_5^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_5)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_6)^{-2})[2x_1x_6 + 2y_1y_6 - x_1^2 - y_1^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_6)^{-2})[2x_2x_6 + 2y_2y_6 - x_2^2 - y_2^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_6)^{-2})[2x_3x_6 + 2y_3y_6 - x_3^2 - y_3^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_6)^{-2})[2x_4x_6 + 2y_4y_6 - x_4^2 - y_4^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_6)^{-2})[2x_5x_6 + 2y_5y_6 - x_5^2 - y_5^2 - x_6^2 - y_6^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_6)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_7)^{-2})[2x_1x_7 + 2y_1y_7 - x_1^2 - y_1^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_7)^{-2})[2x_2x_7 + 2y_2y_7 - x_2^2 - y_2^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_3 + r_7)^{-2})[2x_3x_7 + 2y_3y_7 - x_3^2 - y_3^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_4 + r_7)^{-2})[2x_4x_7 + 2y_4y_7 - x_4^2 - y_4^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_5 + r_7)^{-2})[2x_5x_7 + 2y_5y_7 - x_5^2 - y_5^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_6 + r_7)^{-2})[2x_6x_7 + 2y_6y_7 - x_6^2 - y_6^2 - x_7^2 - y_7^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_7)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_1 + r_8)^{-2})[2x_1x_8 + 2y_1y_8 - x_1^2 - y_1^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$(2(r_2 + r_8)^{-2})[2x_2x_8 + 2y_2y_8 - x_2^2 - y_2^2 - x_8^2 - y_8^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_8)^{-1})[2l + 2h] \leq 1$$

$$\begin{aligned}
& (2(r_{17} + r_{18})^{-2})[2x_{17}x_{18} + 2y_{17}y_{18} - x_{17}^2 - y_{17}^2 - x_{18}^2 - y_{18}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{17} + r_{18})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_1 + r_{19})^{-2})[2x_1x_{19} + 2y_1y_{19} - x_1^2 - y_1^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_2 + r_{19})^{-2})[2x_2x_{19} + 2y_2y_{19} - x_2^2 - y_2^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_3 + r_{19})^{-2})[2x_3x_{19} + 2y_3y_{19} - x_3^2 - y_3^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_4 + r_{19})^{-2})[2x_4x_{19} + 2y_4y_{19} - x_4^2 - y_4^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_5 + r_{19})^{-2})[2x_5x_{19} + 2y_5y_{19} - x_5^2 - y_5^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_6 + r_{19})^{-2})[2x_6x_{19} + 2y_6y_{19} - x_6^2 - y_6^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_7 + r_{19})^{-2})[2x_7x_{19} + 2y_7y_{19} - x_7^2 - y_7^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_8 + r_{19})^{-2})[2x_8x_{19} + 2y_8y_{19} - x_8^2 - y_8^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_8 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_9 + r_{19})^{-2})[2x_9x_{19} + 2y_9y_{19} - x_9^2 - y_9^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_9 + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{10} + r_{19})^{-2})[2x_{10}x_{19} + 2y_{10}y_{19} - x_{10}^2 - y_{10}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{10} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{11} + r_{19})^{-2})[2x_{11}x_{19} + 2y_{11}y_{19} - x_{11}^2 - y_{11}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{11} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{12} + r_{19})^{-2})[2x_{12}x_{19} + 2y_{12}y_{19} - x_{12}^2 - y_{12}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{12} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{13} + r_{19})^{-2})[2x_{13}x_{19} + 2y_{13}y_{19} - x_{13}^2 - y_{13}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{13} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{14} + r_{19})^{-2})[2x_{14}x_{19} + 2y_{14}y_{19} - x_{14}^2 - y_{14}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{14} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{15} + r_{19})^{-2})[2x_{15}x_{19} + 2y_{15}y_{19} - x_{15}^2 - y_{15}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{15} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{16} + r_{19})^{-2})[2x_{16}x_{19} + 2y_{16}y_{19} - x_{16}^2 - y_{16}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{16} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{17} + r_{19})^{-2})[2x_{17}x_{19} + 2y_{17}y_{19} - x_{17}^2 - y_{17}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{17} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{18} + r_{19})^{-2})[2x_{18}x_{19} + 2y_{18}y_{19} - x_{18}^2 - y_{18}^2 - x_{19}^2 - y_{19}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{18} + r_{19})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_1 + r_{20})^{-2})[2x_1x_{20} + 2y_1y_{20} - x_1^2 - y_1^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_1 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_2 + r_{20})^{-2})[2x_2x_{20} + 2y_2y_{20} - x_2^2 - y_2^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_2 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_3 + r_{20})^{-2})[2x_3x_{20} + 2y_3y_{20} - x_3^2 - y_3^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_3 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_4 + r_{20})^{-2})[2x_4x_{20} + 2y_4y_{20} - x_4^2 - y_4^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_4 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_5 + r_{20})^{-2})[2x_5x_{20} + 2y_5y_{20} - x_5^2 - y_5^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_5 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_6 + r_{20})^{-2})[2x_6x_{20} + 2y_6y_{20} - x_6^2 - y_6^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_6 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_7 + r_{20})^{-2})[2x_7x_{20} + 2y_7y_{20} - x_7^2 - y_7^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_7 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_8 + r_{20})^{-2})[2x_8x_{20} + 2y_8y_{20} - x_8^2 - y_8^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_8 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_9 + r_{20})^{-2})[2x_9x_{20} + 2y_9y_{20} - x_9^2 - y_9^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_9 + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{10} + r_{20})^{-2})[2x_{10}x_{20} + 2y_{10}y_{20} - x_{10}^2 - y_{10}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{10} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{11} + r_{20})^{-2})[2x_{11}x_{20} + 2y_{11}y_{20} - x_{11}^2 - y_{11}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{11} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{12} + r_{20})^{-2})[2x_{12}x_{20} + 2y_{12}y_{20} - x_{12}^2 - y_{12}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{12} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{13} + r_{20})^{-2})[2x_{13}x_{20} + 2y_{13}y_{20} - x_{13}^2 - y_{13}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{13} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{14} + r_{20})^{-2})[2x_{14}x_{20} + 2y_{14}y_{20} - x_{14}^2 - y_{14}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{14} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{15} + r_{20})^{-2})[2x_{15}x_{20} + 2y_{15}y_{20} - x_{15}^2 - y_{15}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{15} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{16} + r_{20})^{-2})[2x_{16}x_{20} + 2y_{16}y_{20} - x_{16}^2 - y_{16}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{16} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{17} + r_{20})^{-2})[2x_{17}x_{20} + 2y_{17}y_{20} - x_{17}^2 - y_{17}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{17} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{18} + r_{20})^{-2})[2x_{18}x_{20} + 2y_{18}y_{20} - x_{18}^2 - y_{18}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{18} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& (2(r_{19} + r_{20})^{-2})[2x_{19}x_{20} + 2y_{19}y_{20} - x_{19}^2 - y_{19}^2 - x_{20}^2 - y_{20}^2 - l^2 - h^2] + (2(r_{19} + r_{20})^{-1})[2l + 2h] \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_2^2x_1^{-2} - y_2^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_2 + 2y_1y_2x_1^{-2} + (r_1 + r_2 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2x_1^{-2} - x_3^2x_1^{-2} - y_3^2x_1^{-2} + 2x_1^{-1}x_3 + 2y_1y_3x_1^{-2} + (r_1 + r_3 + \varepsilon)^2x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2x_2^{-2} - x_3^2x_2^{-2} - y_3^2x_2^{-2} + 2x_2^{-1}x_3 + 2y_2y_3x_2^{-2} + (r_2 + r_3 + \varepsilon)^2x_2^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{10}^2 x_8^{-2} - y_9^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_9 + 2y_8 y_9 x_8^{-2} + (r_8 + r_9 + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{10}^2 x_1^{-2} - y_{10}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{10} + 2y_1 y_{10} x_1^{-2} + (r_1 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{10}^2 x_2^{-2} - y_{10}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{10} + 2y_2 y_{10} x_1^{-2} + (r_2 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{10}^2 x_3^{-2} - y_{10}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{10} + 2y_3 y_{10} x_3^{-2} + (r_3 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{10}^2 x_4^{-2} - y_{10}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{10} + 2y_4 y_{10} x_4^{-2} + (r_4 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{10}^2 x_5^{-2} - y_{10}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{10} + 2y_5 y_{10} x_5^{-2} + (r_5 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{10}^2 x_6^{-2} - y_{10}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{10} + 2y_6 y_{10} x_6^{-2} + (r_6 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{10}^2 x_7^{-2} - y_{10}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{10} + 2y_7 y_{10} x_7^{-2} + (r_7 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{10}^2 x_8^{-2} - y_{10}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{10} + 2y_8 y_{10} x_8^{-2} + (r_8 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{10}^2 x_9^{-2} - y_{10}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{10} + 2y_9 y_{10} x_9^{-2} + (r_9 + r_{10} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{11}^2 x_1^{-2} - y_{11}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{11} + 2y_1 y_{11} x_1^{-2} + (r_1 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{11}^2 x_2^{-2} - y_{11}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{11} + 2y_2 y_{11} x_1^{-2} + (r_2 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{11}^2 x_3^{-2} - y_{11}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{11} + 2y_3 y_{11} x_3^{-2} + (r_3 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{11}^2 x_4^{-2} - y_{11}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{11} + 2y_4 y_{11} x_4^{-2} + (r_4 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{11}^2 x_5^{-2} - y_{11}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{11} + 2y_5 y_{11} x_5^{-2} + (r_5 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{11}^2 x_6^{-2} - y_{11}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{11} + 2y_6 y_{11} x_6^{-2} + (r_6 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{11}^2 x_7^{-2} - y_{11}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{11} + 2y_7 y_{11} x_7^{-2} + (r_7 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{11}^2 x_8^{-2} - y_{11}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{11} + 2y_8 y_{11} x_8^{-2} + (r_8 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{11}^2 x_9^{-2} - y_{11}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{11} + 2y_9 y_{11} x_9^{-2} + (r_9 + r_{11} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{11}^2 x_{10}^{-2} - y_{11}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{11} + 2y_{10} y_{11} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{11} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{12}^2 x_1^{-2} - y_{12}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{12} + 2y_1 y_{12} x_1^{-2} + (r_1 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{12}^2 x_2^{-2} - y_{12}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{12} + 2y_2 y_{12} x_1^{-2} + (r_2 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{12}^2 x_3^{-2} - y_{12}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{12} + 2y_3 y_{12} x_3^{-2} + (r_3 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{12}^2 x_4^{-2} - y_{12}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{12} + 2y_4 y_{12} x_4^{-2} + (r_4 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{12}^2 x_5^{-2} - y_{12}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{12} + 2y_5 y_{12} x_5^{-2} + (r_5 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{12}^2 x_6^{-2} - y_{12}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{12} + 2y_6 y_{12} x_6^{-2} + (r_6 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{12}^2 x_7^{-2} - y_{12}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{12} + 2y_7 y_{12} x_7^{-2} + (r_7 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{12}^2 x_8^{-2} - y_{12}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{12} + 2y_8 y_{12} x_8^{-2} + (r_8 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{12}^2 x_9^{-2} - y_{12}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{12} + 2y_9 y_{12} x_9^{-2} + (r_9 + r_{12} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{12}^2 x_{10}^{-2} - y_{12}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{12} + 2y_{10} y_{12} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{12} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{12}^2 x_{11}^{-2} - y_{12}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{12} + 2y_{11} y_{12} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{12} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{13}^2 x_1^{-2} - y_{13}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{13} + 2y_1 y_{13} x_1^{-2} + (r_1 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{13}^2 x_2^{-2} - y_{13}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{13} + 2y_2 y_{13} x_1^{-2} + (r_2 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{13}^2 x_3^{-2} - y_{13}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{13} + 2y_3 y_{13} x_3^{-2} + (r_3 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{13}^2 x_4^{-2} - y_{13}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{13} + 2y_4 y_{13} x_4^{-2} + (r_4 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{13}^2 x_5^{-2} - y_{13}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{13} + 2y_5 y_{13} x_5^{-2} + (r_5 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{13}^2 x_6^{-2} - y_{13}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{13} + 2y_6 y_{13} x_6^{-2} + (r_6 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{13}^2 x_7^{-2} - y_{13}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{13} + 2y_7 y_{13} x_7^{-2} + (r_7 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{13}^2 x_8^{-2} - y_{13}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{13} + 2y_8 y_{13} x_8^{-2} + (r_8 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{13}^2 x_9^{-2} - y_{13}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{13} + 2y_9 y_{13} x_9^{-2} + (r_9 + r_{13} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{13}^2 x_{10}^{-2} - y_{13}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{13} + 2y_{10} y_{13} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{13} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{13}^2 x_{11}^{-2} - y_{13}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{13} + 2y_{11} y_{13} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{13} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{13}^2 x_{12}^{-2} - y_{13}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{13} + 2y_{12} y_{13} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{13} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{14}^2 x_1^{-2} - y_{14}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{14} + 2y_1 y_{14} x_1^{-2} + (r_1 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{14}^2 x_2^{-2} - y_{14}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{14} + 2y_2 y_{14} x_1^{-2} + (r_2 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{14}^2 x_3^{-2} - y_{14}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{14} + 2y_3 y_{14} x_3^{-2} + (r_3 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{14}^2 x_4^{-2} - y_{14}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{14} + 2y_4 y_{14} x_4^{-2} + (r_4 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{14}^2 x_5^{-2} - y_{14}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{14} + 2y_5 y_{14} x_5^{-2} + (r_5 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{14}^2 x_6^{-2} - y_{14}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{14} + 2y_6 y_{14} x_6^{-2} + (r_6 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{14}^2 x_7^{-2} - y_{14}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{14} + 2y_7 y_{14} x_7^{-2} + (r_7 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{14}^2 x_8^{-2} - y_{14}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{14} + 2y_8 y_{14} x_8^{-2} + (r_8 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{14}^2 x_9^{-2} - y_{14}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{14} + 2y_9 y_{14} x_9^{-2} + (r_9 + r_{14} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{14}^2 x_{10}^{-2} - y_{14}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{14} + 2y_{10} y_{14} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{14} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{14}^2 x_{11}^{-2} - y_{14}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{14} + 2y_{11} y_{14} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{14} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{14}^2 x_{12}^{-2} - y_{14}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{14} + 2y_{12} y_{14} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{14} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{13}^2 x_{13}^{-2} - x_{14}^2 x_{13}^{-2} - y_{14}^2 x_{13}^{-2} + 2x_{13}^{-1} x_{14} + 2y_{13} y_{14} x_{13}^{-2} + (r_{13} + r_{14} + \varepsilon)^2 x_{13}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{15}^2 x_1^{-2} - y_{15}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{15} + 2y_1 y_{15} x_1^{-2} + (r_1 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{15}^2 x_2^{-2} - y_{15}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{15} + 2y_2 y_{15} x_1^{-2} + (r_2 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{15}^2 x_3^{-2} - y_{15}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{15} + 2y_3 y_{15} x_3^{-2} + (r_3 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{15}^2 x_4^{-2} - y_{15}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{15} + 2y_4 y_{15} x_4^{-2} + (r_4 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{15}^2 x_5^{-2} - y_{15}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{15} + 2y_5 y_{15} x_5^{-2} + (r_5 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{15}^2 x_6^{-2} - y_{15}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{15} + 2y_6 y_{15} x_6^{-2} + (r_6 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{15}^2 x_7^{-2} - y_{15}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{15} + 2y_7 y_{15} x_7^{-2} + (r_7 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{15}^2 x_8^{-2} - y_{15}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{15} + 2y_8 y_{15} x_8^{-2} + (r_8 + r_{15} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{17}^2 x_{12}^{-2} - y_{17}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{17} + 2y_{12} y_{17} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{17} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{13}^2 x_{13}^{-2} - x_{17}^2 x_{13}^{-2} - y_{17}^2 x_{13}^{-2} + 2x_{13}^{-1} x_{17} + 2y_{13} y_{17} x_{13}^{-2} + (r_{13} + r_{17} + \varepsilon)^2 x_{13}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{14}^2 x_{14}^{-2} - x_{17}^2 x_{14}^{-2} - y_{17}^2 x_{14}^{-2} + 2x_{14}^{-1} x_{17} + 2y_{14} y_{17} x_{14}^{-2} + (r_{14} + r_{17} + \varepsilon)^2 x_{14}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{15}^2 x_{15}^{-2} - x_{17}^2 x_{15}^{-2} - y_{17}^2 x_{15}^{-2} + 2x_{15}^{-1} x_{17} + 2y_{15} y_{17} x_{15}^{-2} + (r_{15} + r_{17} + \varepsilon)^2 x_{15}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{16}^2 x_{16}^{-2} - x_{17}^2 x_{16}^{-2} - y_{17}^2 x_{16}^{-2} + 2x_{16}^{-1} x_{17} + 2y_{16} y_{17} x_{16}^{-2} + (r_{16} + r_{17} + \varepsilon)^2 x_{16}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{18}^2 x_1^{-2} - y_{18}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{18} + 2y_1 y_{18} x_1^{-2} + (r_1 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{18}^2 x_2^{-2} - y_{18}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{18} + 2y_2 y_{18} x_1^{-2} + (r_2 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{18}^2 x_3^{-2} - y_{18}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{18} + 2y_3 y_{18} x_3^{-2} + (r_3 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{18}^2 x_4^{-2} - y_{18}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{18} + 2y_4 y_{18} x_4^{-2} + (r_4 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{18}^2 x_5^{-2} - y_{18}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{18} + 2y_5 y_{18} x_5^{-2} + (r_5 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{18}^2 x_6^{-2} - y_{18}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{18} + 2y_6 y_{18} x_6^{-2} + (r_6 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{18}^2 x_7^{-2} - y_{18}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{18} + 2y_7 y_{18} x_7^{-2} + (r_7 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{18}^2 x_8^{-2} - y_{18}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{18} + 2y_8 y_{18} x_8^{-2} + (r_8 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{18}^2 x_9^{-2} - y_{18}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{18} + 2y_9 y_{18} x_9^{-2} + (r_9 + r_{18} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{18}^2 x_{10}^{-2} - y_{18}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{18} + 2y_{10} y_{18} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{18}^2 x_{11}^{-2} - y_{18}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{18} + 2y_{11} y_{18} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{18}^2 x_{12}^{-2} - y_{18}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{18} + 2y_{12} y_{18} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{13}^2 x_{13}^{-2} - x_{18}^2 x_{13}^{-2} - y_{18}^2 x_{13}^{-2} + 2x_{13}^{-1} x_{18} + 2y_{13} y_{18} x_{13}^{-2} + (r_{13} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{13}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{14}^2 x_{14}^{-2} - x_{18}^2 x_{14}^{-2} - y_{18}^2 x_{14}^{-2} + 2x_{14}^{-1} x_{18} + 2y_{14} y_{18} x_{14}^{-2} + (r_{14} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{14}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{15}^2 x_{15}^{-2} - x_{18}^2 x_{15}^{-2} - y_{18}^2 x_{15}^{-2} + 2x_{15}^{-1} x_{18} + 2y_{15} y_{18} x_{15}^{-2} + (r_{15} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{15}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{16}^2 x_{16}^{-2} - x_{18}^2 x_{16}^{-2} - y_{18}^2 x_{16}^{-2} + 2x_{16}^{-1} x_{18} + 2y_{16} y_{18} x_{16}^{-2} + (r_{16} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{16}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{17}^2 x_{17}^{-2} - x_{18}^2 x_{17}^{-2} - y_{18}^2 x_{17}^{-2} + 2x_{17}^{-1} x_{18} + 2y_{17} y_{18} x_{17}^{-2} + (r_{17} + r_{18} + \varepsilon)^2 x_{17}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{19}^2 x_1^{-2} - y_{19}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{19} + 2y_1 y_{19} x_1^{-2} + (r_1 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{19}^2 x_2^{-2} - y_{19}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{19} + 2y_2 y_{19} x_1^{-2} + (r_2 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{19}^2 x_3^{-2} - y_{19}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{19} + 2y_3 y_{19} x_3^{-2} + (r_3 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{19}^2 x_4^{-2} - y_{19}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{19} + 2y_4 y_{19} x_4^{-2} + (r_4 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{19}^2 x_5^{-2} - y_{19}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{19} + 2y_5 y_{19} x_5^{-2} + (r_5 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{19}^2 x_6^{-2} - y_{19}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{19} + 2y_6 y_{19} x_6^{-2} + (r_6 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{19}^2 x_7^{-2} - y_{19}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{19} + 2y_7 y_{19} x_7^{-2} + (r_7 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{19}^2 x_8^{-2} - y_{19}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{19} + 2y_8 y_{19} x_8^{-2} + (r_8 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{19}^2 x_9^{-2} - y_{19}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{19} + 2y_9 y_{19} x_9^{-2} + (r_9 + r_{19} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{19}^2 x_{10}^{-2} - y_{19}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{19} + 2y_{10} y_{19} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{19}^2 x_{11}^{-2} - y_{19}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{19} + 2y_{11} y_{19} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{19}^2 x_{12}^{-2} - y_{19}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{19} + 2y_{12} y_{19} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{13}^2 x_{13}^{-2} - x_{19}^2 x_{13}^{-2} - y_{19}^2 x_{13}^{-2} + 2x_{13}^{-1} x_{19} + 2y_{13} y_{19} x_{13}^{-2} + (r_{13} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{13}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{14}^2 x_{14}^{-2} - x_{19}^2 x_{14}^{-2} - y_{19}^2 x_{14}^{-2} + 2x_{14}^{-1} x_{19} + 2y_{14} y_{19} x_{14}^{-2} + (r_{14} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{14}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{15}^2 x_{15}^{-2} - x_{19}^2 x_{15}^{-2} - y_{19}^2 x_{15}^{-2} + 2x_{15}^{-1} x_{19} + 2y_{15} y_{19} x_{15}^{-2} + (r_{15} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{15}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{16}^2 x_{16}^{-2} - x_{19}^2 x_{16}^{-2} - y_{19}^2 x_{16}^{-2} + 2x_{16}^{-1} x_{19} + 2y_{16} y_{19} x_{16}^{-2} + (r_{16} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{16}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{17}^2 x_{17}^{-2} - x_{19}^2 x_{17}^{-2} - y_{19}^2 x_{17}^{-2} + 2x_{17}^{-1} x_{19} + 2y_{17} y_{19} x_{17}^{-2} + (r_{17} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{17}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{18}^2 x_{18}^{-2} - x_{19}^2 x_{18}^{-2} - y_{19}^2 x_{18}^{-2} + 2x_{18}^{-1} x_{19} + 2y_{18} y_{19} x_{18}^{-2} + (r_{18} + r_{19} + \varepsilon)^2 x_{18}^{-2} \leq 1 \\
& -y_1^2 x_1^{-2} - x_{20}^2 x_1^{-2} - y_{20}^2 x_1^{-2} + 2x_1^{-1} x_{20} + 2y_1 y_{20} x_1^{-2} + (r_1 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_1^{-2} \leq 1 \\
& -y_2^2 x_2^{-2} - x_{20}^2 x_2^{-2} - y_{20}^2 x_2^{-2} + 2x_2^{-1} x_{20} + 2y_2 y_{20} x_2^{-2} + (r_2 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_2^{-2} \leq 1 \\
& -y_3^2 x_3^{-2} - x_{20}^2 x_3^{-2} - y_{20}^2 x_3^{-2} + 2x_3^{-1} x_{20} + 2y_3 y_{20} x_3^{-2} + (r_3 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_3^{-2} \leq 1 \\
& -y_4^2 x_4^{-2} - x_{20}^2 x_4^{-2} - y_{20}^2 x_4^{-2} + 2x_4^{-1} x_{20} + 2y_4 y_{20} x_4^{-2} + (r_4 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_4^{-2} \leq 1 \\
& -y_5^2 x_5^{-2} - x_{20}^2 x_5^{-2} - y_{20}^2 x_5^{-2} + 2x_5^{-1} x_{20} + 2y_5 y_{20} x_5^{-2} + (r_5 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_5^{-2} \leq 1 \\
& -y_6^2 x_6^{-2} - x_{20}^2 x_6^{-2} - y_{20}^2 x_6^{-2} + 2x_6^{-1} x_{20} + 2y_6 y_{20} x_6^{-2} + (r_6 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_6^{-2} \leq 1 \\
& -y_7^2 x_7^{-2} - x_{20}^2 x_7^{-2} - y_{20}^2 x_7^{-2} + 2x_7^{-1} x_{20} + 2y_7 y_{20} x_7^{-2} + (r_7 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_7^{-2} \leq 1 \\
& -y_8^2 x_8^{-2} - x_{20}^2 x_8^{-2} - y_{20}^2 x_8^{-2} + 2x_8^{-1} x_{20} + 2y_8 y_{20} x_8^{-2} + (r_8 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_8^{-2} \leq 1 \\
& -y_9^2 x_9^{-2} - x_{20}^2 x_9^{-2} - y_{20}^2 x_9^{-2} + 2x_9^{-1} x_{20} + 2y_9 y_{20} x_9^{-2} + (r_9 + r_{20} + \varepsilon)^2 x_9^{-2} \leq 1 \\
& -y_{10}^2 x_{10}^{-2} - x_{20}^2 x_{10}^{-2} - y_{20}^2 x_{10}^{-2} + 2x_{10}^{-1} x_{20} + 2y_{10} y_{20} x_{10}^{-2} + (r_{10} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{10}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{11}^2 x_{11}^{-2} - x_{20}^2 x_{11}^{-2} - y_{20}^2 x_{11}^{-2} + 2x_{11}^{-1} x_{20} + 2y_{11} y_{20} x_{11}^{-2} + (r_{11} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{11}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{12}^2 x_{12}^{-2} - x_{20}^2 x_{12}^{-2} - y_{20}^2 x_{12}^{-2} + 2x_{12}^{-1} x_{20} + 2y_{12} y_{20} x_{12}^{-2} + (r_{12} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{12}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{13}^2 x_{13}^{-2} - x_{20}^2 x_{13}^{-2} - y_{20}^2 x_{13}^{-2} + 2x_{13}^{-1} x_{20} + 2y_{13} y_{20} x_{13}^{-2} + (r_{13} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{13}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{14}^2 x_{14}^{-2} - x_{20}^2 x_{14}^{-2} - y_{20}^2 x_{14}^{-2} + 2x_{14}^{-1} x_{20} + 2y_{14} y_{20} x_{14}^{-2} + (r_{14} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{14}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{15}^2 x_{15}^{-2} - x_{20}^2 x_{15}^{-2} - y_{20}^2 x_{15}^{-2} + 2x_{15}^{-1} x_{20} + 2y_{15} y_{20} x_{15}^{-2} + (r_{15} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{15}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{16}^2 x_{16}^{-2} - x_{20}^2 x_{16}^{-2} - y_{20}^2 x_{16}^{-2} + 2x_{16}^{-1} x_{20} + 2y_{16} y_{20} x_{16}^{-2} + (r_{16} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{16}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{17}^2 x_{17}^{-2} - x_{20}^2 x_{17}^{-2} - y_{20}^2 x_{17}^{-2} + 2x_{17}^{-1} x_{20} + 2y_{17} y_{20} x_{17}^{-2} + (r_{17} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{17}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{18}^2 x_{18}^{-2} - x_{20}^2 x_{18}^{-2} - y_{20}^2 x_{18}^{-2} + 2x_{18}^{-1} x_{20} + 2y_{18} y_{20} x_{18}^{-2} + (r_{18} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{18}^{-2} \leq 1 \\
& -y_{19}^2 x_{19}^{-2} - x_{20}^2 x_{19}^{-2} - y_{20}^2 x_{19}^{-2} + 2x_{19}^{-1} x_{20} + 2y_{19} y_{20} x_{19}^{-2} + (r_{19} + r_{20} + \varepsilon)^2 x_{19}^{-2} \leq 1
\end{aligned}$$

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O planejamento de um arranjo físico (layout) de uma dada instalação significa tomar decisões sobre a forma de como serão dispostos os seus centros de trabalho onde o projeto deste layout deve identificar a localização das instalações de forma que mitigue processos que não fornecem valor as atividades operacionais.

Esta dissertação buscou a otimização de um problema de arranjo físico formulando-o como um problema de programação geométrica signomial e resolvendo-o por meio de funções representáveis como a diferença entre funções convexas na sua forma padrão.

Estudou-se um problema de arranjo físico, descreveu-se sua resolução e desenvolveu-se um algoritmo para resolver o problema. É importante ressaltar que este algoritmo deve ser implementado e testado com vistas a interpretar os números e tomar análise dos dados obtidos frente às instâncias existentes na literatura para saber como o algoritmo se porta, e isto pode ser realizado em trabalhos futuros.

Referências

- AFONSO, R. **Cálculo do raio espectral de matrizes positivas e medida de Gibbs**. 2013. 89 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.
- ALEISA, E.; LIN, L. For effectiveness facilities planning: layout optimization then simulation, or vice versa? **Proceedings...** Winter Simulation Conference, 2005.
- ALMEIDA, S. S. **Otimização de layout de plantas químicas utilizando o problema de designação quadrática**. 2008. 167 f. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Química, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.
- AROSTEGUI JR., M.; KADIPASAOGLU, S.; KHUMAWALA, B. An empirical comparison of tabu search, simulated annealing, and genetic Algorithms for facilities location problems, **The International Journal of Production Economics**, p. 742–754, 2006.
- ASKIN, R. G.; STANDRIDGE, C. R. **Modelling and Analysis of Manufacturing Systems**. Wiley, New York, 1993.
- BAZARAA, M.; SHERALI, H.; SHETTY, C. **Nonlinear programming: theory and algorithms**. 2. ed. John Wiley & Sons, 1993.
- BEIGHTLER, C.; PHILLIPS, D. **Applied geometric programming**. John Wiley & Sons, 1976.
- BENJAFAR, S.; HERAGU, S. S.; IRANI, S. A. Next generation factory layouts: research challenges and recent progress. **Interfaces**, v. 32, n. 6, p. 58-76, 2002.
- BERTRAND, J.; FRANCO, J. Operations management research methodologies using quantitative modeling, **International Journal of Operations & Production**, v. 22, n. 2, p. 241-264, 2002.
- BOYD, S. et al. A tutorial on geometric programming. **Optimization and Engineering**, v. 8, n. 1, p. 67-127, 2007.
- BUFFA, E. S.; ARMOUR, G. C.; VOLLMAN, T. E. A locating facilities with CRAFT. **Harvard Business Review**, v. 42, n. 2, 1964.
- CAMAROTTO, J. A. **Estudo das relações entre o projeto de edifícios industriais e a gestão da produção**. 1998. 264 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998.
- CASTELLANOS, J. **Projeto de uma fonte de tensão de referência CMOS usando programação geométrica**. 2010. 78 f. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

CHEN, G. A new data structure of solution representation in hybrid ant colony Optimization for large dynamic facility layout problems. **The International Journal of Production Economics**, p. 362–371, 2013.

CHEN, T-C.; CHANG, Y-W. Modern floorplanning based on b*-tree and fast simulated annealing. **IEEE Transactions on Computer-Aided Design**, v. 25, n. 4, p. 637-350, 2006.

COHOON, et al. Distributed genetic algorithms for the floorplan design problem. **IEEE Transactions on Computer-Aided Design**, v. 10, n. 4, 1991.

DÍAZ, J.; PETIT, J.; SERNA, M. A survey of graph layout problems. **ACM Computing Surveys**, v. 34, n. 3, p. 313-356, 2002.

DOMSCHKE, W.; KRISPIN, G. Location and layout planning: a survey. **OR Spektrum**, p. 181-194, 1997.

DRIRA, A.; PIERREVAL, H.; HAJRI-GABOUJ, S. Facility layout problems: a survey. **Annual Reviews in Control**, v. 31, n. 2, p. 255–267, 2007.

DUFFIN, R.; PETERSON, E. Geometric programming with signomials. **Journal of Optimization Theory And Applications**, v. 1, n. 1, 1973.

DUFFIN, R.; PETERSON, E.; ZENER, C. **Geometric programming: theory and applications**. John Wiley & Sons, 1967.

FERNANDES, M. P. **Otimização por funções representáveis como a diferença entre funções convexas com aplicação em um problema de arranjo físico**. 2012. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

GAREY, M.; JOHNSON, D. **Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness**. New York: WH Freeman, 1979.

GEN, M.; LIN, L.; ZHANG, H. Evolutionary techniques for optimization problems in integrated manufacturing system: state-of-the-art-survey. **Computers & Industrial Engineering**, v. 56, n. 3, p. 779–808, 2009.

GIL, A. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HARTMAN, P. On functions representable as a difference of convex functions. **Pacific Journal of Mathematics**, v.9, p.707-713, 1959.

HASSAN, M.; HOGG, G. A review of graph theory application to the facilities layout problem. **Omega**, v. 15, n. 4, p. 291-300, 1987.

HERAGU, S. Recent models and techniques for solving the layout problem. **European Journal of Operational Research**, p. 136-144, 1992.

- HICKS, C. Genetic Algorithm tool for optimising cellular or functional layouts in the capital goods industry, **Int. J. Production Economics**, p. 598–614, 2006.
- HINCAPIE, J. **Aplicação da programação geométrica no projeto de filtros Gm-C para receptores RF CMOS**. 2010. 135 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos, São Paulo, 2010.
- HORST, R.; THOAI, N.V. DC programming: overview. **Journal of Optimization Theory and applications**, v.103, 1999.
- HORST, R.; PARDALOS, P.; THOAI, N. **Introduction to global optimization**. 2.ed. Kluwer Academic publishers: Dordrecht, Boston, London, 2000.
- HOU, X-P.; SHEN, P-P.; CHEN, Y-Q. A global optimization algorithm for signomial geometric programming problem. **Abstract and Applied Analysis**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.
- JULTUREL-KONAK, S. A linear programming embedded probabilistic tabu search for the unequal-area facility layout problem with flexible bays. **European Journal of Operational Research**, p. 614–625, 2012.
- KOUVELIS, P.; CHIANG, W-C.; KIRAN, A. A survey of layout issues in flexible manufacturing systems. **Omega**, v. 20, n. 3, p. 375-390, 1992.
- KUSIAK, A.; HERAGU, S. Efficient models for the facility layout problem. **European Journal of Operational Research**, p. 1-13, 1991.
- KUSIAK, A.; HERAGU, S. The facility layout problem. **European Journal of Operational Research**, p. 229-251, 1987.
- LANGE, K.; ZHOU, H. MM algorithms for geometric and signomial programming. **Mathematical Programming**, v. 143, n. 1-2, p. 339-356, 2014.
- LEDUR, M. **Dimensionamento de portas lógicas através de programação geométrica**. 2009. 48 f. Monografia. Curso de Engenharia de Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- LEVARY, R.; KALCHIK, S. Facilities layout: a survey of solution procedures. **Computer & Industrial Engineering**, v. 9, n. 2, p 141-148, 1985.
- LIM, S. K. **Practical problems in VLSI physical design automation**. 1.ed. Springer Netherlands, 2008.
- LIMA JÚNIOR, F. A. **Otimização e reprojeto de layout através da sistemática de planejamento com base teórica: um estudo de caso**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso), Departamento de Engenharia de Produção, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2008.

- LIN, M-H.; TSAI, J-F. Range reduction techniques for improving computational efficiency in global optimization of signomial geometric programming problems. **European Journal of Operational Research**, v. 216, n. 1, p. 17-25, 2012.
- LIU, S-Y.; WANG, C-F.; LIU, L-X. A New Global Optimization Algorithm for Solving Generalized Geometric Programming. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Publishing Corporation, v. 2010, 2010.
- MELLER, R.; GAU, K-Y. The facility layout problem: recente and emergin trends and perspectives. **Journal of Manufacturing Systems**, v. 15, n. 5, 1996.
- MOH, T-S.; CHANG, T-S.; HAKIMI, S. Globally optimal floorplanning for a layout problem. *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, v. 43, n. 9, p. 713 – 720, 1996.
- MORABITO, R.; PUREZA, V. Modelagem e simulação. In: CAUCHICK MIGUEL, P. A. (coord.). **Pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010. p. 164-194.
- MOREIRA, D. A. **Administração da produção e operações**. 2.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- MORETTI, N. **Manual de metodologia científica**: como elaborar trabalhos acadêmicos. União de Ensino Superior de Cafelândia, [s.n.], 2008.
- NESTEROV, Y.; NEMIROVSKY, A. Interior-point polynomial methods in convex programming. **Studies in Applied Mathematics**, v. 13, 1994.
- OLIVÉRIO, J. L. **Projeto de fábrica: produtos, processos e instalações industriais**. São Paulo: IBCL, 1985.
- PAN, P.; LIU, C. L. Area minimization for floorplans. **IEEE Journals & Magazines, Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems**, IEEE Transactions on, v. 14, n. 1, p. 123-132, 1995.
- PEINADO, J.; GRAEMAL, A. R. **Administração da produção: operações industriais e de serviços**. Curitiba: UnicenP, 2007.
- POSSER, G. et al. Gate sizing using geometric programming. **Analog Integrated Circuits and Signal Processing**, v. 73, n. 3, p. 831 840, 2012.
- RAMAN, D.; NAGALINGAM, S. V.; LIN, G. C. I. Towards measuring the effectiveness of a facilities layout. **Robotics and Computer-Integrated Manufacturing**, v. 25, n. 1, p. 191-203, 2009.
- SADRZADEH, A. A genetic algorithm with the heuristic procedure to solve the multi-line layout problem. **Computers & Industrial Engineering**, p. 1055–1064, 2012.
- SAHIN, R. A simulated annealing algorithm for solving the bi-objective facility layout problem. **Expert Systems with Applications**, p. 4460–4465, 2011.

- SHEN, P.; LI, X. Branch-reduction-bound algorithm for generalized geometric programming. **Journal of Global Optimization**, v. 56, n. 3, p. 1123-1142, 2013.
- SINGH, S.; SHARMA, R. A review of different approaches to the facility layout problems, **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, p. 425–433, 2006.
- SLACK, N.; CHAMBERS, S.; JOHNSTON, R. **Administração da produção**. 3.ed. São Paulo: Atlas, 2009.
- TIKHONOV, A.N. On a reciprocity principle. **Sov. Math.**, v.22, p.100-103, 1980.
- THOAI, N.V. On Tikhonov's reciprocity principle and optimality conditions in DC optimization. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v.225, n.2, p.673-678, 1998.
- TOMPKINS, J. et al. **Facilities planning**. 2.ed. John Wiley. New York, 1996.
- TOSCANO, R.; AMOURI, S. Some heuristic approaches for solving extended geometric programming problems. **Engineering Optimization**, v. 44, n. 12,1425–1446, 2012.
- TREIN, F. A. **Análise e melhoria de layout de processo na indústria de beneficiamento de couro**. 2001. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- TSENG, C-L. et al. A MILP formulation for generalized geometric programming using piecewise-linear approximations. **European Journal of Operational Research**, v. 239, n. 3, 2015.
- VALENZUELA, C. L.; WANG, P. Y. VLSI placement and area optimization using a genetic algorithm to breed normalized postfix expressions. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 6, n. 4, p. 390-401, 2002.
- VAVASIS, S. Complexity issues in global optimization: a survey, Handbook of Global Optimization Problems, **Nonconvex Optimization and Its Applications**, v. 2, p. 27-41, 1995.
- WIMER, S.; KOREN, I.; CEDERBAUM, I. Floorplans, planar graphs, and layouts. **IEEE Transactions on Circuits and Systems**, v. 35, n. 3, p. 267-278, 1988.
- WONG, D. F.; LIU, C. L. Floorplan design of vlsi circuits. **Algorithmica**, n. 4, p. 263-291, 1989.
- XU, G. Global optimization of signomial geometric programming problems. **European Journal of Operational Research**, p. 500–510, 2014.
- YAO et al. Floorplan Representations: Complexity

and Connections. **ACM Transactions on Design Automation of Electronic Systems**, v. 8, n. 1, p. 55–80, 2003.

ZENER, C. A mathematical aid in optimizing engineering desing. **Proceedings of the National Academy of the United States of America**, v. 47, n. 4, p. 537-539, 1961.