Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

# Uma Introdução a Álgebras de Banach e C*-álgebras

Geilson Ferreira Germano

**João Pessoa – PB**
**Março de 2014**

**Universidade Federal da Paraíba**
**Centro de Ciências Exatas e da Natureza**
**Programa de Pós–Graduação em Matemática**
**Mestrado em Matemática**

# Uma Introdução a Álgebras de Banach e C*-álgebras

**por**

**Geilson Ferreira Germano**

**sob a orientação do**

**Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino**

**João Pessoa – PB**
**Março de 2014**

G373u Germano, Geilson Ferreira.
Uma introdução a álgebras de Banach e C*-álgebras / Geilson Ferreira Germano.- João Pessoa, 2014.
128f.
Orientador: Daniel Marinho Pellegrino
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN
1. Matemática. 2. Álgebras de Banach. 3. C*-álgebras. 4. Teorema de Gelfand-Naimark. 5. Construção GNS. 6. Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko.

UFPB/BC CDU: 51(043)

# Uma Introdução a Álgebras de Banach e C*-álgebras

por

Geilson Ferreira Germano

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 20 de Março de 2014.

Banca Examinadora:

Daniel M. Pellegrino

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB

(Orientador)

Prof. Dr. Geraldo Márcio De Azevedo Botelho – UFU

(Examinador Externo)

Prof. Dr. Everaldo Souto De Medeiros – UFPB

(Examinador Interno)

*"O infinito é, realmente, um dos deuses mais lindos!"*
*(Renato Russo, Dado Villa-Lobos)*

*"Ainda que eu tenha o dom de profetizar e conheça todos os mistérios e toda a ciência; ainda que eu tenha tamanha fé, a ponto de transportar montes, se não tiver amor, nada serei"*
*(1Co, 13.2)*

# Agradecimentos

Meus sinceros agradecimentos àquele que me possibilitou desenvolver todo este trabalho, fruto do amor plantado em minha alma por essa sublime ciência denominada Matemática, Deus.

Imensamente grato à maestria, inspiradora, de navegar em matemática pura do professor Ronaldo Freire de Lima.

Agradeço ao professor Rubens Leão de Andrade, por me transmitir a matemática com toda sua elegante sutileza. Agradeço à professora Viviane Simioli Medeiros Campos, pela motivação que ela me passa, ao exprimir seu amor pela sala de aula.

Agradeço aos meus pais, João Germano e Cícera Raimunda Ferreira Germano, e aos meus irmãos, Gerson Ferreira Germano e Gessiane Ferreira Germano, por se dedicarem na grande atividade de manter sempre a união reinando em família, na qual me ajudou muito como matemático e ser humano. Agradeço a minha avó, Luiza Ferreira Dias, pela sua capacidade de transmitir, em poucas palavras, o que é essencial na vida, tornando-se assim, uma grande avó.

Agradeço a Ronaldo César Duarte, pelo seu companheirismo, pela motivação em compartilhar o amor à matemática, e por ser a pessoa que sempre pude contar, àquele que provou verdadeiramente que "Todas as riquezas do mundo, não vale um bom amigo" (Voltaire).

Minha sincera gratidão ao professor Napoleón Caro Tuesta, pela sua dedicação aos alunos, e pelo incentivo recebido no tema desta dissertação.

Sinto-me fortemente grato a Dona Deta, por ser essa pessoa tão maravilhosa que ela é, incentivando-me a cada momento, para o objetivo real no curso da vida.

Presto agradecimentos também a Micarlla da Rocha Oliveira, na qual, devo à sua ajuda despretenciosa e incondicional, fruto de suas palavras de fé, enunciadas em momentos de dificuldades.

Agradeço aos professores integrantes da banca examinadora Geraldo Márcio de Azevedo Botelho e Everaldo Souto de Medeiros, por suas contribuições a este trabalho e disposição.

Grato ainda, ao Walter Rudin, por sua fantástica habilidade de passar a essência da matemática pura, através de símbolos grafados em um papel. Sua capacidade ilustre de escrever me auxiliou imensamente nesta dissertação.

Agradeço também ao meu orientador Daniel Marinho Pellegrino pelo seu auxílio no desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, grato a todos que me auxiliaram, de alguma forma, no desenvolvimento desta dissertação.

# Resumo

Nesta dissertação desenvolveremos um primeiro contato com a Teoria de Álgebras de Banach e C*-álgebras. Como típico de um primeiro contato, construiremos a Teoria Espectral em Álgebras de Banach com unidade. Apresentaremos os Teoremas de Caracterização de C*-álgebras de Gelfand-Naimark, e Gelfand-Naimark-Segal, incluindo a construção GNS. Além disso, provamos um teorema que caracteriza todos os homomorfismos complexos na C*-álgebra $C(X)$ como sendo homomorfismos de avaliação. Apresentaremos também, como curiosidade, uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra a partir do Teorema de Gelfand-Mazur. Como um pré-requisito à Caracterização de Gelfand-Naimark-Segal de C*-álgebras, desenvolvemos ainda, em segundo plano, a teoria da soma direta de uma família qualquer de espaços de Hilbert.

**Palavras-chave:** Álgebras de Banach, C*-álgebras, Teorema de Gelfand-Naimark, Construção GNS, Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko.

# Abstract

In this dissertation we develop a first contact with the theory of Banach Algebras and C*-algebras. As usual of a first contact, we build the Spectral Theory in Banach algebras with unit. We present the characterization theorems of C *-algebras of Gelfand-Naimark and Gelfand-Naimark-Segal, including the GNS construction. Moreover, we prove a theorem which characterizes all complex homomorphisms in the C*-algebra $C(X)$, as point-evaluation homomorphisms. We also present, as a curiosity, a proof of the Fundamental Theorem of Algebra using the Gelfand-Mazur Theorem. As a prerequisite to the Gelfand-Naimark-Segal's characterization of C *-algebras, we further develop, in the background, the theory of the direct sum of any family of Hilbert spaces.

**Keywords:** Banach Algebras, C*-algebras, Gelfand-Naimark Theorem, GNS Constrution, Gleason-Kahane-Zelazko Theorem.

# Sumário

# Introdução

Nesta dissertação trabalharemos com casos particulares de espaços vetoriais complexos. São as álgebras complexas, que nada mais são do que espaços vetoriais munidos com uma operação entre elementos do próprio espaço cumprindo certas propriedades. Em meio ao universo das álgebras complexas, definiremos as álgebras de Banach e as C*-álgebras, as quais serão, praticamente, o principal objeto de estudo desta dissertação, juntamente com o estudo dos homomorfismos complexos. Visamos abranger os principais resultados básicos, num primeiro contato com essa teoria.

Uma das grandes motivações para o estudo de álgebras de Banach é o estudo da Teoria Espectral, que se faz mais geral do que a Teoria Espectral dos operadores lineares contínuos sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Apesar da Teoria Espectral sobre operadores compactos de $B(\mathcal{H}) := \{T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}\ ;\ T \text{ é contínuo}\}$ ter suas peculiaridades, a Teoria Espectral sobre álgebras de Banach promove resultados bastante enriquecedores para a teoria. Uma outra grande motivação é o fato do estudo de C*-álgebras, que são casos particulares de Álgebras de Banach, possuir teoremas bastante sólidos e bastante trabalhados, como os Teoremas de Caracterização de Gelfand-Naimark, e o Teorema de Continuidade de Homomorfismo de Estruturas C*, isto é, homomorfismos que preservam todos objetos que definem uma C*-álgebra. Além disso, ao estudar assuntos específicos da Teoria das C*-álgebras, passaremos por teorias bastante elegantes e prazerosas, como, por exemplo, a teoria dos elementos positivos e funcionais positivos de uma C*-álgebra com unidade, necessária para o Teorema de Construção de Gelfand-Naimark-Segal (GNS).

Este material destina-se, principalmente, aos que possuem grande familiaridade com a Análise Funcional Clássica e algumas noções básicas de Topologia Geral. O conhecimento dos principais resultados da Análise Complexa, como o Teorema de Liouville, o Teorema do Módulo Máximo, entre outros, se torna de grande auxílio ao se estudar Álgebras de Banach e C*-álgebras. Porém, não possuir familiaridade com Análise Complexa não o impedirá de acompanhar a teoria, visto que quase todos os resultados de Análise Complexa são mencionados no Apêndice D. Podemos citar

[14] como uma ótima referência de Análise Complexa, a partir do Capítulo 10.

No Capítulo 1 faremos uso do Lema de Urysohn, que se encontra no Apêndice C desta dissertação. Na primeira parte veremos os resultados básicos para se dar início à Teoria de Álgebras de Banach, junto com os exemplos geralmente mais trabalhados. Em seguida, veremos uma introdução ao estudo dos homomorfismos complexos, os quais, em alguns materiais, são denominados funcionais lineares multiplicativos. Além disso, veremos ainda o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko, que notavelmente nos fornece uma condição para um funcional linear ser um homomorfismo complexo. Ainda no Capitulo 1, veremos uma seção destinada à Teoria Espectral em Álgebras de Banach que, como já dito antes, possui resultados bastante enriquecedores para a teoria, como o Teorema de Gelfand-Mazur, Teorema da Fórmula do Raio Espectral, e não podemos deixar de citar o Teorema do Mapeamento Espectral. Em [12], podemos ver o Teorema do Mapeamento Espectral abordado de maneira diferente desta dissertação. Ao final do Capítulo 1, veremos o clássico Teorema dos Subespaços Invariantes de Lomonosov como uma aplicação da Teoria Espectral.

No Capítulo 2 abordaremos o estudo das C*-álgebras. Introduziremos o Capítulo fazendo um breve estudo dos resultados inciais de C*-álgebras, junto a suas propriedades, além de apresentar os exemplos clássicos de C*-álgebras. Em seguida, faremos um breve estudo sobre o conceito de ideais, álgebras quocientes e projeção canônica. Estes conceitos serão de importância relevante para atingirmos os objetivos dos Teoremas de Caracterização de Gelfand-Naimark. Os Teoremas de Caracterização de Gelfand-Naimark caracterizarão inicialmente todas as C*-álgebras comutativas. Após estabelecer uma primeira caracterização, procederemos a teoria, no estudo dos elementos positivos e funcionais lineares positivos de uma C*-álgebra com unidade. Como resultado desse estudo, demonstraremos o Teorema de Construção de Gelfand-Naimark-Segal, conhecido frequentemente como construção GNS; este nos possibilitará provar que toda C*-álgebra é, a menos de isomorfismo isométrico, uma subestrutura da estrutura $B(\mathcal{H})$ vista como uma C*-álgebra, caracterizando assim todas as C*-álgebras. Aconselhamos o leitor, ao menos, ler o enunciado do Teorema de Stone-Weierstrass antes de iniciar a Seção 2.4, que se encontra no Apêndice D.

Já no Capítulo 3, destaca-se o teorema que caracteriza todos os homomorfismos complexos sobre as álgebras $C(X)$ e $C_0(X)$, definidas na dissertação. Este teorema nos indicará que qualquer homomorfismo complexo $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo de avaliação, isto é, existe $x \in X$ tal que

$$\begin{array}{rccl} \varphi_x & : & C_0(X) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & \varphi_x(f) = f(x). \end{array}$$

Através desta caracterização, provaremos em seguida que $C(X)$ ser isomorfo isometricamente a $C(Y)$ é condição suficiente para se ter $X$ homeomorfo a $Y$, quando $X$ e $Y$ são espaços compactos de Hausdorff, o que é um caso particular do Teorema de Banach-Stone. Isto finalizará o Capítulo.

Com o objetivo de convidar o leitor à teoria, de maneira acessível, obtendo emoção, entretenimento e familiaridade com o assunto, trazemos ao final de cada capítulo alguns exercícios, elaborados por mim com auxílio da teoria de [5] e [12], para que o assunto se torne motivador a cada instante. Acredito que alguns dos exercícios são bastante desafiadores. Outros exercícios, apesar de pouco desafiadores, atentam ao leitor importantes observações que o fixam na teoria. Toda lista de exercícios do material foi cuidadosamente trabalhada, para que cada exercício seja essencialmente prazeroso e proveitoso. Sintam-se extremamente a vontade para estabelecer contato eletrônico (e-mail) junto a mim, com o objetivo de discutir e comentar qualquer dos exercícios, inclusive pedir resoluções de exercícios.

Ao final da dissertação traremos alguns apêndices. Apesar de podermos encontrar várias aplicações do Teorema de Gelfand-Mazur, no Apêndice A traremos, com a abordagem de [1], uma aplicação bastante curiosa desse teorema. Através deste, provaremos o Clássico Teorema Fundamental da Álgebra, evidenciando, dessa maneira, a eficiência de um teorema tão objetivo e simples, como o Teorema de Gelfand-Mazur. Já no Apêndice B, fazemos a divertida construção de soma direta de uma família qualquer de espaços de Hilbert em meio à escassez, nos materiais, da construção feita em todos os seus devidos detalhes. Em [4], no resultado IV.4.19, podemos encontrar um pouco da ideia do principal resultado demonstrado no Apêndice, o qual demonstra que a soma direta de espaços de Hilbert é, sob determinadas operações e produto interno, um espaço de Hilbert. Não podemos deixar de alertar o leitor, mais uma vez, quanto à necessidade de se entender a noção de soma direta de uma família de espaços de Hilbert, para compreender fielmente a demonstração do Teorema de Caracterização de C*-álgebras do Capítulo 2. No Apêndice C, veremos uma versão do Lema de Urysohn para espaços localmente compactos, a partir da versão clássica do Lema de Urysohn para espaços normais, isto é, demonstraremos aquele a partir deste. E finalmente, no Apêndice D, podemos citar alguns resultados clássicos e usados em toda dissertação.

Não podemos deixar de mencionar ao leitor a importância das referências [5] e [12] nos Capítulos 1 e 2, as quais deram uma grande direção para grande parte desta dissertação.

# Capítulo 1

# Álgebras de Banach

## 1.1 Definições e resultados iniciais

Seja $\mathcal{A}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ e suponha que exista uma operação $\cdot$ que associa cada elemento $(x, y)$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ a um elemento $x \cdot y$ de $\mathcal{A}$ satisfazendo

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$
$$z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y,$$
$$\lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y),$$

para quaisquer $x, y, z \in \mathcal{A}$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Então o espaço vetorial $\mathcal{A}$ munido com tal operação $\cdot$ é dito uma **álgebra** sobre $\mathbb{C}$ ou uma **álgebra complexa**.

Comumente utilizaremos a notação $(\mathcal{A}, \cdot)$ para nos referir à álgebra sobre $\mathbb{C}$ em questão. Diremos que a álgebra complexa $\mathcal{A}$ possui unidade $e \in \mathcal{A}$ quando

$$e \cdot x = x \cdot e = x,$$

para qualquer $x \in \mathcal{A}$. Em uma álgebra com unidade, diremos que $x \in \mathcal{A}$ é invertível se existir $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e,$$

e neste caso $x^{-1}$ é dito ser o elemento inverso de $x$. Facilmente provamos que qualquer elemento da álgebra só poderá ter no máximo um elemento inverso. De maneira algébrica, observem que o espaço vetorial $\mathcal{A}$ com a nova operação $\cdot$ torna o conjunto $\mathcal{A}$ também um anel com as operações $+$ e $\cdot$. A operação $\cdot$ será comumente chamada de multiplicação da álgebra.

**Definição 1.1.1.** Seja $(\mathcal{A}, \cdot)$ uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Se $||.|| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ é uma norma no espaço vetorial $\mathcal{A}$ satisfazendo

(i) $||x \cdot y|| \leq ||x|| \cdot ||y||$,

(ii) Se a álgebra possui unidade $e$ então $||e|| = 1$,

então diremos que $||.||$ é uma norma na álgebra $\mathcal{A}$ e, neste caso, o par $(\mathcal{A}, ||.||)$ será mencionado como álgebra normada. Diremos ainda que $(\mathcal{A}, ||.||)$ é uma álgebra de Banach quando for um espaço de Banach como espaço vetorial normado.

**Observação** 1.1.2. Note que em uma álgebra normada temos a multiplicação $\cdot$ contínua, pois, para quaisquer $a, b, a_0, b_0 \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} ||ab - a_0b_0|| &= ||ab - ab_0 + ab_0 - a_0b_0|| \\ &\leq ||a \cdot (b - b_0)|| + ||(a - a_0) \cdot b_0|| \\ &\leq ||a|| \cdot ||b - b_0|| + ||a - a_0|| \cdot ||b_0||. \end{aligned}$$

Em particular, a multiplicação é **contínua pela esquerda** e **contínua pela direita**; isto significa respectivamente que

$$x_n \cdot y \to x \cdot y \;\text{ sempre que }\; x_n \to x$$

e

$$x \cdot y_n \to x \cdot y \;\text{ sempre que }\; y_n \to y.$$

**Teorema 1.1.3.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa não nula com unidade e que seja um espaço de Banach com a norma $||.||$, cuja multiplicação é contínua pela esquerda e pela direita. Então existe uma norma $||.||_0$ na álgebra $\mathcal{A}$ que é equivalente a $||.||$.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa com unidade $e \in \mathcal{A}$ e $||.|| : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ uma norma no espaço vetorial $\mathcal{A}$ tal que $(\mathcal{A}, ||.||)$ seja um espaço de Banach e $\cdot$ contínua separadamente pela direita e pela esquerda. Para cada $x \in \mathcal{A}$, defina

$$\begin{array}{rccc} T_x : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & y & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

e, notando que $T_x \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$, definamos ainda

$$||x||_0 := ||T_x||.$$

Note primeiramente que

$$T_{x+y} = T_x + T_y, \qquad T_{x\cdot y} = T_x \circ T_y, \qquad T_{\lambda x} = \lambda T_x,$$

para todos $x, y \in \mathcal{A}$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Além do mais, $T_e$ é a transformação identidade, portanto não é difícil provar que $||.||_0$ é, de fato, uma norma na álgebra $\mathcal{A}$. Então resta-nos provar agora que $||.||_0$ é uma norma que torna a álgebra $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Note primeiro que, para qualquer $x \in \mathcal{A}$, temos

$$||x||_0 = \sup_{||y||\leq 1} ||x\cdot y|| \geq \left|\left| x \cdot \frac{e}{||e||} \right|\right| = \frac{||x||}{||e||},$$

ou seja,

$$||x||_0 \cdot ||e|| \geq ||x||. \tag{1.1}$$

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{A}, ||.||_0)$. Note que, pela desigualdade (1.1), a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $(\mathcal{A}, ||.||)$, e como $(\mathcal{A}, ||.||)$ é um espaço de Banach, existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $x_n \overset{||.||}{\to} x$. Por outro lado, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, temos

$$||T_{x_n} - T_{x_m}|| = ||T_{x_n - x_m}|| = ||x_n - x_m||_0,$$

mostrando que $(T_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ e, notando que $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ é um espaço de Banach, existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ tal que

$$T_{x_n} \to T. \tag{1.2}$$

Provemos por fim que $T = T_x$. Fixado $y \in \mathcal{A}$ temos, por (1.2) e por hipótese da continuidade pela esquerda da multiplicação,

$$T_{x_n}(y) \to T(y) \qquad \text{e} \qquad x_n \cdot y \to x \cdot y$$

em $\mathcal{A}$, sabendo que $T_{x_n}(y) = x_n \cdot y$ e pela unicidade do limite obtemos $T_x(y) = T(y)$. Como $y \in \mathcal{A}$ foi qualquer, temos $T_x = T$ e portanto $||T_{x_n} - T_x|| \to 0$, ou seja,

$$||x_n - x||_0 \to 0.$$

Assim $(\mathcal{A}, ||.||_0)$ é uma álgebra de Banach. Note que por (1.1), o Teorema da Aplicação Aberta e o fato de $(\mathcal{A}, ||.||)$ e $(\mathcal{A}, ||.||_0)$ serem espaços de Banach, segue que $||.||_0$ é equivalente a $||.||$.

■

**Teorema 1.1.4.** *Toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ está contida em uma álgebra de Banach $\widehat{\mathcal{A}}$ com unidade, onde $\mathcal{A}$ herda as operações e a norma de $\widehat{\mathcal{A}}$. Mais ainda, $x \cdot \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ para qualquer elemento $x \in \widehat{\mathcal{A}}$.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Notando que $\widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de maneira natural, defina em $\widehat{\mathcal{A}}$ a operação

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (a \cdot b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).$$

Esta operação torna $\widehat{\mathcal{A}}$ uma álgebra complexa com unidade $e = (0, 1)$. De fato, dados $(a, \lambda), (b, \mu), (c, \theta) \in \widehat{\mathcal{A}}$, temos

$$\begin{aligned}
((a, \lambda) \cdot (b, \mu)) \cdot (c, \theta) &= (a \cdot b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) \cdot (c, \theta) \\
&= ((a \cdot b + \lambda b + \mu a) \cdot c + \lambda\mu c + \theta(a \cdot b + \lambda b + \mu a), \lambda\mu\theta) \\
&= (a \cdot b \cdot c + \lambda b \cdot c + \mu a \cdot c + \theta a \cdot b + \mu\theta a + \lambda\theta b + \lambda\theta b + \\
&\quad + \lambda\mu c, \lambda\mu\theta) \\
&= (a \cdot (b \cdot c + \theta b + \mu c) + \mu\theta a + \lambda(b \cdot c + \theta b + \mu c), \lambda\mu\theta) \\
&= (a, \lambda) \cdot (b \cdot c + \theta b + \mu c, \mu\theta) \\
&= (a, \lambda) \cdot ((b, \mu) \cdot (c, \theta)),
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned}
(a, \lambda) \cdot ((b, \mu) + (c, \theta)) &= (a, \lambda) \cdot (b + c, \mu + \theta) \\
&= (a \cdot (b + c) + \lambda(b + c) + (\mu + \theta)a, \lambda(\mu + \theta)) \\
&= (a \cdot b + a \cdot c + \lambda b + \lambda c + \mu a + \theta a, \lambda\mu + \lambda\theta) \\
&= (a \cdot b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu) + (a \cdot c + \lambda c + \theta a, \lambda\theta) \\
&= ((a, \lambda) \cdot (b, \mu)) + ((a, \lambda) \cdot (c, \theta))
\end{aligned}$$

analogamente

$$((a, \lambda) + (b, \mu)) \cdot (c, \theta) = ((a, \lambda) \cdot (c, \theta)) + ((b, \mu) \cdot (c, \theta))$$

e, sem dificuldades, provamos também que

$$\theta((a, \lambda) \cdot (b, \mu)) = (\theta(a, \lambda)) \cdot (b, \mu) = (a, \lambda) \cdot (\theta(b, \mu)).$$

Note ainda que podemos identificar $\mathcal{A}$ com o conjunto $\{(a, 0) \in \widehat{\mathcal{A}}\ ;\ a \in \mathcal{A}\}$ preservando todas as operações. Podemos ainda definir a seguinte norma em $\widehat{\mathcal{A}}$:

$$||(a, \lambda)|| = ||a|| + |\lambda|,$$

notando que $||(a,0)|| = ||a||$, e observando também que $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma álgebra de Banach com a norma definida acima. De fato, se $((a_n,\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\widehat{\mathcal{A}}$, temos

$$||a_n - a_m|| \leq ||(a_n,\lambda_n) - (a_m,\lambda_m)||,$$

e então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{A}$ e converge para algum $a \in \mathcal{A}$. De maneira análoga $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{C}$ e converge para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, pela definição da norma em $\widehat{\mathcal{A}}$, temos

$$||(a_n,\lambda_n) - (a,\lambda)|| = ||a_n - a|| + |\lambda_n - \lambda|$$

concluindo que $((a_n,\lambda_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(a,\lambda)$. Logo, $\mathcal{A}$ está contido na álgebra de Banach $\widehat{\mathcal{A}}$ com unidade. Além disso, se $(a,\lambda),(b,0) \in \widehat{\mathcal{A}}$ então

$$(a,\lambda)\cdot(b,0) = (a\cdot b + \lambda b, 0)$$

que está em $\{(a,0) \in \widehat{\mathcal{A}}; a \in \mathcal{A}\}$ que é a identificação com $\mathcal{A}$.

■

Relembremos que se $X$ é um espaço topológico e $E$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, então podemos definir

$$C_b(X,E) = \{f : X \to E \ ; \ f \text{ é contínua e limitada}\},$$

onde $f : X \to E$ ser limitada significa que $f(X) \subset E$ é um conjunto limitado. Assim podemos definir operações de maneira natural que tornam $C_b(X,E)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Podemos ainda definir uma norma em $C_b(X,E)$ por

$$||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

para cada $f \in C_b(X,E)$, e assim provamos facilmente que $||.||$ é uma norma em $C_b(X,E)$.

O próximo resultado será de grande utilidade para os dois primeiros exemplos de álgebras de Banach.

**Teorema 1.1.5.** *Sejam $X$ um espaço topológico e $E$ um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Então $C_b(X,E)$ é um espaço de Banach.*

**Demonstração:** De fato, seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_b(X,E)$. Então, como

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||f_n - f_m||,$$

segue para qualquer $x \in X$ que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $E$. Assim, defina

$$\begin{array}{rcccl} f & : & X & \to & E \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \end{array}$$

que está bem definida, pois $E$ é completo. Provemos primeiramente que $f \in C_b(X,E)$. De fato, $f$ é limitada pois, para todo $\epsilon > 0$,

$$\exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n,m \geq n_0 \ \Rightarrow\ ||f_n - f_m|| < \epsilon/4, \tag{1.3}$$

assim, para qualquer $x \in X$, obtemos

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = \lim_{m\in\mathbb{N}} |f_{n_0}(x) - f_m(x)| \leq \epsilon/4, \tag{1.4}$$

e portanto

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq ||f_{n_0}|| + \epsilon/4,$$

que nos prova que $f$ é limitada.

Provemos que $f$ é contínua. De fato, dado $x \in X$ e dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ como em (1.3). Como $f_{n_0}$ é contínua, existe um aberto $V_x \subset X$ que contém $x$, onde $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \epsilon/3$, para todo $y \in V_x$. Note ainda que vale (1.4) e portanto se $y \in V_x$ temos

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Assim, por definição, $f$ é contínua em $x$. Como $x$ foi qualquer, temos que $f$ é contínua. Isto significa que $f \in C_b(X,E)$.

Provemos, por fim, que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f$. Dado $\epsilon > 0$, então vale (1.3). Com argumento semelhante ao de (1.4), temos também $||f_n - f|| \leq \epsilon/4$, para todo $n \geq n_0$. Portanto

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ n > n_0 \ \Rightarrow\ ||f_n - f|| < \epsilon,$$

isto é, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f$. O que prova que $C_b(X,E)$ é um espaço de Banach.

$\blacksquare$

**Exemplo 1.1.6.** *Seja $X$ um espaço topológico compacto. Defina*

$$C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \ ; \ f \text{ é contínua}\},$$

*note que $C(X) = C_b(X, \mathbb{C})$ e portanto, pelo* ***Teorema 1.1.5****, com as operações naturais de adição e multiplicação por escalar, $C(X)$ é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\begin{array}{rcccl} ||.|| & : & C(X) & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & sup_{x\in X}\,|f(x)|. \end{array}$$

*Podemos ainda definir em $C(X)$ a seguinte operação:*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

*que está bem definida e torna $C(X)$ uma álgebra complexa, que possui a unidade $e \in C(X)$ onde $e(x) = 1$ para todo $x \in X$. Como*

$$\begin{aligned} ||f \cdot g|| &= sup_{x\in X}\,|f(x) \cdot g(x)| \\ &= sup_{x\in X}\,|f(x)| \cdot |g(x)| \\ &\leq sup_{x\in X}\,|f(x)| \cdot sup_{x\in X}\,|g(x)| \\ &= ||f|| \cdot ||g|| \end{aligned} \tag{1.5}$$

*e ainda $||e|| = 1$, segue que $C(X)$ é uma álgebra de Banach. Portanto $C(X)$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade.*

*Se $X = \{1, ..., n\}$, então $X$ com a topologia das partes é um espaço compacto. Note ainda que*

$$C(X) \text{ é isometricamente isomorfo a } \mathbb{C}^n,$$

*onde $\mathbb{C}^n$ está munido com a norma do máximo e com a operação definida por*

$$(x_1, ..., x_n) \cdot (y_1, ..., y_n) := (x_1 \cdot y_1, ..., x_n \cdot y_n),$$

*logo temos $\mathbb{C}^n$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade.*

**Exemplo 1.1.7.** *Seja $X$ um espaço topológico de Hausdorff localmente compacto e defina os conjuntos*

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C}\ ;\ f \text{ é contínua e limitada}\}$$

$$C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{C}\ ;\ f \text{ é contínua e se anula no infinito}\},$$

*onde dizemos que $f : X \to \mathbb{C}$ se anula no infinito quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $K \subset X$ compacto onde $|f(x)| < \epsilon$, para todo $x \notin K$.*

*Note inicialmente que $C_0(X) \subset C_b(X)$. Provemos que ambos os conjuntos podem ser vistos como álgebras de Banach. Perceba primeiro que $C_b(X) = C_b(X, \mathbb{C})$ e, pelo* ***Teorema 1.1.5****, temos que $C_b(X)$ é um espaço de Banach com operações naturais e a norma da convergência uniforme. Podemos, como no exemplo anterior, definir a seguinte operação*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

*a qual está bem definida e torna $C_b(X)$ uma álgebra complexa com unidade e, onde $e(x) = 1$ para qualquer $x \in X$. Podemos notar que com a norma da convergência uniforme, da mesma maneira como foi feito na desigualdade (1.5) do exemplo anterior e notando que $||e|| = 1$, temos $C_b(X)$ uma álgebra de Banach.*

*Agora, com o objetivo de provar que $C_0(X)$ é álgebra complexa, observe que*

$$\varnothing \neq C_0(X) \subset C_b(X), \tag{1.6}$$

*e perceba que $C_0(X)$ é subespaço vetorial fechado de $C_b(X)$. De fato, se $f, g \in C_0(X)$, então dado $\epsilon > 0$ existe $K_f \subset X$ compacto tal que $|f(x)| < \epsilon/2$ para qualquer $x \notin K_f$, e temos ainda que existe $K_g \subset X$ compacto tal que $|g(x)| < \epsilon/2$ para qualquer $x \notin K_g$. Assim, notando que $K := K_f \cup K_g \subset X$ é compacto, e considerando $x \notin K_0$, então $x \notin K_f$ e $x \notin K_g$, concluindo dessa forma, que*

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| < \epsilon.$$

*Logo, por definição, temos $f + g \in C_0(X)$. De maneira análoga, se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $f \in C_0(X)$ então $(\lambda \cdot f) \in C_0(X)$. Assim, $C_0(X)$ é subespaço de $C_b(X)$. Para verificar que é um subespaço fechado, tome uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $C_0(X)$ convergindo para $f \in C_b(X)$, e note que dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||f_{n_0} - f|| < \epsilon/2$. Portanto, como $f_{n_0} \in C_0(X)$, existe $K \subset X$ compacto tal que $|f_{n_0}(x)| < \epsilon/2$, para todo $x \notin K$ e, dessa maneira, segue*

$$|f(x)| < |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| < \epsilon.$$

*Conclui-se que $f \in C_0(X)$, e portanto $C_0(X)$ é espaço de Banach. Note que $C_0(X)$ herda a multiplicação de $C_b(X)$ como operação, e que está bem definida em $C_0(X)$, isto é, se $f, g \in C_0(X)$ então $f \cdot g \in C_0(X)$. De fato, considerando-se $f, g \in C_0(X)$, existem $K_f, K_g \subset X$ compactos onde $|f(x)| < \sqrt{\epsilon}$, para todo $x \notin K_f$, e $|g(x)| < \sqrt{\epsilon}$, para todo $x \notin K_g$. Assim, $K := K_f \cup K_g$ é compacto e se $x \notin K$, tem-se*

$$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| < \sqrt{\epsilon} \cdot \sqrt{\epsilon} = \epsilon,$$

*concluindo-se que $(f \cdot g) \in C_0(X)$. Dessa forma, $C_0(X)$ é uma álgebra complexa. Provemos que $C_0(X)$ é uma álgebra de Banach, provando que a norma $||.||$ que o torna um espaço de Banach é uma norma também na álgebra $C_0(X)$. Mas já sabemos, pela inclusão (1.6), que*

$$||f \cdot g|| \leq ||f|| \cdot ||g||,$$

*para todos $f, g \in C_0(X)$. Resta-nos provar que, se $C_0(X)$ possuir unidade e, então $||e|| = 1$. Provemos a seguinte afirmação:*

*Afirmação. A álgebra complexa $C_0(X)$ possui unidade se, e somente se, $X$ é compacto.*

*Primeiro suponha que $X$ seja compacto. Notando que $C_0(X) = C(X)$, concluímos que $C_0(X)$ possui unidade. Reciprocamente, e de maneira muito mais delicada, suponha que $C_0(X)$ possua unidade $e$. Provemos que $e(x) = 1$ para todo $x \in X$. Fixe $x \in X$ qualquer, note primeiramente que, como $X$ é localmente compacto, existe um aberto $A \subset X$ tal que $x \in A$ e $\overline{A} \subset X$ é compacto. Como $\{x\}$ é compacto e $A^c$ é fechado, então, pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{C}$ tal que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ para todo $y \notin A$. Assim, pela compacidade de $\overline{A} \subset X$, segue que $f \in C_0(X)$, já que dado $\epsilon > 0$, tem-se $|f(y)| = 0 < \epsilon$ sempre que $y \notin \overline{A}$. Mas então*

$$1 = f(x) = (e \cdot f)(x) = e(x) \cdot f(x) = e(x)$$

*e assim $e(x) = 1$. Como $x \in X$ foi arbitrário, então $e(x) = 1$ para todo $x \in X$. Mas $e \in C_0(X)$, pois é a unidade de $C_0(X)$. Então existe $K \subset X$ compacto tal que $|e(x)| < 1$ sempre que $x \notin K$, ou seja, sempre que $x \in X \setminus K$. Mas isso só pode ser verdadeiro se $X \setminus K = \varnothing$ e portanto $X = K$, demonstrando que $X$ é compacto. Isto finaliza a demonstração da Afirmação!*

*De posse da Afirmação acima, concluímos que se $C_0(X)$ possuir unidade e, então $X$ é compacto, decorrendo daí $C_0(X) = C(X)$, nos indicando, pelo **exemplo anterior**, que $e(x) = 1$ para qualquer $x \in X$, e concluindo finalmente que $||e|| = 1$. Assim $C_0(X)$ é uma álgebra de Banach.*

*Assim vimos que $C_b(X)$ e $C_0(X)$ com as operações naturais e a norma da convergência uniforme se tornam álgebras de Banach. Vimos, além disso, que $C_0(X)$ possui unidade se, e somente se, $X$ é um espaço compacto.*

**Exemplo 1.1.8.** *Seja $X \subset \mathbb{C}$ compacto. Defina*

$$A(X) := \{f \in C(X) \ ; \ f|_{intX} \text{ é holomorfa}\},$$

*notando que $A(X)$ é subespaço de $C(X)$. E mais ainda, observe que se existir uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $A(X)$ tal que $f_n$ converge para $f \in C(X)$ na norma da convergência uniforme, então, pelo Teorema D.18, temos $f \in A(X)$. Isto significa que $A(X)$ é um subespaço vetorial fechado de $C(X)$ e portanto um espaço de Banach. Portanto $A(X)$, com operações naturais, é uma álgebra de Banach.*

**Exemplo 1.1.9.** *Seja $X$ um espaço de Banach complexo. Podemos definir*

$$B(X) := \{T : X \to X \ ; \ T \text{ é transformação linear contínua}\},$$

*que com operações naturais de adição, multiplicação por escalar e multiplicação (composição), se torna uma álgebra complexa, e com a norma espectral se torna uma álgebra de Banach com unidade.*

*Note ainda que toda subálgebra fechada de $B(X)$, isto é, um subespaço fechado de $B(X)$ que contém a identidade e que é fechado para composição, é também uma álgebra de Banach.*

*Um leitor atento ao texto nota que, com a mesma ideia da demonstração do Teorema 1.1.3, toda álgebra com unidade é isomorfa a uma subálgebra fechada de $B(X)$ que possui identidade.*

## 1.2 O Teorema de Gleason, Kahane, Zelazko

**Definição 1.2.1.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa. Então um funcional linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ não nulo é dito um homomorfismo complexo se

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$$

para quaisquer $x, y \in \mathcal{A}$.

**Proposição 1.2.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa com unidade. Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo, então $\varphi(e) = 1$ e $\varphi(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$ que seja invertível.*

**Demonstração:** Sabemos que existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(y) \neq 0$. Como $\varphi(e) \cdot \varphi(y) = \varphi(y)$, concluímos que $\varphi(e) = 1$. Fixe agora $x \in \mathcal{A}$ invertível, notando que $\varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) = \varphi(e) = 1$, obtemos $\varphi(x) \neq 0$.

■

Pela Proposição 1.2.2 podemos deduzir que o conjunto dos homomorfismos complexos de uma álgebra complexa não é um espaço vetorial, e também nem todo funcional linear sobre uma álgebra complexa é um homomorfismo complexo. Nos concentraremos nesta seção no Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko que dá uma condição suficiente para um funcional linear sobre uma álgebra de Banach com unidade ser um homomorfismo complexo.

**Teorema 1.2.3.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, seja ainda $x \in \mathcal{A}$ tal que $||x|| < 1$. Então valem os resultados:*

*(a)* $e - x$ *é um elemento invertível de* $\mathcal{A}$*,*

*(b)* $||(e-x)^{-1} - e - x|| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}$.

**Demonstração:** (a) Definindo $y_n := e + x + x^2 + ... + x^n$, temos

$$(e-x) \cdot y_n = e - x^{n+1} \qquad \text{e} \qquad y_n \cdot (e-x) = e - x^{n+1}. \tag{1.7}$$

Mas como $||x|| < 1$, então $\lim x^{n+1} = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e logo existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $\lim y_n = y$. Assim, fazendo $n \to \infty$ nas igualdades (1.7), obtemos

$$(e-x) \cdot y = e \qquad \text{e} \qquad y \cdot (e-x) = e,$$

e portanto

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

(b) Pela igualdade acima, segue que

$$||(e-x)^{-1} - e - x|| = \left|\left|\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right|\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1-||x||}.$$

$\blacksquare$

A letra (a) do Teorema 1.2.3 acima será de bastante utilidade para a teoria espectral em álgebras de Banach em seus primeiros resultados. A seguir, vemos uma consequência do Teorema anterior que por vezes é bastante útil a respeito de continuidade de homomorfismos complexos.

**Teorema 1.2.4.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo. Então $\varphi$ é contínuo e $||\varphi|| \leq 1$. Caso $\mathcal{A}$ possua unidade, então $||\varphi|| = 1$.*

**Demonstração:** Façamos primeiramente o caso em que $\mathcal{A}$ é um álgebra de Banach com unidade $e$. Tomando $x \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(x) \neq 0$, podemos observar que

$$\varphi\left(e - \frac{x}{\varphi(x)}\right) = 0$$

e portanto, pela Proposição 1.2.2 desta seção, decorre que $e - \frac{x}{\varphi(x)}$ é não invertível, concluindo, pela letra (a) do Teorema 1.2.3, que $||\frac{x}{\varphi(x)}|| \geq 1$, isto é,

$$||\varphi(x)|| \leq ||x||.$$

De maneira evidente, notamos que isso implica que $||\varphi|| \leq 1$. Atentos ao fato de $\varphi(e) = 1$, onde $||e|| = 1$, concluímos que $||\varphi|| = 1$.

Agora provemos o resultado para quando $\mathcal{A}$ não possui unidade. Mas, pela demonstração do Teorema 1.1.4, podemos fazer $\widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ uma álgebra de Banach com unidade. Defina

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\varphi} : & \widehat{\mathcal{A}} & \to & \mathbb{C} \\ & (a, \lambda) & \mapsto & \varphi(a) + \lambda, \end{array}$$

o qual é um homomorfismo complexo. De fato, seguem as igualdades

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}((a, \lambda) \cdot (b, \mu)) &= \widehat{\varphi}(a \cdot b + \lambda a + \mu b, \lambda\mu) \\ &= \varphi(a \cdot b + \lambda a + \mu b) + \lambda\mu \\ &= \varphi(a)\varphi(b) + \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(b) + \lambda\mu \\ &= (\varphi(a) + \lambda)(\varphi(b) + \mu) \\ &= \widehat{\varphi}(a, \lambda)\widehat{\varphi}(b, \mu) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}((a, \lambda) + \theta(b, \mu)) &= \widehat{\varphi}(a + \theta b, \lambda + \theta\mu) \\ &= \varphi(a + \theta b) + \lambda + \theta\mu \\ &= \varphi(a) + \theta\varphi(b) + \lambda + \theta\mu \\ &= (\varphi(a) + \lambda) + \theta(\varphi(b) + \mu) \\ &= \widehat{\varphi}(a, \lambda) + \theta\widehat{\varphi}(b, \mu) \end{aligned}$$

para quaisquer $(a, \lambda), (b, \mu) \in \widehat{\mathcal{A}}$ e para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Portanto, pelo caso anterior, temos $\widehat{\varphi}$ contínuo e de norma 1. Daí, decorre que $|\varphi(a)| = |\widehat{\varphi}(a, 0)| \leq ||(a, 0)|| = ||a||$, para todo $a \in \mathcal{A}$, concluindo que

$$|\varphi(a)| \leq ||a||,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Portanto $\varphi$ é contínuo e $||\varphi|| \leq 1$.

■

Assim qualquer homomorfismo complexo definido sobre uma álgebra de Banach é contínuo. Agora antes do Teorema principal desta seção, segue um lema.

**Lema 1.2.5.** *Suponha $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira tal que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 0$, e ainda*

$$0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$$

*para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $f(\lambda) = 1, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{C}$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema D.17, existe uma função inteira $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(\lambda) = e^{g(\lambda)}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Segue que $g(0) = g'(0) = 0$, e disso, decorre que a função

$$\lambda \to \frac{g(\lambda)}{\lambda^2}$$

é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, admitindo 0 como singularidade removível, isto é, podendo ser estendida holomorficamente a $\mathbb{C}$. De fato, ao considerarmos $g(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ temos $a_0 = g(0) = 0$ e $a_1 = g'(0) = 0$, concluindo que $\frac{g(\lambda)}{\lambda^2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \lambda^{n-2}$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Portanto $\lim_{\lambda \to 0} \frac{g(\lambda)}{\lambda^2} = a_2$ e, pelo Teorema D.12, temos 0 uma singularidade removível da função $\lambda \mapsto \frac{g(\lambda)}{\lambda^2}$. Note ainda que

$$e^{Re[g(\lambda)]} = |e^{g(\lambda)}| = |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$$

e consequentemente

$$Re[g(\lambda)] \leq |\lambda|, \tag{1.8}$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$.

Fixe $r > 0$. Se $|\lambda| < 2r$, então $2r - g(\lambda) \neq 0$. De fato, pois nesse caso temos $Re[2r - g(\lambda)] = 2r - Re[g(\lambda)]$, e obtemos, pela desigualdade (1.8), $Re[2r - g(\lambda)] > 0$, donde $2r - g(\lambda) \neq 0$. Fazendo sentido, desse modo, citar a função $h_r : D_{2r}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$h_r(\lambda) = \frac{g(\lambda) r^2}{\lambda^2 (2r - g(\lambda))}.$$

Como $h_r(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{\lambda^2} \cdot \frac{r^2}{2r - g(\lambda)}$, deduzimos que $h_r$ admite 0 como singularidade removível. Assim, $h_r$ possui uma extensão holomorfa

$$H_r : D_{2r}(0) \to \mathbb{C}.$$

Agora perceba que, através da desigualdade (1.8), temos

$$|g(\lambda)| \leq |2r - g(\lambda)| \tag{1.9}$$

sempre que $|\lambda| \leq r$. De fato, fixe $\lambda \in \mathbb{C}$ onde $|\lambda| \leq r$ e primeiro note que, pela desigualdade (1.8), obtemos $Re[g(\lambda)] \leq r$. Consequentemente conseguimos mostrar que $|Re[g(\lambda)]| \leq |2r - Re[g(\lambda)]|$, ou seja, $|Re[g(\lambda)]| \leq |Re[2r - g(\lambda)]|$. Além disso, temos $|Im[g(\lambda)]| = |Im[2r - g(\lambda)]|$, concluindo assim, a desigualdade (1.9).

Portanto, pela desigualdade (1.9), sempre que $|\lambda| = r$, temos $|H_r(\lambda)| \leq 1$. Ora, $H_r$ é holomorfa e, pelo Teorema do Módulo Máximo, temos

$$|H_r(\lambda)| \leq 1$$

sempre que $|\lambda| \leq r$.

Provamos que, para cada $r > 0$, a condição $|\lambda| \leq r$ com $\lambda \neq 0$ implica

$$\left| \frac{r^2 g(\lambda)}{\lambda^2(2r - g(\lambda))} \right| \leq 1.$$

Ora, fixando $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e fazendo $r \to \infty$ temos que $g(\lambda) = 0$. Logo, $g$ é identicamente nula, demonstrando assim que $f$ é a função constante 1.

■

Vamos agora ao principal Teorema desta seção

**Teorema 1.2.6** (Gleason, Kahane e Zelazko)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade $e$, e seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear tal que $\varphi(e) = 1$ e $\varphi(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$ invertível. Então $\varphi$ é contínuo e*

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x)\varphi(y),$$

*para todos $x, y \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** Provemos primeiramente que $\varphi$ é contínuo. Defina $N \subset \mathcal{A}$ como sendo o núcleo de $\varphi$ e note que se $x \in N$, então temos $||e - x|| \geq 1$. De fato, se $||e - x|| < 1$, então pelo Teorema 1.2.3 $e - (e - x)$ seria invertível, o que é um absurdo! Já que $x = e - (e - x)$. Conclui-se daí que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e todo $x \in N$ temos $||e - \frac{1}{\lambda}x|| \geq 1$ e portanto

$$||\lambda e - x|| \geq |\lambda| = |\varphi(\lambda e - x)|.$$

Além disso, se $a \in \mathcal{A}$, então $\varphi(a)e - a \in N$ e como $a = \varphi(a)e - (\varphi(a)e - a)$, concluimos que todo elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito da forma $\lambda e - x$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $x \in N$. Deduzimos, portanto, que $\varphi$ é contínuo com norma $||\varphi|| \leq 1$.

Provemos agora que

$$a \in N \qquad \text{implica} \qquad a^2 \in N. \tag{1.10}$$

Fixe primeiramente $a \in N$, que podemos considerar sem perder generalidade $||a|| = 1$, e defina a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(a^n)}{n!}\lambda^n, \tag{1.11}$$

notando que $f$ está bem definida, pois

$$\left|\frac{\varphi(a^n)}{n!}\lambda^n\right| \leq \frac{1}{n!}|\lambda|^n,$$

e portanto $f$ é inteira. Além disso, pela desigualdade acima segue $|f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$. Por fim, observe ainda que $f(0) = \varphi(e) = 1$ e $f'(0) = \varphi(a) = 0$. Vamos provar agora que $|f(\lambda)| > 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, e usar o Lema 1.2.5. Para isso, defina

$$\begin{array}{rcccl} E & : & \mathbb{C} & \to & A \\ & & \lambda & \mapsto & E(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} a^n \end{array} \tag{1.12}$$

e, analogamente como foi feito para provar que $f$ está bem definida, concluimos que $E$ está bem definida, e por $\varphi$ ser contínua, temos

$$f(\lambda) = \varphi(E(\lambda)),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, como no caso complexo (ver Teorema D.10), conseguimos provar que a função definida em (1.12) satisfaz

$$E(\lambda + \mu) = E(\lambda)E(\mu)$$

e, notando que $E(0) = e$, temos $E(\lambda)$ sempre invertível com inverso $E(-\lambda)$, decorrendo daí, que

$$f(\lambda) = \varphi(E(\lambda)) \neq 0$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto $f$ satisfaz o Lema 1.2.5 e logo $f$ é constante igual a 1. Consequentemente, pela definição da $f$ em (1.11), segue que $\varphi(a^2) = 0$, ou seja, $a^2 \in N$. O que prova (1.10).

Provemos agora que

$$a, b \in N \qquad \text{implica} \qquad a \cdot b \in N. \tag{1.13}$$

Primeiramente note que, para todo $x \in \mathcal{A}$, temos

$$\varphi(x^2) = \varphi(x)^2. \tag{1.14}$$

De fato, sabemos que cada elemento $x \in \mathcal{A}$ se escreve da forma $x = a + \varphi(x)e$ tal que $a \in N$, concluindo que

$$\begin{aligned} \varphi(x^2) &= \varphi((a + \varphi(x)e)(a + \varphi(x)e)) \\ &= \varphi(a^2 + \varphi(x)a + \varphi(x)a + \varphi(x)^2 e) \\ &= \varphi(a^2) + 2\varphi(x)\varphi(a) + \varphi(x)^2 \end{aligned}$$

e, por (1.10), segue que $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$ provando a igualdade (1.14). Substituindo $x$ por $x + y$ em (1.14) obtemos a seguinte igualdade:

$$\varphi((x+y)^2) = \varphi(x+y)^2$$

isto é,

$$\varphi(x^2) + \varphi(xy + yx) + \varphi(y^2) = \varphi(x)^2 + 2\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)^2$$

donde concluímos

$$\varphi(xy + yx) = 2\varphi(x)\varphi(y)$$

para qualquer $x, y \in \mathcal{A}$. Dessa maneira vale a seguinte implicação

$$x \in N, y \in A \qquad \text{implica} \qquad xy + yx \in N, \tag{1.15}$$

porém, considerando a igualdade seguinte, com $x \in N$

$$(xy - yx)^2 + \underbrace{(xy + yx)^2}_{\text{pertence a } N} = 2\underbrace{[x(yxy) + (yxy)x]}_{\text{pertence a } N}$$

e considerando também (1.15), obtemos facilmente

$$x, y \in N \qquad \text{implica} \qquad xy - yx \in N, \tag{1.16}$$

concluindo assim, por (1.15) e por (1.16), a implicação (1.13). Assim

$$a, b \in N \qquad \text{implica} \qquad a \cdot b \in N$$

e portanto para concluir o resultado, note que se $x, y \in \mathcal{A}$ então $x = a + \varphi(x) \cdot e$ e $y = b + \varphi(y) \cdot e$, onde $a, b \in N$ e, dessa maneira, obtemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= \varphi((a + \varphi(x)e)(b + \varphi(y)e)) \\
&= \varphi(ab + \varphi(x)b + \varphi(y)a + \varphi(x)\varphi(y)e) \\
&= \varphi(ab) + \varphi(x)\varphi(b) + \varphi(y)\varphi(a) + \varphi(x)\varphi(y)\varphi(e) \\
&= \varphi(ab) + \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$

uma vez que $ab \in N$, conclui-se

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

■

Como acabamos de ver, o Teorema de Gleason, Kahane e Zelazko estabelece uma condição necessária e suficiente para um funcional linear definido sobre uma álgebra de Banach ser um homomorfismo complexo. Após estudarmos a teoria espectral sobre álgebras de Banach, enunciaremos uma outra condição necessária e suficiente para um funcional linear definido sobre uma álgebra de Banach ser um homomorfismo complexo. Tal condição diz respeito apenas a uma propriedade de um conjunto chamado espectro, definido em função de cada elemento da álgebra.

## 1.3 Teoria Espectral

Nesta seção, todas as álgebras complexas serão álgebras de Banach $\mathcal{A}$ com unidade $e$. Já vimos, no Teorema 1.2.3, que em uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com unidade $e$ tem-se

$$||x|| < 1 \qquad \text{implica} \qquad (e - x) \text{ é invertível,} \tag{1.17}$$

e usufruimos, nesse caso, uma fórmula explícita para o elemento inverso de $(e - x)$,

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{1.18}$$

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade $e$ e seja $a \in \mathcal{A}$. Diremos que o espectro de $a$ é o conjunto $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ ; \ (\lambda e - a) \text{ não é invertível}\}$ e diremos que o resolvente de $a$ é o conjunto $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$, denotaremos ainda por $G(\mathcal{A})$, ou algumas vezes por $G$, o conjunto $\{a \in \mathcal{A} \ ; \ a \text{ é invertível}\}$.

**Teorema 1.3.1.** *$G(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ é um conjunto aberto e a função $f : G(\mathcal{A}) \to G(\mathcal{A})$, onde $f(x) = x^{-1}$, é homeomorfismo.*

**Demonstração:** Provemos que $G(\mathcal{A})$ é aberto. Tome $x \in G(\mathcal{A})$ e note que se $a \in D_{1/||x^{-1}||}(0)$ então $||x^{-1}a|| < 1$ e portanto, por (1.17), teremos $(e - x^{-1}a)$ invertível, e consequentemente $(x - a) = x(e - x^{-1}a)$ é invertível. Logo, provamos que se $a \in D_{1/||x^{-1}||}(0)$ então $(x - a)$ é invertível. Isto significa que $D_{1/||x^{-1}||}(x) \subset G(\mathcal{A})$. Assim $G(\mathcal{A})$ é aberto.

Agora provaremos que a função $f$ é homeomorfismo. Ora, basta provar que ela é contínua. Para isso, basta notar que se $x, y \in G(\mathcal{A})$ então

$$\begin{aligned} ||x^{-1} - y^{-1}|| &= ||y^{-1}(y - x)x^{-1}|| \\ &= ||y^{-1}(y - x)x^{-1} - x^{-1}(y - x)x^{-1} + x^{-1}(y - x)x^{-1}|| \\ &= ||(y^{-1} - x^{-1})(y - x)x^{-1} + x^{-1}(y - x)x^{-1}|| \\ &\leq ||y^{-1} - x^{-1}|| \cdot ||y - x|| \cdot ||x^{-1}|| + ||x^{-1}||^2||y - x||, \end{aligned}$$

mas isto implica que

$$(||x^{-1} - y^{-1}||)(1 - ||y - x|| \cdot ||x^{-1}||) \leq ||x^{-1}||^2||y - x||.$$

Se fixarmos $x \in G(\mathcal{A})$, fizermos $y \to x$ então a desigualdade acima diz que $||y^{-1} - x^{-1}|| \to 0$. Assim a função $f$ é contínua, ou seja, a operação inversão é contínua.

■

**Teorema 1.3.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$. Então $\sigma(a)$ é não vazio e compacto.*

**Demonstração:** Provemos primeiramente que $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ é um conjunto compacto. Note que $\sigma(a)$ é limitado. De fato, supondo $\lambda \in \sigma(a) \setminus \{0\}$, então $\lambda e - a$ é não invertível e, de modo consequente, $(e - \lambda^{-1}a)$ é não invertível, resultando, por (1.17), na desigualdade $||\lambda^{-1}a|| \geq 1$, isto é, $|\lambda| \leq ||a||$.

Agora provemos que $\sigma(a)$ é fechado. Para tal, note que a função

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{C} & \to & A \\ & & \lambda & \mapsto & \lambda e - a \end{array}$$

é contínua e, pelo Lema anterior, o conjunto resolvente $\rho(a) = g^{-1}(G(\mathcal{A}))$ é aberto, concluindo que $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ é fechado. Logo, $\sigma(a)$ é compacto.

Provaremos agora que $\sigma(a) \neq \varnothing$. Suponha, por absurdo, que $\sigma(a) = \varnothing$ e consequentemente $\rho(a) = \mathbb{C}$. Assim, para cada funcional linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ contínuo, podemos definir

$$\begin{array}{cccc} f_\varphi & : & \rho(a) & \to & \mathbb{C} \\ & & \lambda & \mapsto & \varphi((\lambda e - a)^{-1}) \end{array} \tag{1.19}$$

que está, naturalmente, bem definida. Primeiramente, note que $f_\varphi$ é holomorfa. Com efeito, dados $\lambda, \mu \in \rho(a)$ tem-se

$$((\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1}) = [(\mu e - a)(\mu e - a)^{-1}](\lambda e - a)^{-1} - [(\lambda e - a)(\lambda e - a)^{-1}](\mu e - a)^{-1}$$

e, além disso, como $(\lambda e - a)$ e $(\mu e - a)$ comutam, então $(\lambda e - a)^{-1}$ e $(\mu e - a)^{-1}$ também comutam, concluindo assim, da igualdade acima, que

$$(\lambda e - a)^{-1} - (\mu e - a)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda e - a)^{-1}(\mu e - a)^{-1}. \tag{1.20}$$

De (1.20), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \to \lambda} \frac{f_\varphi(\mu) - f_\varphi(\lambda)}{\mu - \lambda} &= \lim_{\mu \to \lambda} \varphi\left(\frac{(\mu e - a)^{-1} - (\lambda e - a)^{-1}}{\mu - \lambda}\right) \\ &= \lim_{\mu \to \lambda} \varphi(-(\lambda e - a)^{-1}(\mu e - a)^{-1}) \\ &= -\varphi((\lambda e - a)^{-2}), \end{aligned}$$

já que a inversão é contínua, provando, finalmente, que $f_\varphi$ é holomorfa. Ora, como $\rho(a) = \mathbb{C}$, $f_\varphi$ é uma função inteira. Notando que

$$|f_\varphi(\lambda)| = \left|\varphi((\lambda e - a)^{-1})\right| = \left|\varphi\left(\frac{1}{\lambda}(e - \lambda^{-1}a)^{-1}\right)\right| = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \left|\varphi((e - \lambda^{-1}a)^{-1})\right|,$$

devemos ter,

$$\lim_{\lambda \to \infty} |f_\varphi(\lambda)| = 0,$$

e, do fato de $f_\varphi$ ser inteira e pelo Teorema de Liouville, concluímos que $f_\varphi$ é a função nula, decorrendo, desse modo, que $\varphi(a^{-1}) = -f_\varphi(0) = 0$. Em suma, temos

$$\varphi(a^{-1}) = 0,$$

para todo funcional linear contínuo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. O que é uma contradição pelo Teorema de Hahn-Banach, já que $a^{-1} \neq 0$. Assim, $\sigma(a) \neq \varnothing$.

■

**Definição 1.3.3.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, e seja $a \in \mathcal{A}$. Então, pelo Teorema 1.3.2, faz sentido falar em

$$\max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|,$$

que será chamado o raio espectral de $a$ e denotado por $r(a)$.

Agora vamos a um dos principais Teoremas da Teoria Espectral de Álgebras de Banach, que nos indicará que o raio espectral em uma álgebra de Banach com unidade, que é um conceito da estrutura da álgebra complexa, está associado também a norma da álgebra que a torna uma álgebra de Banach.

**Teorema 1.3.4** (Fórmula do Raio Espectral)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, e seja $a \in \mathcal{A}$. Então o raio espectral de $a$ satisfaz as seguintes igualdades*

$$r(a) = \lim_{n \in \mathbb{N}} ||a^n||^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||a^n||^{\frac{1}{n}},$$

*em particular,*

$$|r(a)| \leq ||a||, \tag{1.21}$$

*para todo $a \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** Primeiro, para todo $\lambda \neq 0$, temos

$$|\lambda| < \frac{1}{r(a)} \qquad \text{implica} \qquad \frac{1}{\lambda} \in \rho(a). \tag{1.22}$$

De fato, se $|\lambda| < \frac{1}{r(a)}$ então $\left|\frac{1}{\lambda}\right| > r(a)$ e, pela definição de $r(a)$, obtemos $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(a)$, ou seja, $\frac{1}{\lambda} \in \rho(a)$, provando dessa forma (1.22).

Dessa maneira, a implicação (1.22) nos permite definir, para cada $\varphi \in \mathcal{A}'$ fixado, a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} g & : & D_{1/r(a)}(0) \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & \lambda & \mapsto & \frac{1}{\lambda}\varphi\left(\left(\frac{1}{\lambda}e - a\right)^{-1}\right), \end{array}$$

a qual é holomorfa, já que é a composta da função $\lambda \mapsto \lambda \cdot f_\varphi(\lambda)$, onde $f_\varphi$ é como definida em (1.19), com a função $\lambda \mapsto \frac{1}{\lambda}$. Além disso, note que

$$g(\lambda) = \varphi((e - \lambda a)^{-1}),$$

concluindo a existência de $\lim_{\lambda \to 0} g(\lambda)$ e, disso decorre, pelo Teorema D.12, que 0 é um ponto de singularidade removível de $g$, isto é, podemos definir uma extensão holomorfa $G$ de $g$ em $D_{1/r(a)}(0)$

$$G : D_{1/r(a)}(0) \to \mathbb{C}.$$

Vamos encontrar a série de potencia de $G$ em 0. Ora, pelo Teorema D.16, o raio dessa série é no mínimo $\frac{1}{r(a)}$. Por outro lado, se $|\lambda| < \frac{1}{||a||}$ com $\lambda \neq 0$, então por (1.17) e (1.18), temos

$$(e - \lambda a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a^n,$$

concluindo dessa maneira, por $\varphi$ ser contínua, a seguinte igualdade,

$$G(\lambda) = \varphi((e - \lambda a)^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi(a^n). \tag{1.23}$$

Como a igualdade acima vale também para $\lambda = 0$, temos que (1.23) é a representação de série de potências da função $G$ em $D_{1/||a||}(0)$. Porém, a série de potências da $G$ em 0 tem raio no mínimo $\frac{1}{r(a)}$, deduzimos portanto que essa é a série de potências da $G$ em 0 em $D_{1/r(a)}(0)$, isto é, a igualdade (1.23) vale para todo $\lambda \in D_{1/r(a)}(0)$. Isto significa que, para todo $\lambda \in D_{1/r(a)}(0)$, temos $\lim_{n \in \mathbb{N}} \lambda^n \varphi(a^n) = 0$ e portanto a sequência complexa $(\lambda^n \varphi(a^n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $\mathbb{C}$, ou seja, para cada $\varphi \in \mathcal{A}'$ e para cada $\lambda \in D_{1/r(a)}(0)$, existe uma constante $K_{\varphi,\lambda} > 0$ tal que

$$|\varphi(\lambda^n a^n)| < K_{\varphi,\lambda},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, definindo a injeção canônica de $A$ por

$$\begin{array}{cccc} \Im & : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}'' \\ & & x & \mapsto & \Im_x, \end{array}$$

onde $\Im_x(\varphi) = \varphi(x)$, então

$$|\Im_{\lambda^n a^n}(\varphi)| < K_{\varphi,\lambda}.$$

Fixando $\lambda_0 \in D_{1/r(a)}(0) \setminus \{0\}$, defina a família $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}''$, onde $T_n := \Im_{\lambda_0^n a^n}$, e notando que $||T_n|| = ||\Im_{\lambda_0^n a^n}|| = ||\lambda_0^n a^n||$, temos

$$|T_n(\varphi)| < K_{\varphi,\lambda_0},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Banach-Steinhauss, existe uma constante $K_{\lambda_0} > 0$ tal que

$$||T_n|| < K_{\lambda_0},$$

concluindo que $||\lambda_0^n a^n|| < K_{\lambda_0}$, e dessa forma, temos

$$||a^n||^{1/n} < \frac{(K_{\lambda_0})^{1/n}}{|\lambda_0|},$$

demonstrando, assim, a seguinte desigualdade

$$\limsup ||a^n||^{1/n} \leq \frac{1}{|\lambda_0|}.$$

Como o elemento fixado $\lambda_0 \in D_{1/r(a)}(0) \setminus \{0\}$ inicialmente foi arbitrário, então

$$\limsup ||a^n||^{1/n} \leq r(a). \tag{1.24}$$

Por outro lado, fixe $\lambda \in \sigma(a)$, e as igualdades

$$\begin{aligned} \lambda^n e - a^n &= (\lambda e - a) \cdot (\lambda^{n-1} e + ... + a^{n-1}) \\ &= (\lambda^{n-1} e + ... + a^{n-1}) \cdot (\lambda e - a) \end{aligned} \tag{1.25}$$

nos dizem que se $\lambda^n e - a^n$ possui inverso, então existem $c, d \in \mathcal{A}$ tais que

$$(\lambda e - a) \cdot c = d \cdot (\lambda e - a) = e,$$

concluindo que

$$d = d \cdot e = d \cdot (\lambda e - a) \cdot c = e \cdot c = c,$$

e logo $(\lambda e - a)$ possuiria elemento inverso, o que seria um absurdo! De fato, $\lambda \in \sigma(a)$. Assim $\lambda^n e - x^n$ não possui inverso. Logo, $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ e note que, analogamente como foi feito no primeiro parágrafo da demonstração do Teorema 1.3.2, temos $|\lambda^n| \leq ||a^n||$, isto é, $|\lambda| \leq ||a^n||^{1/n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, provamos que

$$\lambda \in \sigma(a) \qquad \Rightarrow \qquad |\lambda| \leq ||a^n||^{1/n},$$

resultando em

$$r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} ||a^n||^{1/n} \leq \liminf ||a^n||^{1/n}. \tag{1.26}$$

Combinando, dessa forma, os resultados (1.24) e (1.26), obtemos

$$r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||a^n||^{1/n} = \lim ||a^n||^{1/n}.$$

■

Veremos agora um resultado que nos diz que $\mathbb{C}$ é a única álgebra de Banach com unidade em que todos os elementos não nulos são invertíveis.

**Teorema 1.3.5** (Gelfand, Mazur)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade tal que $G(\mathcal{A}) = A \setminus \{0\}$. Então $\mathcal{A}$ é isomorfa isometricamente a $\mathbb{C}$.*

**Demonstração:** Primeiramente notemos que, para cada $a \in \mathcal{A}$, temos $\sigma(a)$ um conjunto unitário. Ora, já sabemos que $\sigma(a)$ é não vazio pelo Teorema 1.3.2, então provemos apenas que $\sigma(a)$ não pode ter dois elementos distintos. Tome $\lambda, \mu \in \sigma(a)$ e note que $\lambda e - a$ e $\mu e - a$ são não invertíveis, então $\lambda e - a = \mu e - a = 0$ daí segue que $\lambda = \mu$, assim $\sigma(a)$ é unitário.

Agora, defina a função

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & & a & \mapsto & f(a) \in \sigma(a). \end{array} \tag{1.27}$$

Como $\sigma(a)$ é unitário, para todo $a \in \mathcal{A}$, **não precisamos usar o axioma da escolha** para garantir a existência da função $f$ acima. Ora, $f(a) \in \sigma(a)$, então $f(a)e - a$ é não invertível, para qualquer $a \in \mathcal{A}$, decorrendo assim que, $f(a)e - a = 0$, para todo $a \in \mathcal{A}$, e consequentemente

$$f(a)e = a, \tag{1.28}$$

para qualquer $a \in \mathcal{A}$. Através de (1.28), temos para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$f(a + \lambda b)e = a + \lambda b = f(a)e + \lambda f(b)e = (f(a) + \lambda f(b))e$$

donde $f(a + \lambda b) = f(a) + \lambda f(b)$, analogamente $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$. Além disso, se $f(a) = 0$, então $a = f(a)e = 0$ e portanto $f$ é injetiva e como $f$ é não nula segue que $f$ é sobrejetiva. Temos ainda que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $|f(a)| = ||f(a)e|| = ||a||$. Portanto $f$ é um isomorfismo isométrico.

■

Observe que, na demonstração do Teorema Gelfand-Mazur, poderíamos ter começado a demonstração definindo a função (1.27), logo depois ter provado (1.28), provando que $f$ é um isomorfismo isométrico e, dessa forma, omitindo o primeiro parágrafo da demonstração. Porém, isso faria a demonstração do Teorema de Gelfand-Mazur depender do axioma da escolha, pois como, $\sigma(a) \neq \varnothing$ então conseguimos uma função escolha em $\{\sigma(a)\}_{a \in \mathcal{A}}$ e $f$ seria uma função escolha. Ora, isto torna-se desnecessário se cada $\sigma(a)$ for unitário.

Existem aplicações do Teorema de Gelfand-Mazur, uma delas, e bastante curiosa, é a prova do **Teorema Fundamental da Álgebra** utilizando o Teorema de Gelfand-Mazur, que apresentamos no Apêndice A desta dissertação.

**Teorema 1.3.6** (Mapeamento espectral - caso polinomial)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e e seja $a \in \mathcal{A}$. Valem:*

*(a) Se $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ então*
$$\sigma(P(a)) = P(\sigma(a))$$
*onde $P(\sigma(a)) := \{P(\lambda)\ ;\ \lambda \in \sigma(a)\}$.*

*(b) Se $a \in G(\mathcal{A})$ então $0 \notin \sigma(a)$ e*
$$\sigma(a^{-n}) = \left\{\frac{1}{\lambda^n}\ ;\ \lambda \in \sigma(a)\right\}$$
*para todo $n \in \mathbb{N}$.*

**Demonstração:** (a) Primeiro, tomando $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, onde $P(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e, fixando $\lambda \in \sigma(a)$, tem-se
$$P(\lambda)e - P(a) = a_1(\lambda e - a) + a_2(\lambda^2 e - a^2) + ... + a_n(\lambda^n e - a^n),$$
mas, olhando para fatoração em (1.25), vemos que cada termo $(\lambda^m e - a^m)$ é o produto de $(\lambda e - a)$ com algum elemento de $\mathcal{A}$, existindo assim um elemento $C_{\lambda,a} \in \mathcal{A}$ tal que
$$P(\lambda)e - P(a) = (\lambda e - a)C_{\lambda,a} = C_{\lambda,a}(\lambda e - a). \tag{1.29}$$
Como $(\lambda e - a)$ não é invertível, então $P(\lambda)e - P(a)$ não é invertível. De fato, suponha que $P(\lambda)e - P(a)$ seja invertível. Por (1.29) existiriam elementos $c, d \in \mathcal{A}$ tais que
$$(\lambda e - a)c = d(\lambda e - a) = e,$$
decorrendo daí que
$$d = d \cdot e = d \cdot (\lambda e - a) \cdot c = e \cdot c = c$$
e logo $(\lambda e - a)$ seria invertível, o que seria absurdo! Assim, $P(\lambda)e - P(a)$ não é invertível, isto é, $P(\lambda) \in \sigma(P(a))$. Resumidamente, provamos que se $\lambda \in \sigma(a)$, então $P(\lambda) \in \sigma(P(a))$.

Reciprocamente, suponha $\mu \in \sigma(P(a))$. Notamos que $(\mu e - P(a))$ é não invertível e, definindo o polinômio $Q(x) = \mu - P(x)$ em $\mathbb{C}[x]$, podemos fatorar $Q(x)$ da seguinte forma, $Q(x) = k(\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)...(\lambda_n - x)$, onde $k$ é um número complexo e $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ são as raízes de $Q(x)$. Podemos supor $k \neq 0$, pois se $k = 0$, então $P(x)$ é um polinômio constante e a inclusão desejada é imediata. Assim, podemos considerar, sem perder generalidade, que $k \neq 0$. Logo
$$\mu e - P(a) = k(\lambda_1 e - a)(\lambda_2 e - a)...(\lambda_n e - a).$$

Portanto, como o primeiro membro da igualdade acima é não invertível e $k \neq 0$ então $(\lambda_i e - a)$ é não invertível, para algum $i \in \{1, ..., n\}$, então $\lambda_i \in \sigma(a)$ e como $Q(\lambda_i) = 0$, temos $\mu = P(\lambda_i)$. O que conclui a letra (a).

(b) Primeiramente façamos para $n = 1$. Dado $a \in G(\mathcal{A})$, não é difícil demonstrar que $0 \notin \sigma(a)$, e note que se $\lambda \in \sigma(a)$ então

$$(\lambda e - a) = -a\lambda \left( \frac{1}{\lambda} e - a^{-1} \right).$$

Note que $-a\lambda \in \mathcal{A}$ possui inverso, então $(\frac{1}{\lambda} e - a^{-1})$ não possui inverso, e assim $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(a^{-1})$. Reciprocamente, se $\mu \in \sigma(a^{-1})$, então $\mu \neq 0$, pois $0 \notin \sigma(a^{-1})$. E como na primeira parte, a igualdade

$$(\mu e - a^{-1}) = -a^{-1}\mu \left( \frac{1}{\mu} e - a \right),$$

nos diz que $(\frac{1}{\mu} e - a)$ não tem inverso, indicando que $\frac{1}{\mu} \in \sigma(a)$. Logo $\mu = \frac{1}{\lambda}$, onde $\lambda \in \sigma(a)$. Assim provamos que se $a \in G(\mathcal{A})$ então $0 \notin \sigma(a)$ e

$$\sigma(a^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda} \ ; \ \lambda \in \sigma(a) \right\}. \tag{1.30}$$

Para provar o caso geral, note que se $P(x) = x^n$ e $a \in G(\mathcal{A})$, então $0 \notin \sigma(a)$ e, pela letra (a), temos

$$\sigma(P(a^{-1})) = P(\sigma(a^{-1})). \tag{1.31}$$

Portanto, observando $\sigma(a^{-1})$ na igualdade (1.30) acima, temos finalmente

$$\sigma(a^{-n}) = \left\{ \frac{1}{\lambda^n} \ ; \ \lambda \in \sigma(a) \right\}.$$

$\blacksquare$

Considerando um funcional linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach com unidade $e$, caso ocorra

$$\varphi(e) = 1 \qquad \text{e} \qquad \varphi(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{A} \text{ invertível}. \tag{1.32}$$

então $\varphi(x)e - x$ está no núcleo de $\varphi$, portanto, $\varphi(x) \in \sigma(x)$. Porém, observando que $\sigma(e) = \{1\}$, não é difícil provar que a condição (1.32) equivale a

$$\varphi(x) \in \sigma(x), \text{ para todo } x \in \mathcal{A}. \tag{1.33}$$

Estabelecemos, dessa maneira, através da equivalência entre (1.32) e (1.33), o Teorema de Gleason-Kahane-Zelazko sob um ponto de vista diferente do que o da Seção 1.2, já que agora, diferente da Seção 1.2, podemos falar em espectro de um elemento da álgebra de Banach.

**Teorema 1.3.7** (Gleason, Kahane e Zelazko)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade $e$, e seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então $\varphi(x) \in \sigma(x)$, para todo $x \in \mathcal{A}$, se, e somente se, $\varphi$ é um homomorfismo complexo.*

**Observações** 1.3.8. (a) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade $e$, e sejam $a, b \in \mathcal{A}$. Então

$$\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}. \tag{1.34}$$

De fato, se $\lambda \in \rho(ab)$ e $\lambda \neq 0$, então

$$(\lambda^{-1}e + \lambda^{-1}b(\lambda e - ab)^{-1}a)(\lambda e - ba) =$$

$$\underbrace{\lambda^{-1}e(\lambda e - ba)}_{e-\lambda^{-1}ba} + \lambda^{-1}b(\lambda e - ab)^{-1}\underbrace{a(\lambda e - ba)}_{(\lambda e - ab)a} = e,$$

assim $(\lambda e - ba)$ é invertível e $\lambda \in \rho(ba)$. Disso, segue facilmente a igualdade (1.34), como queríamos!

(b) Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach e $a \in \mathcal{A}$. Podemos investigar em alguns casos a convergência de $||a^n||$. Observe o Teorema 1.3.4 da Fórmula do Raio Espectral, e note que

(i) Se $r(a) > 1$ então $\lim ||a^n||^{1/n} > 1$ e portanto $||a^n|| \to \infty$.

(ii) Se $r(a) < 1$ então $\lim ||a^n||^{1/n} < 1$ e portanto $||a^n|| \to 0$.

Já sabemos que em uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ vale sempre $||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ para quaisquer elementos $a, b \in \mathcal{A}$. Por exemplo, na álgebra $\mathbb{C}$ temos a desigualdade contrária, ou seja, temos a desigualdade $|a| \cdot |b| \leq |a \cdot b|$ sempre que $a, b \in \mathbb{C}$. Se queremos saber se existe alguma outra álgebra em que vale uma desigualdade como essa, provaremos que $\mathbb{C}$ é a única álgebra de Banach com unidade com tal propriedade a menos de isomorfismo isométrico. Provaremos esse resultado no Teorema 1.3.10 com auxílio do lema seguinte.

**Lema 1.3.9.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach, e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos invertíveis em $\mathcal{A}$ convergindo para $a \in \mathcal{A}$ não invertível. Então*

$$\lim ||a_n^{-1}|| = +\infty.$$

**Demonstração:** Note que $a$ é não invertível e portanto $a_n^{-1} \cdot a$ é não invertível, e logo, por (1.17), temos

$$||e - a_n^{-1} \cdot a|| \geq 1. \tag{1.35}$$

Note ainda que

$$||a_n^{-1}|| \cdot ||a_n - a|| \geq ||a_n^{-1} \cdot (a_n - a)|| = ||e - a_n^{-1} \cdot a||, \tag{1.36}$$

e como $||a_n - a|| \to 0$ então, por (1.35) e (1.36), segue o resultado.

■

**Teorema 1.3.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade. Se existe $M > 0$ tal que $||a|| \cdot ||b|| \leq M \cdot ||a \cdot b||$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$, então $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $\mathbb{C}$.*

**Demonstração:** Provemos que $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$ e, pelo Teorema 1.3.5 de Gelfand Mazur, teremos a conclusão desejada. Para isso note que a fronteira de $G(\mathcal{A})$ é o conjunto $\{0\}$. De fato, se $a$ faz parte da fronteira de $G(\mathcal{A})$ então como $G(\mathcal{A})$ é aberto, temos que $a \notin G(\mathcal{A})$ e existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $G(\mathcal{A})$ que converge para $a$. Logo,

$$||a_n^{-1}|| \cdot ||a_n|| \leq M||e||,$$

mas, pelo Lema anterior, temos que $||a_n^{-1}|| \to \infty$ e, como $||a_n|| \to ||a||$, então, pela desigualdade acima, só podemos ter $||a|| = 0$ e consequentemente $a = 0$.

Assim, provamos que a fronteira de $G(\mathcal{A})$ é o conjunto $\{0\}$. Mas como $G(\mathcal{A})$ é um aberto não vazio e tem fronteira igual a $\{0\}$, facilmente podemos provar que $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$.

■

Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, então a função

$$a \mapsto \sigma(a) \tag{1.37}$$

toma elementos em $\mathcal{A}$ e os leva em $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, e não temos uma topologia natural no conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{C})$, nos impossibilitando indagar a respeito da continuidade da função definida em (1.37). Apesar de não podemos indagar a respeito dessa continuidade, podemos provar um resultado que nos aponta que ao deslocar pouco o elemento $a \in \mathcal{A}$, o conjunto $\sigma(a) \subset \mathbb{C}$ não muda muito em suas "limitações", é uma espécie de mudança contínua nas "limitações" do conjunto.

**Teorema 1.3.11.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e, sejam ainda $a \in \mathcal{A}$ e $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto tal que $\sigma(a) \subset \Omega$. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\sigma(x) \subset \Omega$ sempre que $x \in D_\epsilon(a)$.*

**Demonstração:** Primeiramente observe que $\Omega^c \subset \rho(a)$. Agora, defina a função

$$\begin{array}{rccl} f & : & \Omega^c & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \lambda & \mapsto & ||(\lambda e - a)^{-1}|| \end{array}$$

que é contínua e, notando que $\Omega^c$ é um fechado de $\mathbb{C}$ e notando também que

$$f(\lambda) = \left|\frac{1}{\lambda}\right| ||(e - \lambda^{-1}a)^{-1}||,$$

para $\lambda$ de norma suficientemente grande temos $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$. Assim, existe uma bola fechada $B \subset \mathbb{C}$ onde $f(B^c \cap \Omega^c)$ é limitada. Mas como $f(B \cap \Omega^c)$ é limitada, já que $B \cap \Omega^c \subset \mathbb{C}$ é compacto, então $f$ é limitada. Mas então

$$\exists\ M > 0 \text{ tal que } ||(\lambda e - a)^{-1}|| < M \text{ sempre que } \lambda \in \Omega^c. \tag{1.38}$$

Provemos que se $||x - a|| < 1/M$ então $\sigma(x) \subset \Omega$. De fato, seja $x \in \mathcal{A}$, onde $||x - a|| < 1/M$, e note que se $\lambda \in \Omega^c$, temos $\lambda \in \rho(a)$ e

$$\lambda e - x = (\lambda e - a)[e - \underbrace{(\lambda e - a)^{-1}(x - a)}_{\substack{\text{possui norma} \\ \text{menor que 1}}}]$$

é invertível por (1.17) e (1.38), assim $\lambda \in \sigma(x)^c$. Portanto provamos que

$$\lambda \in \Omega^c \qquad \text{implica} \qquad \lambda \in \sigma(x)^c,$$

e portanto $\sigma(x) \subset \Omega$. Note que $x \in D_{1/M}(a)$ foi qualquer. O resultado segue fazendo $\epsilon := 1/M$.

■

## 1.4 Espectros de Subálgebras

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade $e$, e $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada de $\mathcal{A}$ com mesma unidade, isto é, $\mathcal{B}$ é uma álgebra de Banach com as operações e norma induzidas de $\mathcal{A}$ fechada e com mesma unidade. Então dado um elemento $x \in \mathcal{B}$ faz sentido falar no espectro de $x$ em relação à álgebra $\mathcal{B}$ e à álgebra $\mathcal{A}$. Para tal distinção, representaremos os espectros respectivamente por $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ e por $\sigma_A(x)$. Em toda esta seção $\mathcal{A}$ será uma álgebra de Banach com unidade, e $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada de $\mathcal{A}$ com mesma unidade.

Nesta seção, estamos interessados em caracterizar $G(\mathcal{B})$ e $\sigma_B(x)$ em função de $G(\mathcal{A})$ e $\sigma_A(x)$ através do Teorema 1.4.2.

**Lema 1.4.1.** *Sejam $X$ um espaço topológico, e $V, W \subset X$ abertos, onde $V \subset W$ e $W$ não contém nenhum ponto de fronteira de $V$. Então $V$ é uma união de componentes de $W$.*

**Demonstração:** Seja $\Omega$ uma componente conexa de $W$ que intersecta $V$. Note que, como $V$ é aberto então a sua fronteira é o conjunto $\overline{V} \cap V^c$, mas como sua fronteira não intersecta $\Omega$, então $V \cap \Omega = \overline{V} \cap \Omega$, e portanto

$$\Omega = (V \cap \Omega) \cup (V^c \cap \Omega)$$

é uma cisão de $\Omega$, pois $\Omega$ está representado por uma união disjunta de fechados de $\Omega$. Como $\Omega$ intersecta $V$ e é conexo, temos $V \cap \Omega = \Omega$ e portanto $\Omega \subset V$.

■

**Teorema 1.4.2** (Caracterização do Espectro em Subálgebras)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e, seja ainda $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada com mesma unidade. Então*

*(a) $G(\mathcal{B})$ é uma união de componentes conexas de $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$,*

*(b) Se $x \in \mathcal{B}$ então $\sigma_B(x)$ é a união de $\sigma_A(x)$ com componentes conexas limitadas de $\sigma_A^c$. Em particular, a fronteira de $\sigma_B(x)$ está contida em $\sigma_A(x)$.*

**Demonstração:** (a) Temos $G(\mathcal{B}) \subset G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$, e os conjuntos $G(\mathcal{B})$ e $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ são abertos em $\mathcal{B}$. Assim, pelo Lema anterior, basta provar que os pontos de fronteira de $G(\mathcal{B})$ no espaço topológico $\mathcal{B}$ não intersectam $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$. De fato, se $x \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ e é ponto de fronteira de $G(\mathcal{B})$, então $x \notin G(\mathcal{B})$ e existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em

$G(\mathcal{B})$ que converge para $x \in \mathcal{B}$. Olhando apenas para a álgebra de Banach $\mathcal{B}$ temos, pelo Lema 1.3.9, a seguinte convergência

$$||x_n^{-1}|| \to \infty. \tag{1.39}$$

Olhando agora para álgebra $\mathcal{A}$, temos que $x_n \to x$, com $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x$ em $G(\mathcal{A})$ e, pela continuidade da inversão, temos $x_n^{-1} \to x^{-1}$, o que significa que

$$||x_n^{-1}|| \text{ é limitada.} \tag{1.40}$$

Isso é um absurdo por (1.39) e (1.40). Assim está provado (a).

(b) Seja $\{C_\alpha\}_{\alpha\in L}$ a família das componentes conexas de $\rho_A(x)$. Perceba que $\rho_B(x) \subset \rho_A(x)$, então provaremos primeiro que $\rho_B(x)$ é uma união de componentes conexas de $\rho_A(x)$. Para fazer isto, basta usar o Lema anterior e provar que $\rho_A(x)$ não possui pontos da fronteira de $\rho_B(x)$. De fato, se $\lambda \in \rho_A(x)$ e é ponto de fronteira de $\rho_B(x)$, então existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\rho_B(x)$ onde $\lambda_n \to \lambda$. Então

$$(\lambda_n e - x) \to (\lambda e - x)$$

com $(\lambda_n e - x) \in G(\mathcal{B})$ e portanto $(\lambda e - x) \in \mathcal{B}$ está na fronteira de $G(\mathcal{B})$. Mas vemos também que como $\lambda \in \rho_A(x)$ então $(\lambda e - x) \in G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$, assim $G(\mathcal{A}) \cap \mathcal{B}$ teria pontos da fronteira de $G(\mathcal{B})$. O que é um absurdo pela demonstração da letra (a). Concluímos que $\rho_B(x)$ é uma união de componentes conexas de $\rho_A(x)$, isto é, existe $L_1 \subset L$ onde

$$\rho_B(x) = \bigcup_{\alpha\in L_1} C_\alpha.$$

Desse fato, decorre que

$$\rho_A(x) \cap \sigma_B(x) = \left( \bigcup_{\alpha\in L_1} C_\alpha \cap \sigma_B(x) \right) \cup \left( \bigcup_{\alpha\in L\setminus L_1} C_\alpha \cap \sigma_B(x) \right) = \bigcup_{\alpha\in L\setminus L_1} C_\alpha, \tag{1.41}$$

e como $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$ temos

$$\sigma_B(x) = \sigma_A(x) \cup (\rho_A(x) \cap \sigma_B(x)) \tag{1.42}$$

seguindo o resultado de (1.41), (1.42) e do fato que $\{C_\alpha\}_{\alpha\in L}$ é a família de componentes conexas de $\rho_A(x)$.

Para provar a ultima parte, suponha, por absurdo, que $\lambda \notin \sigma_A(x)$ e faz parte da fronteira de $\sigma_B(x)$. Como $\sigma_A(x)^c$ é aberto, então existe $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(\lambda) \subset \sigma_A(x)^c$.

A componente conexa de $\sigma_A(x)^c$ que contém $D_\epsilon(\lambda)$ ou está completamente ou não está completamente em $\sigma_B(x)$, mas como $\lambda \in \sigma_B(x)$, então esta componente está completamente em $\sigma_B(x)$ e portanto $D_\epsilon(\lambda) \subset \sigma_B(x)$, o que é um absurdo! De fato, $\lambda$ está na fronteira de $\sigma_B(x)$.

■

**Definição 1.4.3.** Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$. Um conjunto $\Delta \subset \mathbb{C}$ é dito um buraco de $\Omega$ se $\Delta$ é aberto, conexo, limitado, disjunto de $\Omega$ e $\partial\Delta \subset \Omega$, onde $\partial\Delta$ é a fronteira de $\Delta$.

**Corolario 1.4.4.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade e, seja ainda $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada com mesma unidade e $x \in \mathcal{B}$. Então*

*(a) Se $\sigma_A(x)$ não separa $\mathbb{C}$, isto é, $\rho_A(x)$ é conexo, então $\sigma_B(x) = \sigma_A(x)$.*

*(b) Se $\sigma_A(x) \subsetneq \sigma_B(x)$, então $\sigma_B(x)$ é obtido unindo $\sigma_A(x)$ com alguns de seus buracos.*

*(c) Se $\sigma_B(x)$ possui interior vazio, então $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

Não há necessidade de demonstração, apenas uma observação na letra (b). Observe que se um conjunto $\Omega \subset \sigma_A(x)^c$ é buraco de $\sigma_A(x)$ então, pelo Lema 1.4.1, é uma componente conexa limitada de $\sigma_A(x)^c$. Reciprocamente, se $\Omega$ é uma componente conexa limitada, como $\sigma_A(x)^c$ é aberto, temos que $\Omega$ é aberto, decorrendo que $\partial\Omega$ está em $\sigma_A(x)$, e concluindo assim que $\Omega$ é um buraco de $\sigma_A(x)$.

**Observações** 1.4.5. Nas condições anteriores, ou seja, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach com unidade $e$ e $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada com mesma unidade, se $x \in \mathcal{B}$ então:

(a) Pelo Teorema 1.4.2 de Caracterização do Espectro em Subálgebras, temos

$$\partial\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x) \subset \sigma_B(x).$$

(b) Note que também faz sentido falar do raio espectral de $x$ tanto em relação à álgebra $\mathcal{A}$ quanto em relação à álgebra $\mathcal{B}$, mas se são respectivamente $r_{\mathcal{A}}(x)$ e $r_{\mathcal{B}}(x)$, então pelo Teorema 1.3.4 da fórmula do raio espectral, teremos

$$r_{\mathcal{A}}(x) = r_{\mathcal{B}}(x)$$

e ambos iguais a $\lim ||x^n||^{1/n}$.

## 1.5 O Teorema dos Subespaços Invariantes de Lomonosov

**Definição 1.5.1.** Seja $X$ um espaço de Banach complexo, e seja $T \in \mathcal{L}(X)$. Então um subespaço invariante do operador $T$ é um subespaço vetorial fechado $M$ de $X$ tal que $M \neq \{0\}$, $M \neq X$ e $T(M) \subset M$.

**Teorema 1.5.2** (Subespaços invariantes de Lomonosov)**.** *Seja $X$ um espaço de Banach complexo de dimensão infinita, e seja $T \in B(X)$ um operador compacto não nulo. Então existe um subespaço $M \subset X$ fechado, tal que $\{0\} \neq M \neq X$ e*

$$S(M) \subset M,$$

*para todo $S \in B(X)$ que comuta com $T$. Em particular, todo operador $S \in B(X)$ que comuta com algum operador compacto $T \in B(X)$ possui um subespaço invariante.*

**Demonstração:** Defina primeiro

$$\Gamma := \{S \in B(X) \ ; \ S \circ T = T \circ S\}$$

e, para todo $y \in X$ não nulo, defina

$$\Gamma(y) := \{S(y) \in X \ ; \ S \in \Gamma\}.$$

Não é difícil provar que $\Gamma$ é subálgebra fechada de $B(X)$ que possui identidade, e portanto $\overline{\Gamma(y)}$ é subespaço fechado de $X$. Note que se $y \in X$ é não nulo então $\overline{\Gamma(y)} \neq \{0\}$, pois contém $y$, e

$$S(\overline{\Gamma(y)}) \subset \overline{\Gamma(y)},$$

para todo $S \in \Gamma$, já que $\Gamma$ é fechado para a multiplicação da álgebra. Então se existir $y \in X$ não nulo em que $\overline{\Gamma(y)} \neq X$, o resultado estará provado! Basta tomar $M := \overline{\Gamma(y)} \neq X$.

Então nos concentremos no caso em que $\overline{\Gamma(y)} = X$, para todo $y \in X$ não nulo. Isto significa que, para todo $y \in X$ não nulo e qualquer bola aberta $B$ de $X$, temos

$$\Gamma(y) \cap B \neq \varnothing. \tag{1.43}$$

Note que existe $x_0 \in X$ tal que $T(x_0) \neq 0$ e portanto $x_0 \neq 0$, existindo, dessa maneira, uma bola aberta $B \subset X$ tal que

$$||T(x)|| \geq \frac{1}{2}||T(x_0)|| \qquad \text{e} \qquad ||x|| \geq \frac{1}{2}||x_0|| \tag{1.44}$$

para todo $x \in B$. Definindo $K := \overline{T(B)}$, então $K$ é compacto e, por (1.44), temos $0 \notin K$. Para todo $y$ não nulo temos, por (1.43), que $\Gamma(y) \cap B \neq \varnothing$. Isto significa que, para cada $y \in K$, temos $y$ não nulo e portanto existe $S_y \in \Gamma$ onde $S_y(y) \in B$ e portanto existe uma vizinhança $W_y \subset X$ de $y$ tal que $S_y(W_y) \subset B$. Note que

$$K \subset \bigcup_{y \in K} W_y,$$

e como $K$ é compacto, existem $W_1, ..., W_n \subset X$ abertos e existem $S_1, ..., S_n \in \Gamma$ tais que $S_i(W_i) \subset B$ e

$$K \subset W_1 \cup ... \cup W_n.$$

Defina

$$\mu := \text{máx}\{||S_{i_1}||, ..., ||S_{i_n}||\}.$$

Vamos definir a seguinte sequência em $K$. Sabemos que $x_0 \in B$ e portanto $T(x_0) \in K$, assim existe $i_1 \in \{1, ..., n\}$ tal que $S_{i_1}(T(x_0)) \in B$. Então defina $x_1 := S_{i_1}(T(x_0))$, agora $x_1 \in B$ e logo $T(x_1) \in K$, assim existe $i_2 \in \{1, ..., n\}$ tal que $S_{i_2}(T(x_1)) \in B$, então defina $x_2 := S_{i_2}(T(x_1))$. Prosseguindo dessa maneira temos

$$x_n := S_{i_n}(T(S_{i_{n-1}}...(S_{i_1}(T(x_0)))...))$$

e notando, dessa maneira, que $x_n \in B$, temos

$$\frac{1}{2}||x_0|| \leq ||x_n|| \leq \mu^n ||T^n|| \cdot ||x_0||.$$

Mas isto nos diz que

$$\mu \cdot \lim ||T^n||^{1/n} > \frac{1}{2} \qquad \text{e portanto} \qquad r(T) > 0.$$

Assim existe $\lambda \in \sigma(T)$ com $\lambda \neq 0$, e como $T$ é compacto, temos que $\lambda$ é auto-valor de $T$ tal que

$$M_\lambda := \{x \in X \ ; \ Tx = \lambda x\}$$

é subespaço de dimensão finita. Logo, $\{0\} \neq M_\lambda \neq X$ com $M_\lambda$ fechado em $X$. Note ainda que se $x \in M_\lambda$ e $S \in \Gamma$, então

$$T(S(x)) = S(T(x)) = S(\lambda x) = \lambda S(x)$$

e logo $S(x) \in M_\lambda$, o que prova

$$S(M_\lambda) \subset M_\lambda,$$

para todo $S \in \Gamma$. Assim $M_\lambda$ satisfaz a conclusão do Teorema e, em qualquer caso, o Teorema está provado!

■

## 1.6 Exercícios

**Exercício 1.** Prove que toda álgebra de Banach com unidade $\mathcal{A}$ é isomorfa isometricamente a uma subálgebra fechada $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{L}(A)$ que contém a identidade.

**Exercício 2.** Prove que toda álgebra de Banach $\mathcal{A}$ é isomorfa isometricamente a uma subálgebra fechada $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{L}(X)$, onde $X$ é um espaço de Banach complexo.

**Exercício 3.** Prove que toda álgebra complexa com unidade de dimensão finita é isomorfa a uma subálgebra $\mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{C})$ de uma álgebra $M_n(\mathbb{C})$ de matrizes $n \times n$ que contenha a matriz identidade. Conclua que, em dimensão finita, se $x \cdot y = e$ então $y \cdot x = e$.

**Exercício 4.** Seja $\mathcal{B}$ uma álgebra de Banach com unidade, então existe álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com unidade que contém $\mathcal{B}$ como subálgebra, mas a unidade das duas não são a mesma.

**Exercício 5.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, e suponha que $\sigma(a)$ é conexo, para todo $a \in \mathcal{A}$, suponha ainda que $\mathcal{A}$ seja isomorfo isometricamente a $C(X)$ para algum espaço compacto $X$. Prove que $X$ é conexo.

**Exercício 6.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa com unidade $e$, e seja $a \in \mathcal{A}$. Prove que

$$\{p(a) \in \mathcal{A} \ ; \ p(x) \in \mathbb{C}[X]\}$$

é a menor subálgebra de $\mathcal{A}$ que possui o conjunto $\{e, a\}$. Essa álgebra é chamada álgebra gerada pelo conjunto $\{e, a\}$.

**Exercício 7.** Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff e $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo com a seguinte propriedade,

$$f(x) > 0, \ \forall x \in X \ \Rightarrow \ \varphi(f) > 0,$$

para todo $f \in C_0(X)$. Se $X$ é de Lindelöf, então prove que existe $x \in X$ tal que $\varphi(f) = f(x)$, para todo $f \in C_0(X)$.

**Exercício 8.** Seja $\Omega$ um espaço compacto de Hausdorff, e $\varphi : C(\Omega) \to \mathbb{C}$ que não é evaluado em ponto algum, isto é, não existe $z_0 \in \Omega$ onde $\varphi(f) = f(z_0)$, para todo $f \in C(\Omega)$. Prove que, para todo $z \in \Omega$, existe uma função $f_z \in C(\Omega)$ onde $f_z(z) \neq 0$ e $\varphi(f_z) = 0$.

**Exercício 9.** Encontre uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ não nula tal que não existe um homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

**Exercício 10.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach, e $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear não nulo tal que $\varphi(x^2) = \varphi(x)^2$, para todo $x \in \mathcal{A}$. Então prove que $\varphi$ é um homomorfismo complexo.

**Exercício 11.** Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach com unidade e $x, y \in \mathcal{A}$. Mostre que

(a) $r(x \cdot y) = r(y \cdot x)$

(b) Se $x \cdot y$ e $y \cdot x$ são invertíveis, então $x$ e $y$ são invertíveis.

**Exercício 12.** Encontre uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ em que existam elementos $a, b \in \mathcal{A}$ tais que não ocorre $r(a \cdot b) \leq r(a) \cdot r(b)$ e nem $r(a + b) \leq r(a) + r(b)$.

**Exercício 13.** Prove que $\{T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)\ ;\ T \text{ é invertível }\}$ é um aberto de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.

**Exercício 14.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Prove que $\{T \in B(\mathcal{A})\ ;\ T \text{ é injetiva}\}$ é um aberto de $B(\mathcal{A})$.

**Exercício 15.** Encontre uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com unidade, onde existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $x^2 = x$ e $\sigma(x)$ não é unitário.

# Capítulo 2

# C*-álgebras

Iremos tratar neste capítulo de um caso particular de álgebra de Banach, que são as C*-álgebras. Basicamente, o que caracteriza uma C*-álgebra é a condição C* (2.1). Nos concentraremos principalmente nos resultados iniciais de C*-álgebras. Os trabalhos de Gelfand e Naimark, que serão trabalhados neste capítulo, nos remetem à caracterização de todas as C*-álgebras comutativas com unidade, e à construção de Gelfand-Naimark-Segal. Além disso, faremos um breve estudo, na Seção 2.2, sobre ideais, álgebra quociente e a projeção canônica para desenvolvermos todas as ferramentas suficientes para o Teorema de Gelfand-Naimark.

## 2.1 C*-álgebras: Definições e Propriedades

**Definição 2.1.1.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa. Uma função $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, onde $a \mapsto a^*$, é dita uma involução se temos

$$(a + \lambda b)^* = a^* + \overline{\lambda} b^*,$$

$$(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^* \qquad \text{e} \qquad (a^*)^* = a,$$

para todos $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Neste caso diremos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra com involução. Diremos ainda que um elemento $a \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto, normal ou unitário respectivamente quando $a = a^*$, $\quad a^* \cdot a = a \cdot a^* \quad$ ou $\quad a \cdot a^* = a^* \cdot a = e$.

**Definição 2.1.2.** Diremos que uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com involução é uma C*-álgebra se

$$||a \cdot a^*|| = ||a||^2, \tag{2.1}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

**Observações** 2.1.3. Algumas observações são importantes mediante as definições anteriores.

(a) A condição (2.1) acima é conhecida como condição C*.

(b) Se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra, então

$$||a|| = ||a^*||, \tag{2.2}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Com efeito, $||a||^2 \leq ||a \cdot a^*|| \leq ||a||.||a^*||$, concluindo que $||a|| \leq ||a^*||$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Notando, além disso, que $||a^*|| \leq ||(a^*)^*||$, fica provado (2.2).

(c) Na Definição 2.1.2, a condição C* (2.1) pode ser substituída por

$$||a \cdot a^*|| \geq ||a||^2, \tag{2.3}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. De fato, suponha que (2.3) seja verdadeira. Como na letra (b) desta observação provamos que a involução é uma isometria utilizando apenas a condição (2.3) acima, temos $||a \cdot a^*|| \leq ||a||.||a^*|| = ||a||^2$. Isso, juntamente com a condição (2.3), nos fornece (2.1).

(d) Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra complexa com involução, então facilmente provamos, por definição, que $e$, $a + a^*$, $i(a - a^*)$ e $a \cdot a^*$ são elementos auto-adjuntos, para todo $a \in \mathcal{A}$.

(e) Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra complexa com involução e com unidade, então $a$ é invertível se, e somente se, $a^*$ é invertível. Neste caso $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Consequentemente, para todo $a \in \mathcal{A}$, temos

$$\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}. \tag{2.4}$$

Vimos no primeiro capítulo que qualquer álgebra de Banach pode ser imersa em uma outra álgebra de Banach que possua a unidade no Teorema 1.1.4. Veremos que isto também pode ser provado para C*-álgebras, isto é, toda C*-álgebra pode ser imersa em uma C*-álgebra que possua unidade. Porém se temos $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra e fizermos a extensão da álgebra normada como no Teorema 1.1.4, não conseguimos provar a condição C* para a involução natural que se extende em $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$. Faremos o resultado de imersão de uma C*-álgebra em uma C*-álgebra que possua unidade no próximo Teorema em todos os seus devidos detalhes.

**Teorema 2.1.4** (Imersão em C*-álgebra com unidade)**.** *Toda C*-álgebra $\mathcal{A}$ está contida em uma C*-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ com unidade, onde $\mathcal{A}$ herda as operações, a norma e a involução de $\widehat{\mathcal{A}}$. Mais ainda, $x \cdot \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ para qualquer elemento $x \in \widehat{\mathcal{A}}$.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra **que não possui unidade**. Então defina $\widehat{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \times \mathbb{C}$. E assim, $\widehat{\mathcal{A}}$ pode ser visto naturalmente como um espaço vetorial complexo, definindo a operação

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (a \cdot b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu).$$

Sabemos, como já visto no Teorema 1.1.4, que esta operação torna $\widehat{\mathcal{A}}$ uma álgebra complexa com unidade $(0, 1)$. Podemos ainda definir

$$(a, \lambda)^* := (a^*, \overline{\lambda}).$$

Como $((a, \lambda)^*)^* = (a^*, \overline{\lambda})^* = ((a^*)^*, \overline{\overline{\lambda}}) = (a, \lambda)$, além de obtermos as igualdades

$$\begin{aligned} ((a, \lambda) + \theta(b, \mu))^* &= (a + \theta b, \lambda + \theta\mu)^* \\ &= ((a + \theta b)^*, \overline{\lambda + \theta\mu}) \\ &= (a^* + \overline{\theta} b^*, \overline{\lambda} + \overline{\theta}\overline{\mu}) \\ &= (a^*, \overline{\lambda}) + \overline{\theta}(b^*, \overline{\mu}) \\ &= (a, \lambda)^* + \overline{\theta}(b, \mu)^* \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ((a, \lambda) \cdot (b, \mu))^* &= (a \cdot b + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)^* \\ &= ((a \cdot b + \lambda b + \mu a)^*, \overline{\lambda\mu}) \\ &= (b^* \cdot a^* + \overline{\lambda} b^* + \overline{\mu} a^*, \overline{\mu}\overline{\lambda}) \\ &= (b^*, \overline{\mu}) \cdot (a^*, \overline{\lambda}) = (b, \mu)^* \cdot (a, \lambda)^*. \end{aligned}$$

Concluimos que * é uma involução na álgebra complexa $\mathcal{A}$. Agora defina, para cada $(a, \lambda) \in \widehat{\mathcal{A}}$, a transformação linear

$$\begin{aligned} T_{(a,\lambda)} \ : \ \mathcal{A} &\to \mathcal{A} \\ x &\mapsto a \cdot x + \lambda x. \end{aligned}$$

Segue da Observação 1.1.2 que $T_{(a,\lambda)}$ é contínuo. Defina em $\widehat{\mathcal{A}}$

$$||(a, \lambda)|| := ||T_{(a,\lambda)}|| \tag{2.5}$$

e provemos que $||.||$ é uma norma em $\widehat{\mathcal{A}}$. Primeiro perceba que, para todo $\zeta \in \mathbb{C}$, temos $||\zeta(a,\lambda)|| = |\zeta|.||(a,\lambda)||$. Agora, note que se $||(a,\lambda)|| = 0$ então $\lambda = 0$. De fato, supondo, por absurdo, que $\lambda \neq 0$, temos $a \cdot x + \lambda x = 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$, através de (2.5). Portanto, para todo $x \in \mathcal{A}$, temos

$$-\frac{a}{\lambda} \cdot x = x, \qquad \text{além disso,} \qquad x^* \cdot \left(-\frac{a^*}{\overline{\lambda}}\right) = x^*.$$

Como $x \in \mathcal{A}$ é arbitrário, temos $-\frac{a}{\lambda} = -\frac{a^*}{\overline{\lambda}}$, e ainda mais, este elemento seria uma unidade de $\mathcal{A}$, o que é um absurdo, pois tomamos $\mathcal{A}$ sem unidade. Logo, $\lambda = 0$ e $||(a,0)|| = 0$. Disso, $a \cdot x = 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$, e tomando $x = a^*$ obtemos que $a = 0$. Assim, provamos que $||(a,\lambda)|| = 0$ implica $(a,\lambda) = (0,0)$. Além disso, para todos $(a,\lambda),(b,\mu) \in \widehat{\mathcal{A}}$, valem as igualdades

$$T_{(a,\lambda)\cdot(b,\mu)} = T_{(a,\lambda)} \circ T_{(b,\mu)} \qquad \text{e} \qquad T_{(a,\lambda)+(b,\mu)} = T_{(a,\lambda)} + T_{(b,\mu)}. \tag{2.6}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
T_{(a,\lambda)\cdot(b,\mu)}(x) &= T_{(a\cdot b+\lambda b+\mu a,\lambda\mu)}(x) \\
&= (a \cdot b + \lambda b + \mu a) \cdot x + \lambda\mu x \\
&= a \cdot b \cdot x + \lambda b \cdot x + \mu a \cdot x + \lambda\mu x \\
&= a \cdot b \cdot x + \mu a \cdot x + \lambda b \cdot x + \lambda\mu x \\
&= a \cdot (b \cdot x + \mu x) + \lambda(b \cdot x + \mu x) \\
&= T_{(a,\lambda)}(b \cdot x + \mu x) \\
&= T_{(a,\lambda)}(T_{(b,\mu)(x)}) \\
&= (T_{(a,\lambda)} \circ T_{(b,\mu)})(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T_{(a,\lambda)+(b,\mu)}(x) &= T_{(a+b,\lambda+\mu)}(x) \\
&= (a+b) \cdot x + (\lambda+\mu)x \\
&= a \cdot x + b \cdot x + \lambda x + \mu x \\
&= a \cdot x + \lambda x + b \cdot x + \mu x \\
&= T_{(a,\lambda)}(x) + T_{(b,\lambda)}(x) \\
&= (T_{(a,\lambda)} + T_{(b,\mu)})(x)
\end{aligned}$$

para quaisquer $(a,\lambda),(b,\mu) \in \widehat{\mathcal{A}}$ e $x \in \mathcal{A}$, demonstram as igualdades (2.6) concluindo que

$$||(a,\lambda) + (b,\mu)|| \leq ||(a,\lambda)|| + ||(b,\mu)||,$$

$$||(a,\lambda)\cdot(b,\mu)|| \leq ||(a,\lambda)||.||(b,\mu)||.$$

Além disso, temos $||(0,1)|| = 1$. Portanto (2.5) define uma norma em $\widehat{\mathcal{A}}$.

Provemos agora que $(\widehat{\mathcal{A}}, ||.||)$ é completo. Para isso defina

$$\begin{array}{rcccl} T_1 & : & \widehat{\mathcal{A}} & \to & \mathbb{C} \\ & & (a,\lambda) & \mapsto & \lambda \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcccl} T_2 & : & \widehat{\mathcal{A}} & \to & \mathcal{A} \\ & & (a,\lambda) & \mapsto & a. \end{array}$$

Ora, $ker\ T_1 = \mathcal{A}\times\{0\}$ e como $||(a,0)|| = |a|$ para todo $a\in\mathcal{A}$, segue que $\mathcal{A}\times\{0\}$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{A}$ concluindo que $ker\ T_1$ é um espaço de Banach. Portanto $ker\ T_1$ é fechado em $\widehat{\mathcal{A}}$. Como $T_1$ é um funcional linear com $ker\ T_1$ fechado, então $T_1$ é contínuo. De fato, suponha, por absurdo, que $T_1$ seja descontínuo. Portanto existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\widehat{\mathcal{A}}$ tal que $x_n \to 0$ e $T_1(x_n) \not\to 0$, existindo subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $|T_1(x_{n_k})| \geq \epsilon$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Definindo

$$y_k := \frac{x_{n_k}}{T_1(x_{n_k})} - z,$$

onde $z\in\widehat{\mathcal{A}}$ é um elemento qualquer satisfazendo $T_1(z) = 1$, obtemos $T_1(y_k) = \frac{T_1(x_{n_k})}{T_1(x_{n_k})} - T_1(z) = 0$, isto é, $y_k \in ker\ T_1$. Além disso, como $x_{n_k}\to 0$ e $|T_1(x_{n_k})| \geq \epsilon$ concluimos que

$$\left|\left|\frac{x_{n_k}}{T_1(x_{n_k})}\right|\right| \leq \frac{||x_{n_k}||}{\epsilon} \to 0,$$

e portanto $y_k \to -z$ em $(\widehat{\mathcal{A}}, ||.||)$. Mas $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $ker\ T_1$ e $ker\ T_1$ é fechado, concluindo que $T_1(-z) = 0$, o que é um absurdo! Portanto $T_1$ é contínuo.

Com a continuidade de $T_1$, deduzimos a continuidade de $T_2$. Com efeito,

$$\begin{aligned} ||T_2(a,\lambda)|| &= ||a|| = ||(a,0)|| \leq ||(a,\lambda)|| + ||(0,-\lambda)|| = ||(a,\lambda)|| + |T_1(a,\lambda)| \\ &\leq ||(a,\lambda)|| + ||T_1||.||(a,\lambda)|| = (1+||T_1||)||(a,\lambda)||. \end{aligned}$$

Provemos a completude. Seja $(a_n,\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\widehat{\mathcal{A}}$. Então $T_1(a_n,\lambda_n)$ e $T_2(a_n,\lambda_n)$ são de Cauchy em $\mathbb{C}$ e $\mathcal{A}$ respectivamente, concluindo que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem para algum $\lambda\in\mathbb{C}$ e algum $a\in\mathcal{A}$. Por outro lado,

$$||T_{(a_n,\lambda_n)} - T_{(a_m,\lambda_m)}|| = ||(a_n,\lambda_n) - (a_m,\lambda_m)||,$$

e portanto $(T_{(a_n,\lambda_n)})_{n\in\mathcal{A}}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ e, portanto, existe $T\in\mathcal{L}(\mathcal{A})$ tal que $T_{(a_n,\lambda_n)} \to T$. Note, enfim, que $T = T_{(a,\lambda)}$. De fato, se $x\in\mathcal{A}$ então $T_{(a_n,\lambda_n)}(x) \to T(x)$ ou seja

$$a_n\cdot x + \lambda_n x \to T(x).$$

Por outro lado, pela continuidade das operações em $\mathcal{A}$, temos

$$a_n \cdot x + \lambda_n x \to a \cdot x + \lambda x$$

e, pela unidade do limite, temos $T(x) = a \cdot x + \lambda x = T_{(a,\lambda)}(x)$. Como $x \in \mathcal{A}$ foi arbitrário, então $T = T_{(a,\lambda)}$. Então

$$||(a_n, \lambda_n) - (a, \lambda)|| = ||T_{(a_n,\lambda_n)} - T_{(a,\lambda)}|| \to 0,$$

e consequentemente $(a_n, \lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente em $\widehat{\mathcal{A}}$. Assim, $\widehat{\mathcal{A}}$ é uma álgebra de Banach com involução.

Resta-nos provar a condição C*. Considere $(a, \lambda) \in \widehat{\mathcal{A}}$. Então, para todo $x \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned}
||T_{(a,\lambda)}(x)||^2 &= ||a \cdot x + \lambda x||^2 \\
&= ||(a \cdot x + \lambda x)^* \cdot (a \cdot x + \lambda x)|| \\
&= ||(x^* \cdot a^* + \overline{\lambda} x^*) \cdot (a \cdot x + \lambda x)|| \\
&= ||(\ (x^* \cdot a^* + \overline{\lambda} x^*) \cdot (a \cdot x + \lambda x)\ ,\ 0\ )|| \\
&= ||(x^*, 0) \cdot (a, \lambda)^* \cdot (a, \lambda) \cdot (x, 0)|| \\
&\leq ||(x^*, 0)||.||(a, \lambda)^* \cdot (a, \lambda)||.||(x, 0)|| \\
&\leq ||(a, \lambda)^* \cdot (a, \lambda)||.||x||^2
\end{aligned}$$

e, dessa maneira, segue

$$||(a, \lambda)||^2 = ||T_{(a,\lambda)}||^2 \leq ||(a, \lambda)^* \cdot (a, \lambda)||,$$

demonstrando, finalmente, que $\widehat{\mathcal{A}}$ satisfaz a condição (2.3) e portanto é uma C*-álgebra.

■

**Observação** 2.1.5. Note que a norma definida na álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ no Teorema 2.1.4 difere da norma definida na álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ no Teorema 1.1.4. Note também que ao colocarmos $\mathcal{A}$ dentro de $\widehat{\mathcal{A}}$, tivemos obrigatoriamente que ter $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra **sem unidade**, o que não aconteceu no Teorema 1.1.4, ou seja, se tivéssemos uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ com ou sem unidade, poderíamos imergi-la propriamente em uma álgebra de Banach com unidade $\widehat{\mathcal{A}}$. Isto se dá pelo fato de que as estruturas C*-álgebras requerem condições que exigem mais de sua estrutura. Isto significa que nas demonstrações em que precisamos utilizar sua estrutura, teremos bem menos opções do que as álgebras de Banach, porém como consequência, teremos resultados bem mais sólidos para teoria, como pode ser constatado nos Exercícios 17 e 31.

**Exemplo 2.1.6.** *Quando $X$ é um espaço compacto de Hausdorff, então já sabemos do capítulo anterior que $C(X)$ é uma álgebra de Banach com a norma da convergência uniforme. Podemos ainda definir a seguinte involução sobre $C(X)$: se $f \in C(X)$ então defina $f^* : X \to \mathbb{C}$ por*

$$f^*(x) = \overline{f(x)}, \tag{2.7}$$

*e temos $f^* \in C(X)$. Facilmente provamos que $*$ é uma involução e, mais do que isso, note que*

$$||f \cdot f^*|| = \sup_{x\in X} |f(x) f^*(x)| = \sup_{x\in X} |f(x)|^2 \geq \left( \sup_{x\in X} |f(x)| \right)^2 = ||f||^2,$$

*onde para notar a única desigualdade acima, observe que $\sqrt{sup_{x\in X}|f(x)|^2}$ é cota superior do conjunto $\{|f(x)| \in \mathbb{R} \ ; \ x \in X\}$. Assim, $C(X)$ cumpre a condição (2.3), e portanto é uma C*-álgebra.*

*Assim, se $X$ é um espaço localmente compacto de Hausdorff, podemos provar facilmente que $C_0(X)$ possui uma involução como definida em (2.7) que, de maneira análoga, podemos provar que é uma C*-álgebra.*

**Exemplo 2.1.7.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Sabemos que $B(\mathcal{H})$, como definida no Exemplo 1.1.9, é uma álgebra de Banach, e se $T \in B(\mathcal{H})$ então sabemos que existe um único operador linear contínuo $T^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, para todos $x, y \in \mathcal{H}$. Dessa forma*

$$\begin{array}{ccc} B(\mathcal{H}) & \to & B(\mathcal{H}) \\ T & \mapsto & T^* \end{array}$$

*é uma involução em $B(\mathcal{H})$. Note também que*

$$\begin{array}{rclcl} ||T(x)||^2 & = & |\langle T(x), T(x)\rangle| & = & |\langle x, (T^* \circ T)(x)\rangle| \\ & \leq & ||x||.||(T^* \circ T)(x)|| & \leq & ||T^* \circ T||.||x||^2, \end{array}$$

*para todo $x \in \mathcal{H}$, e portanto temos*

$$||T||^2 \leq ||T^* \circ T||,$$

*provando que $B(\mathcal{H})$ cumpre a condição (2.3), que é equivalente a condição $C^*$ (2.1). Assim $B(\mathcal{H})$ é uma $C^*$-álgebra com unidade, onde a unidade é a transformação identidade.*

**Proposição 2.1.8.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa com involução, e seja $a \in \mathcal{A}$. Então $a$ pode ser escrito, de maneira única, da forma $a = u + iv$, onde $u, v \in \mathcal{A}$ são auto-adjuntos.*

**Demonstração:** Se $a = u + iv$, com $u, v \in \mathcal{A}$ auto-adjuntos, então facilmente provamos que

$$\begin{cases} a = u + iv \\ a^* = u - iv \end{cases}$$

e, da equação acima, obtemos

$$u = \frac{a + a^*}{2} \qquad \text{e} \qquad v = -i\left(\frac{a - a^*}{2}\right), \tag{2.8}$$

provando que essa representação, se existir, é única, já que terá que ser da forma (2.8). Agora, para notar que existe, basta notar que se acontece (2.8) então $u, v \in \mathcal{A}$ são auto-adjuntos e satisfazem $a = u + iv$.

■

**Teorema 2.1.9.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $C^*$-álgebra com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento auto-adjunto. Então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

**Demonstração:** Provemos primeiramente que, para todo $x \in \mathcal{A}$, temos

$$x \text{ é auto-adjunto} \qquad \Rightarrow \qquad x + ie \text{ é invertível.} \tag{2.9}$$

De fato, seja $x$ é auto-adjunto e suponha, por absurdo, que $x + ie$ é não invertível. Segue que $-i \in \sigma(x)$ e portanto, para todo $\xi > 0$, temos que $(\xi + 1)e - (\xi e + ix) = e - ix = i(-ie - x)$ é não invertível, concluindo assim, que

$$\xi + 1 \in \sigma(\xi e + ix)$$

e, da pertinência acima e da condição C* (2.1), obtemos

$$|\xi + 1|^2 \leq ||\xi e + ix||^2 = ||(\xi e + ix)^*(\xi e + ix)|| = ||(\xi e)^2 + x^2|| \leq \xi^2 + ||x||^2,$$

implicando que $1 + 2\xi \leq ||x||^2$, para todo $\xi > 0$. Ora, isto é impossível em $\mathbb{R}$, então temos uma contradição, provando, dessa forma, que $x + ie$ é invertível. Está provada a implicação (2.9).

Agora, para concluir o resultado, suponha que $a \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto, e $\lambda \in \sigma(a)$. Sabemos que existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda = \alpha + i\beta$. Se, por acaso, $\beta \neq 0$ então

$$\lambda e - a = \beta \left[ \frac{\alpha e - a}{\beta} + ie \right]$$

e, por $\frac{\alpha e - a}{\beta}$ ser auto adjunto, temos uma contradição, já que o primeiro membro da igualdade acima é não invertível, com o segundo membro sendo invertível, por (2.9). Logo não pode ocorrer $\beta \neq 0$, provando que $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$.

■

**Proposição 2.1.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade e seja $a \in \mathcal{A}$. Se $a$ é normal, então*

$$||a|| = r(a).$$

**Demonstração:** Primeiro provemos o caso em que o elemento é auto-adjunto. Seja $x \in \mathcal{A}$ auto-adjunto. Pela condição C*, temos $||x^2|| = ||x||^2$, mas como $x^2$ é auto adjunto, então $||x^4|| = ||(x^2)^2|| = ||x^2||^2 = ||x||^4$ e, de maneira indutiva, obtemos $||x^{2^n}|| = ||x||^{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, pela Fórmula do Raio Espectral, obtemos

$$r(x) = \lim ||x^{2^n}||^{1/2^n} = \lim ||x|| = ||x||,$$

e o caso auto-adjunto está provado. Agora, provemos o resultado para o caso geral. Seja $a \in \mathcal{A}$ normal. Então de posse de que $a \cdot a^*$ é auto-adjunto, tem-se

$$\begin{aligned} ||a||^2 &= ||a \cdot a^*|| = r(a \cdot a^*) = \lim ||(a \cdot a^*)^n||^{1/n} \\ &\leq \lim ||a^n||^{1/n}. \lim ||(a^n)^*||^{1/n} = \lim ||a^n||^{1/n}. \lim ||a^n||^{1/n} \\ &= r(a)^2 \leq ||a||^2, \end{aligned}$$

e, consequentemente, obtemos $r(a) = ||a||$.

■

**Observação** 2.1.11. Observe que, pelo resultado anterior, toda C*-álgebra comutativa $\mathcal{A}$ satisfaz $||a|| = r(a)$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Isto será de utilidade fundamental para o Teorema de Gelfand-Naimark.

**Teorema 2.1.12.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, e seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo. Então*

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}, \tag{2.10}$$

*para todo $a \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** Suponha primeiramente que $\mathcal{A}$ seja uma C*-álgebra com unidade $e$. Se $x \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto então, pelo Teorema 1.3.7 de Gleason-Kahane-Zelazko, temos $\varphi(x) \in \sigma(x)$ e portanto, pelo Teorema 2.1.9, temos

$$\varphi(x) \in \mathbb{R}.$$

Agora, suponha $a \in \mathcal{A}$ qualquer e, pela Proposição 2.1.8, podemos escrever $a = u + iv$, com $u, v \in \mathcal{A}$ auto-adjuntos. Pelo que provamos anteriormente, temos $\varphi(u), \varphi(v) \in \mathbb{R}$ e portanto

$$\begin{aligned} \varphi(a^*) &= \varphi((u+iv)^*) &&= \varphi(u-iv) \\ &= \varphi(u) - i\varphi(v) &&= \overline{\varphi(u) + i\varphi(v)} \\ &= \overline{\varphi(u+iv)} &&= \overline{\varphi(a)}, \end{aligned}$$

concluindo (2.10). Suponha agora que $\mathcal{A}$ seja uma C*-álgebra sem unidade. Pela demonstração do Teorema 2.1.4 de Imersão em C*-álgebra com unidade, podemos fazer $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ uma C*-álgebra com unidade $e = (0, 1)$, e definir

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \mathcal{A} \times \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ (a, \lambda) &\mapsto \varphi(a) + \lambda. \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi feito no Teorema 1.2.4 deduzimos que $\widetilde{\varphi}$ é um homomorfismo complexo da C*-álgebra $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$, resultando, pela primeira parte, que

$$\varphi(a^*) = \widetilde{\varphi}(a^*, 0) = \widetilde{\varphi}((a, 0)^*) = \overline{\widetilde{\varphi}(a, 0)} = \overline{\varphi(a)},$$

para todo $a \in \mathcal{A}$.

■

**Observação** 2.1.13. O Teorema 2.1.12 significa que todo homomorfismo complexo de uma C*-álgebra preserva involução. Sendo $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, e $a \in \mathcal{A}$ auto-adjunto, se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo, então, pelo Teorema anterior, temos $\varphi(a) \in \mathbb{R}$. Temos uma consequência do resultado acima.

**Corolario 2.1.14.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, sejam ainda $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ homomorfismo complexo e $f \in C_0(X)$. Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, então $\varphi(f) \geq 0$.*

**Demonstração:** Se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in X$, então sabemos que existe $g : X \to \mathbb{C}$ contínua tal que $g(x) \geq 0$, para todo $x \in X$, e $g^2 = f$. Não é difícil provar que $g \in C_0(X)$. Como $g(x) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in X$, temos $\varphi(g) = \varphi(g^*) = \overline{\varphi(g)}$, através do Teorema 2.1.12. Portanto $\varphi(g) \in \mathbb{R}$, donde concluímos $\varphi(f) = \varphi(g^2) = \varphi(g)^2 \geq 0$.

■

**Definição 2.1.15.** Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras complexas com unidade. Uma transformação linear $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é dita um homomorfismo se

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(x \cdot y), \qquad \text{e} \qquad \varphi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}.$$

Se além disso, $\varphi$ for bijeção, então diremos que $\varphi$ é um isomorfismo.

**Observação** 2.1.16. Observe que, por definição, homomorfismos complexos definidos sobre álgebras complexas com unidade são casos particulares de homomorfismos. Não é difícil provar que imagens de homomorfismos são subálgebras sobre seu contradomínio. Além disso, pode-se provar, sem maiores dificuldades, que a composição de homomorfismos é um homomorfismo.

**Teorema 2.1.17.** *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas C*-álgebras com unidades, e $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo que preserva involução, isto é,*

$$\pi(a^*) = \pi(a)^*,$$

*para todo $a \in \mathcal{A}$. Então $\pi$ é contínuo e $||\pi|| = 1$.*

**Demonstração:** Note primeiro que, se $x \in \mathcal{A}$ possui inverso, então $\pi(x)$ possui inverso, a saber, $\pi(x)^{-1} = \pi(x^{-1})$. Assim, sendo $a \in \mathcal{A}$, se $\lambda e_{\mathcal{B}} - \pi(a)$ é não invertível em $\mathcal{B}$, então $\lambda e_{\mathcal{A}} - a$ é não invertível em $\mathcal{A}$, pois

$$\lambda e_{\mathcal{B}} - \pi(a) = \pi(\lambda e_{\mathcal{A}} - a).$$

De maneira natural, isto nos diz que

$$\sigma(\pi(a)) \subset \sigma(a),$$

donde conclui-se que

$$r(\pi(a)) \leq r(a), \tag{2.11}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Agora, note que se $a \in \mathcal{A}$ então $\pi(a)^* \cdot \pi(a)$ é auto-adjunto em $\mathcal{B}$ e, pela Proposição 2.1.10, temos $||\pi(a)^* \cdot \pi(a)|| = r(\pi(a)^* \cdot \pi(a))$. Portanto

$$\begin{aligned} ||\pi(a)||^2 &= ||\pi(a)^* \cdot \pi(a)|| = r(\pi(a)^* \cdot \pi(a)) \\ &= r(\pi(a^* \cdot a)) \leq r(a^* \cdot a) \\ &\leq ||a^* \cdot a|| \leq ||a||^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$, onde a primeira desigualdade acima pode ser observada através da desigualdade (2.11). Mas como $\pi(e_{\mathcal{A}}) = e_{\mathcal{B}}$, então por (2.12) temos $\pi$ contínuo e $||\pi|| = 1$.

■

**Teorema 2.1.18.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma $C^*$-álgebra com unidade, e $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada com mesma unidade, tal que $\mathcal{B}$ seja fechada para a involução. Então, para todo $x \in \mathcal{B}$, temos $\sigma_A(x) = \sigma_B(x)$.*

**Demonstração:** Sabemos que todo elemento invertível em $\mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{A}$, e portanto $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$. Resta-nos provar a outra inclusão. Note primeiramente que se $b \in \mathcal{B}$ é auto-adjunto, então, pelo Teorema 2.1.9, temos $\sigma_B(b) \subset \mathbb{R}$ e portanto possui interior vazio, concluindo assim, pelo Corolário 1.4.4, que $\sigma_A(b) = \sigma_B(b)$.

Provemos agora que se $a \in \mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{A}$ então $a$ é invertível em $\mathcal{B}$. Se $a \in \mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{A}$, então $a^* \cdot a$ é invertível em $\mathcal{A}$, concluindo assim que $0 \notin \sigma_A(a^* \cdot a)$ e, por $a^* \cdot a$ ser auto-adjunto, devemos ter, pela primeira parte,

$$\sigma_A(a^* \cdot a) = \sigma_B(a^* \cdot a),$$

demonstrando que $0 \notin \sigma_B(a^* \cdot a)$, e resultando consequentemente que $a^* \cdot a$ é invertível em $\mathcal{B}$. Analogamente $a \cdot a^*$ é invertível em $\mathcal{B}$, portanto existem elementos $c, d \in \mathcal{B}$ tais que

$$a \cdot c = d \cdot a = e,$$

e notando que

$$d = d \cdot e = d \cdot a \cdot c = e \cdot c = c,$$

tem-se que $a$ é invertível em $\mathcal{B}$. Assim provamos que se $a \in \mathcal{B}$ é invertível em $\mathcal{A}$ então $a$ é invertível em $\mathcal{B}$. Consequentemente se $x \in \mathcal{B}$ e $\lambda \in \sigma_B(x)$ então $\lambda e - x$ é não invertível em $\mathcal{B}$, logo $\lambda e - x$ é não invertível em $\mathcal{A}$, e portanto $\lambda \in \sigma_A(x)$. Assim $\sigma_B(x) \subset \sigma_A(x)$, o que prova a dupla inclusão!

■

## 2.2 Ideais, Álgebra Quociente e Projeção Canônica

Nesta seção faremos um breve estudo sobre ideais, álgebras quocientes e a projeção canônica, o qual será bastante útil como ferramenta para o Teorema de Gelfand-Naimark.

**Definição 2.2.1.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa com unidade, e seja $J \subset \mathcal{A}$ um subespaço vetorial. Então $J$ é dito ser

- ideal de $\mathcal{A}$ se $A \cdot J \subset J$,
- ideal próprio de $\mathcal{A}$ se for ideal e $J \neq \mathcal{A}$,
- ideal maximal se for ideal próprio de $\mathcal{A}$ e for o único ideal próprio de $\mathcal{A}$ que contém $J$.

Note que um ideal maximal é maximal pela relação de inclusão no conjunto dos ideais próprios de $\mathcal{A}$. Além disso, núcleos de homomorfismos são ideais sobre seu domínio.

**Teorema 2.2.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa com unidade. Então todo ideal próprio de $\mathcal{A}$ está contido em algum ideal maximal.*

**Demonstração:** Basta usar o Lema de Zorn. Seja $I$ um ideal próprio de $\mathcal{A}$. Defina

$$S := \{J \subset \mathcal{A} \ ; \ J \text{ é ideal próprio de } \mathcal{A} \text{ que contém } I\},$$

notando que $S$ é não vazio, já que $I \in S$. Ora, $S$ está parcialmente ordenado pela relação de inclusão. Além disso, toda cadeia em $S$ possui uma cota superior em $S$. De fato, se $\{J_\alpha\}_{\alpha \in L}$ é uma cadeia em $S$, então $J := \bigcup_{\alpha \in L} J_\alpha$ é um elemento de $S$. Com efeito, se $x, y \in J$, então existem $\alpha_x, \alpha_y \in L$, onde $x \in J_{\alpha_x}$ e $y \in J_{\alpha_y}$, concluindo que $x, y \in J_{\alpha_x}$ ou $x, y \in J_{\alpha_y}$, mas em qualquer caso $x + y \in J$ e, analogamente, temos $\lambda x \in J$, sempre que $x \in J$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, se $x \in J$ e $y \in \mathcal{A}$, então $x \in J_{\alpha_0}$, para algum $\alpha_0 \in L$ e consequentemente $x \cdot y \in J_{\alpha_0} \subset J$. Por último, note que $J \neq \mathcal{A}$ pois $e \notin J$. Fica provado que $J \in S$ é cota superior para cadeia $\{J_\alpha\}_{\alpha \in L}$. Pelo Lema de Zorn, $S$ possui elemento $\mathscr{P}$ maximal. Assim, podemos demonstrar, sem maiores frustrações, que $\mathscr{P}$ é ideal maximal de $\mathcal{A}$.

■

Através do Teorema anterior, pode-se provar sem dificuldades que a interseção de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$ é não vazio e portanto um ideal de $\mathcal{A}$.

**Definição 2.2.3.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa com unidade. Então a interseção de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$ é chamado radical de Jacobson de $\mathcal{A}$ e denotado por $Rad_J(\mathcal{A})$.

**Teorema 2.2.4.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então todo ideal maximal de $\mathcal{A}$ é fechado.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{M}$ ideal maximal de $\mathcal{A}$. Não é difícil provar que $\overline{M}$ é ideal de $\mathcal{A}$. Como $M$ é ideal próprio, este não possui elementos invertíveis, pois caso existisse $x \in M$ invertível, teríamos o absurdo de que $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cdot x^{-1} \cdot x \subset M$. Logo $G(\mathcal{A})$ não intersecta $M$, mas como $G(\mathcal{A})$ é aberto, $G(\mathcal{A})$ não intersecta $\overline{M}$ e, assim $\overline{M}$ é ideal próprio que contém $M$. Como $M$ é maximal, concluímos que $M = \overline{M}$.

■

**Álgebra quociente.** Observe que se temos $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa comutativa com unidade e $J \subset \mathcal{A}$ um ideal de $\mathcal{A}$, então podemos definir uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$ por $x \sim y$ se $x - y \in J$. Quando $x \in \mathcal{A}$, representamos a classe de equivalência que contém $x$ por $x + J$. Note que

$$\mathcal{A}/\!\sim := \{x + J \ ; \ x \in \mathcal{A}\}$$

e podemos definir as seguintes operações em $\mathcal{A}/\sim$,

$$(x + J) + (y + J) := (x + y) + J, \qquad (x + J) \cdot (y + J) := (x \cdot y) + J,$$

$$\lambda(x+J) := (\lambda x) + J,$$

para todos $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Podemos facilmente provar que essas operações estão bem definidas em $\mathcal{A}/\!\sim$, e portanto a **estrutura** $\mathcal{A}/\!\sim$ munida com essas operações será denotada por $\mathcal{A}/J$. Pode-se, também, facilmente provar que $\mathcal{A}/J$ é uma álgebra complexa comutativa com unidade.

**Teorema 2.2.5.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, e $J$ um ideal de $\mathcal{A}$ fechado. Então*

$$||x+J|| := \inf_{y \in J} ||x+y||$$

*é uma norma em $\mathcal{A}/J$ e, com a norma definida acima, $\mathcal{A}/J$ é uma álgebra de Banach.*

**Demonstração:** Se $J = \mathcal{A}$, então o resultado é trivial. Iremos supor que $J \neq \mathcal{A}$. É fácil provar que $||.||$ está bem definida. Provemos primeiro que $||.||$ é uma norma em $\mathcal{A}/J$. Facilmente provamos $||0|| = 0$ e $||\lambda(x+J)|| = |\lambda|.||x+J||$, para todos $x \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso, tomando $x, y \in \mathcal{A}$ temos, para todos $z, w \in J$, a seguinte desigualdade

$$||x+y+J|| \leq ||x+(y+w)+z|| \leq ||x+z|| + ||y+w||$$

e, fazendo o ínfimo com $z \in J$ e depois com $w \in J$, obtemos

$$||x+y+J|| \leq ||x+J|| + ||y+J||. \tag{2.13}$$

De maneira análoga, obtemos também

$$||x \cdot y+J|| \leq ||x+J|| \cdot ||y+J||. \tag{2.14}$$

Além disso, se $||x+J|| = 0$, então existe uma sequência $(z_n)$ em $J$ tal que $x+z_n \to 0$, ou seja, $z_n \to -x$ e portanto $x \in \overline{J} = J$, concluindo assim $x+J = 0$. Assim

$$||x+J|| = 0 \qquad \text{se, e somente se,} \qquad x+J = 0. \tag{2.15}$$

Note também que se $z \in J$, como $J$ é um ideal próprio de $\mathcal{A}$, então $z$ não é invertível, pois caso contrário $A = Az^{-1}z \subset J$, o que seria um absurdo. Logo $-z$ não é invertível, e por (1.17), temos que $||e+z|| \geq 1$, concluindo que $1 = ||e|| \geq \inf_{z \in J} ||e+z|| \geq 1$, e dessa forma, temos

$$||e+J|| = 1 \tag{2.16}$$

e então, por (2.13), (2.14), (2.15) e (2.16), temos que $||.||$ é uma norma em $\mathcal{A}$

Provaremos agora que $\mathcal{A}/J$ é um espaço de Banach. Seja $(x_n + J)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{A}/J$. Provemos que ela possui uma subsequência convergente, e como ela é sequência de Cauchy, ela convergirá.

Tome uma subsequência $(x_{n_k} + J)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$||(x_{n_k} + J) - (x_{n_{k+1}} + J)|| < 2^{-k},$$

ou seja,

$$||((x_{n_k}) - (x_{n_{k+1}})) + J|| < 2^{-k}$$

e portanto, pela definição da norma em $\mathcal{A}/J$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um $y_k \in J$ tal que

$$||(x_{n_k}) - (x_{n_{k+1}}) + y_k|| < 2^{-k}.$$

Além disso, definindo $z_1 := 0$ e $z_k := -y_1 - y_2 - ... - y_{k-1}$, com $k \geq 2$, teremos que $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $J$. Além do que, temos $z_k - z_{k+1} = y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto

$$||(x_{n_k} + z_k) - (x_{n_{k+1}} + z_{k+1})|| < 2^{-k},$$

nos dizendo que a sequência $(x_{n_k} + z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{A}$ e portanto converge para algum $x \in \mathcal{A}$. Assim

$$||(x_{n_k} + J) - (x + J)|| = ||(x_{n_k} - x) + J|| \leq ||x_{n_k} - x + z_k|| \to 0$$

quando $k \to \infty$. Portanto $(x_{n_k} + J)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $(x + J)$, mas como $(x_n + J)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, então converge para $(x + J)$.

■

**Definição 2.2.6.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, e $J$ um ideal fechado de $\mathcal{A}$. Então a projeção canônica é a função

$$\begin{array}{rcccl} \pi & : & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}/J \\ & & x & \mapsto & x + J. \end{array}$$

**Teorema 2.2.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, e $J$ um ideal fechado de $\mathcal{A}$. Então a projeção canônica $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/J$ é um homomorfismo contínuo e $||\pi|| = 1$.*

## 2.3 A Transformada de Gelfand

Aqui iremos desenvolver a teoria da transformada de Gelfand sobre álgebras de Banach comutativas com unidade, eis que a transformada de Gelfand e suas propriedades devem ser de inteira familiaridade para o leitor compreender a demonstração do Teorema de Gelfand-Naimark.

**Observação** 2.3.1. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então denotaremos nestas duas próximas seções por $\mathcal{M}$ o conjunto de todos os ideais maximais de $\mathcal{A}$, e denotaremos ainda por $\Delta$ o conjunto de todos os homomorfismos complexos de $\mathcal{A}$.

**Teorema 2.3.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, sejam ainda $\mathcal{M}$ e $\Delta$ como na observação acima. Então*

$$\begin{array}{rccc} \Im & : & \Delta & \to & \mathcal{M} \\ & & h & \mapsto & ker\ h \end{array}$$

*está bem definida e é bijeção. Em particular, $\mathcal{M} = \{ker\ h \subset \mathcal{A}\ ;\ h \in \Delta\}$.*

**Demonstração:** Primeiro, note que $\Im$ está bem definida. De fato, se $h \in \Delta$ então facilmente provamos que $ker\ h$ é ideal próprio de $\mathcal{A}$. Provemos que $ker\ h$ é maximal. De fato, se existir um ideal $P$ que contém propriamente $ker\ h$, então existe $x \in P$ tal que $x \notin ker\ h$ e, como $h(x)e - x \in ker\ h \subset P$ e $x \in P$, temos $h(x)e \in P$, concluindo finalmente que $e \in P$, já que $x \notin ker\ h$, isto é, $h(x) \neq 0$. Assim $P = \mathcal{A}$. Logo, $ker\ h$ é maximal.

Provemos agora que $\Im$ é sobrejetiva. De fato, se $M \in \mathcal{M}$, então $\mathcal{A}/M$ é uma álgebra de Banach com unidade. Note que

$$G(\mathcal{A}/M) = \mathcal{A}/M \setminus \{0\}. \tag{2.17}$$

De fato, se $x \notin M$, então $(x)+M = (e)$ e, portanto, existem $y \in \mathcal{A}$ e $m \in M$ tais que $x \cdot y + m = e$, concluindo $e - x \cdot y \in M$, isto é, $(x+M)\cdot(y+M) = (e+M)$, donde segue (2.17). Pelo Teorema 1.3.5 de Gelfand-Mazur e por (2.17), existe um homomorfismo complexo bijetivo $\varphi : \mathcal{A}/M \to \mathbb{C}$ e definindo $h := \pi \circ \varphi$, onde $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/M$ é a projeção canônica definida em 2.2.6, temos $h : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo, ou seja, $h \in \Delta$, com núcleo $ker\ h = M$, já que $\varphi$ é bijetivo e $\pi$ possui núcleo $M$, resultando que $\Im(h) = M$. Assim $\Im$ é sobrejetiva.

Provemos agora que $\Im$ é injetiva. Sejam $\varphi, \psi \in \Delta$ tais que $\Im(\varphi) = \Im(\psi)$. Então $ker\ \varphi = ker\ \psi$, portanto se $x \in \mathcal{A}$, então $\varphi(x)e - x \in ker\ \varphi = ker\ \psi$, donde segue $\psi(\varphi(x)e - x) = 0$, decorrendo assim que $\varphi(x) = \psi(x)$ e, da arbitrariedade de $x \in \mathcal{A}$, segue $\varphi = \psi$. Assim, $\Im$ é uma bijeção.

■

**Corolario 2.3.3.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, seja ainda $x \in \mathcal{A}$. Então*

$$\sigma(x) = \{h(x) \in \mathbb{C} \ ; \ h \in \Delta\}.$$

**Demonstração:** Note que uma inclusão é imediata pelo Teorema 1.3.7 de Gleason-Kahane-Zelazko, portanto provemos a outra inclusão. Se $\lambda \in \sigma(x)$ então $\lambda e - x$ é não invertível e portanto pertence a algum ideal maximal $M \in \mathcal{M}$. Pelo Teorema 2.3.2, temos que $\lambda e - x$ está no núcleo de algum homomorfismo complexo $h$. Assim $h(\lambda e - x) = 0$ e portanto $h(x) = \lambda$.

■

**Observação** 2.3.4. O Corolário 2.3.3 é bastante importante para estabelecer seguinte equivalência quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade,

$$x \in Rad_J(\mathcal{A}) \qquad \text{se, e somente se,} \qquad r(x) = 0, \tag{2.18}$$

para todo $x \in \mathcal{A}$. Isto pode ser facilmente provado usando o Corolário 2.3.3 junto com o Teorema 2.3.2. Segue, no próximo corolário, mais uma consequência do Teorema 2.3.2.

**Definição 2.3.5.** Diremos que uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ comutativa com unidade é semisimples se $Rad_J(\mathcal{A}) = \{0\}$.

**Corolario 2.3.6.** *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras de Banach comutativas com unidade e $\mathcal{B}$ semisimples, seja ainda $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um homomorfismo. Então $\varphi$ é contínuo.*

**Demonstração:** Pelo Teorema do gráfico fechado, basta mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $x$ em $\mathcal{A}$ e $(\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $y$ em $\mathcal{B}$, então $\varphi(x) = y$. Tome $h$ um homomorfismo complexo de $B$ e note que $\psi := h \circ \varphi$ é homomorfismo complexo de $\mathcal{A}$. Logo, pelo Teorema 1.2.4, temos que $h$ e $\psi$ são contínuos. Assim

$$h(y) = h(\lim \varphi(x_n)) = \lim h(\varphi(x_n)) = \lim \psi(x_n) = \psi(x) = h(\varphi(x)),$$

e portanto $\varphi(x) - y \in ker\ h$. Como o homomorfismo complexo $h$ de $\mathcal{B}$ foi arbitrário, segue, pelo Teorema 2.3.2, que $\varphi(x) - y \in Rad_J(\mathcal{B}) = \{0\}$ e logo $\varphi(x) = y$.

■

Dada uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ comutativa com unidade, já sabemos, pelo Teorema 2.3.2, que há uma bijeção entre os conjuntos $\Delta$ e $\mathcal{M}$. Tanto o conjunto $\Delta$ quanto $\mathcal{M}$ são frequentemente chamados espectro de $\mathcal{A}$. Nosso presente objetivo, a partir de agora, é colocar uma certa topologia em $\Delta$ que o torne um espaço compacto e logo em seguida definir uma função $T_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \to C(\Delta)$ chamada transformada de Gelfand, a qual possui algumas propriedades que nos auxiliarão a provar o Teorema de Gelfand-Naimark. A construção fará seu completo sentido no Teorema 2.4.3 de Gelfand-Naimark.

**Definição 2.3.7.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, seja ainda $a \in \mathcal{A}$. Então a função

$$\widehat{a} : \Delta \to \mathbb{C}$$

definida por $\widehat{a}(\varphi) = \varphi(a)$, é chamada a transformada de Gelfand de $a$.

**Observação** 2.3.8. Note que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, então $\{\widehat{a}\}_{a\in\mathcal{A}}$ é uma família de funções com domínio $\Delta$ e contradomínio $\mathbb{C}$.

**Definição 2.3.9.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então a topologia de Gelfand $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ de $\Delta$ é a menor topologia sobre o conjunto $\Delta$ tal que todas as funções da família $\{\widehat{a}\}_{a\in\mathcal{A}}$ sejam contínuas.

**Teorema 2.3.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. $\Delta$ com a topologia de Gelfand $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é um espaço topológico compacto de Hausdorff.*

**Demonstração:** Sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, então

$$Z := \prod_{a\in\mathcal{A}} \overline{D_{||a||}(0)}$$

é um espaço topológico compacto com a topologia produto, pelo Teorema de Tychonoff. Mas lembre-se que a topologia produto é a menor topologia que tornam contínuas todas as projeções

$$p_a : Z \to \overline{D_{||a||}(0)},$$

onde $p_a(f) = f(a)$. Assim, $p_a : Z \to \mathbb{C}$ é contínua, para todo $a \in \mathcal{A}$. Note ainda que $\Delta \subset Z$. De fato, se $\varphi \in \Delta$ então, pelo Teorema 1.2.4, temos $||\varphi(a)|| \leq ||a||$, ou seja, $\varphi(a) \in \overline{D_{||a||}(0)}$, concluindo que $\varphi \in Z$. Além do mais, sendo $\mathcal{T}$ a topologia relativa de $\Delta$ em $Z$, então $\mathcal{T}$ contém $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$. De fato, note que $p_a|_\Delta(\varphi) = \varphi(a) = \widehat{a}(\varphi)$, para todo $\varphi \in \Delta$, e assim

$$p_a|_\Delta = \widehat{a},$$

mas

$$p_a|_\Delta : \Delta \to \mathbb{C}$$

é contínua quando vemos $\Delta$ com a topologia relativa $\mathcal{T}$, concluindo que $\widehat{a}$ é contínua com a topologia $\mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ é a menor topologia que torna todos $\widehat{a}$ contínuos, segue que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{T}$. Portanto para provarmos que $(\Delta, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ é compacto, basta provar que $\Delta$ é fechado em $Z$, pois dessa maneira teríamos $(\Delta, \mathcal{T})$ um espaço compacto, e já que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{T}$, teríamos também $(\Delta, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ compacto.

Provaremos que $\Delta$ é um fechado de $Z$. Para isso, para cada $a, b \in \mathcal{A}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, defina

$$L_{a,b},\ M_{a,b},\ S_{a,\lambda},\ I\ : Z \to \mathbb{C},$$

definidas por

$$L_{a,b}(f) := p_{a+b}(f) - p_a(f) - p_b(f),$$

$$M_{a,b}(f) := p_{a\cdot b}(f) - p_a(f).p_b(f),$$

$$S_{a,\lambda}(f) := p_{\lambda a}(f) - \lambda.p_a(f),$$

$$I(f) := f(e) - 1.$$

Notando que todas essas funções são contínuas e

$$\Delta = \left(\bigcap_{a,b\in\mathcal{A}} L_{a,b}^{-1}(\{0\})\right) \cap \left(\bigcap_{a,b\in\mathcal{A}} M_{a,b}^{-1}(\{0\})\right) \cap \left(\bigcap_{a\in\mathcal{A},\lambda\in\mathbb{C}} S_{a,\lambda}^{-1}(\{0\})\right) \cap \left(I^{-1}(\{0\})\right),$$

conclui-se que $\Delta$ é um conjunto fechado de $Z$ e, por $Z$ ser compacto, segue a compacidade de $\Delta$ em sua topologia relativa $\mathcal{T}$. Fica demonstrado que $\Delta$ é compacto com a topologia de Gelfand, já que $\mathcal{T}_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{T}$.

Provemos que $\Delta$ é de Hausdorff na topologia de Gelfand. Se $\varphi, \psi \in \Delta$ com $\varphi \neq \psi$, então existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$, existindo assim, dois abertos disjuntos $A, B \subset \mathbb{C}$ tais que $\varphi(a) \in A$ e $\psi(a) \in B$, isto é, $\widehat{a}(\varphi) \in A$ e $\widehat{a}(\psi) \in B$. Como $A$ e $B$ são disjuntos, decorre que $\widehat{a}^{-1}(A)$ e $\widehat{a}^{-1}(B)$ são disjuntos e abertos de $\Delta$, onde $\varphi \in \widehat{a}^{-1}(A)$ e $\psi \in \widehat{a}^{-1}(B)$. Logo, $\Delta$ também é de Hausdorff com a topologia de Gelfand.

■

**Observação** 2.3.11. Acabamos de provar que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach comutativa com unidade, então $\Delta$ com a topologia de Gelfand é um espaço topológico compacto de Hausdorff, fazendo sentido falar na álgebra de Banach $C(\Delta)$ e, para cada $a \in \mathcal{A}$, temos $\widehat{a} : \Delta \to \mathbb{C}$ contínua, isto é, $\widehat{a} \in C(\Delta)$.

**Definição 2.3.12.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então a função

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathcal{G}} & : & \mathcal{A} & \rightarrow & C(\Delta) \\ & & a & \mapsto & \widehat{a} \end{array}$$

é chamada **transformada de Gelfand**.

**Teorema 2.3.13.** *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então a transformada de Gelfand $T_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \to C(\Delta)$ é um homomorfismo de álgebras contínuo, de norma $||T_{\mathcal{G}}|| = 1$ e com núcleo $Rad_J(\mathcal{A})$.*

**Demonstração:** Note primeiro que $T_{\mathcal{G}}$ é um homomorfismo, pois

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{G}}(a+\lambda b)(\varphi) &= \widehat{(a+\lambda b)}(\varphi) &&= \varphi(a+\lambda b) \\ &= \varphi(a) + \lambda\varphi(b) &&= \widehat{a}(\varphi) + \lambda\widehat{b}(\varphi) \\ &= (\widehat{a} + \lambda\widehat{b})(\varphi) &&= (T_{\mathcal{G}}(a) + \lambda T_{\mathcal{G}}(b))(\varphi), \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \Delta$. Portanto

$$T_{\mathcal{G}}(a+\lambda b) = T_{\mathcal{G}}(a) + \lambda T_{\mathcal{G}}(b)$$

e logo $T_{\mathcal{G}}$ é linear. De maneira análoga provamos que $T_{\mathcal{G}}$ é multiplicativa, isto é,

$$T_{\mathcal{G}}(a \cdot b) = T_{\mathcal{G}}(a) \cdot T_{\mathcal{G}}(b)$$

e, além disso, $T_{\mathcal{G}}(e)$ é a unidade de $C(\Delta)$, pois $T_{\mathcal{G}}(e)(\varphi) = 1$ para cada $\varphi \in \Delta$. Assim $T_{\mathcal{G}}$ é um homomorfismo.

Provemos agora que $T_{\mathcal{G}}$ é contínuo e possui norma 1. De fato, temos

$$||T_{\mathcal{G}}(a)|| = ||\widehat{a}|| = \sup_{\varphi\in\Delta} ||\widehat{a}(\varphi)|| = \sup_{\varphi\in\Delta} ||\varphi(a)|| \leq ||a||,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Disso e do fato de $||T_{\mathcal{G}}(e)|| = 1$, segue que $||T_{\mathcal{G}}|| = 1$.

Por fim, se $T_{\mathcal{G}}(x) = 0$, então $\varphi(x) = 0$, para todo $\varphi \in \Delta$ e, pelo Corolário 2.3.3, segue que $\sigma(x) = \{0\}$, isto é, $r(x) = 0$, concluindo por (2.18), que $x \in Rad_J(\mathcal{A})$. Reciprocamente, suponha $x \in Rad_J(\mathcal{A})$. Por (2.18), obtemos $r(x) = 0$, isto é, $\sigma(x) = \{0\}$. Consequentemente, pelo Corolário 2.3.3, temos $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in \Delta$ e então, finalmente, obtemos $T_{\mathcal{G}}(x) = 0$. Assim, o núcleo de $T_{\mathcal{G}}$ é $Rad_J(\mathcal{A})$.

$\blacksquare$

Provaremos que em uma C*-álgebra comutativa com unidade, a transformada de Gelfand é exatamente uma isomorfismo isométrico que preserva involução. A isto se resumirá o Teorema de Gelfand-Naimark.

## 2.4 O Teorema de Gelfand-Naimark

Nesta seção estamos interessados, em provar o Teorema de Gelfand-Naimark. Precisaremos de toda teoria desenvolvida na seção anterior. O Teorema de Gelfand-Naimark se resume em investigar a transformada de Gelfand no caso em que a álgebra comutativa com unidade $\mathcal{A}$ seja uma C*-álgebra comutativa com unidade.

**Teorema 2.4.1.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade. Então a transformada de Gelfand $T_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \to C(\Delta)$ preserva involução e norma, isto é, valem as igualdades $T_{\mathcal{G}}(a^*) = T_{\mathcal{G}}(a)^*$ e $||T_{\mathcal{G}}(a)|| = ||a||$ para todo $a \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** Se $a \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto, então

$$\widehat{a}^* = \widehat{a}, \qquad \text{ou seja} \qquad T_{\mathcal{G}}(a)^* = T_{\mathcal{G}}(a).$$

De fato, pela Observação 2.1.13, temos $\varphi(a) \in \mathbb{R}$, para todo $\varphi \in \Delta$, fazendo com que $\widehat{a}$ seja uma função que assume valores reais, e portanto auto adjunta em $C(\Delta)$.

Se $a \in \mathcal{A}$, então pela Proposição 2.1.8, existem $x, y \in \mathcal{A}$ auto-adjuntos tais que $a = x + iy$, e portanto

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{G}}(a)^* &= T_{\mathcal{G}}(x+iy)^* \\ &= T_{\mathcal{G}}(x)^* - iT_{\mathcal{G}}(y)^* \\ &= T_{\mathcal{G}}(x) - iT_{\mathcal{G}}(y) \\ &= T_{\mathcal{G}}(x^* - iy^*) \qquad = T_{\mathcal{G}}(a^*). \end{aligned}$$

Isso prova que $T_{\mathcal{G}}$ preserva involução. Provemos agora que $T_{\mathcal{G}}$ preserva norma. De fato, se $a \in \mathcal{A}$ então $a$ é normal, pois $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, e pelo Teorema 2.1.10, temos $r(a) = ||a||$. Assim, pelo Corolário 2.3.3, temos

$$||T_{\mathcal{G}}(a)|| = ||\widehat{a}|| = \sup_{\varphi \in \Delta} |\varphi(a)| = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| = r(a) = ||a||,$$

e o Teorema está provado.

■

**Observação** 2.4.2. Uma consequência imediata do Teorema anterior é que toda C*-álgebra comutativa com unidade é semisimples.

**Teorema 2.4.3** (Gelfand-Naimark)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade. Então existe um espaço topológico compacto de Hausdorff $X$ tal que $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $C(X)$.*

**Demonstração:** De fato, seja

$$T_{\mathcal{G}} : \mathcal{A} \to C(\Delta)$$

a transformada de Gelfand. Pelo Teorema 2.4.1 anterior, $\mathcal{B} := T_{\mathcal{G}}(\mathcal{A})$ é subálgebra de $C(\Delta)$ fechada para involução com a unidade de $C(\Delta)$, a saber, $\widehat{e}$. Como $T_{\mathcal{G}}$ preserva norma, então $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{B}$, logo $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach. Note ainda que $\mathcal{B}$ separa pontos de $\Delta$, isto é, se $\varphi, \psi \in \Delta$, onde $\varphi \neq \psi$, então existe $f \in \mathcal{B}$ tal que $f(\varphi) \neq f(\psi)$. De fato, se $\varphi, \psi \in \Delta$ com $\varphi \neq \psi$ então existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $\varphi(a) \neq \psi(a)$, isto é, $\widehat{a}(\varphi) \neq \widehat{a}(\psi)$.

Pelo Teorema D.6 de Stone-Weierstrass, $\mathcal{B}$ é denso em $C(\Delta)$, e como $\mathcal{B}$ é de Banach, temos

$$\mathcal{B} = C(\Delta),$$

concluindo que $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $C(\Delta)$, onde $\Delta$ é um espaço compacto de Hausdorff, pelo Teorema 2.3.10.

■

**Observação** 2.4.4. Acabamos de obter uma caracterização de todas as C*-álgebra comutativa com unidade. O Exercício 30 nos dá idéia de uma outra versão do Teorema de Gelfand-Naimark para caracterizar C*-álgebras comutativas não necessariamente com unidade.

**Teorema 2.4.5** (Gelfand-Naimark)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então existe um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff $X$ tal que $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $C_0(X)$.*

**Demonstração:** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa que possui unidade. Pelo Teorema 2.4.3 de Gelfand-Naimark, existe um espaço topológico compacto de Hausdorff $X$ tal que $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $C(X)$. Como $X$ é um espaço topológico localmente compacto de Hausdorff e $C(X) = C_0(X)$ segue, neste caso, o resultado.

Façamos o outro caso. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa sem unidade. Pelo Teorema 2.1.4 existe uma C*-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ que $\mathcal{A}$ seja uma subálgebra de $\widehat{\mathcal{A}}$ com $\mathcal{A}\cdot\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$. Observe que a construção feita no Teorema 2.1.4 no caso de $\mathcal{A}$ ser comutativo nos fornece a comutatividade de $\widehat{\mathcal{A}}$, e que $\mathcal{A}$ é ideal maximal de $\mathcal{A}$. De fato,

$$\begin{aligned}(a,\lambda)\cdot(b,\mu) &= (a\cdot b+\lambda b+\mu a,\lambda\mu)\\ &= (b\cdot a+\mu a+\lambda b,\mu\lambda)\\ &= (b,\mu)\cdot(a,\lambda)\end{aligned}$$

conclui que $\widehat{\mathcal{A}}$ é comutativo, e $\mathcal{A}\cdot\widehat{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ indica que $\mathcal{A}$ é ideal de $\widehat{\mathcal{A}}$, e se $\mathcal{A} \subsetneq I \subset \widehat{\mathcal{A}}$ onde $I$ é ideal de $\widehat{\mathcal{A}}$, existiria $(a,\lambda) \in I \setminus \mathcal{A}$, portanto $\lambda \neq 0$, já que estamos identificando $\mathcal{A}$ com $\{(a,0) \in \widehat{\mathcal{A}}\ ;\ a \in \mathcal{A}\}$. Isto indica que $(0,\lambda) = (a,\lambda)-(a,0) \in I$ concluindo que $(0,1) \in I$. Como $I$ é um ideal de $\widehat{\mathcal{A}}$ que possui unidade, então $I = \widehat{\mathcal{A}}$, provando que $\mathcal{A}$ é ideal maximal de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Pelo Teorema 2.4.3 de Gelfand-Naimark, existe um espaço compacto de Hausdorff $\widetilde{X}$ e existe um isomorfismo isométrico de $\widehat{\mathcal{A}}$ em $C(\widetilde{X})$, a lembrar, a transformada de Gelfand

$$T_{\mathcal{G}} : \widehat{\mathcal{A}} \to C(\widetilde{X}),$$

onde $\widetilde{X}$ é o conjunto dos homomorfismos complexos de $\widehat{\mathcal{A}}$. Assim, como $\mathcal{A}$ é um ideal maximal de $\widehat{\mathcal{A}}$, existe, pelo Teorema 2.3.2, um único homomorfismo complexo $\varphi_\infty \in \widetilde{X}$, tal que $ker\ \varphi_\infty = \mathcal{A}$. Defina $X = \widetilde{X} \setminus \{\varphi_\infty\}$, e defina ainda

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathcal{A} & \to & C_0(X)\\ & & a & \mapsto & T_{\mathcal{G}}(a)|_X. \end{array}$$

Pelo Exercício 30, segue que $T$ acima está bem definida. De fato, pela letra (a) desse Exercício, $X$ é localmente compacto de Hausdorff, fazendo sentido falar em $C_0(X)$ e, além disso, temos também, devido a $ker\ \varphi_\infty = \mathcal{A}$, que $T_{\mathcal{G}}(a)(\varphi_\infty) = \varphi_\infty(a) = 0$, sempre que $a \in \mathcal{A}$, demonstrando assim que $T$ está bem definida, através da letra (b) do Exercício 30.

Provemos que $T$ é sobrejetiva. Isto segue da letra (c) do mesmo Exercício, pois se $g \in C_0(X)$ então, pelo exercício, existe $\widetilde{g} \in C(\widetilde{X})$ extensão de $g$ tal que

$$\widetilde{g}(\varphi_\infty) = 0.$$

Além disso, $\widetilde{g} = T_{\mathcal{G}}(a)$, para algum $a \in \widehat{\mathcal{A}}$ e, como $\varphi_\infty(a) = T_{\mathcal{G}}(a)(\varphi_\infty) = \widetilde{g}(\varphi_\infty) = 0$, temos $a \in ker\ \varphi_\infty = \mathcal{A}$, mostrando que $\widetilde{g} = T_{\mathcal{G}}(a)$ com $a \in \mathcal{A}$. Dessa maneira,

$g = \widetilde{g}|_X = T_{\mathcal{G}}(a)|_X = T(a)$. Assim, $T$ é sobrejetiva. Facilmente vemos que $T$ é linear. Por último, se $a \in \mathcal{A}$ então $T_{\mathcal{G}}(a)(\varphi_\infty) = 0$, e portanto

$$||T_{\mathcal{G}}(a)|| = \sup_{x \in \widetilde{X}} |T_{\mathcal{G}}(a)(x)| = \sup_{x \in X} |T_{\mathcal{G}}(a)(x)| = ||T_{\mathcal{G}}(a)|_X||,$$

provando que, para todo $a \in \mathcal{A}$, temos

$$||T(a)|| = ||T_{\mathcal{G}}(a)|| = ||a||,$$

e assim $T$ é isometria linear sobrejetiva, e portanto é um isomorfismo isométrico.

■

Nesta demonstração, note que utilizamos um fato decorrente do Exercício 30, de que todo compacto de Hausdorff menos um ponto se torna um espaço localmente compacto de Hausdorff com a topologia relativa. No próximo capítulo veremos que todo espaço localmente compacto de Hausdorff é dessa forma, isto é, um compacto de Hausdorff menos um ponto deste compacto. Isto caracterizará todos os espaços localmente compactos de Hausdorff.

## 2.5 A Construção Gelfand-Naimark-Segal

Até o momento trabalhamos com o objetivo de caracterizar todas as C*-álgebras comutativas, e mostrar que todas são da forma $C_0(X)$ para algum espaço localmente compacto de Hausdorff $X$. Teoremas de caracterizações de estruturas são muito importantes, pois facilitam investigar propriedades específicas sobre a estrutura, já que sabemos que esta estrutura tem uma forma específica. Apesar de um Teorema bastante conhecido, para se provar o Teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebra comutativas, foi necessário a construção de uma teoria por ser uma demonstração construtiva. O Teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebras quaisquer é também um Teorema de Caracterização, e nos dirá que qualquer C*-álgebra será uma subálgebra fechada da álgebra $B(\mathcal{H})$ para algum espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. De maneira análoga, esta demonstração não será direta e necessitará de toda uma teoria desenvolvida. Desenvolver essa teoria e provar o Teorema de Gelfand-Naimark é o objetivo desta seção.

Em toda esta seção $\mathcal{A}$ indicará uma C*-álgebra. Iremos desenvolver a noção de elementos positivos dentro de uma C*-álgebra.

**Definição 2.5.1.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, e seja $a \in \mathcal{A}$. Diremos que $a$ é um elemento positivo se $a$ é auto-adjunto e $\sigma(a) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

**Notação.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. O conjunto dos elementos positivos de $\mathcal{A}$ será denotado por $\mathcal{A}^+$.

O próximo resultado caracterizará quando um elemento auto-adjunto é positivo.

**Proposição 2.5.2.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade e, e seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento auto-adjunto tal que $||a|| \leq 1$. Então $a$ é positivo se, e somente se, $||e - a|| \leq 1$.*

**Demonstração:** Antes de iniciar a demonstração, notemos primeiro que, pelo Teorema 1.3.6 do Mapeamento espectral, tem-se a igualdade

$$\sigma(e - a) = 1 - \sigma(a). \tag{2.19}$$

Suponha $a$ um elemento positivo, e seja $\lambda \in \sigma(e-a)$. Então, por (2.19), temos $\lambda = 1 - \mu$ onde $\mu \in \sigma(a)$. Note ainda que $0 \leq \mu \leq ||a|| \leq 1$, e isto nos leva a $0 \leq \lambda \leq 1$, donde se infere $|\lambda| \leq 1$. Logo

$$|\lambda| \leq 1,$$

para todo $\lambda \in \sigma(e - a)$. Assim $r(e - a) \leq 1$. Mas como $e - a$ é auto-adjunto, e portanto normal, tem-se $||e - a|| \leq 1$, através da Proposição 2.1.10.

Reciprocamente, suponha que $||e - a|| \leq 1$. Se $\lambda \in \sigma(a)$ então, por (2.19), temos $1 - \lambda \in \sigma(e - a)$ e portanto

$$|1 - \lambda| \leq ||e - a|| \leq 1,$$

decorrendo daí $\lambda \geq 0$. Logo $\lambda \geq 0$, para todo $\lambda \in \sigma(a)$, isto é, $a$ é positivo.

■

**Definição 2.5.3.** Seja $V$ um espaço vetorial complexo, e seja $S$ um subconjunto de $V$. Então $S$ é um cone de $V$ se, para todos $a \in S$ e $\lambda > 0$, tem-se $t.a \in S$.

**Teorema 2.5.4.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Então $\mathcal{A}^+$ é um cone convexo.*

**Demonstração:** Não é difícil demonstrar que $\mathcal{A}^+$ é cone. Provemos que $\mathcal{A}$ é um conjunto convexo. Tome $\lambda \in [0,1]$ e $a, b \in \mathcal{A}^+$. Note que, pela Proposição 2.5.2, temos

$$\begin{aligned} \left|\left|e - \tfrac{\lambda a+(1-\lambda)b}{||a||+||b||}\right|\right| &\leq \left|\left|\lambda\left(e - \tfrac{a}{||a||+||b||}\right)\right|\right| + \left|\left|(1-\lambda)\left(e - \tfrac{b}{||a||+||b||}\right)\right|\right| \\ &\leq \lambda + (1-\lambda) \\ &= 1, \end{aligned}$$

porém, temos

$$\left|\left|\frac{\lambda a + (1-\lambda)b}{||a|| + ||b||}\right|\right| \leq 1.$$

Então, novamente pela Proposição 2.5.2, conclui-se que

$$\frac{\lambda a + (1-\lambda)b}{||a|| + ||b||}$$

é um elemento positivo, mas como $\mathcal{A}^+$ é um cone, segue que $\lambda a + (1-\lambda)b \in \mathcal{A}^+$.

∎

**Observação** 2.5.5. De acordo com o Teorema anterior, $\mathcal{A}^+$ é um cone convexo. Seguem algumas observações:

(a) $-\mathcal{A}^+$ também é um cone convexo e, pelo Teorema 1.3.6 do Mapeamento Espectral, temos também
$$\mathcal{A}^+ \cap (-\mathcal{A}^+) = \{0\}. \tag{2.20}$$

(b) Se $a, b \in \mathcal{A}^+$, então $a + b \in \mathcal{A}^+$, pois
$$a + b = 2\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right) \in \mathcal{A}^+,$$
portanto a soma de elementos positivos é um elemento positivo.

**Proposição 2.5.6.** *Seja $\mathcal{A}$ um C*-álgebra com unidade $e$. Então valem as seguintes afirmações:*

*(a) Se $a \in \mathcal{A}$ é tal que $-a^* \cdot a$ é um elemento positivo, então $a = 0$.*

*(b) Se $a$ é um elemento auto-adjunto, então existe uma C*-álgebra $\mathcal{B}$ comutativa com mesma unidade $e$, que seja subálgebra com involução de $\mathcal{A}$ e contenha $a$.*

*(c) Se $a \in \mathcal{A}$ é um elemento auto-adjunto, então existem elementos positivos $b, c \in \mathcal{A}$ tais que*

$$a = b - c \qquad e \qquad b \cdot c = 0.$$

**Demonstração:** (a) Suponha $a \in \mathcal{A}$ com $-a^* \cdot a$ um elemento positivo. Pela Proposição 2.1.8, existem $x, y \in \mathcal{A}$ auto-adjuntos tais que $a = x + iy$. Note que

$$a^* \cdot a + a \cdot a^* = 2x^2 + 2y^2$$

e, pelo Teorema 1.3.6 do Mapeamento Espectral, temos $2x^2, 2y^2 \in \mathcal{A}^+$. Portanto, pela letra (b) da Observação 2.5.5, temos $a \cdot a^* = 2x^2 + 2y^2 + (-a^* \cdot a) \in \mathcal{A}^+$. Por outro lado, pela letra (a) da Observação 1.3.8, temos

$$\sigma(a \cdot a^*) \setminus \{0\} = \sigma(a^* \cdot a) \setminus \{0\}$$

e, novamente pelo Teorema 1.3.6 do Mapeamento Espectral, temos

$$\sigma(a \cdot a^*) \setminus \{0\} = -\sigma(-a^* \cdot a) \setminus \{0\}.$$

Dessa igualdade e do fato que $a \cdot a^*$ e $-a^* \cdot a$ são elementos positivos, concluímos que $\sigma(a \cdot a^*) = \{0\}$. Assim $||a||^2 = ||a \cdot a^*|| = r(a \cdot a^*) = 0$, e logo $a = 0$.

(b) O conjunto

$$D := \{p(a) \in \mathcal{A} \ ; \ p(x) \in \mathbb{C}[x]\}$$

é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, e mais, $D$ é fechado para involução e possui a unidade $e$. Os elementos de $D$ comutam, e portanto $D$ é uma álgebra complexa comutativa com unidade e com involução. Definindo $\mathcal{B} := \overline{D}$, temos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ é uma subálgebra comutativa com unidade e com involução, já que a involução é contínua numa C*-álgebra. Note ainda que $\mathcal{B}$ é fechada em $\mathcal{A}$ e portanto, com a norma herdada de $\mathcal{A}$, é uma álgebra de Banach. A subálgebra $\mathcal{B}$ herda as operações, a involução e a norma de $\mathcal{A}$, temos $\mathcal{B}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade $e$.

(c) De acordo com a letra (b), seja $\mathcal{B}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade que contenha $a$, onde $\mathcal{B}$ é uma subálgebra com involução de $\mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.4.3 de Gelfand-Naimark, existe um espaço topológico $X$ compacto de Hausdorff tal que $C(X)$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{B}$. Logo, existe um isomorfismo isométrico

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathcal{B} & \to & C(X) \\ & & b & \mapsto & \widehat{b}. \end{array} \tag{2.21}$$

Defina as funções $g, h : X \to \mathbb{C}$ por

$$g(x) = \text{máx}\{\widehat{a}(x), 0\} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \text{máx}\{-\widehat{a}(x), 0\},$$

para todo $x \in X$. Então claramente $g, h \in C(X)$ são funções positivas, além de, $\widehat{a} = g - h$, com $g \cdot h$ a função identicamente nula. Logo, como $T$ em (2.21) é um isomorfismo isométrico, existem $b, c \in \mathcal{B}$ tais que $\widehat{b} = g$ e $\widehat{c} = h$, concluindo que

$$T(a) = \widehat{a} = g - h = \widehat{b} - \widehat{c} = T(b - c)$$

e portanto $a = b - c$. Analogamente, temos $b \cdot c = 0$. Por último, note que $b, c \in \mathcal{B}$ são elementos positivos. Com efeito, $g, h \in C(X)$ são funções auto-adjuntas com espectro sem elementos negativos, já que o espectro de uma função em $C(X)$ é a sua imagem. Provamos que $b, c \in \mathcal{A}$ são elementos positivos da C*-álgebra $\mathcal{B}$, resta-nos provar que são elementos positivos da C*-álgebra $\mathcal{A}$, mas isto segue do Teorema 2.1.18, pois segue que o espectro de um elemento de $\mathcal{B}$ em relação a C*-álgebra $\mathcal{B}$ é o mesmo espectro em relação a C*-álgebra $\mathcal{A}$. Logo $b, c \in \mathcal{A}$ são elementos positivos com $a = b - c$ e $b \cdot c = 0$.

■

**Teorema 2.5.7.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, seja ainda $a \in \mathcal{A}$. Então são equivalentes*

*(a) $a$ é um elemento positivo.*

*(b) Existe $x \in \mathcal{A}$ positivo tal que $a = x^2$.*

*(c) Existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $a = y^* \cdot y$.*

**Demonstração:** Suponha primeiro que (a) seja verdadeiro, e vamos provar (b). Se $a$ é um elemento positivo então, pela letra (b) da Proposição 2.5.6, existe uma C*-álgebra $\mathcal{B}$ comutativa com a unidade $e$ que contém $a$ e tal que $\mathcal{B}$ é subálgebra com involução de $\mathcal{A}$. Então, pelo Teorema 2.4.3, existem um espaço topológico compacto $X$ e um isomorfismo isométrico

$$\begin{array}{rccc} T & : & \mathcal{B} & \to & C(X) \\ & & b & \mapsto & \widehat{b}. \end{array} \tag{2.22}$$

Pelo Teorema 2.1.18, temos, para qualquer $b \in \mathcal{B}$,

$$\sigma_{\mathcal{B}}(b) = \sigma_{\mathcal{A}}(b), \tag{2.23}$$

que será denotado simplesmente por $\sigma(b)$, onde $\sigma_{\mathcal{B}}(b)$ e $\sigma_{\mathcal{A}}(b)$ são os espectros de $b$ respectivamente às álgebras $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$. Temos ainda $\sigma(\widehat{a}) = \sigma(a)$, mas $a$ é positivo e $\sigma(\widehat{a})$ é a imagem da função $\widehat{a} : X \to \mathbb{C}$, então $\widehat{a}(x) \geq 0$, para todo $x \in X$. Defina a função

$$\begin{array}{rcccl} \sqrt{\widehat{a}} & : & X & \to & \mathbb{C} \\ & & x & \to & \sqrt{\widehat{a}(x)}, \end{array}$$

que é contínua, pois é composta de funções contínuas, e portanto $\sqrt{\widehat{a}} \in C(X)$, além de possuir imagem contida em $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Logo

$$\sigma(\sqrt{\widehat{a}}) \subset R^+ \cup \{0\},$$

concluindo que $\sqrt{\widehat{a}}$ é um elemento positivo em $C(X)$. Note ainda que $(\sqrt{\widehat{a}})^2 = \widehat{a}$, e sabendo que existe um elemento $x \in \mathcal{B}$ tal que $\widehat{x} = \sqrt{\widehat{a}}$, concluímos que $x$ é positivo em $\mathcal{B}$. Além disso,

$$\begin{array}{rcccl} T(x^2) & = & T(x)^2 & = & (\sqrt{\widehat{a}})^2 \\ & = & \widehat{a} & = & T(a), \end{array}$$

nos mostrando que $x^2 = a$, com $x$ um elemento positivo de $\mathcal{B}$, e por (2.23), temos $x$ um elemento positivo em $\mathcal{A}$, o que prova (b).

Agora para notar que (b) implica (c), basta perceber que todo elemento positivo é auto-adjunto.

Agora provemos que (c) implica (a). Suponha que (c) seja verdadeiro. Logo $a = y^* \cdot y$ é auto-adjunto e, pela letra (c) da Proposição 2.5.6, existem elementos positivos $b, c \in \mathcal{A}$ tais que $a = b - c$ e $b \cdot c = 0$. Note que

$$-(y \cdot c)^* \cdot (y \cdot c) = -(c \cdot a \cdot c) = c^3, \tag{2.24}$$

mas, pelo Teorema 1.3.6 do Mapeamento Espectral, $c^3$ é um elemento positivo e, através da letra (a) da Proposição 2.5.6, a igualdade (2.24) acima nos diz que $y \cdot c = 0$. Assim, da igualdade (2.24), segue que $c^3 = 0$ e portanto $\sigma(c^3) = \{0\}$. Novamente pelo Teorema do Mapeamento Espectral, tem-se $\sigma(c) = \{0\}$, o que conclui $||c|| = r(c) = 0$ e daí $c = 0$. Disso, decorre $a = b$ e portanto $a$ é um elemento positivo. Assim (a) é verdadeiro.

$\blacksquare$

Apresentaremos agora a teoria dos funcionais lineares positivos sobre uma C*-álgebra. A própria definição de funcional linear positivo requer a noção de elemento positivo que foi vista anteriormente. Estamos ainda estabelecendo as ferramentas necessárias para fazer o Teorema de Construção de Gelfand-Naimark-Segal.

**Definição 2.5.8.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Um funcional linear $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é dito positivo se

$$f(a) \geq 0, \tag{2.25}$$

para todo elemento positivo $a \in \mathcal{A}^+$.

Uma observação central merece destaque, em meio à caracterização feita no Teorema 2.5.7 dos elementos positivos.

**Observação** 2.5.9. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Uma condição necessária e suficiente para um funcional linear $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ser positivo é

$$f(y^* \cdot y) \geq 0,$$

para todo $y \in \mathcal{A}$. Em particular,

$$f(y^* \cdot y) \in \mathbb{R}, \tag{2.26}$$

para todo $y \in \mathcal{A}$. Isto segue exatamente do Teorema 2.5.7, notando que um elemento $a \in \mathcal{A}$ é positivo se, e somente se, existe $y \in \mathcal{A}$ tal que $a = y^* \cdot y$.

**Proposição 2.5.10.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, e $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Então*

*(a) $f(a^*) = \overline{f(a)}$, para todo $a \in \mathcal{A}$.*

*(b) (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*
*$|f(a^* \cdot b)|^2 \leq f(a^* \cdot a).f(b^* \cdot b)$, para todos $a, b \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** (a) Provemos primeiramente a seguinte asserção

$$a = a^* \qquad \text{implica que} \qquad f(a) \in \mathbb{R}. \tag{2.27}$$

De fato, se $a \in \mathcal{A}$ é auto-adjunto, então, já que $f$ é um funcional linear positivo, temos

$$f((a+e)^* \cdot (a+e)) = f(a^* \cdot a) + 2.f(a) + f(e^* \cdot e),$$

indicando que, pela condição (2.26), $f(a)$ pode ser escrito como combinação linear de elementos de $\mathbb{R}$. Portanto temos $f(a) \in \mathbb{R}$. Isso prova a asserção (2.27).

Agora seja $a \in \mathcal{A}$ qualquer. Pela Proposição 2.1.8, existem $u, v \in \mathcal{A}$ auto-adjuntos tais que $a = u + iv$, e dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} f(a^*) &= f((u+iv)^*) &= f(u-iv) \\ &= f(u) - if(v) &= \overline{f(u)+if(v)} \\ &= \overline{f(u+iv)} &= \overline{f(a)}. \end{aligned}$$

(b) Se $|f(a^* \cdot b)| = 0$ então a desigualdade é trivial, suponha portanto $|f(a^* \cdot b)| \neq 0$. Seja $t \in \mathbb{R}$. Defina

$$\alpha_t := \frac{t.f(b^* \cdot a)}{|f(b^* \cdot a)|} = \frac{t.\overline{f(a^* \cdot b)}}{|f(a^* \cdot b)|},$$

e portanto temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq f((a+\alpha_t b)^* \cdot (a+\alpha_t b)) \\ &= f((a^* + \overline{\alpha_t} b^*) \cdot (a + \alpha_t b)) \\ &= f(a^* \cdot a + \alpha_t a^* \cdot b + \overline{\alpha_t} b^* \cdot a + |\alpha_t|^2 b^* \cdot b) \\ &= f(a^* \cdot a) + \alpha_t f(a^* \cdot b) + \overline{\alpha_t} f(b^* \cdot a) + |\alpha_t|^2 f(b^* \cdot b) \\ &= f(a^* \cdot a) + t|f(a^* \cdot b)| + t|f(b^* \cdot a)| + t^2 f(b^* \cdot b). \end{aligned}$$

Consequentemente, definindo $A := f(b^* \cdot b)$, $B := 2|f(a^* \cdot b)|$ e $C := f(a^* \cdot a)$, a desigualdade acima nos diz que

$$A.t^2 + B.t + C \geq 0, \tag{2.28}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo o discriminante da função quadrática de (2.28) não pode ser positivo e consequentemente $B^2 - 4.A.C \leq 0$. Isto significa que $4|f(a^* \cdot b)|^2 \leq 4f(a^* \cdot a)f(b^* \cdot b)$, isto é,

$$|f(a^* \cdot b)|^2 \leq f(a^* \cdot a)f(b^* \cdot b).$$

■

**Teorema 2.5.11.** *Seja $\mathcal{A}$ uma $C^*$-álgebra com unidade $e$, e seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear. Então $f$ é um funcional linear positivo se, e somente se, $f$ é contínuo e $||f|| = f(e)$.*

**Demonstração:** Suponha primeiro que $f$ seja um funcional linear positivo. Seja $a \in \mathcal{A}$ positivo. Pelo Teorema 2.1.9 tem-se $\sigma(a) \subset [-||a||, ||a||]$. Fixando $p(x) = -x + ||a|| \in \mathbb{C}[x]$ e observando o Teorema 1.3.6 do Mapeamento Espectral, obtemos

$$\begin{array}{rclcl} \sigma(||a||e - a) & = & \sigma(p(a)) & = & p(\sigma(a)) \\ & \subset & p([-||a||, ||a||]) & = & [0, 2||a||]. \end{array}$$

Segue que $||a||e - a$ é um elemento positivo e, consequentemente, $f(||a||e - a) \geq 0$. Assim

$$f(a) \leq f(e)||a||, \tag{2.29}$$

para qualquer elemento positivo $a \in \mathcal{A}$. Por outro lado, seja $x \in \mathcal{A}$ qualquer. Pela letra (b) da Proposição 2.5.10 anterior e por (2.29), obtemos

$$\begin{array}{rcl} |f(x)|^2 & \leq & f(e^* \cdot e)f(x^* \cdot x) \\ & = & f(e)f(x^* \cdot x) \\ & \leq & f(e)f(e)||x^* \cdot x|| \\ & = & f(e)^2||x||^2, \end{array}$$

pois, pelo Teorema 2.5.7, $x^* \cdot x$ é um elemento positivo. Como $e$ é um elemento positivo, temos $f(e) \geq 0$ e pela desigualdade acima, $f$ é um funcional contínuo com

$$||f|| \leq f(e).$$

Trivialmente também temos $f(e) \leq ||f||$, e portanto $||f|| = f(e)$.

Reciprocamente, suponha que $||f|| = f(e)$. Provaremos que $f$ é um funcional linear positivo. O resultado é imediato se $f$ for o funcional identicamente nulo, suponha portanto que $||f|| \neq 0$. Provaremos primeiro que $f(a) \in \mathbb{R}$, para cada $a \in \mathcal{A}$ auto-adjunto.

Seja $a \in \mathcal{A}$ auto-adjunto. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) = \alpha + i\beta$, logo, para cada $k \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{array}{rcl} |f(a + ike)|^2 & \leq & ||f||^2.||a + ike||^2 \\ & = & ||f||^2.||(a + ike)^* \cdot (a + ike)|| \\ & = & ||f||^2.||a^2 + k^2e|| \\ & \leq & ||f||^2.||a||^2 + k^2.||f||^2. \end{array} \tag{2.30}$$

Mas também temos

$$\begin{aligned} |f(a+ike)|^2 &= |f(a)+ik||f|||^2 \\ &= |\alpha+i(\beta+k||f||)|^2 \\ &= \alpha^2+(\beta^2+2\beta k||f||+k^2.||f||^2), \end{aligned} \tag{2.31}$$

e portanto, de (2.30) e (2.31), segue

$$\alpha^2+\beta^2+2\beta k||f|| \leq ||f||^2.||a||^2, \tag{2.32}$$

para todo $k \in \mathbb{R}$. Ora, isto só é possível se $\beta = 0$ e portanto $f(a) \in \mathbb{R}$. Assim está provado que $f(a) \in \mathbb{R}$ para cada $a \in \mathcal{A}$ auto-adjunto.

Provaremos que $f(a) \geq 0$ para todo elemento positivo $a \in \mathcal{A}$. Seja $a \in \mathcal{A}$ um elemento positivo. Então, pelo Teorema 2.5.4, temos $\frac{a}{||a||}$ um elemento positivo e, pela Proposição 2.5.2, temos $||e - \frac{a}{||a||}|| \leq 1$. Mas $e - \frac{a}{||a||}$ é auto-adjunto, consequentemente

$$f\left(e - \frac{a}{||a||}\right) \leq \left|f\left(e - \frac{a}{||a||}\right)\right| \leq ||f|| = f(e),$$

e logo $f(a) \geq 0$. Assim $f$ é funcional linear positivo.

■

**Definição 2.5.12.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade $e$ e seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo. Então $f$ é dito um estado quando $f(e) = 1$.

**Observações** 2.5.13. Algumas observações são de grande importância neste momento. Considere $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade $e$.

(a) Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é um funcional linear. Uma consequência do Teorema 2.5.11 é que $f$ será um estado se, e somente se, $f$ é contínuo e $||f|| = f(e) = 1$.

(b) Se $x \in \mathcal{A}$ é não nulo, então existe um estado $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x^* \cdot x) = ||x||^2. \tag{2.33}$$

De fato, como $x^* \cdot x$ é auto-adjunto de $\mathcal{A}$ então, pela Proposição 2.5.6, existe uma subálgebra fechada $\mathcal{B}$ comutativa com unidade $e$ fechada para involução, onde $x^* \cdot x \in \mathcal{B}$. Por $x^* \cdot x$ ser um elemento positivo em $\mathcal{A}$ e pelo Teorema

2.1.18, temos $\sigma_{\mathcal{B}}(x^* \cdot x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x^* \cdot x) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Porém, sabemos que em $\mathcal{B}$ temos $r(x^* \cdot x) = ||x^* \cdot x|| = ||x||^2$, logo

$$r(x^* \cdot x) = ||x||^2 \qquad \text{e} \qquad \sigma_{\mathcal{B}}(x^* \cdot x) \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}.$$

Consequentemente $||x||^2 \in \sigma_{\mathcal{B}}(x^* \cdot x)$. Defina $\lambda := ||x||^2 \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, $\lambda \in \sigma_{\mathcal{B}}(x^* \cdot x)$ e, pelo Corolário 2.3.3, existe um homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ onde $\varphi(x^* \cdot x) = \lambda \neq 0$, concluindo que

$$||\varphi|| = \varphi(e) = 1.$$

Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, usando o Teorema de Hahn-Banach, existe uma extensão linear $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ de $\varphi$, concluindo que $||f|| = f(e) = 1$ e portanto, através do Teorema 2.5.11, temos $f$ um funcional linear positivo tal que $f(e) = 1$. Assim, $f$ é o estado que satisfaz (2.33).

A partir de agora, iniciaremos os resultados necessários para o Teorema de Construção de Gelfand-Naimark-Segal, e caracterizaremos todas as C*-álgebras.

**Lema 2.5.14.** *Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade e $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo, seja ainda $N := \{a \in \mathcal{A} \ ; \ f(x \cdot a) = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{A}\}$. Então $N$ é subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ e*

$$\begin{array}{rccl} \langle , \rangle & : & \mathcal{A}/N \times \mathcal{A}/N & \to & \mathbb{C} \\ & & ([a],[b]) & \mapsto & f(b^* \cdot a) \end{array}$$

*é uma função bem definida, e é um produto interno no espaço vetorial quociente $\mathcal{A}/N$.*

**Demonstração:** Facilmente vemos que $N$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$. Provemos que $\langle , \rangle$ está bem definida. Suponha que

$$([a],[b]) = ([c],[d]),$$

onde $a, b, c, d \in \mathcal{A}$. Isto significa que $a - c, b - d \in N$ e logo, devemos ter

$$\begin{aligned} f(b^* \cdot a - d^* \cdot c) &= f(b^* \cdot a - d^* \cdot a + d^* \cdot a - d^* \cdot c) \\ &= f((b-d)^* \cdot a + d^* \cdot (a-c)) \\ &= \overline{f(a^* \cdot (b-d))} + f(d^* \cdot (a-c)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

concluindo $f(b^* \cdot a) = f(d^* \cdot c)$. Portanto, $\langle , \rangle$ está bem definida.

Provemos agora que $\langle , \rangle$ é um produto interno em $\mathcal{A}/N$. Não é difícil provar que, para todos $u, v, w \in \mathcal{A}/N$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos

$$\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle \qquad \text{e} \qquad \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

Além do mais, se $u \in \mathcal{A}/N$ temos

$$\langle u, u \rangle \geq 0.$$

Provemos agora que se $u \in \mathcal{A}/N$ é tal que $\langle u, u \rangle = 0$, então $u = [0]$. De fato, considere $u \in \mathcal{A}/N$ onde $\langle u, u \rangle = 0$. Sabemos que existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $u = [a]$, concluindo-se $f(a^* \cdot a) = 0$ e, a partir da Proposição 2.5.10, temos

$$|f(x \cdot a)|^2 \leq f(x \cdot x^*).f(a^* \cdot a),$$

constatando-se que $f(x \cdot a) = 0$, para todo $x \in \mathcal{A}$. Pela definição de $N$, temos $a \in N$ e consequentemente $u = [a] = [0]$. O Lema está provado!

■

**Notação.** Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um funcional linear positivo e seja $N = \{a \in \mathcal{A} \ ; \ f(x \cdot a) = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{A}\}$. Denotaremos por $H_f$ o completamento do espaço vetorial com produto interno $\mathcal{A}/N$ e, de acordo com o Lema anterior, $H_f$ é um espaço de Hilbert.

**Teorema 2.5.15** (Construção GNS)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade e, e seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um estado. Com a notação acima, existe um homomorfismo $\rho : \mathcal{A} \to B(H_f)$ que preserva involução e existe um elemento $\omega \in H_f$ de norma unitária tal que*

$$f(b^* \cdot a) = \langle \rho(a)(\omega), \rho(b)(\omega) \rangle \, , \tag{2.34}$$

*para todos $a, b \in \mathcal{A}$.*

**Demonstração:** Para cada $a \in \mathcal{A}$, defina a seguinte transformação linear

$$\begin{array}{rcccl} \psi(a) & : & \mathcal{A}/N & \to & \mathcal{A}/N \\ & & [x] & \mapsto & [a \cdot x], \end{array}$$

notando que $\psi(a)$ está bem definida. De fato, fixando-se $a \in \mathcal{A}$ e considerando $[x] = [y]$, então $x - y \in N$, decorrendo daí que $f(w \cdot (x - y)) = 0$ para todo $w \in \mathcal{A}$, e consequentemente $f(w \cdot a \cdot (x - y)) = 0$, para todo $w \in \mathcal{A}$, implicando $a \cdot (x - y) \in N$

e, finalmente, concluindo $[a \cdot x] = [a \cdot y]$. Assim $\psi(a)$ está bem definida. Provemos agora que $\psi(a)$ é contínua. Fixe um $x \in \mathcal{A}$ e defina a seguinte função,

$$g : \mathcal{A} \to \mathbb{C},$$

por $g(y) = f(x^* \cdot y \cdot x)$, que é uma transformação linear. Além disso, $g(y^* \cdot y) = f((y \cdot x)^* \cdot (y \cdot x)) \geq 0$, para todo $y \in \mathcal{A}$ e, demonstrando assim, que $g$ é um funcional linear positivo. Assim, usando o Teorema 2.5.11, tem-se $||g|| = g(e)$ e teremos

$$\begin{array}{rcccl} ||\psi(a)[x]||^2 & = & ||[a \cdot x]||^2 & = & f(x^* \cdot a^* \cdot a \cdot x) \\ & = & g(a^* \cdot a) & \leq & ||g||.||a^* \cdot a|| \\ & = & g(e).||a||^2 & = & f(x^* \cdot x).||a||^2 \\ & = & \langle [x], [x] \rangle .||a||^2 & = & ||a||^2.||[x]||^2. \end{array}$$

Assim $||\psi(a)[x]|| \leq ||a||.||[x]||$, para todo $x \in \mathcal{A}$, concluindo a continuidade de $\psi(a)$. Como $H_f$ é o completamento de $\mathcal{A}/N$, temos $\mathcal{A}/N$ um subespaço denso em $H_f$ e portanto existe uma única transformação linear contínua

$$\rho(a) : H_f \to H_f,$$

onde $\rho(a)$ é a extensão da função $\psi(a)$. Assim, a seguinte função

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & \mathcal{A} & \to & B(H_f) \\ & & a & \mapsto & \rho(a) \end{array}$$

pode ser provada facilmente que é um homomorfismo. Provemos que $\rho$ preserva involução. Seja $a \in \mathcal{A}$, e sejam $u, v \in \mathcal{A}/N$ quaisquer. Então note que existem $x, y \in \mathcal{A}$, onde $u = [x]$ e $v = [y]$. Assim

$$\begin{array}{rcccl} \langle \rho(a)(u), v \rangle & = & \langle \rho(a)([x]), [y] \rangle & = & \langle [a \cdot x], [y] \rangle \\ & = & f(y^* \cdot (a \cdot x)) & = & f((a^* \cdot y)^* \cdot x) \\ & = & \langle [x], [a^* \cdot y] \rangle & = & \langle [x], \rho(a^*)([y]) \rangle \\ & = & \langle u, \rho(a^*)(v) \rangle , & & \end{array}$$

e logo temos

$$\langle \rho(a)(u), v \rangle = \langle u, \rho(a^*)(v) \rangle ,$$

para todos $u, v \in \mathcal{A}/N$. Então como $\mathcal{A}/N$ é subespaço denso de $H_f$, da continuidade do produto interno, temos

$$\langle \rho(a)(u), v \rangle = \langle u, \rho(a^*)(v) \rangle \,,$$

para todos $u, v \in H_f$. E consequentemente $\rho(a)^* = \rho(a^*)$. Assim temos $\rho$ um homomorfismo que preserva involução.

Resta-nos provar que ocorre (2.34) para algum vetor unitário $\omega \in H_f$. Defina $\omega := [e]$ e note que

$$||\omega||^2 = \langle [e], [e] \rangle = f(e) = 1,$$

e portanto $\omega$ é um vetor unitário e, além do mais, se $a, b \in \mathcal{A}$ então

$$\begin{aligned} f(b^* \cdot a) &= \langle [a], [b] \rangle \\ &= \langle \rho(a)([e]), \rho(b)([e]) \rangle \\ &= \langle \rho(a)(\omega), \rho(b)(\omega) \rangle \,. \end{aligned}$$

E o Teorema de Construção GNS está demonstrado!

■

**Teorema 2.5.16** (Caracterização de C*-álgebras)**.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, então existe um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e existe um homomorfismo injetivo*

$$\rho : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$$

*que preserva involução e é uma isometria.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.1.4, basta supor que $\mathcal{A}$ seja uma C*-álgebra com unidade $e$. Pela letra (b) da Observação 2.5.13, para cada $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$, existe um estado $f_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ que satisfaz

$$f_x(x^* \cdot x) = ||x||^2. \tag{2.35}$$

Logo, pelo Teorema 2.5.15 de Construção GNS, existe um homomorfismo

$$\rho_x : \mathcal{A} \to B(H_{f_x})$$

que preserva involução, e além disso, existe um vetor unitário $\omega_x \in H_{f_x}$ tal que

$$f_x(b^* \cdot a) = \langle \rho_x(a)(\omega_x), \rho_x(b)(\omega_x) \rangle \,, \tag{2.36}$$

para quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$. Note ainda que, pelo Teorema 2.1.17, temos

$$||\rho_x(a)|| \leq ||a||, \tag{2.37}$$

para todo $a \in \mathcal{A}$. Defina o espaço de Hilbert (veja Apêndice B)

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} H_{f_x},$$

e defina, para cada $a \in \mathcal{A}$ fixado, o operador linear

$$\begin{array}{rcccl} \rho(a) & : & \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ & & (h_x)_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} & \mapsto & (\rho_x(a)(h_x))_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}} \end{array}$$

que está bem definido e é claramente linear. Além disso, tem-se que $\rho(a)$ é contínuo, pois

$$\begin{aligned} ||\rho(a)(h_x)_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}}||^2 &= ||(\rho_x(a)(h_x))_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}}||^2 \\ &= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \\ \rho_x(a)(h_x) \neq 0}} ||\rho_x(a)(h_x)||^2 \\ &\leq \sum_{\substack{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \\ \rho_x(a)(h_x) \neq 0}} ||a||^2 ||h_x||^2 \\ &= ||a||^2 \sum_{\substack{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \\ \rho_x(a)(h_x) \neq 0}} ||h_x||^2 \\ &\leq ||a||^2 \sum_{\substack{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\} \\ h_x \neq 0}} ||h_x||^2 \\ &= ||a||^2 . ||(h_x)_{x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}}||^2, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade que aparece acima é justificada por (2.37). Assim, temos

$$||\rho(a)(h)|| \leq ||a||.||h||,$$

para todo $h \in \mathcal{H}$, provando que $\rho(a)$ é contínuo, isto é, $\rho(a) \in B(\mathcal{H})$. Dessa maneira,

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & \mathcal{A} & \to & B(\mathcal{H}) \\ & & a & \mapsto & \rho(a) \end{array} \tag{2.38}$$

é um homomorfismo. Além do mais, $\rho$ preserva involução, pois fixado $a \in \mathcal{A}$ e tomando $h, j \in \mathcal{H}$, onde $h = (h_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}$ e $j = (j_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \rho(a)(h), j \rangle &= \left\langle \rho(a)(h_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}, (j_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \right\rangle \\
&= \left\langle (\rho_x(a)(h_x))_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}, (j_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \right\rangle \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \\ \rho_x(a)(h_x) \neq 0 \\ j_x \neq 0}} \langle \rho_x(a)(h_x), j_x \rangle \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \\ \langle \rho_x(a)(h_x), j_x \rangle \neq 0}} \langle \rho_x(a)(h_x), j_x \rangle \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \\ \langle \rho_x(a)(h_x), j_x \rangle \neq 0}} \langle h_x, \rho_x(a)^*(j_x) \rangle \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \\ \langle h_x, \rho_x(a)^*(j_x) \rangle \neq 0}} \langle h_x, \rho_x(a)^*(j_x) \rangle \\
&= \sum_{\substack{x \in \mathcal{A}\setminus\{0\} \\ h_x \neq 0 \\ \rho_x(a)^*(j_x) \neq 0}} \langle h_x, \rho_x(a^*)(j_x) \rangle \\
&= \left\langle (h_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}, (\rho_x(a^*)(j_x))_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \right\rangle \\
&= \langle h, \rho(a^*)(j) \rangle,
\end{aligned}$$

provando, dessa maneira, que

$$\langle \rho(a)(h), j \rangle = \langle h, \rho(a^*)(j) \rangle,$$

para todos $h, j \in \mathcal{H}$. Assim, $\rho(a^*) = \rho(a)^*$. Por último, perceba que $\rho$ preserva norma, bastando, para isso, notar que se $a \in \mathcal{A}$ com $a \neq 0$ então, temos através de (2.36), a seguinte igualdade

$$||\rho_a(a)(\omega_a)||^2 = f_a(a^* \cdot a)$$

e, por (2.35) e a igualdade acima, temos $||\rho_a(a)(\omega_a)|| = ||a||$. Definindo $h := (h_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}} \in \mathcal{H}$ onde $h_x = 0$, sempre que $x \neq a$, e $h_a = \omega_a$, temos

$$||h||^2 = ||(h_x)_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}||^2 = ||h_a||^2 = ||\omega_a||^2 = 1$$

e, dessa forma, também temos

$$||\rho(a)||^2 \geq ||\rho(a)(h)||^2 = ||(\rho_x(a)(h_x))_{x\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}||^2 = ||\rho_a(a)(\omega_a)||^2 = ||a||^2,$$

concluindo que $||\rho(a)|| \geq ||a||$, para todo $a \in \mathcal{A}$. Pelo Teorema 2.1.17 temos $||\rho(a)|| \leq ||a||$, para todo $a \in \mathcal{A}$, ficando demonstrado que $\rho$ preserva norma. Assim, provamos que $\rho$ definida em (2.38) é um homomorfismo que preserva involução e preserva norma. Logo, segue o resultado!

■

## 2.6 Exercícios

**Exercício 16.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra. Se $a \in \mathcal{A}$ é unitário, então $|\lambda| = 1$, para todo $\lambda \in \sigma(a)$.

**Exercício 17.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa com unidade e com involução. Se as normas $||.||_1$ e $||.||_2$ tornam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, então $||.||_1 = ||.||_2$. Isto é, numa C*-álgebra não há outra norma que ainda a torne C*-álgebra.

**Exercício 18.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, e $\mathcal{B}$ uma subálgebra fechada com mesma unidade, tal que $\mathcal{B}$ seja fechada para a involução, seja ainda $x \in \mathcal{B}$. Prove que $x$ é invertível em $\mathcal{B}$ se, e somente se, é invertível em $\mathcal{A}$.

**Exercício 19.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então existe uma C*-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$ comutativa com unidade que contém $\mathcal{A}$, tal que, $\mathcal{A}$ seja um ideal maximal de $\widehat{\mathcal{A}}$.

**Exercício 20.** Dado uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ comutativa com unidade e $M \subset \mathcal{A}$ um ideal maximal. Então $A/M$ é isomorfo isometricamente a $\mathbb{C}$.

**Exercício 21.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então existe um homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$.

**Exercício 22.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade semisimples. Se $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é um involução sobre $\mathcal{A}$, então $*$ é contínua.

**Exercício 23.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa semisimples comutativa com unidade. Então se $||.||$ e $||.||_0$ são normas que tornam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach, então $||.||$ é equivalente a $||.||_0$. Isto significa que em uma álgebra complexa semisimples comutativa com unidade, só possui uma única topologia para ser álgebra de Banach.

**Exercício 24.** Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach comutativa com unidade, e $a \in \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{A}$ é gerado pelo conjunto $\{e, a\}$. Prove que $\sigma(a)$ é homeomorfo a $\Delta$ com a topologia de Gelfand.

**Exercício 25.** Encontre uma álgebra de Banach $\mathcal{A}$ que não seja possível definir uma involução sobre $\mathcal{A}$ que a torne uma C*-álgebra.

**Exercício 26.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach com unidade, e sejam $a, b \in \mathcal{A}$ tais que $a \cdot b = b \cdot a$. Então prove que

$$\sigma(a+b) \subset \sigma(a) + \sigma(b) \qquad \text{e} \qquad \sigma(a \cdot b) \subset \sigma(a).\sigma(b).$$

**Exercício 27.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade e seja $x \in \mathcal{A}$. Se todo homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é tal que $\varphi(x) = 0$, então $x = 0$.

**Exercício 28.** Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa com unidade e seja $x \in \mathcal{A}$. Então já sabemos, por Hahn-Banach, que

$$||x|| = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{A}' \\ ||\varphi|| = 1}} ||\varphi(x)||.$$

Prove que, se $\Delta$ é o conjunto dos homomorfismos complexos de $\mathcal{A}$, então

$$||x|| = \sup_{\varphi \in \Delta} ||\varphi(x)||.$$

**Exercício 29.** Seja $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra comutativa sem unidade, e seja $x \in \mathcal{A}$. Então prove que, para todo $\epsilon > 0$, existe um homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ tal que $|\varphi(x)| < \epsilon$.

**Exercício 30.** Seja $\widetilde{X}$ um espaço compacto de Hausdorff, $\infty \in \widetilde{X}$ e defina $X := \widetilde{X} \setminus \{\infty\}$. Então prove que

(a) $X$ é um espaço localmente compacto de Hausdorff com a topologia relativa.

(b) Se $f \in C(\widetilde{X})$ tal que $f(\infty) = 0$, então $f|_X \in C_0(X)$.

(c) Se $g \in C_0(X)$, então existe $\widetilde{g} \in C(\widetilde{X})$ tal que $\widetilde{g}(\infty) = 0$ e $\widetilde{g}|_X = g$.

**Exercício 31.** Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach. Se $*$ e $\dagger$ são involuções que tornam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra, então $* = \dagger$.

# Capítulo 3

# As Álgebras $C_0(X)$ e $C(X)$

Sabemos através do Teorema 2.4.3 e Teorema 2.4.5 que as C*-álgebras são, a menos de isomorfismos isométricos, álgebras complexas da forma $C(X)$ e $C_0(X)$, de acordo com o Exemplo 2.1.6, com suas operações naturais. Neste capítulo iremos descobrir um pouco mais das particularidades das álgebras complexas $C(X)$ e $C_0(X)$. No Teorema 3.1.8 e Teorema 3.1.14 caracterizaremos todos os homomorfismos complexos das álgebras $C(X)$ e $C_0(X)$. Faremos isso por meio da teoria de compactificação de espaços topológicos localmente compactos de Hausdorff, por vezes conhecida como compactificação de Alexandrov, desenvolvida neste capítulo. O Teorema 3.2.2 é um caso particular do Teorema de Banach-Stone e nos mostra que podemos deduzir surpreendentes resultados utilizando os teoremas de caracterizações provados anteriormente.

## 3.1 Caracterização dos Homomorfismos Complexos de $C_0(X)$

**Definição 3.1.1.** Seja $X$ um conjunto, e seja $\mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ o conjunto das funções com domínio $X$ e contradomínio $\mathbb{C}$. Diz-se que $C \subset \mathcal{F}(X, \mathbb{C})$ separa pontos, quando para todos $x, y \in X$, com $x \neq y$, existe uma função $f \in C$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

**Teorema 3.1.2.** *Se $X$ é um espaço localmente compacto de Hausdorff, então $C_0(X)$ separa pontos.*

**Demonstração:** Dados $x, y \in X$ com $x \neq y$, sabemos que existe um aberto $V \subset X$ com fecho compacto tal que $x \in V$, e sabemos ainda que existe um aberto $W$ tal que $x \in W$ e $y \notin W$, já que $X$ é de Hausdorff. Assim

$$U := W \cap V$$

é um aberto contendo $x$ tal que $y \notin U$ e com fecho contido no fecho de $V$ e portanto com fecho compacto. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(x) = 1 \quad \text{e} \quad f(z) = 0, \quad \text{para todo} \quad z \notin U,$$

indicando que $f(y) = 0$. Note ainda que $f \in C_0(X)$, pois $\overline{U}$ é compacto e $f(z) = 0$, para todo $z \notin \overline{U}$. Logo, $f \in C_0(X)$ com $f(x) \neq f(y)$.

■

**Observações** 3.1.3. Temos duas observações do Teorema anterior:

(a) Segue diretamente do Teorema 3.1.2 que $C(X)$ separa pontos quando $X$ é um espaço compacto de **Hausdorff**.

(b) Se $X$ é um espaço compacto, não necessariamente de Hausdorff, então não é possível garantir que $C(X)$ separa pontos. De fato, seja $X$ um conjunto infinito com a topologia caótica, então $C(X)$ é o conjunto das funções constantes e portanto $C(X)$ claramente não separa pontos.

**Definição 3.1.4.** Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja $x \in X$. O homomorfismo complexo

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_x & : & C_0(X) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & \varphi_x(f) = f(x) \end{array} \tag{3.1}$$

é dito homomorfismo de avaliação no ponto $x \in X$. Diremos que $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo de avaliação quando for um homomorfismo de avaliação em algum ponto de $X$.

**Observação** 3.1.5. Facilmente conseguimos provar que a função (3.1) é de fato um homomorfismo complexo, observe que para provarmos que é uma função não nula, precisamos do Lema de Urysohn. Abaixo temos uma definição análoga à anterior.

**Definição 3.1.6.** Seja $X$ um espaço compacto e seja $x \in X$. O homomorfismo complexo

$$\begin{array}{rcccl} \varphi_x & : & C(X) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & \varphi_x(f) = f(x) \end{array} \tag{3.2}$$

é dito homomorfismo de avaliação no ponto $x \in X$. Diremos que $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo de avaliação quando for um homomorfismo de avaliação em algum ponto de $X$.

**Definição 3.1.7.** Seja $X$ um espaço compacto e $\mathcal{A}$ uma subálgebra de $C(X)$. Um homomorfismo complexo

$$\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C},$$

será dito um homomorfismo de avaliação caso seja uma restrição de algum homomorfismo de avaliação sobre $C(X)$, isto é, caso exista um ponto $x \in X$ tal que $\varphi(f) = f(x)$, para todo $f \in \mathcal{A}$.

Estaremos interessados, nesta seção, em caracterizar todos os homomorfismos complexos de $C_0(X)$ e mostrar que são todos da forma (3.1), isto é, os únicos homomorfismo de $C_0(X)$ são os homomorfismo de avaliação. Faremos primeiramente o caso em que $X$ é um conjunto compacto.

**Teorema 3.1.8.** *Se $X$ é um espaço compacto, então todo homomorfismo complexo $\varphi : C(X) \to \mathbb{C}$ é de avaliação.*

**Demonstração:** Suponha que $\varphi$ não seja de avaliação. Portanto temos, para todo $x \in X$, que $\varphi \neq \varphi_x$, onde $\varphi_x$ é dado em (3.2) e, pelo Teorema 2.3.2, segue que

$$ker\ \varphi \not\subset ker\ \varphi_x.$$

Isto significa que existe uma função $f_x \in C(X)$ tal que $\varphi(f_x) = 0$ com $f_x(x) \neq 0$, decorrendo, por $f_x$ ser contínua, que existe um aberto $V_x \subset X$ tal que $x \in V_x$ e $f_x(y) \neq 0$, para todo $y \in V_x$. Assim, obtemos

$$X = \bigcup_{x \in X} V_x,$$

e como $X$ é compacto, existem $x_1, ..., x_n \in X$ tais que

$$X = V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}.$$

Defina $f := f^*_{x_1} \cdot f_{x_1} + ... + f^*_{x_n} \cdot f_{x_n}$ e portanto $f \in C(X)$ com $f(x) > 0$, para todo $x \in X$, resultando que $f$ é invertível com inverso $f^{-1}$, onde $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$. Pela Proposição 1.2.2 temos $\varphi(f) \neq 0$, o que é um absurdo, pois

$$\begin{aligned} \varphi(f) &= \varphi(f^*_{x_1}).\varphi(f_{x_1}) + ... + \varphi(f^*_{x_n}).\varphi(f_{x_n}) \\ &= \varphi(f^*_{x_1}).0 + ... + \varphi(f^*_{x_n}).0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim provamos que existe um $x \in X$ tal que $\varphi = \varphi_x$.

$\blacksquare$

**Proposição 3.1.9.** *Sejam $X$ um espaço compacto e $x_0 \in X$. Então*

$$\mathcal{A} := \{f \in C(X) \ ; \ f(x_0) = 0\}$$

*é uma subálgebra de $C(X)$ fechada para involução. E mais, todo homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é de avaliação em um ponto diferente de $x_0$.*

**Demonstração:** Ora, não é difícil mostrar que $\mathcal{A}$ é uma subálgebra de $C(X)$ e fechada para involução. Assim, $\mathcal{A}$ é uma álgebra complexa com involução. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ um homomorfismo complexo. Para mostrar que $\varphi$ é de avaliação basta estender o homomorfismo $\varphi$ para um homomorfismo em $C(X)$ e usar o Teorema 3.1.8. Defina a seguinte função

$$\begin{array}{rcccl} \widetilde{\varphi} & : & C(X) & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & \varphi(f - f(x_0)e) + f(x_0), \end{array} \tag{3.3}$$

que está bem definida, pois para todo $f \in C(X)$ temos

$$f - f(x_0)e \in \mathcal{A},$$

fazendo sentido aplicar $\varphi$ na função acima. Note ainda que $\widetilde{\varphi}$ estende $\varphi$, pois se $f \in \mathcal{A}$, então

$$\widetilde{\varphi}(f) = \varphi(f - f(x_0)e) + f(x_0) = \varphi(f).$$

Além disso, $\widetilde{\varphi}$ é um homomorfismo, pois se $f, g \in C(X)$ então

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}(f \cdot g) &= \varphi((f \cdot g) - (f \cdot g)(x_0)e) + (f \cdot g)(x_0) \\ &= \varphi(f \cdot g - f(x_0)g - g(x_0)f + f(x_0)g(x_0)e + g(x_0)f \\ &\quad -f(x_0)g(x_0)e + f(x_0)g - f(x_0)g(x_0)e) + (f \cdot g)(x_0) \\ &= \varphi(f - f(x_0)e)\varphi(g - g(x_0)e) + g(x_0)\varphi(f - f(x_0)e) + \\ &\quad +f(x_0)\varphi(g - g(x_0)e) + f(x_0)g(x_0) \\ &= (\varphi(f - f(x_0)e) + f(x_0))(\varphi(g - g(x_0)e) + g(x_0)) \\ &= \widetilde{\varphi}(f).\widetilde{\varphi}(g). \end{aligned}$$

De maneira análoga e mais simples também conseguimos provar que

$$\widetilde{\varphi}(f + g) = \widetilde{\varphi}(f) + \widetilde{\varphi}(g) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\varphi}(\lambda f) = \lambda \widetilde{\varphi}(f),$$

para quaisquer $f, g \in C(X)$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, e como $\varphi$ é não nulo então $\widetilde{\varphi}$ é não nulo, provando que (3.3) define um homomorfismo complexo de $C(X)$. Pelo Teorema 3.1.8, existe $x \in X$ tal que $\widetilde{\varphi}(f) = f(x)$, para todo $f \in C(X)$, e consequentemente

$$\varphi(f) = f(x),$$

para todo $f \in \mathcal{A}$. Logo $\varphi$ é de avaliação em $x \in X$. Por fim, se $x$ fosse igual a $x_0$ então $\varphi$ seria nula, o que é um absurdo! Então $\varphi$ é de avaliação em um ponto diferente de $x_0$.

■

**Observação** 3.1.10. Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então nosso próximo objetivo é construir um espaço

$$\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$$

tal que $\infty \notin X$, e $\widetilde{X}$ está munido de uma topologia, onde

(a) $\widetilde{X}$ é um espaço topológico compacto de Hausdorff.

(b) A topologia de $X$ é induzida pela topologia relativa de $\widetilde{X}$.

**Proposição 3.1.11.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, e seja $\infty \notin X$. Então*

$$\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$$

*munido com a seguinte topologia, $A \subset \widetilde{X}$ é aberto em $\widetilde{X}$ quando $A \subset X$ é aberto em $X$ ou quando $\widetilde{X} \setminus A$ é um subconjunto compacto de $X$, é um espaço topológico de Hausdorff. Mais ainda, a topologia relativa de $X \subset \widetilde{X}$ é a topologia de $X$.*

**Demonstração:** Vemos facilmente que $\varnothing$ e $\widetilde{X}$ são abertos em $\widetilde{X}$. Agora sejam $A$ e $B$ abertos de $\widetilde{X}$. Provemos que $A \cap B$ é um aberto de $\widetilde{X}$. Dividiremos essa prova em 3 casos.

Se $\infty \notin A$ e $\infty \notin B$, então $A$ e $B$ são abertos de $X$, e logo $A \cap B$ é aberto de $X$, e logo aberto de $\widetilde{X}$.

Se $\infty \in A$ e $\infty \in B$ então $\widetilde{X} \setminus A$ e $\widetilde{X} \setminus B$ são conjunto compactos de $X$. Assim, temos

$$\widetilde{X} \setminus (A \cap B) = (\widetilde{X} \setminus A) \cup (\widetilde{X} \setminus B)$$

um conjunto compacto de $X$, já que a união finita de compactos é compacto. Logo $A \cap B$ é aberto em $\widetilde{X}$.

Agora se $\infty \in A$ e $\infty \notin B$, então $\widetilde{X} \setminus A$ é compacto de $X$ e $B$ é aberto de $X$. Como

$$X \setminus (A \setminus \{\infty\}) = \widetilde{X} \setminus A,$$

então $A \setminus \{\infty\}$ é um conjunto aberto de $X$. Assim $(A \setminus \{\infty\}) \cap B$ é aberto de $X$, mas $(A \setminus \{\infty\}) \cap B = A \cap B$, logo $A \cap B$ é um aberto de $\widetilde{X}$.

Assim se $A$ e $B$ são abertos de $\widetilde{X}$ então $A \cap B$ também será um aberto de $\widetilde{X}$. Provemos agora que a união qualquer de conjuntos abertos de $\widetilde{X}$ é um aberto de $\widetilde{X}$. Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de abertos de $\widetilde{X}$. Note que essa família é união de duas famílias $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ e $\{C_\lambda\}_{\lambda \in L''}$, dos abertos respectivamente que contém $\infty$ e dos que não contém $\infty$. Logo

$$\infty \in B_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in L', \quad \text{ e } \quad \infty \notin C_\lambda, \text{ para todo } \lambda \in L''.$$

Então $\widetilde{X} \setminus B_\lambda$ é um subconjunto compacto de $X$, para todo $\lambda \in L'$, e $C_\lambda$ é um subconjunto aberto de $X$, para todo $\lambda \in L''$. Assim

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \left( \bigcup_{\lambda \in L'} B_\lambda \right) \cup \left( \bigcup_{\lambda \in L''} C_\lambda \right). \tag{3.4}$$

Claramente se a família $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ for vazia, então (3.4) é um conjunto aberto de $X$ e portanto um aberto de $\widetilde{X}$. Caso a família $\{B_\lambda\}_{\lambda \in L'}$ for não vazia, defina

$$B := \bigcup_{\lambda \in L'} B_\lambda \qquad \text{e} \qquad C := \bigcup_{\lambda \in L''} C_\lambda.$$

Então $B$ e $C$ são abertos de $\widetilde{X}$. O fato de $B$ ser aberto de $\widetilde{X}$ deve-se a

$$\widetilde{X} \setminus B = \widetilde{X} \setminus \left( \bigcup_{\lambda \in L'} B_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in L'} \left( \widetilde{X} \setminus B_\lambda \right) \subset \widetilde{X} \setminus B_{\lambda_0} \subset X$$

para qualquer $\lambda_0 \in L'$, e como $X$ é de Hausdorff, temos $\widetilde{X} \setminus B$ é um compacto de $X$, pois é interseção de fechados e está dentro de um compacto. Assim, note por final que

$$\widetilde{X} \setminus (B \cup C) = \widetilde{X} \setminus (B \cup C \cup \{\infty\}) = (\widetilde{X} \setminus B) \cap (\widetilde{X} \setminus (C \cup \{\infty\}) = (\widetilde{X} \setminus B) \cap (X \setminus C),$$

o qual, é um compacto de $X$, já que é um fechado dentro de um compacto. Assim $B \cup C$ é um aberto de $\widetilde{X}$, e de qualquer forma,

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = B \cup C$$

é um aberto de $\widetilde{X}$. Assim a família de abertos em $\widetilde{X}$ é uma topologia. A topologia de $X$ corresponde exatamente a topologia relativa de $X$ em $\widetilde{X}$. De fato, se $A$ é um aberto de $\widetilde{X}$, então $A \subset X$ é aberto de $X$ ou $\widetilde{X} \setminus A \subset X$ é compacto de $X$, portanto $A \cap X = A$ é aberto de $X$ ou $X \setminus (A \cap X) = X \setminus A = \widetilde{X} \setminus A$ é compacto de $X$, em qualquer caso $A \cap X$ é aberto de $X$. Se $A \subset X$ é aberto de $X$, então é aberto de $\widetilde{X}$ e, como $A = A \cap X$, concluimos que $A$ é aberto relativo de $X$. Fica provado que a topologia de $X$ é a topologia relativa de $X$ em $\widetilde{X}$. Por fim, provemos que $\widetilde{X}$ é de Hausdorff. Sejam $x, y \in \widetilde{X}$ com $x \neq y$. Caso $x, y \in X$ então claramente existem abertos disjuntos de $\widetilde{X}$ que sejam vizinhanças de $x$ e $y$ respectivamente. Caso $x = \infty$ e $y \in X$ então, como $X$ é localmente compacto, existe um aberto $A \subset X$ onde $y \in A$ e $\overline{A}$ seja compacto em $X$, notando que $x \in \widetilde{X} \setminus \overline{A}$ e $\widetilde{X} \setminus \overline{A}$ é um aberto de $\widetilde{X}$, e assim basta tomar os abertos $A$ e $\widetilde{X} \setminus \overline{A}$ que são disjuntos e $y \in A$ e $x \in \widetilde{X} \setminus \overline{A}$.

$\blacksquare$

**Definição 3.1.12.** Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, e $\infty \notin X$. O espaço topológico

$$\widetilde{X} := X \cup \{\infty\}$$

munido com a topologia, $A \subset \widetilde{X}$ é aberto em $\widetilde{X}$ quando $A \subset X$ é aberto em $X$ ou quando $\widetilde{X} \setminus A$ é um subconjunto compacto de $X$, será dito a compactificação de $X$.

**Teorema 3.1.13.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff. A compactificação $\widetilde{X}$ de $X$ é um espaço compacto de Hausdorff.*

**Demonstração:** Seja $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ uma cobertura aberta de $\widetilde{X}$, ou seja,

$$\widetilde{X} = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda. \tag{3.5}$$

Existe $\lambda_0 \in L$ tal que $\infty \in A_{\lambda_0}$. Portanto, como $A_{\lambda_0}$ é um aberto de $\widetilde{X}$ que possui $\infty$, temos $K := \widetilde{X} \setminus A_{\lambda_0}$ um subconjunto compacto de $X$. Por (3.5) temos

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in L \setminus \{\lambda_0\}} A_\lambda,$$

e portanto

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in L \setminus \{\lambda_0\}} (A_\lambda \cap X).$$

Mas, pela Proposição 3.1.11, temos $A_\lambda \cap X$ um aberto de $X$, para cada $\lambda \in L$. Logo, como $K$ é compacto em $X$, temos que $K$ possui subcobertura finita, e consequentemente existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in L$ tais que

$$K \subset (A_{\lambda_1} \cap X) \cup ... \cup (A_{\lambda_n} \cap X) \,.$$

Assim

$$\begin{aligned} \widetilde{X} &= A_{\lambda_0} \cup K \\ &\subset (A_{\lambda_0} \cup (A_{\lambda_1} \cap X) \cup ... \cup (A_{\lambda_n} \cap X)) \\ &\subset (A_{\lambda_0} \cup A_{\lambda_1} \cup ... \cup A_{\lambda_n}) \,. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\widetilde{X}$ possui subcobertura finita. Isto mostra que $\widetilde{X}$ é espaço topológico compacto.

■

Abaixo encontra-se o principal Teorema desta seção.

**Teorema 3.1.14.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff. Então todo homomorfismo complexo $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ é de avaliação.*

**Demonstração:** Seja $\widetilde{X}$ a compactificação de $X$, e defina

$$\mathcal{A} := \{f \in C(\widetilde{X}) \; ; \; f(\infty) = 0\}.$$

Pela Proposição 3.1.9, $\mathcal{A}$ é subálgebra de $C(\widetilde{X})$ fechada para involução. Defina

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{\varphi} & : & \mathcal{A} & \to & \mathbb{C} \\ & & f & \mapsto & \varphi(f|_X), \end{array} \tag{3.6}$$

notando primeiramente que $\widetilde{\varphi}$ está bem definida. De fato, dada $f \in \mathcal{A}$, basta provar que $f|_X \in C_0(X)$. Como $f(\infty) = 0$ e $f$ é contínua, segue que, para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $A \subset \widetilde{X}$ tal que $\infty \in \mathcal{A}$ e $|f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in A$. Pela definição dos abertos de $\widetilde{X}$, temos $K := \widetilde{X} \setminus \mathcal{A}$ um subconjunto compacto de $X$, e consequentemente $|f|_X(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X \setminus K$, concluindo, por $f|_X$ ser contínua, que $f|_X \in C_0(X)$. Assim $\widetilde{\varphi}$ está bem definida. Além disso, sem dificuldades, vemos que $\widetilde{\varphi}$ é um funcional linear que preserva multiplicação, isto é,

$$\widetilde{\varphi}(f \cdot g) = \widetilde{\varphi}(f).\widetilde{\varphi}(g),$$

para todos $f, g \in C(\widetilde{X})$. Provemos agora a seguinte asserção:

$$\text{Para todo } g \in C_0(X) \text{ existe } \widetilde{g} \in \mathcal{A} \text{ tal que } \widetilde{g}|_X = g. \tag{3.7}$$

Tome $g \in C_0(X)$, e defina $\widetilde{g} : \widetilde{X} \to \mathbb{C}$ por $\widetilde{g}(\infty) = 0$ e $\widetilde{g}(x) = g(x)$, para todo $x \in X$. Sem dificuldades conseguimos provar por definição que $\widetilde{g}$ é contínua em todo ponto de $X$. Resta-nos provar que $\widetilde{g}$ é contínua em $\infty \in \widetilde{X}$. Tomando $\epsilon > 0$, sabemos que

$$\exists\ K \subset X \text{ compacto tal que } |g(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in X \setminus K.$$

Definindo $A := \widetilde{X} \setminus K$, o qual é um aberto de $\widetilde{X}$, segue, por $\widetilde{g}(\infty) = 0$ e pela afirmação acima, que $|\widetilde{g}(x)| < \epsilon$, para todo $x \in A$. Ou seja, para todo $\epsilon > 0$, existe um aberto $A$ de $\widetilde{X}$ tal que $\infty \in \mathcal{A}$ e $|\widetilde{g}(x)| < \epsilon$, para todo $x \in A$. Isto prova que $\widetilde{g}$ é contínua, concluindo que $\widetilde{g} \in \mathcal{A}$ e, finalmente, demonstrando a asserção (3.7).

De (3.7), segue que o funcional linear $\widetilde{\varphi}$ é não nulo. De fato, como $\varphi$ é não nulo, existe $g \in C_0(X)$, onde $\varphi(g) \neq 0$ e, por (3.7), existe $\widetilde{g} \in \mathcal{A}$ que é uma extensão da $g$. Assim,

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}) = \varphi(\widetilde{g}|_X) = \varphi(g) \neq 0,$$

concluindo que $\widetilde{\varphi}$ é um funcional linear não nulo. Como $\widetilde{\varphi}$ preserva multiplicação, tem-se que (3.6) define um homomorfismo complexo. Pela Proposição 3.1.9, $\widetilde{\varphi}$ é um homomorfismo de avaliação em um ponto $z \in \widetilde{X}$ diferente de $\infty$, logo $z \in X$. E, dessa maneira,

$$\widetilde{\varphi}(\widetilde{g}) = \widetilde{g}(z),$$

para todo $\widetilde{g} \in \mathcal{A}$.

Consequentemente $\varphi$ é um homomorfismo de avaliação em $z \in X$. De fato, se $g \in C_0(X)$, então por (3.7), existe $\widetilde{g} \in \mathcal{A}$ que é extensão de $g$ e, da seguinte igualdade,

$$\varphi(g) = \varphi(\widetilde{g}|_X) = \widetilde{\varphi}(\widetilde{g}) = \widetilde{g}(z) = g(z),$$

segue que $\varphi$ é um homomorfismo de avaliação.

■

**Observação** 3.1.15. Observe que, no Teorema 1.2.4, já havíamos provado que todo homomorfismo complexo $\varphi$ em uma álgebra de Banach é contínua e possui norma $||\varphi|| \leq 1$. O corolário seguinte nos diz que se, além dessas hipóteses, tivermos também $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa, então o homomorfismo tem norma exatamente 1.

**Corolario 3.1.16.** *Seja $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra comutativa. Então todo homomorfismo complexo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é contínuo e $||\varphi|| = 1$.*

**Demonstração:** Pelo Teorema 2.4.5, toda C*-álgebra comutativa é isomorfa isometricamente a $C_0(X)$, para algum espaço $X$ localmente compacto de Hausdorff. Dessa forma, basta provar o resultado para quando a C*-álgebra comutativa é $C_0(X)$ com $X$ localmente compacto de Hausdorff.

Seja $X$ localmente compacto de Hausdorff. Se $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo complexo então, pelo Teorema 3.1.14, $\varphi$ é um homomorfismo de avaliação e portanto, pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C_0(X)$, onde $\varphi(f) = ||f||$. Como, além disso, $|\varphi(g)| \leq ||g||$, para todo $g \in C_0(X)$, temos $||\varphi|| = 1$.

■

## 3.2 A Fidelidade do Funtor $X \mapsto C(X)$: A Determinação de $X$ a partir de $C(X)$

Facilmente conseguimos provar que quando $X$ e $Y$ são espaços topológicos compactos homeomorfos, então a C*-álgebra $C(X)$ é isomorfa isometricamente a $C(Y)$. Porém uma pergunta que pode surgir naturalmente é a respeito da recíproca. Seja $X$ um espaço compacto não Hausdorff, $C(X)$ é uma C*-álgebra comutativa com unidade e, pelo Teorema 2.4.3, temos $C(X)$ isomorfo isometricamente a $C(\Delta)$, onde $\Delta$ um espaço compacto de Hausdorff, $C(X)$ é isomorfo isometricamente a $C(\Delta)$, com $X$ não é homeomorfo a $\Delta$, já que $X$ não é de Hasudorff e $\Delta$ é de Hausdorff. Provaremos nesta seção que, quando $C(X)$ é isomorfo isometricamente a $C(Y)$, onde $X$ e $Y$ são espaços compactos de **Hausdorff**, então o espaço topológico $X$ é homeomorfo a $Y$.

**Teorema 3.2.1.** *Seja $X$ um espaço compacto de Hausdorff, e seja $\Delta$ o espectro de $C(X)$. Então $\Delta$ é homeomorfo a $X$.*

**Demonstração:** Defina a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} \Im & : & X & \rightarrow & \Delta \\ & & x & \mapsto & \varphi_x, \end{array}$$

onde $\varphi_x$ é o homomorfismo de avaliação no ponto $x \in X$ em $C(X)$. $\Im$ é uma função injetiva, já que se $x, y \in X$ e $x \neq y$, então, pelo Teorema 3.1.2, existe uma função $f \in C(X)$, onde $f(x) \neq f(y)$, concluindo que $\varphi_x(f) \neq \varphi_y(f)$, isto é, $\varphi_x \neq \varphi_y$. Além do mais, o Teorema 3.1.14, garante que $\Im$ é sobrejetiva. Portanto $\Im$ é uma bijeção. Para provar que $\Im$ é um homeomorfismo, basta provar que $\Im$ é contínua, pois $X$ e $\Delta$ são compactos de Hausdorff.

Tome $x \in X$ e provemos que $\Im$ é contínua em $x \in X$. Seja $W \subset \Delta$ um aberto que contenha $\Im(x)$. Como a topologia de Gelfand em $\Delta$ é a menor topologia em relação à qual a família de funções $\widehat{f} : \Delta \to \mathbb{C}$, onde $\widehat{f}(\varphi) = \varphi(f)$ para todo $\varphi \in \Delta$, são contínuas, segue que a topologia de Gelfand é a topologia gerada pelo conjunto

$$\left\{ \widehat{f}^{-1}(A) \subset \Delta \ ; \ f \in C(X) \text{ e } A \subset \mathbb{C} \text{ é aberto} \right\}.$$

Portanto um aberto da topologia de Gelfand é uma união qualquer de interseção finitas de elementos do conjunto acima. Isto significa que $W$ é uma união qualquer de interseções finitas de elementos do conjunto acima, e portanto, como $\Im(x) \in W$, existem uma quantidade finita de funções $f_1, ..., f_n \in C(X)$ e abertos $A_1, ..., A_n \subset \mathbb{C}$ tais que

$$\Im(x) \in \widehat{f_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \widehat{f_n}^{-1}(A_n).$$

Perceba que isto significa que

$$\widehat{f_1}(\Im(x)) \in A_1 \ , \ ... \ , \ \widehat{f_n}(\Im(x)) \in A_n.$$

Como $\widehat{f_i}(\Im(x)) = \widehat{f_i}(\varphi_x) = \varphi_x(f_i) = f_i(x)$, segue que

$$f_1(x) \in A_1, ..., f_n(x) \in A_n. \tag{3.8}$$

Definindo

$$V := f_1^{-1}(A_1) \cap ... \cap f_n^{-1}(A_n), \tag{3.9}$$

tem-se $V$ um aberto de $X$. Logo, por (3.8), temos $x \in V$. Além disso, sempre que $y \in V$, tem-se

$$f_1(y) \in A_1, ..., f_n(y) \in A_n,$$

consequentemente

$$\widehat{f_1}(\Im(y)) \in A_1, ..., \widehat{f_n}(\Im(y)) \in A_n.$$

Dessa maneira, temos

$$\Im(y) \in \widehat{f_1}^{-1}(A_1) \cap ... \cap \widehat{f_n}^{-1}(A_n),$$

ou seja $\Im(y) \in W$. Isto significa que $\Im(V) \subset W$ e como $x \in V$ e $W$ foi um aberto qualquer, então $\Im$ é contínuo em $x$. Já que $x \in X$ foi arbitrário, conclui-se que $\Im$ é contínua. Assim $\Im$ é homeomorfismo.

∎

Assim quando falarmos da C*-álgebra $C(X)$, com $X$ um espaço compacto de Hausdorff, sabemos exatamente quem é o espaço topológico $X$ a menos de homeomorfismo. É o que diz o seguinte resultado.

**Teorema 3.2.2.** *Sejam $X$ e $Y$ espaços topológicos compactos de Hausdorff, e suponha $C(X)$ isomorfo isometricamente a $C(Y)$. Então $X$ é homeomorfo a $Y$.*

A demonstração segue diretamente do Teorema 3.2.1.

**Observação** 3.2.3. Isto significa que o funtor

$$\begin{array}{rcccc} \mathcal{F} & : & \left\{ \begin{array}{c} \text{Espaços topológicos} \\ \text{compacto de Hausdorff} \end{array} \right\} & \rightarrow & \left\{ \begin{array}{c} \text{C*-álgebras comutativas} \\ \text{com unidade} \end{array} \right\} \\ & & X & \mapsto & C(X) \end{array}$$

é completamente fiel, note que ele é pleno pelo Teorema 2.4.3 de Gelfand-Naimark, e ele se torna fiel pelo Teorema anterior.

## 3.3 Exercícios

**Exercício 32.** Seja $X$ um espaço compacto, e seja $\mathcal{A} \subset C(X)$ um ideal maximal. Então existe $x_0 \in X$, onde

$$\mathcal{A} = \{f \in C(X) \ ; \ f(x_0) = 0\}.$$

**Exercício 33.** Seja $X$ um espaço localmente compacto Hausdorff, e seja $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ a compactificação de $X$. Prove que $X$ é compacto se, e somente se, $\infty$ é ponto isolado de $\overline{X}$. Segue que, se $X$ é não compacto, então $\overline{X}$ possui $\infty$ um ponto de acumulação.

**Exercício 34.** Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, seja ainda $f \in C_0(X)$. Se $f(X) = D \subset \mathbb{C}$, então prove que, para todo homomorfismo complexo $\varphi : C_0(X) \to \mathbb{C}$, tem-se $\varphi(f) \in D$.

# Apêndice A

# Uma Aplicação do Teorema de Gelfand-Mazur

Iremos provar neste Apêndice, como consequência do Teorema 1.3.5 de Gelfand-Mazur, o Teorema Fundamental da Álgebra.

**Definição A.1.** Um subespaço vetorial $J$ de $\mathbb{C}[x]$ será dito um **ideal de** $\mathbb{C}[x]$, quando

$$J \cdot \mathbb{C}[x] \subset J.$$

**Notação.** Se $g \in \mathbb{C}[x]$, então o ideal de $\mathbb{C}[x]$ gerado por $g$ será denotado por $(g)$. Lembre-se que $(g) := \mathbb{C}[x] \cdot g$.

Em $\mathbb{C}[x]$, sabemos ainda que existe o algoritmo da divisão de Euclides:

**Teorema A.2** (Algoritmo de Euclides)**.** *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[x]$ e grau$(g) \geq 0$. Então existem $q, r \in \mathbb{C}[x]$ onde*

$$f = q \cdot g + r$$

*e grau$(r) <$ grau$(g)$. Os polinômios $q, r \in \mathbb{C}[x]$ são unicamente determinados com tais condições.*

**Teorema A.3.** *Se $J$ é ideal de $\mathbb{C}[x]$, então existe $g \in \mathbb{C}[x]$ tal que $J = (g)$.*

**Demonstração:** Suponha $J \neq \{0\}$. Se $J$ conter ao menos um polinômio constante não nulo, então $J = \mathbb{C}[x] = (1)$. Caso $J$ não contenha polinômio constante não nulo, tome $g \in J$ algum polinômio de menor grau não nulo de $J$. Dessa maneira, temos $J = (g)$. De fato, se $f \in J$, então, pelo algoritmo de Euclides,

$$\exists\ q, r \in \mathbb{C}[x] \qquad \text{tais que} \qquad f = q \cdot g + r$$

com $grau(r) < grau(g)$, provando, pela igualdade acima, que $r \in J$ e, pela minimalidade do grau de $g$ em $J$, temos $r = 0$, isto é, $f \in (g)$.

■

**Teorema A.4.** *Sejam $p, f \in \mathbb{C}[x]$ onde $p$ é um polinômio irredutível, e suponha que $f \notin (p)$. Existem $f', p' \in \mathbb{C}[x]$ tais que*

$$f \cdot f' + p \cdot p' = 1.$$

**Demonstração:** Sabemos que $(p) + (f)$ é um ideal e, pelo Teorema anterior, existe $g \in \mathbb{C}[x]$ tal que $(p) + (f) = (g)$. Disso decorre que $p, f \in (g)$ e portanto, como $p$ é irredutível, temos que $g$ é um múltiplo não nulo de $p$ ou uma constante não nula. Mas, se $g$ fosse múltiplo não nulo de $p$, então $(g) = (p)$, o que seria um absurdo, já que $f \in (g) \setminus (p)$. Consequentemente $g$ é uma constante não nula e portanto $(g) = (1)$. Assim, temos

$$(p) + (f) = (1)$$

e, pela igualdade acima, segue o resultado.

■

**Teorema A.5** (Fundamental da Álgebra). *Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x]$. Existem constantes $c, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$ tais que*

$$p(x) = c(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n).$$

**Demonstração:** Basta provarmos que todo $p \in \mathbb{C}[x]$ irredutível não constante tem grau exatamente 1. Se $p \in \mathbb{C}[x]$ é irredutível, onde $grau(p) = n > 0$, provaremos que $n = 1$. Defina a relação de equivalência em $\mathbb{C}[x]$:

$$f \sim g \qquad \text{se} \qquad f - g \in (p),$$

e denote o conjunto de todas as classes de equivalência por:

$$\mathbb{C}[x]/(p) := \{f + (p)\ ;\ f \in \mathbb{C}[x]\},$$

onde $f + (p)$ é a classe de equivalência que contém $f \in \mathbb{C}[x]$. Note que $\mathbb{C}[x]/(p)$ é um $\mathbb{C}$ espaço vetorial de maneira natural. Perceba ainda que

$$\{1 + (p), x + (p), ..., x^{n-1} + (p)\}$$

é uma base de $\mathbb{C}[x]/(p)$ e, se chamarmos de $\mathcal{A}$ ao conjunto $\mathbb{C}[x]/(p)$, segue que $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial de dimensão igual a $n$. Podemos ainda definir a seguinte operação em $\mathcal{A}$

$$(f + (p)) \cdot (g + (p)) := (f \cdot g) + (p),$$

e não é difícil provar que esta operação é bem definida, e torna $\mathcal{A}$ uma álgebra complexa de dimensão finita. Fixe uma norma $||.||$ qualquer no espaço vetorial $\mathcal{A}$ e, para cada $x \in \mathcal{A}$, defina

$$\begin{array}{rccc} T_x & : & \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ & & y & \mapsto & x \cdot y, \end{array}$$

notando que $T_x$ é contínuo, pois $\mathcal{A}$ tem dimensão finita, fazendo assim sentindo falar em $||T_x||$. Dessa maneira, definindo $||x||^* := ||T_x||$, não é difícil provar que $||.||^*$ é norma na álgebra $\mathcal{A}$. Como $\mathcal{A}$ tem dimensão finita, segue que $(\mathcal{A}, ||.||^*)$ é uma álgebra de Banach com unidade. Por fim, note que todo elemento não nulo de $\mathcal{A}$ é invertível. De fato, tome $f + (p)$ em $\mathcal{A}$ não nulo, isto é, $f \notin (p)$ e, por $p$ ser irredutível e pelo Teorema A.4, existem $f', p' \in \mathbb{C}[x]$ tais que

$$f \cdot f' + p \cdot p' = 1,$$

concluindo que $1 - f \cdot f' \in (p)$, ou seja,

$$(f + (p)) \cdot (f' + (p)) = 1 + (p),$$

demonstrando que $f + (p)$ é invertível. Assim $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach com unidade e $G(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Pelo Teorema 1.3.5 de Gelfand-Mazur, tem-se que $\mathcal{A}$ é isomorfo isometricamente a $\mathbb{C}$ e, consequentemente, a dimensão de $\mathcal{A}$ é 1, isto é, $n = \text{dim}\mathcal{A} = 1$. Segue que $p$ tem grau 1.

$\blacksquare$

**Observação** A.0.1. Note que na demonstração acima, quando definimos $T_x$, tivemos que fixar uma norma em $\mathcal{A}$ qualquer para fazer sentido falar da norma espectral (que é a utilizada na demonstração) do espaço $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

# Apêndice B

# Soma Direta de Espaços de Hilbert

Neste Apêndice nos concentraremos em abordar a definição de Soma Direta em uma família qualquer de espaços de Hilbert.

**Definição B.1.** Seja $\{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ uma família arbitrária de espaços de Hilbert. Então a soma direta dessa família de espaços de Hilbert será o conjunto

$$\bigoplus_{\lambda\in\Delta}\mathcal{H}_\lambda := \left\{(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \prod_{\lambda\in\Delta}\mathcal{H}_\lambda \ ; \ \begin{array}{c}\text{O conjunto } \{\lambda\in\Delta \ ; \ h_\lambda \neq 0\} \text{ é} \\ \text{enumerável e } \displaystyle\sum_{\lambda\in\Delta; h_\lambda\neq 0} ||h_\lambda||^2 < \infty\end{array}\right\}.$$

**Convenção.** Consideraremos, de agora em diante neste apêndice, $\{H_\lambda\}$ uma família de espaços de Hilbert, e $\mathcal{H}$ a soma direta dessa família de espaços de Hilbert, isto é,

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\lambda\in\Delta}\mathcal{H}_\lambda.$$

**Proposição B.2.** *Com a convenção acima,*

$$(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} + (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} := (h_\lambda + j_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$$

$$\alpha.(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} = (\alpha.h_\lambda)_{\lambda\in\Delta},$$

*para quaisquer $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$ e para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, fazem de $\mathcal{H}$ um espaço vetorial complexo.*

**Demonstração:** Observando que as operações acima são herdadas do espaço vetorial $\prod_{\lambda\in\Delta}\mathcal{H}_\lambda$, basta provarmos que $\mathcal{H}$ é subespaço vetorial do espaço vetorial $\prod_{\lambda\in\Delta}\mathcal{H}_\lambda$.

Usaremos a seguinte desigualdade

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2), \tag{B.1}$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$. Defina os conjuntos

$$H := \{\lambda \in \Delta \ ; \ h_\lambda \neq 0\} \quad \text{e} \quad J := \{\lambda \in \Delta \ ; \ j_\lambda \neq 0\}.$$

Então note que $H$ e $J$ são enumeráveis, pela definição de soma direta de espaços de Hilbert. Note ainda, que se $h_\lambda + j_\lambda \neq 0$ então $h_\lambda \neq 0$ ou $j_\lambda \neq 0$ e portanto ou $\lambda \in H$ ou $\lambda \in J$, isto é, $\lambda \in H \cup J$. Como $H \cup J$ é enumerável, então

$$\{\lambda \in \Delta \ ; \ h_\lambda + j_\lambda \neq 0\} \subset H \cup J$$

é enumerável. Além disso, por (B.1), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + j_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda + j_\lambda||^2 &\leq \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0 \text{ ou } j_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda + j_\lambda||^2 \\
&\leq \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0 \text{ ou } j_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda||^2 + 2||h_\lambda||.||j_\lambda|| + ||j_\lambda||^2 \\
&\leq 2\left( \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0 \text{ ou } j_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda||^2 + ||j_\lambda||^2 \right) \\
&= 2\left( \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda||^2 + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ j_\lambda \neq 0}} ||j_\lambda||^2 \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim, $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} + (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$. E sem maiores dificuldades, conseguimos provar que se $\lambda \in \mathbb{C}$ e $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$ então $\lambda.(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$. Logo, $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial com as operações dadas.

■

**Proposição B.3.** *Com a convenção inicial deste apêndice, a função*

$$\langle (h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \rangle = \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle$$

*para todos $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$, define um produto interno no espaço vetorial complexo $\mathcal{H}$.*

**Demonstração:** Não é difícil provar que esta função cumpre todas as propriedades de um produto interno, exceto que separa somas na primeira coordenada é um pouco mais difícil, a dificuldade não está em argumentação, e sim no trabalho cuidadoso de analisar somatórios. Iremos prová-la. Sejam $(h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (w_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$ elementos quaisquer e note que

$$\begin{aligned}
&\langle (h_\lambda + w_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_\lambda \rangle = \\
&\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda + w_\lambda, j_\lambda \rangle = \\
&\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda + w_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda = 0, \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda + w_\lambda, j_\lambda \rangle = \\
&\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda = 0, \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle w_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda = 0, \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle w_\lambda, j_\lambda \rangle = \\
&\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0, \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda = 0, \\ h_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda \neq 0, \\ w_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle w_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda + w_\lambda = 0, \\ w_\lambda \neq 0 \text{ e } j_\lambda \neq 0}} \langle w_\lambda, j_\lambda \rangle = \\
&\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle h_\lambda, j_\lambda \rangle + \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ w_\lambda \neq 0 \\ \text{e } j_\lambda \neq 0}} \langle w_\lambda, j_\lambda \rangle = \\
&\langle (h_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \rangle + \langle (w_\lambda)_{\lambda\in\Delta}, (j_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \rangle .
\end{aligned}$$

E portanto temos

$$\langle h + w, j \rangle = \langle h, j \rangle + \langle w, j \rangle ,$$

para todos $h, w, j \in \mathcal{H}$. As outras propriedades não são difíceis nem trabalhosas.

$\blacksquare$

**Observação** B.0.2. Já sabemos que $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial complexo com produto interno, e portanto existe uma norma que provém desse produto interno.

**Teorema B.4.** *Com a convenção do inicio deste apêndice, o espaço vetorial complexo $\mathcal{H}$ com produto interno $\langle , \rangle$ é um espaço de Hilbert.*

**Demonstração:** Seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $h_n$ é escrito na forma $h_n = (h_{n,\lambda})_{\lambda\in\Delta} \in \mathcal{H}$. Sabemos que se $n, m \in \mathbb{N}$ então

$$||h_n - h_m|| = \sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda} \neq 0}} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2,$$

resultando, para cada $\lambda \in \Delta$ fixado, que

$$||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}|| \leq ||h_n - h_m||$$

e concluindo, pela igualdade acima, que $(h_{n,\lambda})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}_\lambda$. Como $\mathcal{H}_\lambda$ é um espaço de Hilbert, existe um elemento $h_\lambda$ onde

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} h_{n,\lambda} = h_\lambda, \tag{B.2}$$

fazendo sentido definir $h := (h_\lambda)_{\lambda\in\Delta} \in \prod_{\lambda\in\Delta} \mathcal{H}_\lambda$. Provaremos agora que $h \in \mathcal{H}$ e que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $h$.

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $\pi_n := \{\lambda \in \Delta \; ; \; h_{n,\lambda} \neq 0\}$ e, como $h_n \in \mathcal{H}$, concluímos que $\pi_n$ é enumerável. Assim, definindo

$$\pi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \pi_n,$$

temos $\pi$ um conjunto enumerável, por ser união enumerável de conjuntos enumeráveis. Se $h_\lambda \neq 0$ para algum $\lambda \in \Delta$ então, por (B.2), existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que $h_{n,\lambda} \neq 0$ e portanto $\lambda \in \pi_n$, concluindo dessa forma que $\lambda \in \pi$. Assim

$$\{\lambda \in \Delta \; ; \; h_\lambda \neq 0\} \subset \pi,$$

e logo é enumerável. Agora, observando a desigualdade (B.1), note que, para todo conjunto **finito** $G \subset \Delta$, devemos ter

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in G} ||h_\lambda||^2 &\leq 2\left(\sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_\lambda||^2 + \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda}||^2\right) \\
&= 2\left(\sum_{\lambda \in G} \lim_{m \in \mathbb{N}} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 + \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda}||^2\right) \\
&= 2\left(\lim_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 + \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda}||^2\right) \\
&= 2\left(\limsup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 + \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda}||^2\right) \\
&\leq 2\left(\limsup_{m \in \mathbb{N}} ||h_n - h_m||^2 + ||h_n||^2\right)
\end{aligned}$$

e, como $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$, temos

$$\sum_{\substack{\lambda \in \Delta \\ h_\lambda \neq 0}} ||h_\lambda||^2 = \sum_{\lambda \in \pi} ||h_\lambda||^2 < \infty.$$

Isto prova que $h \in \mathcal{H}$. Agora provemos que a sequência $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $h$ em $\mathcal{H}$. Para isso, seja novamente $G \subset \Delta$ um conjunto **finito**, e fixado $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_\lambda||^2 &= \sum_{\lambda \in G} \lim_{m \in \mathbb{N}} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 \\
&= \lim_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 \\
&= \limsup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{\lambda \in G} ||h_{n,\lambda} - h_{m,\lambda}||^2 \\
&\leq \limsup_{m \in \mathbb{N}} ||h_n - h_m||^2,
\end{aligned}$$

e como o conjunto finito $G \subset \Delta$ é qualquer, temos para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$||h_n - h||^2 \leq \limsup_{m \in \mathbb{N}} ||h_n - h_m||^2, \tag{B.3}$$

mas devido a $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}$, segue, de (B.3), que

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} ||h_n - h|| = 0,$$

e consequentemente $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente para $h$ em $\mathcal{H}$. O que prova a completude de $\mathcal{H}$. Logo $\mathcal{H}$ é, de fato, um espaço de Hilbert.

$\blacksquare$

**Observação** B.0.3. Portanto, sempre que tivermos uma família de espaços de Hilbert $\{\mathcal{H}_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$, existe um espaço de Hilbert

$$\bigoplus_{\lambda\in\Delta} \mathcal{H}_\lambda$$

que contém isomorfo isometricamente todos esses espaços de Hilbert, e mais, cada espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda$ da família é isomorfo isometricamente a um subespaço de Hilbert fechado em $\bigoplus_{\lambda\in\Delta} \mathcal{H}_\lambda$.

# Apêndice C

# O Lema de Urysohn

**Definição C.1.** Seja $X$ um espaço topológico de Hausdorff. Então $X$ é dito ser normal, se para todos $E, F \subset X$ conjuntos fechados disjuntos, existem $A, B \subset X$ abertos disjuntos tais que $E \subset A$ e $F \subset B$.

Um resultado bastante conhecido em topologia geral, porém geralmente feito apenas para espaços normais, é o Lema de Urysohn. Podemos encontrar na referência [8] (Proposição 12, p. 232) o Lema de Urysohn para espaços normais na seguinte versão:

**Teorema C.2** (Lema de Urysohn)**.** *Seja $X$ um espaço topológico de Hausdorff normal, e sejam $E, F \subset X$ conjuntos fechados disjuntos. Então existe uma função contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$, para todo $x \in E$, e $f(y) = 0$, para todo $y \in F$.*

Admitiremos esse resultado sem demonstração, porém a demonstração é de fácil acesso na referência citada. Porém há uma outra versão que é bastante utilizada nesta dissertação, que é a versão do Lema de Urysohn para espaços localmente compactos. Nos baseando em [10] provaremos o Lema de Urysohn para espaços localmente compactos no Teorema C.5.

**Proposição C.3.** *Todo espaço topológico $X$ compacto de Hausdorff é normal.*

**Demonstração:** Considere $X$ um espaço topológico compacto de Hausdorff, e sejam $E, F \subset X$ fechados disjuntos. Precisamos provar que existem abertos disjuntos $A, B \subset X$ tais que $E \subset A$ e $F \subset B$. Façamos inicialmente para o caso particular em que $E = \{x\}$. Ora, para cada $y \in F$ existem abertos disjuntos $V_y, U_y \in X$ tais que $y \in V_y$ e $x \in U_y$. Logo

$$F \subset \bigcup_{y \in F} V_y \tag{C.1}$$

e, notando que $F$ é fechado em um espaço topológico compacto, tem-se $F$ compacto, admitindo, dessa maneira, uma subcobertura finita da cobertura (C.1). Assim, existem $y_1, ..., y_n \in F$ tais que

$$F \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}.$$

Notando que $x \in U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$, e tomando $A := U_{y_1} \cap ... \cap U_{y_n}$ e $B := V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$, conclui-se que $E \subset A$ e $F \subset B$ com $A$ e $B$ abertos disjuntos. Portanto, para o caso particular em que $E = \{x\}$ o resultado é válido.

Façamos agora para o caso geral. Para cada $x \in E$ fixado existe, pelo caso particular, dois abertos $A_x, B_x \subset X$ disjuntos onde $x \in A_x$ e $F \subset B_x$. Logo

$$E \subset \bigcup_{x \in E} A_x \tag{C.2}$$

é uma cobertura de $E$ e, por $E$ ser compacto, possui subcobertura finita, existindo assim $x_1, ..., x_n \in E$ tais que

$$E \subset A_{x_1} \cup ... \cup A_{x_n}.$$

Dessa maneira, fazendo $A := A_{x_1} \cup ... \cup A_{x_n}$ e $B := B_{x_1} \cap ... \cap B_{x_n}$, temos $A$ e $B$ abertos disjuntos onde $E \subset A$ e $F \subset B$.

■

**Proposição C.4.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, sejam $K \subset X$ um compacto e $D \subset X$ um aberto tal que $K \subset D$. Existe um conjunto aberto E tal que*

*(i) $\overline{E}$ é compacto,*

*(ii) $K \subset E \subset \overline{E} \subset D$.*

**Demonstração:** Primeiro façamos o caso particular em que $K = \{x\}$. Existe um compacto $N \subset X$ onde $x \in \text{int}(N)$. Pela Proposição C.3 anterior, $N$ é normal e, por $K$ e $F := N \setminus D$ serem fechados na topologia relativa a $N$, existem abertos $U, V \subset N$ relativos a $N$ disjuntos tais que $K \subset U$ e $F \subset V$. Portanto, existem abertos $U_0, V_0 \subset X$ de $X$ tais que

$$U = U_0 \cap N \qquad \text{e} \qquad V = V_0 \cap N.$$

Definamos $E := \text{int}_X(U)$, e note que $E$ é aberto em $X$ e, como $x \in \text{int}(N) \cup U_0 \subset U$ e $\text{int}(N) \cup U_0$ é aberto em $X$, temos $x \in E$. Provemos que

$$\overline{E} \text{ é compacto} \qquad \text{e} \qquad \overline{E} \subset N \cap X \setminus V_0. \tag{C.3}$$

De fato, $\overline{E} \subset \overline{N} = N$ e portanto $\overline{E}$ é compacto, provando a primeira afirmação de (C.3). Para provar a outra afirmação, basta notar que $E \cap V_0 \subset (N \cap U_0) \cap V_0 = U \cap V = \varnothing$, provando assim que $E \subset N \cap (X \setminus V_0)$ e, por $X \setminus V_0$ ser fechado em $X$, segue (C.3). Agora provemos que

$$X \setminus V_0 \subset X \setminus (N \setminus D). \tag{C.4}$$

Para isso, basta notar que $N \setminus D \subset V \subset V_0$ e portanto segue (C.4). Por fim, note que por (C.3) e (C.4), obtemos

$$\overline{E} \subset N \cap (X \setminus V_0) \subset N \cap X \setminus (N \setminus D) = N \cap D \subset D.$$

E logo temos $\overline{E} \subset D$ compacto com $x \in E$ e com $E$ aberto. Portanto, está provado para o caso particular em que $K = \{x\}$. Provemos agora o caso geral.

Sabemos para cada $x \in K$, pelo caso particular, que existe um aberto $E(x)$ onde $\overline{E(x)}$ é compacto, e $x \in E(x) \subset \overline{E(x)} \subset D$. Logo

$$K \subset \bigcup_{x \in K} E(x)$$

e, como $K$ é compacto, possui subcobertura finita, ou seja, existem $x_1, ..., x_n \in K$ tais que

$$K \subset E(x_1) \cup ... \cup E(x_n)$$

e, dessa maneira, definindo $E := E(x_1) \cup ... \cup E(x_n)$ temos que $E$ é aberto, cujo fecho é

$$\overline{E} = \overline{E(x_1) \cup ... \cup E(x_n)} = \overline{E(x_1)} \cup ... \cup \overline{E(x_n)}$$

e portanto é compacto. Além disso, temos

$$K \subset E \subset \overline{E} = \overline{E(x_1) \cup ... \cup E(x_n)} = \overline{E(x_1)} \cup ... \cup \overline{E(x_n)} \subset D$$

como queríamos demonstrar!

∎

**Teorema C.5** (Lema de Urysohn para espaços localmente compacto de Hausdorff)**.** *Seja $X$ um espaço localmente compacto de Hausdorff, e sejam $K, F \subset X$ dois conjuntos disjuntos, com $K$ compacto, e $F$ fechado. Existe uma função $f : X \to [0,1]$ tal que*

$$f(x) = 1 \qquad e \qquad f(y) = 0,$$

*para todo $x \in K$ e todo $y \in F$.*

**Demonstração:** Definindo $D := X \setminus F$ então $D$ é aberto e $K \subset D$. Então, pela Proposição C.4, existe um aberto $E \subset D$ tal que $\overline{E}$ é compacto em $X$ e tal que $K \subset E \subset \overline{E} \subset D$. Como $K \subset E$ e $E$ é aberto, então novamente pela Proposição C.4, existe $G \subset E$ aberto tal que $\overline{G}$ é compacto e $K \subset G \subset \overline{G} \subset E$. Note que $\overline{E}$ é normal e portanto existe uma função $g : \overline{E} \to [0,1]$ contínua, tal que $g(x) = 1$ para todo $x \in K$, e $g(y) = 0$ para todo $y \in \overline{E} \setminus G$. Defina

$$\begin{array}{rcll} f & : & X & \to & [0,1] \\ & & x & \mapsto & f(x) \begin{cases} g(x), & \text{se } x \in \overline{E} \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus \overline{E} \end{cases} \end{array}$$

e perceba que $f(x) = 1$, para todo $x \in K$, e $f(y) = 0$, para todo $y \in F$. Note ainda que $f$ é contínua. De fato, $f|_E = g|_E$, concluindo que $f|_E$ é contínua e, além disso, sendo $A := X \setminus \overline{G}$, temos $f(y) = 0$, para todo $y \in A$, decorrendo que $f|_A$ é contínua. Ora, temos $A \cup E = X$ e temos também que $A$ e $E$ são abertos e $f|_E$ e $f|_A$ são contínuas. Isso é suficiente para $f$ ser contínua.

■

# Apêndice D

# Resultados Usados

## D.1 Análise Funcional

**Teorema D.1** (Hahn-Banach)**.** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) , e $W \subset V$ um subespaço vetorial, sejam ainda $p : V \to \mathbb{R}$ uma seminorma e $f : W \to \mathbb{K}$ um funcional linear tal que*

$$|f(x)| \leq p(x),$$

*para todo $x \in W$. Então existe um funcional linear $g : V \to \mathbb{K}$ que é extensão da função $f$ e tal que*

$$|g(x)| \leq p(x),$$

*para todo $x \in V$.*

**Corolario D.2** (Hahn-Banach)**.** *Sejam $V$ um espaço vetorial normado real ou complexo, e $x_0 \in V$ não nulo. Então existe um funcional linear contínuo $f : V \to \mathbb{K}$ tal que*

$$||f|| = 1 \qquad e \qquad f(x_0) = ||x_0||.$$

**Teorema D.3** (Aplicação Aberta)**.** *Sejam $E$ e $F$ espaços vetoriais de Banach (reais ou complexos) e $T : E \to F$ uma transformação linear, contínua e sobrejetora. Então $T$ é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

**Teorema D.4** (Gráfico Fechado)**.** *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach (reais ou complexos) e $T : E \to F$ um operador linear. Então $T$ é contínuo se, e somente se, $G(T) := \{(x, y) \in E \times F\ ; T(x) = y\}$ é fechado em $E \times F$.*

**Teorema D.5** (Banach-Steinhaus). *Sejam $E$ e $F$ espaços de Banach (reais ou complexos) e $\{T_\alpha\}_{\alpha \in L}$ uma família de operadores lineares contínuos de $\mathcal{L}(E, F)$. Se para cada $x \in E$, existe uma constante $K_x > 0$ tal que*

$$||T_\alpha(x)|| \leq K_x,$$

*para todo $\alpha \in L$, então existe uma constante $K$ tal que*

$$||T_\alpha|| \leq K,$$

*para todo $\alpha \in L$.*

## D.2 Topologia Geral

**Teorema D.6** (Stone-Weierstrass). *Seja $X$ um espaço compacto de Hausdorff, seja ainda $\mathcal{A} \subset C(X)$ uma subálgebra fechada com a topologia da norma, tal que $\mathcal{A}$ seja fechado para involução, isto é, $f^* \in \mathcal{A}$ sempre que $f \in \mathcal{A}$, e que possua a unidade, ou seja, $e \in \mathcal{A}$. Se $\mathcal{A}$ separa pontos, isto é, para todos $x, y \in X$ distintos, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq f(y)$, então $\mathcal{A}$ é um subconjunto denso em $C(X)$ na topologia da norma.*

O Teorema de Stone-Weierstrass é um teorema clássico a respeito da álgebra $C(X)$ quando $X$ é um espaço compacto de Hausdorff. Há uma versão dele no caso real, ou seja, no caso em que tratamos de espaços vetoriais reais. Neste caso, ele é uma generalização do Teorema de Aproximação de Weierstrass. Uma demonstração do Teorema de Stone encontra-se na referência [9].

**Lema D.7** (Urysohn). *Seja $X$ um espaço topológico localmente compacto, e sejam $K, F \subset X$ conjuntos disjuntos, com $K$ compacto, e $F$ fechado. Então existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$, para todo $x \in F$, e $f(y) = 1$, para todo $y \in K$.*

A demonstração do Lema de Urysohn é tratada no Apêndice C.

## D.3 Análise Complexa

**Definição D.8.** Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função, e seja ainda $x_0 \in \Omega$. Então diremos que $f$ é holomorfa em $x_0$, se o limite

$$\lim_{x \to x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Neste caso, o limite acima é denotado por $f'(x_0)$. Caso $f$ seja holomorfa em todos os pontos do seu domínio, diremos que $f$ é holomorfa. O conjunto das funções holomorfas com domínio $\Omega$ é denotado por $\mathcal{H}(\Omega)$.

**Definição D.9.** A função $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida por

$$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

está bem definida e é chamada de função exponencial.

**Teorema D.10.** *Para todos $x, y \in \mathbb{C}$, temos $exp(x + y) = exp(x).exp(y)$.*

A demonstração deste resultado encontra-se em [11], na página 86, Teorema 11.

**Definição D.11.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in \Omega$ e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Então $a$ é dito um ponto de singularidade removível da função $f$ se existe uma função $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ extensão da função $f$.

**Teorema D.12.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $a \in \Omega$ e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{a\})$. Se existe $r > 0$ onde $f$ restrita a $D_r(a) \setminus \{a\}$ é limitada, então $a$ é um ponto de singularidade removível da função $f$.*

Essa demonstração pode ser encontrada em [14], no Teorema 10.20.

**Definição D.13.** Seja $a \in \mathbb{C}$, então uma série de potência centrada em $a$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{D.1}$$

**Observação** D.3.1. Uma série de potência como a de (D.1) é unicamente determinada pelos termos do conjunto $\{a, c_1, c_2, ..., c_n, ...\}$.

**Teorema D.14.** *Seja $a \in \mathbb{C}$ e $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. Se a série* (D.1) *não convergir para todo elemento $z \in \mathbb{C}$, então existe um número real $R \geq 0$ tal que a série* (D.1) *converge para todo $z \in D_r(a)$ e diverge para todo $z \notin \overline{D_r(a)}$. Tal número $R$ é dado por*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \in \mathbb{N}} |c_n|^{1/n}.$$

**Teorema D.15.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ aberto e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Então $f$ pode ser representada por uma série de potencia em qualquer ponto $a \in \Omega$. Isto é, para todo $a \in \Omega$ existe um $r > 0$ e existe uma sequência complexa $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

*onde $z \in D_r(a)$.*

**Teorema D.16.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $D_r(a) \subset \Omega$, então a série de potência de $f$ em $a$ tem raio $\rho \geq r$ e $f$ pode ser representada pela mesma série de potência em $D_r(a)$.*

Para verificar estes dois Teoremas anteriores, basta notar que em [14] no Teorema 10.16, o disco $D_r(a) \subset \Omega$ tomado no começo, foi arbitrário.

**Teorema D.17.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ homeomorfo a uma bola aberta em $\mathbb{C}$. Se $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ é tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \Omega$, e ainda a função*

$$\begin{array}{rccc} h & : & \Omega & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & x & \rightarrow & \frac{1}{f(x)} \end{array}$$

*é holomorfa, isto é, $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, então existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(x) = e^{g(x)}$, para todo $x \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

A demonstração deste resultado pode ser deduzida do Teorema 13.11 de [14], observando as equivalências das letras (a) e (h).

**Teorema D.18.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}(\Omega)$ convergindo uniformemente para a função contínua limitada $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Então $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*

Este resultado é demonstrado em [11], na página 298, no Teorema 1, letra (d). Agora enuciaremos os grandes resultados da Análise complexa.

**Teorema D.19** (Liouville)**.** *Toda função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ limitada é constante.*

A demonstração encontra-se em [14] no Teorema 10.23.

**Teorema D.20** (Módulo Máximo)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se existe $x_0 \in \Omega$ um máximo local, isto é, existe $r > 0$, onde $D_r(x_0) \subset \Omega$, e $|f(x)| \leq |f(x_0)|$, para todo $x \in D_r(x_0)$. Então $f$ é uma função constante.*

**Teorema D.21** (Módulo Máximo)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um aberto conexo e seja $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Se $f$ possui uma extensão contínua $\overline{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, e $\overline{f}$ possui um máximo local $x_0 \in \overline{\Omega}$. Então $x_0$ pertence a froteira de $\Omega$.*

# Referências Bibliográficas


[1] ALMIRA, J. M. *An application of the Gelfand-Mazur Theorem: the Fundamental Theorem of Algebra Revisited*. Divulgaciones Matemáticas, Linares(Jaén) Spain, vol. 13, n. 2, p. 123-125, 2005.

[2] ARAKI, Huzihiro; ELLIOTT, George A. On the Definition of C*-algebras. *Publ. RIMS*, Kyoto Univ., 9, p. 93-112, 1973.

[3] BOTELHO, G. ; PELLEGRINO, D. M.; TEIXEIRA, E. *Fundamentos de Análise Funcional*, 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[4] DUNFORD, Nelson; SCHWARTZ, Jacob T. *Linear operators*, New York, Interscience Publishers, Inc., 1958.

[5] ERDOS, J. A. *C*-algebras*, Londres, King's College, 51 p.

[6] EXEL, Ruy. *Uma introdução às C*-álgebras*. Minicurso ministrado na primeira bienal de matemática, Sociedade Brasileira de Matemática, UFMG.

[7] HUSAIN, Taqdir. *Multiplicative functionals on topological algebras*, Pitman Advanced Publishing Program, 1983, 147 p.

[8] LIMA, Elon L. *Elementos de Topologia Geral*, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009, 297 p.

[9] LOPES, Wanda A. *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*, 6 de Fev. 2009. 69 f. Dissertação(Mestrado em Matemática), UFU, Uberlândia MG, 2009.

[10] NAGY, Gabriel. *Locally compact spaces.* Disponível em: http://www.math.ksu.edu/~nagy/real-an/1-05-top-loc-comp.pdf. Acesso em: 16 de dezembro de 2013.

[11] NETO, Alcides L. *Funções de uma variável complexa*, segunda edição, Rio de Janeiro: IMPA, 2012, 468 p.

[12] RUDIN, Walter. *Functional Analysis*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.

[13] RUDIN, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, New York, McGraw-Hill Book Company, 1976.

[14] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*, third edition, New York, McGraw-Hill Book Company, 1987.