Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Índice de Somabilidade para Pares de Espaços de Banach

Lucas de Carvalho Nascimento

João Pessoa – PB
Julho de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Índice de Somabilidade para Pares de Espaços de Banach

por

Lucas de Carvalho Nascimento

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Julho de 2017

N244i Nascimento, Lucas de Carvalho.
Um índice de somabilidade para pares de espaços de Banach / Lucas de Carvalho Nascimento.- João Pessoa, 2017.
85 f.

Orientador: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.

1.Matemática. 2.Polinômios absolutamente somantes 3.Operadores multilineares absolutamente somantes. 4.Espaço de Banach. 5.Índice de somabilidade. I. Título.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Um Índice de Somabilidade para Pares de Espaços de Banach

por

Lucas de Carvalho Nascimento [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 25 de Julho de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos – UFPB
(Orientador)

Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo – UEPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

[1] O autor foi bolsista do(a) CAPES durante a elaboração desta dissertação.

Aos meus pais,
Verônica e Luciano.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, fonte de toda a sabedoria, por todas as bençãos derramadas sobre mim.

À minha família, em especial, a minha mãe, Verônica Maria de Carvalho Nascimento; ao meu pai, Luciano Ferreira do Nascimento; a minha tia, Raimunda Cristina de Carvalho e a minha irmã, Vanessa de Carvalho Nascimento; pelo incetivo, zelo, confiança, dedicação e pelo o apoio em todas as minhas decisões. Está conquista também é de vocês.

À minha namorada Vanicleise dos Santos Silva, pelo companheirismo, paciência e constante apoio. Sem dúvida, seu carinho incondicional foi muito importante para eu conseguir superar todas minhas dificuldades.

Ao meu orientador Jamilson Ramos Campos, por toda disponibilidade, paciência e boa vontade em tirar minhas dúvidas sempre que precisei; sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista.

Aos professores da UPE, instituição onde tive o prazer de fazer a licenciatura em matemática. Especialmente a Esdras Jafet, a Ernani Martins, a Gutemberg Alves e a Islanita Cecília, com os quais tive o prazer de compartilhar vários momentos agradáveis.

Aos professores da pós-graduação. Especialmente a Jamilson Ramos Campos, a Adriano Alves de Medeiros, a Nacib André Gurgel e Albuquerque, a Napoleon Caro Tuesta, a Antônio de Andrade e Silva e a Manassés Xavier de Souza que muito contribuíram para a minha formação no mestrado.

Aos professores Gustavo da Silva e Joedson Santos, membros da Banca Examinadora, por aceitarem nosso convite e por suas valorosas contribuições ao trabalho.

Aos meus amigos e colegas da graduação e da pós-graduação. Em especial, a Ricardo Dias, pelos inúmeros dias de estudos e pela convivência, a Adailton Souza, por todos momentos agradáveis de estudo, a Eriverton José, por todos os conselhos, incentivos e ajuda, e a Djair Paulino, por toda ajuda que me deu desde o verão em Álgebra Linear.

A todos os meus amigos que de forma direta ou indireta me ajudaram para a realização deste trabalho. Em especial, a Salatiel Dias pelos incentivos, conselhos e por toda ajuda que me deu, em particular, a minha vinda a João Pessoa.

Aos meus amigos e colegas da SOCONTEL, por me apoiarem e pelos incentivos para buscar aquilo que almejo. Em especial, agradeço a Alberto guerra e a Bil Mendes por todas as oportunidades que me deram.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a noção de índice de somabilidade para pares de espaços de Banach. Esse índice desempenha o papel de um tipo de “medida” de como o espaço dos polinômios m-homogêneos de E em F (ou o espaço dos operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F) está longe de coincidir com o espaço dos polinômios m-homogêneos absolutamente somantes (ou com o espaço dos operadores multilineares múltiplo somantes). Em alguns casos o índice ótimo de somabilidade é apresentado.

Palavras-chave: Polinômios absolutamente somantes, operadores multilineares absolutamente somantes, espaços de Banach, índice de somabilidade.

Abstract

In this work, we study the notion of index of summability for pairs of Banach spaces. This index plays the role of a kind of "measure" of how the space of m-homogeneous polynomials from E to F (or the space of multilinear operators of $E_1 \times \cdots \times E_m$ to F) are far from being the space of absolutely summing m-homogeneous polynomials (or with the space of multiple summing multilinear operators). In some cases the optimal index of summability is presented.

Keywords: Absolutely summing polynomials, absolutely summing multilinear operators, Banach spaces, index of summability.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

• $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots\}$;

• $\mathbb{N}_0^n$ denota o conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$;

• $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;

• $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;

• $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;

• E, F, G, H, E_m, G_m denotam espaços vetoriais ou espaços normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$;

• BAN denota a classe de todos os espaços de Banach;

• $\mathcal{L}(E; F)$ denota o espaço de todos os operadores lineares e contínuos de E em F;

• B_E denota a bola unitária fechada no espaço E;

• E' denota o dual topológico do espaço E;

• e_n denota a sequência escalar $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ cujos termos são todos nulos com exceção do n-ésimo;

• id_E denota o operador identidade em E;

• $span\,\{x_1, \ldots, x_n\}$ denota o espaço vetorial gerado pelos vetores $x_1, \ldots, x_n$;

• p^* denota o conjugado de p, isto é, $1 = 1/p + 1/p^*$;

• $C(K)$ denota o espaço de Banach formado por todas as funções $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, onde K é um espaço de Hausdorff compacto;

• J_E denota o mergulho canônico de E em E'';

• $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ denota $E \subseteq F$ com $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ para todo $x \in E$;

- $\cot(E)$ denota o ínfimo dos $q \geq 2$ tal que E tem cotipo q;

- $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ denota o espaço de todos os operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F;

- $\mathcal{P}(^m E; F)$ denota o espaço de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de E em F;

- X ou $X(\cdot)$ denota uma classe de sequências;

- $\prod_{(p,q)}$ denota a classe dos operadores multilineares absolutamente (p, q)-somantes;

- $\mathcal{P}_{(p,q)}$ denota a classe dos polinômios homogêneos absolutamente (p, q)-somantes;

- $\prod_{(p,q)}^{mult}$ denota a classe dos operadores múltiplo (p, q)-somantes;

Introdução

Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers [12] apresentaram uma solução para o seguinte problema: existe em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita um série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente? Tal problema foi proposto por S. Banach em [11]. A resposta afirmativa, conhecida atualmente como Teorema de Dvoretzky-Rogers, só veio décadas depois com o célebre trabalho [12].

Este fato despertou o interesse de A. Grothendieck que mediante dois trabalhos importantes, [20] e [21], apresenta uma demonstração diferente para o Teorema de Dvoretzky-Rogers e introduz o que hoje é visto como a base da teoria dos operadores absolutamente somantes. Porém, somente na década de 60, com os trabalhos de A. Pietsch [14], J. Lindenstrauss e A. Pelczyński [16] e B. Mitjagin e A. Pelczyński [15], as ideias de Grothendieck começaram a ser melhor compreendidas e reescritas de forma mais acessível.

Os dois trabalhos de A. Grothendieck citados acima são considerados o ponto de partida da teoria de ideais de operadores. No livro [18], A. Pietsch sistematiza a teoria de ideais de operadores lineares, no qual exibe o conceito, desenvolve a teoria geral, investiga alguns casos particulares e exibe várias aplicações. Posteriormente, o próprio A. Pietsch, em seu artigo [19], apresenta o conceito de ideal para operadores m-lineares, também conhecido como multi-ideal, cuja adaptação para polinômios é imediata (veja [8, 13, 17]).

Em 2003, D. Pérez-García [24] e M. C. Matos [25], de maneira independente, definem os operadores múltiplo somantes, que constituem uma classe que mantém, sob certo sentido, a essência da teoria linear. Desde então, os operadores múltiplo somantes tem sido estudado por diversos autores (veja [26, 27]).

Neste trabalho estudamos a noção de índice de somabilidade para pares de espaços de Banach. Esse índice desempenha o papel de uma espécie de "medida" que estima a qual distância o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ (respectivamente $\mathcal{P}(^mE; F)$) está de coincidir com o espaço $\prod_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE; F)$).

Para isso, dividimos nosso trabalho em três capítulos. No primeiro capítulo introduzimos algumas definições, notações e resultados da teoria básica da análise funcional que serão necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

No segundo capítulo, estudamos os ideais de operadores multilineares, os ideais de polinômios e os conceitos relativos a estes, alguns resultados básicos e uma caracterização dos operadores multilineares absolutamente somantes, bem como dos polinômios absolutamente somantes. Para obter certas caracterizações fazemos uso do ambiente abstrato criado por G. Botelho e J. R. Campos em [22]. Além disso, mostraremos que a classe $\prod_{(p;q)}$ dos operadores multilineares absolutamente somantes é um ideal de Banach, bem como que a classe $\mathcal{P}_{(p,q)}$ dos polinômios homogêneos absolutamente somantes é um ideal de Banach de polinômios. Para isso, faremos uso novamente do mesmo ambiente abstrato já citado. Por fim, apresentamos o conceito e alguns resultados importantes sobre a classe dos operadores múltiplo somantes.

No terceiro capítulo, estudamos a noção do índice de somabilidade para pares de espaços de Banach. Este tipo de índice foi recentemente proposto no artigo [28] por M. Maia, D. Pellegrino e J. Santos tendo por base a tese de doutorado do primeiro. Veremos que sempre existe estimativas superiores pare este índice. Terminamos nosso trabalho, apresentado estimativas inferiores, em alguns casos, para o índice de somabilidade entre os espaços $\mathcal{P}(^mE;F)$ e $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$. A principal referência para este último capítulo é, obviamente, o trabalho [28] mas também foi consultado o trabalho de tese [9].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos algumas definições, notações e resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Para a primeira seção, temos como objetivo apresentar alguns resultados clássicos de Análise Funcional; na segunda seção, apresentamos alguns resultados envolvendo séries em espaços de Banach; na terceira, apresentamos alguns espaços de sequências a valores vetoriais e na quarta seção, apresentamos os conceitos de cotipo e o de fatoração formal. As principais referências para a elaboração deste capítulo foram [2, 4, 8]. Alguns dos resultados aqui citados encontram-se, pelo caráter breve do texto, não demonstrados. Para estes, buscamos citar as devidas referências para as respectivas demonstrações.

1.1 Resultados Clássicos de Análise Funcional

Durante todo este texto, $\mathbb{K}$ denotará o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais ou o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos e os espaços vetoriais sempre serão considerados sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Começamos esta seção relembrando a definição de norma.

Definição 1.1. Uma *norma* em um espaço vetorial E é uma aplicação $\|\cdot\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

N1) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$,

N2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$, para todo $x \in E$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$,

N3) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$, para todos $x, y \in E$.

Neste caso, o par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ ao invés de $\|\cdot\|_E$. Por sua vez, um espaço normado é um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, ou seja, a métrica $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ com } x, y \in E.$$

Como espaços métricos são espaços de Hausdorff, com maior razão espaços normados também o são e, consequentemente, satisfazem propriedades importantes que usaremos de forma direta ao longo do texto. Para maiores detalhes sobre os espaços de Hausdorff veja [3, Capítulo 3].

Dizemos que um espaço normado E é um *espaço de Banach* ou um *espaço completo* quando E for completo na métrica induzida pela norma, e denotamos por BAN a classe de todos os espaços de Banach. O resultado abaixo destaca a importância dos subespaços fechados de um espaço de Banach, no qual sua demonstração pode ser encontrada em [2, Proposição 1.1.1].

Proposição 1.1. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço de E. Então F é um espaço de Banach se, e somente se, F é fechado em E.

Sejam E e F espaços normados, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Um operador $T : E \longrightarrow F$ é dito *linear* se $T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y)$ para todos $x, y \in E$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Quando para qualquer $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon \text{ sempre que } x \in E \text{ e } \|x - x_0\| < \delta,$$

então T é, por definição, um operador contínuo. Não faremos distinção entre os termos "aplicação", "função" ou "operador".

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, o qual é um espaço vetorial com as operações usuais de funções. Quando $F = \mathbb{K}$, denotamos $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ e chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente *dual* de E, e seus elementos são chamados de *funcionais lineares*.

Dizemos que os espaços normados E e F são *topologicamente isomorfos,* ou simplesmente *isomorfos,* se existir um operador linear contínuo bijetor $T \colon E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1} : F \longrightarrow E$, que é sempre linear, também é continuo. Neste caso, dizemos que T é um *isomorfismo*. Por fim, dizemos que um operador linear $T \colon E \longrightarrow F$ é uma *isometria linear* se $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$; caso T seja sobrejetor dizemos que T é um *isomorfismo isométrico.*

O próximo resultado nos diz que podemos substituir a definição de operador linear contínuo por umas das equivalências abaixo. Usaremos B_E para denotar a bola unitária fechada no espaço normado E, mais explicitamente $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

Teorema 1.2. *Seja $T: E \longrightarrow F$ um operador linear entre espaços normados. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *T é lipschitziano.*

(b) *T é uniformemente contínuo.*

(c) *T é contínuo.*

(d) *T é contínuo em algum ponto de E.*

(e) *T é contínuo na origem.*

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \sup\limits_{x \in B_E} \|T(x)\| < \infty$.

(g) *Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$*

Demonstração. Veja [2, Teorema 2.1.1.] □

A expressão $\|T\| = \sup\limits_{x \in B_E} \|T(x)\|$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$ e não é difícil verificar que $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$. Mais ainda, se $F \in BAN$, então $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (ver [2, Proposição 2.1.4.]). Em particular, E' é sempre um espaço de Banach, uma vez que $\mathbb{K} \in BAN$. Além disso, Se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $R \in \mathcal{L}(F; G)$, onde E, F e G são espaços normados, então $R \circ T \in \mathcal{L}(E, G)$ e $\|R \circ T\| \leq \|R\| \|T\|$.

Exibiremos agora uma lista de alguns, já bem conhecidos, espaços formados por sequências de escalares, os quais serão generalizados mais adiante. Por c_0 denotamos o espaço vetorial de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja,

$$c_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n \to 0\}.$$

Este é um espaço de Banach com a norma $\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Denotamos agora por c_{00} o subespaço de c_0 formado pelas sequências eventualmente nulas, isto é,

$$c_{00} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } k \geq n_0\}$$

e este é um espaço normado incompleto com a norma induzida de c_0.

Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço vetorial das sequências absolutamente p-somáveis é dada por

$$\ell_p = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\},$$

O espaço ℓ_p é um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço vetorial das sequências limitadas é dada por

$$\ell_\infty = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_n |a_n| < \infty\right\}$$

e também é um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_n |a_n|.$$

Ao longo do texto denotamos por $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de vetores canônicos do espaço de sequências escalares $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, com $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$, onde o 1 aparece na n-ésima coordenada.

Enunciaremos agora os principais resultados desta seção, a saber, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach. Entretanto, apenas demonstraremos o Teorema do Gráfico Fechado e alguns corolários do Teorema de Hahn-Banach, por se tratarem, dentre estes citados acima, dos resultados mais utilizados neste trabalho.

Um grande número de resultados em análise está associada a algum tipo de controle uniforme a partir de hipóteses pontuais. Como por exemplo, o fato de que funções contínuas definidas em conjuntos compactos são uniformemente contínuas. O próximo resultado trabalha com tal indagação, para uma família de operadores lineares contínuos.

Teorema 1.3 (Banach-Steinhaus)**.** *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço normado. Então qualquer família $\{T_i\}_{i\in I}$ de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ que é pontualmente limitada, será uniformemente limitada; ou seja, se para cada $x \in E$ existe $0 < C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x,$$

então $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Veja [2, Teorema 2.3.2.] □

Recordemos que uma aplicação entre espaços topológicos é dita *aberta* se a imagem de todo subconjunto aberto no domínio for também um subconjunto aberto no contradomínio. Além disso, nem toda aplicação contínua invertível é aberta. A seguir vejamos um exemplo. Para maiores detalhes sobre esses fatos veja [3, Capítulo 3].

Exemplo 1.1. O operador linear e bijetor $T : c_{00} \longrightarrow c_{00}$ dado por $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right)$ é contínuo, pois

$$\|T((a_n)_{n=1}^{\infty})\|_{\infty} = \left\|\left(a_1, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots\right)\right\|_{\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = \|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Todavia, o operador inverso T^{-1} dado por $T^{-1}((a_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots)$ não é contínuo. De fato, suponhamos que T^{-1} seja contínuo. Neste caso, existe $C > 0$ tal que $\|T^{-1}((a_n)_{n=1}^{\infty})\|_{\infty} \leq C\,\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}$ para todo $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomando $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$, tem-se

$$n = \|(0, \ldots, 0, n, 0, 0, \ldots)\|_{\infty} = \left\|T^{-1}(e_n)\right\|_{\infty} \leq C\,\|e_n\|_{\infty} = C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e isso configura uma contradição, logo T^{-1} não é contínuo.

O próximo resultado estabelece condições suficientes para que uma aplicação linear contínua e invertível entre espaços de Banach tenha inversa contínua, ou seja, que essa aplicação seja aberta. Sua demonstração pode ser encontrada em [2, Teorema 2.4.2.].

Teorema 1.4 (da Aplicação Aberta)**.** *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Sejam E, F espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. O gráfico de T é definido como o conjunto

$$\mathrm{Graf}(T) = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

A linearidade de T garante que $\mathrm{Graf}(T)$ é um subespaço vetorial de $E \times F$. Além disso, a função $\|(\cdot,\cdot)\|_1 := \|\cdot\|_E + \|\cdot\|_F$ define uma norma em $\mathrm{Graf}(T)$. Vejamos que o gráfico de um operador linear T entre espaços de Banach está inteiramente relacionada com a continuidade de T.

Teorema 1.5 (do Gráfico Fechado)**.** *Sejam E, F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se,* $\mathrm{Graf}(T)$ *é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Suponha que T seja contínuo. Sejam $x_n \to x$ em E e $T(x_n) \to y$ em F. Como $x \in E$ e T é contínuo temos que $T(x_n) \to T(x) = y$; logo $\mathrm{Graf}(T)$ é fechado em $E \times F$.

Reciprocamente, suponhamos que Graf(T) seja fechado em $E \times F$. Como $E \times F$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$, uma vez que E e F são espaços de Banach, temos que Graf(T) também é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_1$. A aplicação

$$\pi : \text{Graf}\,(T) \longrightarrow E\ ,\ \pi\,(x, T(x)) = x,$$

claramente está bem definida, é linear e bijetora. Além disso, π é contínua pois

$$\|\pi\,(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1\,.$$

Do Teorema da Aplicação Aberta temos que π é um isomorfismo, logo π^{-1} é linear, contínua e bijetora. Assim, existe $C > 0$ tal que $\|\pi^{-1}(x)\|_1 = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\,\|x\|$, para todo $x \in E$. Desta forma, temos

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C\,\|x\|\,,\ \text{para todo } x \in E.$$

Portanto, pelo Teorema 1.2 temos que T é um operador contínuo. □

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Hahn-Banach, lida com extensões de funcionais lineares definidos em subespaços a todo espaço vetorial. A versão desse teorema, enunciada a seguir, é válida para espaços vetoriais sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Teorema 1.6 (Hahn-Banach)**.** *Sejam E um espaço vetorial e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E \qquad e \qquad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [2, Teorema 3.1.2.] □

Apresentamos a seguir três corolários importantes do teorema acima. Mesmo sendo corolários, estes resultados também são conhecidos como Teoremas de Hahn-Banach e, juntamente com o teorema, serão usados indistintamente ao longo do texto.

Corolário 1.7. Sejam G um subespaço de um espaço normado E e $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja a restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Demonstração. Consideremos a função $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$. Note que, $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| = p(x)$, para todo $x \in G$, e que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e quaisquer

$x, y \in E$, temos

$$p(\lambda x) = \|\varphi\| \cdot \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\| = |\lambda| \cdot p(x) \text{ e}$$

$$p(x+y) = \|\varphi\| \cdot \|x+y\| \leq \|\varphi\| \left(\|x\| + \|y\|\right) = \|\varphi\| \cdot \|x\| + \|\varphi\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y).$$

Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach, existe um funcional linear $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e que satisfaz $|\widetilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo, $\widetilde{\varphi}$ é contínuo e $\|\widetilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado,

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_G} |\varphi(x)| = \sup_{x \in B_G} |\widetilde{\varphi}(x)| \leq \sup_{x \in B_E} |\widetilde{\varphi}(x)| = \|\widetilde{\varphi}\|.$$

Portanto, $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. □

Corolário 1.8. Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E, x_0 \neq 0$, existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração. Consideremos $G = \mathit{span}\,\{x_0\}$ e o funcional linear contínuo $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $\varphi(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\|$. Então, pelo Corolário 1.7 existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja a restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Portanto, $\widetilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$ e

$$\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} |\varphi(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} |\lambda| \cdot \|x_0\| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} \|\lambda x_0\| = 1.$$

□

Corolário 1.9. Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \max\left\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\right\}.$$

Demonstração. Se $x = 0$ o resultado é claro. Suponhamos que $x \neq 0$; pelo Corolário 1.8 existe $\psi \in E'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(x) = \|x\|$. Logo,

$$\|x\| = \psi(x) \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \cdot \|x\| = \|x\|.$$

Dessa forma, temos a primeira igualdade. O funcional ψ garante a segunda igualdade, pois $\|x\| = \psi(x)$, isto é, o sup é atingido em ψ. □

Vejamos agora que é possível descrever todos os funcionais lineares contínuos do espaço $(\ell_p)'$ com $1 \leq p < \infty$ por sequências de escalares que pertencem a ℓ_{p^*}. Por p^* denotamos o (único) número maior que 1 tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Dizemos que p^* é o *conjugado* de p e vice-versa.

Proposição 1.10. Dado $1 \leq p < \infty$. Os espaços ℓ_{p^*} e $(\ell_p)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p^*} \mapsto \varphi_b \in (\ell_p)',\ \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 4.2.1.]. □

Para finalizar esta seção vamos definir espaço de Hilbert. Para isso, começaremos definindo produto interno.

Definição 1.2. Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Um *produto interno* em E é uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle,$$

tal que para quaisquer $x, x_1, x_2, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$,

(b) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$,

(c) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

(d) Para todo $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle$ é um número real estritamente positivo.

A função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ é uma norma, no qual dizemos que é a *norma induzida pelo produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Definição 1.3. Um espaço com produto interno que é completo na norma induzida pelo produto interno é chamado de *espaço de Hilbert.* Em particular, um espaço de Hilbert é um espaço de Banach com a norma induzida pelo produto interno.

Dadas as sequências numéricas $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}, y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$, a expressão

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

define um produto interno em ℓ_2. Além disso, a norma induzida obviamente coincide com a norma original $\|\cdot\|_2$ de ℓ_2. O fato de ℓ_2 ser um espaço de Hilbert será utilizado no Capítulo 3.

1.2 Séries em Espaços de Banach

Conhecemos da Análise Real que para trabalhar com séries de números reais, basta saber fazer somas finitas e entender sobre processos de limites de sequências. Em espaços normados podemos proceder de forma similar.

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores em um espaço normado E. A partir dela, formamos uma nova sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ cujos elementos são as somas

$$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \ldots, s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \ldots$$

a qual chamamos de *sequência das somas parciais* da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Se existir $x \in E$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

diremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *convergente.* Todavia, se a sequência das somas parciais não convergir diremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *divergente.*

Além disso, vale o critério de Cauchy, análogo ao de $\mathbb{R}$, para séries em um espaço de Banach. Mais precisamente, uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_j \right\| < \varepsilon, \text{ sempre que } m > n \geq n_0.$$

Sejam E um espaço vetorial normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *absolutamente somável* quando a série $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é convergente. Quando para qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente, dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *incondicionalmente somável* e no caso em que σ seja a função identidade diremos apenas que a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *somável.*

De acordo com a definição de sequência incondicionalmente somável está aberta a possibilidade da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ convergir para limites distintos considerando permutações diferentes. O próximo resultado afirma que isto não é possível, no qual sua demonstração pode ser encontrada em [2, Proposição 5.3.8.].

Proposição 1.11. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência incondicionalmente somável em um espaço normado E. Se $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ são permutações quaisquer, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

O próximo resultado nos dá um número de caracterizações úteis para sequências incondicionalmente somáveis em espaços de Banach.

Teorema 1.12. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço de Banach E. São equivalentes:*

(a) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência incondicionalmente somável.*

(b) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe um $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > m_\varepsilon$, temos $\left\| \sum\limits_{n\in M} x_n \right\| < \varepsilon$.*

(c) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável, isto é, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ de inteiros positivos, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ é convergente.*

(d) *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, ou seja, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ é convergente para qualquer escolha de sinais $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [8, Teorema 1.1.2] □

Na reta, uma sequência é incondicionalmente somável se, e somente se, é absolutamente somável; este resultado foi demonstrado pelo matemático alemão Dirichlet em 1837. Usando a convergência coordenada a coordenada, estende-se esse resultado para espaços de dimensão finita. Para uma referência mais específica da demonstração desse resultado observemos que a próxima proposição garante uma implicação dessa equivalência, uma vez que todo espaço normado de dimensão finita é Banach, e para a outra implicação, veja [5, Teorema 1.25.]. Vejamos um exemplo que essa equivalência não é verdadeira para qualquer espaço normado.

Exemplo 1.2. Sejam $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$ e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de vetores unitários canônicos. Em ℓ_2, a sequência $(a_n e_n)_{n=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, a_n, 0, 0, \ldots)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} e_{\sigma(n)} = \big(a_{\sigma(n)}\big)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2, \text{ para qualquer permutação } \sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

mas não é absolutamente somável. Em contrapartida, se consideramos a sequência $\left(\dfrac{e_n}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty}$ de elementos no espaço c_{00} é fácil ver que ela é absolutamente somável, mas não é somável, uma vez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n}{n^2} = \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n=1}^{\infty} \notin c_{00}.$$

Com isso, surgem perguntas esperadas. Essa equivalência é exclusiva de espaços com dimensão finita? Se não, em quais casos essa equivalência é válida em dimensão infinita?

O matemático Stefan Banach, em sua tese [10] de 1922, respondeu, em parte, tais perguntas. Ele percebeu que a implicação, "toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável", não só é preservada quando o espaço em questão é completo, como também é suficiente para caracterizar um espaço completo. A próxima proposição trata precisamente disso.

Proposição 1.13. Um espaço vetorial normado E é Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.

Demonstração. Suponhamos que E seja um espaço de Banach. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em E e $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma permutação. Se consideramos $y_n = \|x_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então a sequência de números reais $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é absolutamente somável, logo incondicionalmente somável. Dessa forma, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(n)}\right\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_{\sigma(n)}$ é convergente. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{m} x_{\sigma(k)}\right\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \left\|x_{\sigma(k)}\right\| < \varepsilon,$$

para todos $n \geq m > n_0$. A convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ segue do critério de Cauchy. Portanto, provamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em E. Dado $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$, sempre que $n, m \geq n_0(k)$. Logo, podemos construir um sequência de índices $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tais que

$$\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| < 2^{-k}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Dessa forma, a sequência $\left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ é absolutamente somável e, por hipótese, é incondicionalmente somável e, em particular, somável, ou seja, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right)$ é convergente. Como

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} \left(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}\right), \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

fazendo $k \to \infty$, segue que a sequência $\left(x_{n_{k+1}}\right)_{k=1}^{\infty}$ é convergente, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente. Portanto, E é um espaço de Banach. $\square$

Uma resposta completa para as perguntas feita acima permanecia ainda sem solução. O problema de saber se sequências incondicionalmente somáveis são absolutamente somáveis em espaços de Banach de dimensão infinita foi proposto por Stefan Banach em seu livro [11, página 240] em 1932.

Esse problema permaneceu aberto até o ano de 1950, quando os matemáticos Aryeh Dvoretzky e Claude Ambrose Rogers em seu célebre trabalho [12] mostraram que, em um espaço de Banach, toda sequência incondicionalmente somável é absolutamente somável se, e somente se, o espaço tem dimensão finita.

Dessa forma, a equivalência entre sequências absolutamente e incondicionalmente somáveis em espaços de Banach caracteriza os espaços de Banach de dimensão finita. Vejamos a seguir, o conhecido Teorema de Dvoretzky-Rogers, cuja sua demonstração pode ser encontrada em [8, Teorema 1.2.2].

Teorema 1.14 (Dvoretzky-Rogers). *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer sequência $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E com $\|x_n\| = |\lambda_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$, obtemos uma sequência incondicionalmente somável que não é absolutamente somável.*

1.3 Espaços de Sequências a Valores Vetoriais

Já conhecemos os espaços de sequências c_{00}, c_0 e ℓ_p com $1 \leq p \leq \infty$, bem como suas propriedades. Esta seção é dedicada ao estudo dos espaços de sequências a valores vetoriais. Mais precisamente, dado um espaço de Banach E, consideramos sequências formadas por elementos de E que satisfazem uma determinada condição. Estamos interessados nas boas propriedades desses espaços, como por exemplo, na sua completude. Além disso, veremos uma outra versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers visto na seção anterior, só que agora inserida nesse novo contexto. Começamos definindo um desses espaços.

Definição 1.4. Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita *fortemente p-somável* se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$.

Denotamos por $\ell_p(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências fortemente p-somáveis em E. Além disso, não é difícil verificar que a função $\|\cdot\|_{\ell_p(E)} : \ell_p(E) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\ell_p(E)} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.1}$$

define uma norma em $\ell_p(E)$. Quando não houver perigo de ambiguidade entre os espaços ℓ_p e $\ell_p(E)$, denotamos a norma (1.1) simplesmente por $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p$. O próximo resultado mostra que $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_p$.

Proposição 1.15. Se $1 \leq p < \infty$ e E é um espaço de Banach, então $\left(\ell_p(E), \|\cdot\|_p\right)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Seja $\left(x^k\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$; logo para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que $x^k = \left(x_1^k, x_2^k, x_3^k, \ldots\right) \in \ell_p(E)$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, k' \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^k - x_j^{k'}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|x^k - x^{k'}\right\|_p < \varepsilon,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada natural n fixado, $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E e, portanto, existe $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^k = x_n \in E$. Definindo $x := (x_n)_{n=1}^{\infty}$, o objetivo agora é mostrar que $x \in \ell_p(E)$ e que $x^k \to x$ na norma $\|\cdot\|_p$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$k, k' \geq n_0 \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Fazendo $k' \to \infty$, obtemos

$$k \geq n_0 \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{m} \left\|x_n^k - x_n\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, temos

$$\left\|x^k - x\right\|_p < \varepsilon, \tag{1.2}$$

para todo $k \geq n_0$. Logo $x^{n_0} - x = (x_n^{n_0} - x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Como $x^{n_0} \in \ell_p(E)$, segue que

$$x = x^{n_0} - (x^{n_0} - x) = (x_n^{n_0})_{n=1}^{\infty} - (x_n^{n_0} - x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E).$$

Note que acabamos de usar o fato de que $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial. Além disso, da desigualdade (1.2) temos $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$. Portanto, $\ell_p(E)$ é um espaço de Banach. □

Definição 1.5. Seja E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita *fortemente limitada* se existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\sup\limits_{n} \|x_n\| \leq M$.

Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências fortemente limitadas em E. Além disso, não é difícil verificar que a função $\|\cdot\|_{\ell_\infty(E)} : \ell_\infty(E) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell_\infty(E)} := \sup_n \|x_n\| \tag{1.3}$$

define uma norma em $\ell_\infty(E)$. Quando não houver perigo de ambiguidade entre os espaços ℓ_∞ e $\ell_\infty(E)$, denotamos a norma (1.3) por $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty$. O próximo resultado mostra que $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$. Como a demonstração desse resultado segue um caminho similar ao da Proposição 1.15, omitiremos sua demonstração.

Proposição 1.16. Se E é um espaço de Banach, então $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [6, Proposição 2.1.4] $\square$

Observemos que $\ell_p(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ para qualquer espaço de Banach E. De fato, se $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ e assim a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada, ou seja, $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. Além disso, quando $E = \mathbb{K}$ temos que $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ e $\ell_\infty(\mathbb{K}) = \ell_\infty$. A seguir, continuamos definindo os espaços de interesse para nosso estudo.

Definição 1.6. Seja E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é dita *eventualmente nula* se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| = 0$ sempre que $n \geq n_0$. Denotamos por $c_{00}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências eventualmente nulas.

Definição 1.7. Seja E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é dita *nula em norma* se $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Denotamos por $c_0(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências nulas em norma.

Note que $c_{00}(E) \subseteq c_0(E) \subseteq \ell_\infty(E)$, pois se $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_{00}(E)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n\| = 0$, sempre que $n \geq n_0$. Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$; e se $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0(E)$, então $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ e assim a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ é limitada, ou seja, $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. É imediato verificar que $c_{00}(E)$ é um subespaço vetorial de $c_0(E)$ e que $c_0(E)$ é um subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$. Podemos também observar que quando $E = \mathbb{K}$ temos que $c_{00}(\mathbb{K}) = c_{00}$ e $c_0(\mathbb{K}) = c_0$. A partir de agora, consideramos nos espaços $c_{00}(E)$ e $c_0(E)$ a norma induzida pela norma de $\ell_\infty(E)$. Vejamos agora que $c_0(E)$ é um espaço de Banach com essa norma.

Proposição 1.17. Seja E um espaço de Banach. Então $c_0(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$.

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $c_0(E)$ que converge para $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. O objetivo é mostrar que $x \in c_0(E)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_n \left\| x_n^k - x_n \right\| = \left\| x^k - x \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então, para cada $k \geq k_0$ e cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left\| x_n^k - x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, como para cada $k \in \mathbb{N}$ $x^k = (x_n^k)_{n=1}^\infty \in c_0(E)$, existe então $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| x_n^{k_0} \right\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Dessa forma,

$$n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n\| = \left\| x_n - x_n^{k_0} + x_n^{k_0} \right\| \leq \left\| x_n - x_n^{k_0} \right\| + \left\| x_n^{k_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ e assim $x \in c_0(E)$. $\square$

Não é difícil verificar que $c_{00}(E)$ não é fechado em $c_0(E)$ e consequentemente não é um espaço de Banach. Por outro lado, podemos observar que $c_{00}(E)$ é denso em $\ell_p(E)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Agora, tomando $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots) \in c_{00}(E)$, temos que

$$\|x - y\|_p = \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Definição 1.8. Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é dita *fracamente p-somável* se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p < \infty$, para todo $\varphi \in E'$.

Denotamos por $\ell_p^w(E)$, o espaço vetorial de todas as sequências fracamente p-somáveis. No próximo resultado definimos uma norma para o espaço $\ell_p^w(E)$.

Proposição 1.18. A função $\|\cdot\|_{w,p} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $\ell_p^w(E)$.

Demonstração. Primeiro mostraremos que a função $\|\cdot\|_{w,p}$ está bem definida, pois não é imediato que o supremo acima é finito. Para isso usaremos o Teorema do Gráfico Fechado. Fixado $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, consideremos o operador $T_x : E' \longrightarrow \ell_p$ dado por $T_x(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$, que claramente está bem definido e é linear. Provemos que $\mathrm{Graf}(T_x)$ é fechado. Suponhamos que $\varphi_k \to \varphi$ em E' e $T_x(\varphi_k) \to z = (z_n)_{n=1}^\infty$ em ℓ_p. O objetivo é mostrar que $T_x(\varphi) = z$. Da última convergência temos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_k(x_j) - z_j|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |\varphi_k(x_n) - z_n|^p = \|(\varphi_k(x_n))_{n=1}^\infty - (z_n)_{n=1}^\infty\|_p^p < \varepsilon^p,$$

sempre que $k \geq n_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x_j) = z_j$ em $\mathbb{K}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\varphi_k \to \varphi$ temos que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x_j) = \varphi(x_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, temos que $\varphi(x_j) = z_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$T_x(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^\infty = (z_n)_{n=1}^\infty = z$$

e o Teorema do Gráfico Fechado garante que T_x é contínuo. Com isso, deduzimos que o supremo é finito, pois

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T_x(\varphi)\| = \|T_x\| < \infty.$$

As demais propriedades de norma são de fácil verificação. □

O próximo resultado mostra que $\ell_p^w(E)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{w,p}$. Como a demonstração desse resultado segue um caminho similar ao da Proposição 1.15, omitiremos sua demonstração.

Proposição 1.19. Se $1 \leq p < \infty$ e E é um espaço de Banach, então $\left(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p}\right)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [6, Proposição 2.4.5]. □

O caminho natural agora seria definir o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ no espaço de Banach E tal que existe uma constante $M \geq 0$ que satisfaz $\sup\limits_n |\varphi(x_n)| \leq M$, para todo $\varphi \in E'$. Sequências que satisfazem essa condição são chamadas de *fracamente limitadas* e o espaço vetorial de todas essas sequências é denotado por $\ell_\infty^w(E)$.

Além disso, de forma similar a Proposição 1.18, mostra-se que a função $\|\cdot\|_{w,\infty}$: $\ell_\infty^w(E) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,\infty} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_\infty,$$

define uma norma em $\ell_\infty^w(E)$. O próximo passo seria mostrar que $\left(\ell_\infty^w(E), \|\cdot\|_{w,\infty}\right)$ é um espaço de Banach. Entretanto, os espaços $\left(\ell_\infty^w(E), \|\cdot\|_{w,\infty}\right)$ e $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ são isometricamente isomorfos. O objetivo agora é mostrar esse resultado.

Definição 1.9. Sejam E um espaço normado. Um subconjunto $B \subseteq E$ é dito ser *fracamente limitado* se $\varphi(B)$ é limitado em $\mathbb{K}$, para todo $\varphi \in E'$.

O próximo resultado mostra que as definições de conjunto limitado e conjunto fracamente limitado são equivalentes.

Lema 1.20. Sejam E um espaço normado e B um subconjunto de E. Então, B é limitado se, e somente se, B é fracamente limitado.

Demonstração. Se B é limitado, então existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para todo $x \in B$. Assim, para cada $\varphi \in E'$ temos $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| \leq \|\varphi\| \|M\|$, para todo $x \in B$. Portanto, B é fracamente limitado. Reciprocamente, para cada $\varphi \in E'$ existe $M_\varphi \geq 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M_\varphi$, para todo $x \in B$. Assim,

$$|J_E(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq M_\varphi$$

para todo $x \in B$, onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. Dessa forma, $(J_E(x))_{x\in B}$ é uma família de operadores lineares e contínuos pontualmente limitada. Sendo E' um espaço de Banach, pelo Teorema de Banach-Steinhaus temos que

$$\sup_{x\in B} \|J_E(x)\| < \infty.$$

Como $\|J_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |J_E(x)(\varphi)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|$, para todo $x \in E$; temos que

$$\sup_{x\in B} \|x\| = \sup_{x\in B} \|J_E(x)\| < \infty,$$

e, portanto, B é limitado. □

Proposição 1.21. Seja E um espaço normado. A aplicação

$$\Phi : \ell_\infty(E) \longrightarrow \ell_\infty^w(E),$$

definida por $\Phi((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e $\varphi \in E'$. Então,

$$\sup_n |\varphi(x_n)| \leq \sup_n (\|\varphi\| \|x_n\|) = \|\varphi\| \sup_n \|x_n\| < \infty,$$

donde $\Phi((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty^w(E)$. Assim, Φ está bem definida e não é difícil verificar que é linear. Dado $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$, temos

$$\begin{aligned}\|\Phi((x_n)_{n=1}^{\infty})\|_{w,\infty} &= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,\infty} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_n |\varphi(x_n)| \right) \\ &= \sup_n \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| \right) = \sup_n \|x_n\| = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty .\end{aligned}$$

Dessa forma, Φ é uma isometria linear. Falta agora mostra que Φ é sobrejetiva. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty^w(E)$, então para todo $\varphi \in E'$, a sequência $(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada, logo o conjunto $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado. Pelo Lema 1.20, $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e, portanto, Φ é sobrejetiva. $\square$

Como vimos acima $\ell_\infty^w(E)$ e $\ell_\infty(E)$ são isometricamente isomorfos. Assim, é comum identificar os dois espaços e a ambos se referir simplesmente como $\ell_\infty(E)$. É bom deixar claro que ao escrevermos $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$, estaremos cometendo um abuso de notação.

Note que $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$, para qualquer $1 \leq p < \infty$. De fato, se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, então

$$\begin{aligned}\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p .\end{aligned} \tag{1.4}$$

Dessa forma, $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$. Vamos mostrar agora a segunda inclusão. Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então

$$\|x_n\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} ,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, tomando o supremo sobre n, obtemos

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_n \|x_n\| \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} . \tag{1.5}$$

Isso mostra que $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$.

Sejam E e F espaços de Banach, a notação $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ significa que E é um subespaço de F e $\|x\|_F \leq \|x\|_E$, para qualquer $x \in E$. Assim, das expressões (1.4) e (1.5), temos

$$\ell_p(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E),$$

para qualquer espaço de Banach E.

Vejamos também que para $1 \leq q \leq p < \infty$, teremos $\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$ e $\ell_q^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$, para qualquer $E \in BAN$. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_q(E)$. Então, $\sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\|^q < \infty$, donde $\lim\limits_n \|x_n\| = 0$, e por isso, $\sup\limits_n \|x_n\| =: \lambda < \infty$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{n=1}^m \|x_n\|^p = \sum_{n=1}^m \|x_n\|^{p-q} \|x_n\|^q \leq \sum_{n=1}^m \lambda^{p-q} \|x_n\|^q = \lambda^{p-q} \sum_{n=1}^m \|x_n\|^q .$$

Fazendo $m \to \infty$, temos que $\sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\|^p \leq \lambda^{p-q} \sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\|^q$, ou seja,

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p^p \leq \lambda^{p-q} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q^q . \tag{1.6}$$

Portanto, $\ell_q(E) \subseteq \ell_p(E)$. Como $\|x_k\| \leq \left(\sum\limits_{n=1}^\infty \|x_n\|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $\lambda = \sup\limits_n \|x_n\| \leq \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q$. Logo, de (1.6) obtemos que

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p^p \leq \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q^{p-q} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q^q = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q^p ,$$

isto é, $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_q$, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q(E)$. Acabamos de mostrar que $\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(E)$. Vamos agora mostrar que $\ell_q^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(E)$. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_q^w(E)$. Logo,

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_p \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_n))_{n=1}^\infty\|_q = \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,q} < \infty.$$

Por fim, mencionamos o fato de que para $1 \leq p < \infty$ a inclusão $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ se torna a igualdade $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$ se, e somente se, o espaço de Banach E tem dimensão finita. Uma outra versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers, conhecida como versão fraca, garante esse resultado. Sua demonstração pode ser encontrada em [1, Theorem 2.18].

Teorema 1.22 (Versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers). *Seja $1 \leq p < \infty$. Todo espaço de Banach de dimensão infinita possui uma sequência fracamente p-somável que não é fortemente p-somável.*

1.4 Cotipo e Fatoração Formal

O cotipo de um espaço de Banach tem um papel importante na teoria de operadores lineares absolutamente somantes. A seguir, definiremos cotipo e mostraremos alguns resultados que serão importantes para esse trabalho.

As funções de Rademacher são definidas por

$$r_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$$
$$r_n(t) := sign(\sin 2^n \pi t).$$

Observemos que se $p_1, \ldots, p_k$ e $n_1 < \cdots < n_k$ são números inteiros positivos, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdots r_{n_k}^{p_k}(t)dt = \begin{cases} 1, & \text{se cada } p_j \text{ é par;} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para maiores detalhes sobre as funções de Rademacher e suas propriedades sugerimos o livro [1]. Vejamos agora a definição de cotipo.

Definição 1.10. Seja $2 \leq q \leq \infty$. Um espaço de Banach E tem *cotipo* q se existir uma constante $C > 0$ tal que, para qualquer escolha finita de vetores $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando $q = \infty$, substituímos $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ por $\sup\limits_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|$.

O próximo resultado estabelece algumas propriedades relacionadas ao conceito de cotipo.

Proposição 1.23. Seja E um espaço de Banach.

(a) Se E tem cotipo q, então E tem cotipo q' para todo $q' \geq q$.

(b) Se E é um espaço de Hilbert, então E tem cotipo 2.

Demonstração. (a) Seja $q' \geq q$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Como $\ell_q(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_{q'}(E)$ e por hipótese E tem cotipo q temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

para algum $C > 0$. Portanto, E tem cotipo q'.

(b) Como E é um espaço de Hilbert, dados $x_1, \ldots, x_n \in E$ sabemos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 = \left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k, \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\rangle.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt &= \int_0^1 \left(\left\langle \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k, \sum_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\rangle \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} r_{k_1}(t) r_{k_2}(t) \langle x_{k_1}, x_{k_2} \rangle \right) dt \\
&= \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \langle x_{k_1}, x_{k_2} \rangle \int_0^1 r_{k_1}(t) r_{k_2}(t) dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 .
\end{aligned}$$

Dessa forma, existe $C > 0$ tal que $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \|x_k\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int\limits_0^1 \left\| \sum\limits_{k=1}^{n} r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ e, portanto, E tem cotipo 2. □

Denotamos por $\cot(E) = \inf \{q : E \text{ tem cotipo } q\}$. Sejam E e F espaços de Banach, a notação $E \hookrightarrow F$ significa que E é um subespaço de F e que existe um $C > 0$ tal que $\|x\|_F \leq C \|x\|_E$, para qualquer $x \in E$.

Definição 1.11. Sejam $0 < \lambda < 1$ e $p \geq 2$. Um espaço de Banach E *fatora finitamente* a inclusão formal $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty$ para algum λ se, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirem $y_1, \ldots, y_n \in E$ tais que

$$(1 - \lambda) \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \right\| \leq \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_p ,$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Note que se um espaço de Banach E fatora finitamente a inclusão formal $\ell_p \hookrightarrow \ell_\infty$ e $2 \leq q \leq p$, então E também fatora finitamente $\ell_q \hookrightarrow \ell_\infty$. De fato, sabemos que $\ell_q \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p$ e por hipótese, existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existem $y_1, \ldots, y_n \in E$ satisfazendo

$$(1 - \lambda) \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j y_j \right\| \leq \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_p \leq \left\| (a_j)_{j=1}^n \right\|_q ,$$

para quaisquer $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Portanto, E fatora finitamente $\ell_q \hookrightarrow \ell_\infty$. Denotamos por

$$(ff)(E) := \sup \left\{ 2 \leq p \leq \infty : E \text{ fatora finitamente a inclusão formal } \ell_p \hookrightarrow \ell_\infty \right\}.$$

Embora $(ff)(E)$ seja definido como um supremo, temos que E fatora finitamente $\ell_{(ff)(E)} \hookrightarrow \ell_\infty$, ou seja, esse supremo é atingindo (ver [1, Pagina 304]). Finalizamos esta seção com um teorema que mostra a relação de $\cot(E)$ e $(ff)(E)$ quando E tem dimensão infinita.

Teorema 1.24 ([1], Theorem 14.5)**.** *Para qualquer espaço de Banach de dimensão infinita E,*

$$\cot(E) = (ff)(E).$$

Capítulo 2

O ideal dos Operadores Absolutamente Somantes

Neste capítulo estudamos os operadores m-lineares e os polinômios m-homogêneos, bem como as suas relações. Estudamos ainda os conceitos de polinômios e operadores de tipo finito. Esses conceitos serão muito úteis durante a definição de ideais de operadores multilineares e ideais de polinômios que são definidos logo em seguida.

Estudaremos a classe dos operadores multilineares absolutamente somantes sob o ponto de vista da teoria de ideais de operadores e, por fim, apresentaremos uma generalização desse conceito para o caso de somas em múltiplos índices.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [13], [17] e [22].

2.1 Operadores Multilineares

Apresentamos nesta seção os conceitos e resultados básicos sobre operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach. Começamos definindo os operadores multilineares.

Definição 2.1. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais. Dizemos que um operador $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é *m-linear (ou multilinear)* se for linear em cada variável, ou seja, se

$$T(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_m) = T(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + \lambda T(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_m),$$

para todos $x_i, y_i \in E_i$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $i = 1, \ldots, m$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F será denotado por $L(E_1, \ldots, E_m; F)$, que é um espaço vetorial munido com as operações usuais de funções. Quando $F = \mathbb{K}$, denotamos $L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) = L(E_1, \ldots, E_m)$ e caso $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $L(^m E; F)$.

Operadores multilineares, como vimos acima, são definidos em produtos cartesianos de espaços vetoriais. Assim, antes de tratarmos sobre a continuidade dos operadores multilineares precisamos deixar claro qual é a norma considerada no produto cartesiano.

Não é difícil verificar que se $E_1, \ldots, E_m$ são espaços normados, então $E_1 \times \cdots \times E_m$ também é um espaço normado quando consideramos qualquer uma das normas:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_{E_i},$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|_{E_i}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ com qualquer } (1 \leq p < \infty),$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Além disso, as normas $\|\cdot\|_\infty$ e $\|\cdot\|_p$ são equivalentes, pois $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq m^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$, para todo $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e todo $1 \leq p < \infty$. Dessa forma, usaremos a norma $\|\cdot\|_\infty$ como a norma usual em $E_1 \times \cdots \times E_m$ e escreveremos apenas $\|\cdot\|$.

Diremos que o operador $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é limitado em um subconjunto $B \subset E_1 \times \cdots \times E_m$ se

$$\sup_{x \in B} \|T(x)\| < \infty.$$

O próximo resultado nos apresenta várias equivalências sobre a continuidade de um operador multilinear.

Teorema 2.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Se $E_1, \ldots, E_m, F$ são espaços normados e $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ um operador m-linear, então são equivalentes:*

(a) *T é contínuo.*

(b) *T é contínuo na origem.*

(c) *Existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M \|x_1\| \cdots \|x_m\|$, para quaisquer $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$.*

(d) *T é uniformemente contínuo sobre os limitados.*

(e) *T é limitado em toda bola com raio finito.*

(f) *T é limitado em alguma bola.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 1.2.2] □

Diferente do caso linear, os operados multilineares ($m \geq 2$) não podem ser uniformemente contínuos, exceto o operador nulo. Para verificar isso, suponhamos que $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ seja um operador m-linear não nulo com $m \geq 2$. Dessa forma, existem $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ e $r > 0$ tais que $\|T(x_1, \ldots, x_m)\| > r > 0$. Assim $x_i \neq 0$ com $i = 1, \ldots, m$. Tomando $\varepsilon = r$ e para cada $\delta > 0$, podemos escolher $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda < \dfrac{\delta}{\|x_1\|}$, isto é, $\|\lambda x_1\| < \delta$. Logo,

$$\left\| \left(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m \right) - \left(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m \right) \right\| = \|\lambda x_1\| < \delta.$$

Mas

$$\begin{aligned} \left\| T(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m) - T(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m) \right\| &= \left\| T(\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, x_3, \ldots, x_m) \right\| \\ &= \|T\left(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m\right)\| > r. \end{aligned}$$

Portanto, T não pode ser uniformemente contínuo.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os operadores multilineares contínuos de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F será denotado por $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, que é um subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_m; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, denotamos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m)$ e caso $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\mathcal{L}(^m E; F)$.

De forma análoga ao caso linear, podemos definir a norma no espaço dos operadores multilineares contínuos, ou seja, a expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in B_{E_1 \times \cdots \times E_m}} \|T(x)\| = \sup \left\{ \|T(x)\| ; x \in E_1 \times \cdots \times E_m, \|x\|_\infty \leq 1 \right\}$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Além disso, para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ temos $\|T(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_m\|$, pois

$$\begin{aligned} \|T(x_1, \ldots, x_m)\| &= \left\| T\left(\frac{\|x_1\| x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{\|x_m\| x_m}{\|x_m\|} \right) \right\| \\ &= \|x_1\| \cdots \|x_n\| \left\| T\left(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \right\| \leq \|x_1\| \cdots \|x_n\| \|T\|. \end{aligned}$$

Dizemos que $T \in L(E_1, \ldots, E_m; F)$ é *separadamente contínuo* se for contínuo em cada variável, ou seja, se para cada $i = 1, \ldots, m$ os operadores lineares $T_{(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1} \ldots, x_m)} : E_i \longrightarrow F$, dados por

$$T_{(x_1, \ldots, x_{i-1}, \cdot, x_{i+1} \ldots, x_m)}(y) = T(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_m)$$

são contínuos para todo $x_j \in E_j$ fixos, onde $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$.

O exemplo a seguir mostra um operador multilinear que é separadamente contínuo, mas não é contínuo.

Exemplo 2.1. Seja $\mathcal{C}([0,1])$ o espaço vetorial das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ munido da norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt$. O operador $T \in L(^2\mathcal{C}([0,1]))$ dado por

$$T(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

é separadamente contínuo mas não é contínuo.

Com isso, quando $E_1, \ldots, E_m, F$ são espaços normados não podemos afirmar que um operador multilinear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é contínuo porque é contínuo em cada variável, ao contrário da linearidade. Entretanto, se os espaços $E_1, \ldots, E_m$ forem de Banach, a continuidade em cada variável será uma condição suficiente para garantir a continuidade do operador.

Teorema 2.2. *Sejam $E_1, \ldots, E_m \in BAN$ e F um espaço normado. Então o operador $T \in L(E_1, \ldots, E_m; F)$ é contínuo se, e somente se, é contínuo em cada variável.*

Demonstração. Suponhamos que T seja um operador m-linear contínuo. Vamos mostrar que para cada $i = 1, \ldots, m$ e cada $x_j \in E_j$, com $j = 1, \ldots, m$, os operadores lineares $T_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1}\ldots,x_m)} : E_i \longrightarrow F$, dados por

$$T_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1}\ldots,x_m)}(y) = T(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_m)$$

são contínuos. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\left\|T_{(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1}\ldots,x_m)}(y)\right\| &= \|T(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1} \ldots, x_m)\| \\
&\leq \|T\| \|x_1\| \cdots \|y\| \cdots \|x_m\| \\
&= \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_{i-1}\| \|x_{i+1}\| \cdots \|x_m\| \|y\| \\
&= C \|y\|,
\end{aligned}$$

onde $C = \|T\| \|x_1\| \cdots \|x_{i-1}\| \|x_{i+1}\| \cdots \|x_m\|$. Isso mostra que T é contínuo em cada variável.

A recíproca será provada por indução em m. Dado o operador 2-linear $T : E_1 \times E_2 \longrightarrow F$ contínuo em cada variável. Para cada $y \in E_2$, temos que $T_{(\cdot,y)} : E_1 \longrightarrow F$ dado por $T_{(\cdot,y)}(x) = T(x,y)$ é linear e contínuo e, para cada $x \in E_1$ temos que $T_{(x,\cdot)} : E_2 \longrightarrow F$ dado por $T_{(x,\cdot)}(y) = T(x,y)$ também é linear e contínuo. Pelo Teorema 2.1, com $m = 1$, temos que para cada $x \in E_1$ existe $M_x > 0$ tal que

$$\|T(x,y)\| = \left\|T_{(x,\cdot)}(y)\right\| \leq M_x \|y\|,$$

para qualquer $y \in E_2$. Assim, se $\|y\| \leq 1$, temos

$$\left\|T_{(\cdot,y)}(x)\right\| = \|T(x,y)\| = \left\|T_{(x,\cdot)}(y)\right\| \leq M_x.$$

Considerando a família $\mathcal{F} = \left\{T_{(\cdot,y)};\ y \in B_{E_2}\right\}$, temos que $\left\|T_{(\cdot,y)}(x)\right\| \leq M_x$ para todo $T_{(\cdot,y)} \in \mathcal{F}$. Como $T_{(\cdot,y)}$ está definido em um espaço de Banach, então pelo Teorema de Banach-Steinhaus, exite $M > 0$ tal que $\left\|T_{(\cdot,y)}\right\| \leq M$, para todo $T_{(\cdot,y)} \in \mathcal{F}$. Portanto, para quaisquer $x \in B_{E_1}$ e $y \in B_{E_2}$, temos

$$\|T(x,y)\| = \left\|T_{(\cdot,y)}(x)\right\| \leq \left\|T_{(\cdot,y)}\right\| \leq M$$

e concluímos que $\|T(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para todo $(x,y) \in E_1 \times E_2$. Dessa forma, pelo Teorema 2.1 temos que T é contínuo.

Suponhamos que todo operador $(m-1)$-linear contínuo em cada variável seja contínuo. Dado T um operador m-linear contínuo em cada variável. Para cada $x_m \in E_m$, o operador $T_{x_m}(x_1,\ldots,x_{m-1}) = T(x_1,\ldots,x_m)$ é $(m-1)$-linear contínuo em cada variável e, por hipótese de indução, contínuo. Então existe $M_{x_m} > 0$ tal que

$$\|T(x_1,\ldots,x_m)\| = \|T_{x_m}(x_1,\ldots,x_{m-1})\| \leq M_{x_m}\|x_1\|\cdots\|x_{m-1}\|.$$

Se $\|x_i\| \leq 1$ para todo $i = 1,\ldots,m-1$, temos $\|T(x_1,\ldots,x_m)\| \leq M_{x_m}$. Considerando a família $\mathcal{F} = \left\{T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)};\ x_i \in B_{E_i}, i = 1,\ldots,m-1\right\}$. Para cada $x_m \in E_m$, temos

$$\left\|T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)}(x_m)\right\| \leq M_{x_m} \text{ para todo } T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)} \in \mathcal{F}.$$

Como $T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)}$ está definido em um espaço de Banach, então pelo Teorema de Banach-Steinhaus existe $M > 0$ tal que $\left\|T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)}\right\| \leq M$, para todo $T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)} \in \mathcal{F}$. Logo, para todo $x_i \in B_{E_i}$, $i = 1,\ldots,m$, temos

$$\|T(x_1,\ldots,x_m)\| = \left\|T_{(x_1,\ldots,x_{m-1},\cdot)}(x_m)\right\| \leq M\|x_m\| \leq M$$

e concluímos que $\|T(x_1,\ldots,x_m)\| \leq M\|x_1\|\cdots\|x_m\|$ para todo $(x_1,\ldots,x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$. Portanto, pelo Teorema 2.1, temos que T é contínuo. □

Os dois próximos resultados são versões multilineares do Teorema do Gráfico Fechado e do Teorema de Banach-Steinhaus, ambos vistos no primeiro capítulo para operadores lineares. Contudo, não demonstraremos esses resultados, uma vez que suas demonstrações seguem um caminho similar ao caso linear.

Teorema 2.3 (do Gráfico Fechado para Operadores Multilineares)**.** *Sejam* $E_1, \ldots,$

$E_m, F \in BAN$ e $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ um operador m-linear de gráfico fechado. Então T é contínuo.

Demonstração. Veja [13, Teorema 1.2.8] □

Teorema 2.4 (de Banach-Steinhaus para Operadores Multilineares)**.** *Sejam $E_1, \ldots,$ $E_m \in BAN$, F um espaço normado e $\{T_i\}_{i \in I}$ uma família de operadores $m-$lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F. Se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x_1, \ldots, x_m)\| < \infty \text{ para todo } (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m,$$

então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Demonstração. Veja [13, Teorema 1.2.9] □

Como no caso linear, se F é Banach então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é Banach. A demonstração desse fato pode ser feito de modo análogo ao caso linear (veja [7, Proposição 2.11.]). O interessante resultado a seguir garante um isomorfismo isométrico importante entre espaços de operadores multilineares donde o resultado de completude citado também sai como um corolário.

Proposição 2.5. Se $E_1, \ldots, E_m$ e F são espaços normados, então a função

$$\Phi : \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_r; \mathcal{L}(E_{r+1}, E_{r+2}, \ldots, E_m; F))$$

dada por

$$\Phi\left(T\right)\left(x\right)\left(y\right) = T(x, y),$$

com $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_m; F)$, $x = (x_1, \ldots, x_r) \in E_1 \times \cdots \times E_r$, e $y = (y_{r+1}, \ldots, y_m) \in E_{r+1} \times \cdots \times E_m$, é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Veja [17, Proposição 1.4] □

Corolário 2.6. Se $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_m$ são espaços normados e F um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Provaremos por indução em m. Destacamos no primeiro capítulo que o espaço $\mathcal{L}(E; F)$ é Banach sempre que F for um espaço de Banach. Assim, para $m = 1$ o resultado é válido. Suponhamos agora que o resultado seja válido para $m - 1$, com $m \geq 2$. Pelo Teorema anterior, $\mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_m; F)$ é isometricamente isomorfo a $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, E_3 \ldots, E_m; F))$ que é Banach, pois $\mathcal{L}(E_2, E_3, \ldots, E_m; F)$ é Banach por hipótese. Portanto, $\mathcal{L}(E_1, E_2 \ldots, E_m; F)$ é um espaço de Banach. □

Vamos agora definir os operadores multilineares simétricos. Estes são importantes no estudo dos polinômios homogêneos que será visto mais adiante. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por S_m o conjunto de todas as permutações de $\{1, \ldots, m\}$, ou seja, conjunto de todas as bijeções $\sigma : \{1, \ldots, m\} \longrightarrow \{1, \ldots, m\}$. Denotamos por E^m o produto cartesiano de m fatores iguais a E, ou seja, $E^m = E \times \cdots \times E$ onde E aparece m vezes.

Definição 2.2. Sejam E, F espaços vetoriais e $m \in \mathbb{N}$. Dizemos que um operador m-linear $T : E^m \longrightarrow F$ é *simétrico* se

$$T(x_1, \ldots, x_m) = T\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}\right),$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in E$ e para toda permutação $\sigma \in S_m$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, o conjunto de todos os operadores $m-$lineares simétricos de E^m em F será denotado por $L_s(^mE; F)$, que é um subespaço vetorial de $L(^mE; F)$. Da mesma forma, denotamos por $\mathcal{L}_s(^mE; F)$ o subespaço formado por todos os operadores multilineares contínuos simétricos de E^m em F. Quando $F = \mathbb{K}$, denotamos $L_s(^mE; \mathbb{K}) = L_s(^mE)$ e $\mathcal{L}_s(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}_s(^mE)$.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $T \in L(^mE; F)$. Então para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$, usaremos a notação

$$Tx_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n} := T(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{\alpha_2}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n}),$$

para todo $m \geq 1$.

Finalizamos esta seção com a Fórmula de Polarização, cuja demonstração pode ser encontrada em [17, Theorem 1.10]. Esse resultado será de grande importância no estudo dos polinômios homogêneos.

Teorema 2.7 (Fórmula de Polarização)**.** *Sejam E e F espaços vetoriais. Se $T \in \mathcal{L}_s(^mE, F)$, então*

$$T(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m T(x_0 + \epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m)^m,$$

para quaisquer $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m \in E$

2.2 Polinômios Homogêneos

Nesta seção estudaremos alguns conceitos e resultados importantes a respeito dos polinômios homogêneos.

Definição 2.3. Sejam E e F espaços vetoriais. Um operador $P : E \longrightarrow F$ é um *polinômio homogêneo de grau* m (ou um polinômio m-homogêneo) se existir $T \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Tx^m$, para todo $x \in E$. Neste caso, dizemos que P é o polinômio associado ao operador m-linear T.

Denotamos por $P(^m E; F)$ o espaço vetorial de todos os polinômios m-homogêneos de E em F. Quando $F = \mathbb{K}$ escrevemos simplesmente $P(^m E)$ em vez de $P(^m E; \mathbb{K})$.

Exemplo 2.2. A função $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$, com $a \in \mathbb{K}$, é um polinômio m-homogêneo. Basta tomar $T \in L(^m \mathbb{K})$ dado por $T(x_1, \ldots, x_m) = ax_1 \cdots x_m$, e temos que $P(x) = Tx^m$. Note que esses são os únicos polinômios m-homogêneos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$. De fato, se $T \in L(^m \mathbb{K})$ e $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$, temos

$$T(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \cdots x_m T(1, 1, \ldots, 1) = ax_1 \cdots x_m,$$

onde $a = T(1, 1, \ldots, 1)$.

Note que a partir de operadores m-lineares podemos definir polinômios m-homogêneos. Denotamos por $\widehat{T}$ (ou por $(T)^\wedge$) o polinômio m-homogêneo associado ao operador m-linear T. O próximo resultado mostra que o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos é isomorfo algebricamente ao espaço dos operadores m-lineares simétricos.

Proposição 2.8. Sejam E, F espaços vetoriais e $m \in \mathbb{N}$. A aplicação $\Phi : L_s(^m E; F) \longrightarrow P(^m E; F)$, dada por $\Phi(T) = \widehat{T}$ é um isomorfismo algébrico.

Demonstração. Claramente Φ está bem definida. Vamos agora mostrar que Φ é bijetora. Dado $P \in P(^m E; F)$, por definição de polinômio m-homogêneo existe um operador m-linear $T \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Tx^m$, para todo $x \in E$. Agora defina o operador m-linear T_s, simétrico, por

$$T_s(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

Logo

$$T_s x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x, \ldots, x) = \frac{1}{m!} m! T x^m = Tx^m = P(x).$$

Isso mostra que Φ é sobrejetiva. Se existe um operador m-linear simétrico A_s tal que $A_s x^m = P(x) = T_s x^m$, para todo $x \in E$, então pela Fórmula de Polarização, tomando $x_0 = 0$, temos

$$A_s(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m A_s(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m)^m$$

$$= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i=\pm 1} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m T_s(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m)^m = T_s(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Logo Φ é bijetora. Por fim, sejam $T_1, T_2 \in L_s(^mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$(\lambda T_1 + T_2)^\wedge(x) = (\lambda T_1 + T_2)\, x^m = \lambda T_1 x^m + T_2 x^m = \left(\lambda \widehat{T_1} + \widehat{T_2}\right)(x),$$

o que mostra a linearidade. □

O operador T_s é chamado de *simetrização* do operador multilinear T e denotamos por $\check{P}$ (ou por $(P)^\vee$) o único operador m-linear simétrico associado a $P \in P(^mE; F)$.

Se E e F espaços normados, denotamos por $\mathcal{P}(^mE; F)$ o subespaço vetorial de $P(^mE; F)$ formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F. O próximo resultado nos apresenta várias equivalências sobre a continuidade de um polinômio m-homogêneo.

Teorema 2.9. *Sejam E e F espaços normados, $m \in \mathbb{N}$, $P \in P(^mE; F)$ e $T \in L_s(^mE; F)$, com $\widehat{T} = P$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) $T \in \mathcal{L}_s(^mE; F)$.

(b) $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$.

(c) *P é contínuo na origem.*

(d) *Existe uma constante $M > 0$, tal que $\|P(x)\| \leq M \|x\|^m$, para qualquer $x \in E$.*

(e) *P é limitado em toda bola com raio finito.*

(f) *P é limitado em alguma bola com raio finito.*

(g) *Se $B \subset E$ é limitado, então existe uma constante $M_B > 0$ tal que $\|P(x) - P(y)\| \leq M_B \|x - y\|$, para quaisquer $x, y \in B$.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 1.3.7] □

A expressão $\|P\| = \sup_{x \in B_E} \|P(x)\|$ define uma norma no espaço $\mathcal{P}(^mE; F)$. Além disso, para qualquer $x \in E$ temos $\|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m$, pois

$$\|P(x)\| = \left\| P\left(\frac{\|x\|\, x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\|^m \left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|x\|^m \|P\|.$$

O próximo resultado mostra que os espaços $\mathcal{L}_s(^mE; F)$ e $\mathcal{P}(^mE; F)$ são isomorfos topologicamente. Como consequência desse resultado mostraremos que o espaço normado $\mathcal{P}(^mE; F) \in BAN$, sempre que $F \in BAN$.

Teorema 2.10. *Sejam E e F espaços normados. A aplicação*

$$\Psi : \mathcal{L}_s(^m E; F) \longrightarrow \mathcal{P}(^m E; F),$$

definida por $\Psi(T) = \widehat{T}$ é um isomorfismo topológico e

$$\left\|\widehat{T}\right\| \leq \|T\| \leq \frac{m^m}{m!} \left\|\widehat{T}\right\|.$$

Demonstração. A aplicação Ψ é uma restrição do operador dado na Proposição 2.8, e note que a imagem de Ψ está em $\mathcal{P}(^m E; F)$ devido ao Teorema 2.9. Logo, Ψ está bem definida, é linear e injetiva. A Proposição 2.8 também garante que Ψ é sobrejetiva e dessa forma Ψ é um isomorfismo algébrico. Temos que $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$, pois para qualquer $x \in E$ teremos

$$\|\widehat{T}(x)\| = \|Tx^m\| \leq \|T\| \, \|x\|^m.$$

Isso mostra que Ψ é contínua. Seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ com $\|x\| \leq 1$. Pela Fórmula de Polarização com $x_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\|T(x_1, \ldots, x_m)\| &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\|\widehat{T}\left(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m\right)\right\| \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\|\widehat{T}\right\| \|(\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_m x_m)\|^m \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_i = \pm 1} \left\|\widehat{T}\right\| (\|x_1\| + \cdots + \|x_m\|)^m \\
&= \frac{1}{m!} \left\|\widehat{T}\right\| (\|x_1\| + \cdots + \|x_m\|)^m \leq \frac{1}{m!} \left\|\widehat{T}\right\| m^m.
\end{aligned}$$

Logo, $\|T\| \leq \frac{m^m}{m!} \left\|\widehat{T}\right\|$ e assim Ψ^{-1} também é contínua. □

Corolário 2.11. Sejam $m \in \mathbb{N}$, E um espaço normado e $F \in BAN$. Então $\mathcal{P}(^m E; F) \in BAN$.

Demonstração. Pelo teorema anterior, temos que $\mathcal{L}_s(^m E; F)$ é isomorfo a $\mathcal{P}(^m E; F)$, então basta mostrar que $\mathcal{L}_s(^m E; F)$ é Banach. Para isso, vamos mostrar que $\mathcal{L}_s(^m E; F)$ é fechado, uma vez que $\mathcal{L}_s(^m E; F) \subset \mathcal{L}(^m E; F) \in BAN$. Se $T \in \overline{\mathcal{L}_s(^m E; F)}$, então existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_s(^m E; F)$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = T$. Logo

$$\begin{aligned}
\|T_n(x_1, \ldots, x_m) - T(x_1, \ldots, x_m)\| &= \|(T_n - T)(x_1, \ldots, x_m)\| \\
&\leq \|T_n - T\| \, \|x_1\| \cdots \|x_m\|,
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_m \in E$. Fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima, temos que

$\lim_{n\to\infty} T_n(x_1,\ldots,x_m) = T(x_1,\ldots,x_m)$ para quaisquer $x_1,\ldots,x_m \in E$. Assim, como $T_n \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então para qualquer permutação $\sigma \in S_m$, temos

$$T_n(x_1,\ldots,x_m) = T_n(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}),$$

para qualquer $x_1,\ldots,x_m \in E$. Logo,

$$T(x_1\ldots,x_m) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_1,\ldots,x_m) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) = T(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})$$

e portanto $T \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$. □

Finalizamos esta seção com uma versão do Teorema de Banach-Steinhaus para o caso dos polinômios homogêneos, no qual sua demonstração pode ser encontrada em [13, Teorema 1.3.12].

Teorema 2.12 (de Banach-Steinhaus para Polinômios Homogêneos)**.** *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $\{P_i\}_{i\in I}$ é uma família de polinômios m-homogêneos contínuos de E em F. Se*

$$\sup_{i\in I}\|P_i(x)\| < \infty, \text{ para todo } x \in E,$$

então

$$\sup_{i\in I}\|P_i\| < \infty.$$

2.3 Ideais de Operadores Multilineares

A teoria de ideais de operadores lineares foi sistematizada por A. Pietsch no livro [18], que exibe o conceito de ideal de operadores lineares, desenvolve a teoria geral, investiga alguns casos particulares e exibe varias aplicações. Posteriormente, o próprio A. Pietsch, em seu artigo [19], apresenta o conceito de ideal para operadores m-lineares, também conhecido como multi-ideal. Além disso, com algumas adaptações, pode-se definir os ideais de polinômios homogêneos, como veremos na próxima seção.

Apesar de historicamente a teoria de ideais de operadores lineares precederem a teoria de ideais de operadores multilineares, trabalharemos diretamente o caso multilinear. Dessa forma, a teoria de ideal de operadores lineares ficará como caso particular. Mais precisamente, em toda esta seção quando fixado $m = 1$ recupera-se a teoria de ideal de operadores lineares. Começamos definindo os operadores de tipo finito.

Definição 2.4. Sejam $E_1,\ldots,E_m$ espaços normados. Dizemos que o operador $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$ é de *tipo finito* se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_i^j \in E_j'$ e $b_i \in F$ com $i = 1,\ldots,n$

e $j = 1, \dots, m$, tais que

$$T(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1(x_1) \cdots \varphi_i^m(x_m) b_i. \tag{2.1}$$

Quando $m = 1$, podemos também dizer que T é de *posto finito.*

O conjunto formado pelos operadores m-linear de tipo finito de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F será denotado por $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$, que é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$. Quando $E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\mathcal{L}_f({}^m E; F)$.

Definição 2.5. Um *ideal de operadores multilineares*, ou simplesmente *multi-ideal*, é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe de todos os operadores multilineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach $E_1, \dots, E_m, F$, as componentes $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F) = \mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F) \bigcap \mathcal{M}$ satisfazem:

(a) $\mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ que contêm os operadores m-lineares de tipo finito.

(b) A propriedade de multi-ideal: se $T \in \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j, E_j)$ para $j = 1, \dots, m$ e $v \in \mathcal{L}(F, H)$, como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[d, "u_1"] & \times & G_2 \arrow[d, "u_2"] & \times & \cdots & \times & G_m \arrow[d, "u_m"] \arrow[rrd, "v\circ T\circ(u_1,\dots,u_m)"] & & \\
E_1 & \times & E_2 & \times & \cdots & \times & E_m \arrow[r, "T"] & F \arrow[r, "v"] & H,
\end{tikzcd}$$

então a composição $v \circ T \circ (u_1, ..., u_m) \in \mathcal{M}(G_1, ..., G_m; H)$.

Para cada m fixo,

$$\mathcal{M}_m = \bigcup_{E_1,\dots,E_m \in BAN} \mathcal{M}(E_1, \dots, E_m; F)$$

é chamado de ideal de operadores m-lineares.

Vejamos um exemplo de um ideal de operadores multilineares.

Exemplo 2.3. O espaço vetorial $\mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$ satisfaz o item (a) da definição anterior, para quaisquer $E_1, \dots, E_m, F \in BAN$. Vamos verificar que também satisfaz a propriedade de multi-ideal. Sejam $G_1, \dots, G_m, H \in BAN$, $T \in \mathcal{L}_f(E_1, \dots, E_m; F)$, $u_j \in \mathcal{L}(G_j; E_j)$ com $j = 1, \dots, m$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Tomando T como em (2.1), temos que

$$v \circ T \circ (u_1, \dots, u_m)(x_1, \dots, x_m) = v \circ T(u_1(x_1), \dots, u_m(x_m))$$

$$\begin{aligned}
&= v\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i^1(u_1(x_1))\cdots\varphi_i^m(u_m(x_m))b_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n} v\left(\varphi_i^1(u_1(x_1))\cdots\varphi_i^m(u_m(x_m))b_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi_i^1(u_1(x_1))\cdots\varphi_i^m(u_m(x_m))v(b_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_i^1\circ u_1\right)(x_1)\cdots\left(\varphi_i^m\circ u_m\right)(x_m)v(b_i),
\end{aligned}$$

com $\varphi_i^j\circ u_j\in G_j'$ e $v(b_i)\in H$. Portanto $v\circ T\circ(u_1,\ldots,u_m)\in\mathcal{L}_f(G_1,\ldots,G_m;H)$.

Definição 2.6. Um *ideal normado de operadores multilineares* $(\mathcal{M},\|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal de operadores multilineares munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}\longrightarrow\mathbb{R}$, tal que

(a) Para todo $m\in\mathbb{N}$, a função $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ restrita a $\mathcal{M}(E_1,\ldots,E_m;F)$ é uma norma, para quaisquer $E_1,\ldots,E_m,F\in BAN$.

(b) $\|I_m\|_{\mathcal{M}}=1$, onde $I_m:\mathbb{K}^m\longrightarrow\mathbb{K}$ é dada por $I_m(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=\lambda_1\cdots\lambda_m$, para todo $m\in\mathbb{N}$.

(c) Se $T\in\mathcal{M}(E_1,\ldots,E_m;F)$, $u_j\in\mathcal{L}(G_j,E_j)$, para $j=1,\ldots,m$, e $v\in\mathcal{L}(F;H)$, então
$$\|vT(u_1,\ldots,u_m)\|_{\mathcal{M}}\leq\|v\|\,\|T\|_{\mathcal{M}}\,\|u_1\|\cdots\|u_m\|.$$

Quando as componentes $\mathcal{M}(E_1,\ldots,E_m;F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, dizemos que $\mathcal{M}$ é um *ideal completo (Banach) de operadores multilineares*. De maneira análoga, quando $m\in\mathbb{N}$ é fixo, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{M}_m$ é um *ideal completo (Banach) de operadores m-lineares*. Vejamos um exemplo de um ideal de Banach de operadores multilineares.

Exemplo 2.4. Denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1,\ldots,E_m;F)$ o fecho de $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_m;F)$ em $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$. Definimos

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}}=\bigcup_{\substack{m\in\mathbb{N}\\ E_1,\ldots,E_m,F\in BAN}}\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1,\ldots,E_m;F),$$

e se $T\in\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, dizemos que T é aproximável. Vejamos que $(\mathcal{M}_{\mathcal{A}},\|\cdot\|)$ é um ideal de Banach de operadores multilineares. De fato, se $T\in\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1,\ldots,E_m;F)$, $u_j\in\mathcal{L}(G_j;E_j)$, com $j=1,\ldots,m$, e $v\in\mathcal{L}(F;H)$, então existe uma sequência $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{L}_f(E_1,\ldots,E_m;F)$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$ e $vT_n(u_1,\ldots,u_m)\in\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(G_1,\ldots,G_m;H)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} (vT_n(u_1, \ldots, u_m)) = v \left(\lim_{n\to\infty} T_n(u_1, \ldots, u_m) \right) = vT(u_1, \ldots, u_m),$$

e portanto $vT(u_1, \ldots, u_m) \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}(G_1, \ldots, G_m; H)$. É claro que $\|I_m\| = 1$ e temos que

$$\|vT(u_1, \ldots, u_m)\| \leq \|v\| \|T(u_1, \ldots, u_m)\| \leq \|v\| \|T\| \|u_1\| \cdots \|u_m\| .$$

Todas as componentes $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(E_1, \ldots, E_m; F)$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ são espaços de Banach, pois são subespaços fechados dos espaços de Banach $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Proposição 2.13. Sejam $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ um ideal normado de operadores multilineares e $E_1, \ldots, E_m, F \in BAN$. Então $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{M}}$, para qualquer $T \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_m; F), \varphi \in F'$ e $x_j \in E_j$ fixos, com $j = 1, \ldots, m$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, defina as funções $R_j : \mathbb{K} \to E_j$ dadas por $R_j(\lambda) = \lambda x_j$. Note que $R_j \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, E_j)$ e $\|R_j\| = \|x_j\|$, para cada $j = 1, \ldots, m$. Logo,

$$\begin{aligned} \varphi \circ T \circ (R_1, \ldots, R_m)(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) &= \varphi \circ T(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_m x_m) \\ &= \lambda_1 \cdots \lambda_m (\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

É fácil notar que $\varphi \circ T \circ (R_1, \ldots, R_m) = (\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m) I_m$. Assim

$$\begin{aligned} |(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m)| &= |(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m)| \|I_m\|_{\mathcal{M}} = \|(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m) I_m\|_{\mathcal{M}} \\ &= \|\varphi \circ T \circ (R_1, \ldots, R_m)\|_{\mathcal{M}} \leq \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|R_1\| \cdots \|R_m\| . \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, segue que

$$\begin{aligned} \|T(x_1, \ldots, x_m)\| &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} |(\varphi \circ T)(x_1, \ldots, x_m)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \|T\|_{\mathcal{M}} \|R_1\| \cdots \|R_m\| \\ &= \|T\|_{\mathcal{M}} \|x_1\| \cdots \|x_m\| . \end{aligned}$$

Portanto $\|T\| \leq \|T\|_{\mathcal{M}}$ □

Se $\varphi_j \in E_j'$, $j = 1, \ldots, m$ e $y \in F$, para quaisquer $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ denotamos $(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m y)(x_1, \ldots, x_m)$ por $\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m) y$.

Proposição 2.14. Seja $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares. Para $\varphi_j \in E_j'$, $y \in F$ e $T = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m y \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ temos

$$\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\| = \|y\| \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m.\| .$$

Demonstração. Como $T(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m)y$, temos

$$\|T(x_1, \ldots, x_m)\| = \|\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_m(x_m)y\|$$

e daí $\|T\| = \|y\| \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\|$. Note que $T = t \circ I_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, com $t \in \mathcal{L}(\mathbb{K}; F)$, dada por $t(\lambda) = \lambda y$ e $\|t\| = \|y\|$. Então, $T \in \mathcal{M}$ pois $I_m \in \mathcal{M}$ e

$$\|T\|_{\mathcal{M}} \leq \|t\| \|I_m\|_{\mathcal{M}} \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| = \|y\| \|\varphi_1\| \cdots \|\varphi_m\| = \|T\|.$$

Pela proposição anterior, temos $\|T\|_{\mathcal{M}} = \|T\|$. □

2.4 Ideais de Polinômios

O estudo de ideais de polinômios pode ser visto como uma adaptação dos conceitos de ideais de operadores multilineares, vistos na seção anterior. Começamos esta seção definindo o conceito de polinômio m-homogêneo de tipo finito.

Definição 2.7. Sejam E, F espaços normados. Um polinômio m-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é dito ser de *tipo finito* se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$, $j = 1, \ldots, n$, tais que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j(x))^m b_j,$$

para todo $x \in E$.

O subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$ formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos de tipo finito de E em F será denotado por $\mathcal{P}_f(^mE; F)$.

Definição 2.8. Um *ideal de polinômios homogêneos*, ou simplesmente um *ideal de polinômios*, é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$ e quaisquer espaços de Banach E e F, as componentes $\mathcal{Q}(^mE; F) = \mathcal{P}(^mE; F) \bigcap \mathcal{Q}$ satisfazem:

(a) $\mathcal{Q}(^mE; F)$ é um espaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE; F)$ que contém os polinômios m-homogêneos de tipo finito.

(b) A propriedade de ideal: se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, então $vPu \in \mathcal{Q}(^mG; H)$.

Se $m \in \mathbb{N}$ for fixado,

$$\mathcal{Q}_m := \bigcup_{E,F \in BAN} \mathcal{Q}(^mE; F)$$

é chamado de ideal de polinômios m-homogêneos.

Definição 2.9. Um *ideal normado de polinômios* $\left(\mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}}\right)$ é um ideal de polinômios munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

(a) Para todo $m \in \mathbb{N}$, a função $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$ restrita a $\mathcal{Q}(^mE; F)$ é uma norma, para quaisquer espaços de Banach E e F.

(b) $\|P_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{Q}} = 1$, onde $P_{\mathbb{K}} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ é dada por $P_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda^m$.

(c) Se $u \in \mathcal{L}(G; E)$, $P \in \mathcal{Q}(^mE; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$, então $\|vPu\|_{\mathcal{Q}} \leq \|v\| \|P\|_{\mathcal{Q}} \|u\|^m$.

Quando as componentes $\mathcal{Q}(^mE; F)$ são completas com respeito a $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$, dizemos que $\mathcal{Q}$ é um *ideal completo (Banach) de polinômios*. De maneira análoga, quando $m \in \mathbb{N}$ é fixo, sob as condições acima, dizemos que $\mathcal{Q}_m$ é um *ideal completo (Banach) de polinômios m-homogêneos*.

Vejamos um exemplo de um ideal de Banach de polinômios. Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathcal{P}^m$ a classe de todos os polinômios m-homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Além disso, se $\mathcal{M}$ um ideal normado de operadores multilineares, definimos

$$\mathcal{P}_{\mathcal{M}} := \left\{ P \in \mathcal{P}^m : \check{P} \in \mathcal{M}, m \in \mathbb{N} \right\},$$

que é uma subclasse de $\mathcal{P}^m$ e também definimos a função $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}}$.

Exemplo 2.5. Vejamos que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, como definido acima, é um ideal de Banach de polinômios. De fato, sejam $m \in \mathbb{N}$, E, F espaços de Banach, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, $\check{P_1}, \check{P_2} \in \mathcal{M}(^mE; F)$ e como $\mathcal{M}(^mE; F)$ é um espaço vetorial, temos que $\check{P_1} + \lambda \check{P_2} \in \mathcal{M}(^mE; F)$. Daí

$$(P_1 + \lambda P_2)^{\vee} = \check{P_1} + \lambda \check{P_2} \in \mathcal{M}(^mE; F)$$

e portanto $P_1 + \lambda P_2 \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE; F)$. Se $P \in \mathcal{P}_f(^mE; F)$, claramente $\check{P} \in \mathcal{L}_f(^mE; F)$ e então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE; F)$. Vamos agora verificar a propriedade de ideal. Sejam $u \in \mathcal{L}(G; E), P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE; F)$ e $v \in \mathcal{L}(F; H)$. Logo, para cada $x \in G$, temos

$$v\check{P}(u, \ldots, u)(x, \ldots, x) = v\check{P}(u(x), \ldots, u(x)) = vPu(x) = (vPu)^{\vee}(x, \ldots, x).$$

Segue que

$$(vPu)^{\vee} = v\check{P}(u, \ldots, u) \in \mathcal{M}(^mE; F) \tag{2.2}$$

e, portanto, $vPu \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mG; H)$.

Note que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$ restrita a $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE; F)$ é uma norma. De fato,

(i) Seja $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$. Uma vez que $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|\check{P}\|_{\mathcal{M}}$, temos que $\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \geq 0$. Além disso, temos que

$$\|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = 0 \Leftrightarrow \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = 0 \Leftrightarrow \check{P} = 0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} P = 0,$$

onde a implicação $\Leftarrow$ em $(*)$ segue da Proposição 2.10.

(ii) Se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\|\lambda P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(\lambda P)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} = \|\lambda \check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} = |\lambda| \, \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

(iii) Se $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$, então

$$\|P+Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(P+Q)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} = \|\check{P}+\check{Q}\|_{\mathcal{M}} \leq \|\check{P}\|_{\mathcal{M}} + \|\check{Q}\|_{\mathcal{M}} = \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} + \|Q\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}.$$

Seja $P_{\mathbb{K}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$. Note que $\widecheck{P_{\mathbb{K}}} = I_m$ e dessa forma, $\|P_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|I_m\|_{\mathcal{M}} = 1$. Sejam $v \in \mathcal{L}(F;H)$, $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$ e $u \in \mathcal{L}(G;E)$. Da expressão (2.2) temos que

$$\|vPu\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} = \|(vPu)^{\vee}\|_{\mathcal{M}} = \left\|v\check{P}(u,\ldots,u)\right\|_{\mathcal{M}} \leq \|v\| \left\|\check{P}\right\|_{\mathcal{M}} \|u\|^m = \|v\| \, \|P\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}} \|u\|^m.$$

Mostraremos agora que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}$. Uma vez que $\mathcal{M}$ é um ideal de Banach e como a aplicação

$$^{\vee} : \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F) \longrightarrow \mathcal{M}(^mE;F),$$

dada por $^{\vee}(P) = \check{P}$, é um isomorfismo sobre a imagem, para mostrar que $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$ é Banach basta verificar que $^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)\right)$ é fechado em $\mathcal{M}(^mE;F)$. De fato, seja $(\widecheck{P_n})_{n=1}^{\infty}$ em $^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)\right)$ tal que $\widecheck{P_n} \to T \in \mathcal{M}(^mE;F)$ na norma de $\mathcal{M}$, ou seja, $\left\|\widecheck{P_n} - T\right\|_{\mathcal{M}} \to 0$. Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, temos $\left\|\widecheck{P_n} - T\right\| \to 0$ e como $\mathcal{L}_s(^mE;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(^mE;F)$, segue que $T \in \mathcal{L}_s(^mE;F)$. Logo $\widehat{T} \in \mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)$, pois $\left(\widehat{T}\right)^{\vee} = T \in \mathcal{M}(^mE;F)$. Contudo, $T = {}^{\vee}\left(\widehat{T}\right) \in {}^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)\right)$ e disso segue que $^{\vee}\left(\mathcal{P}_{\mathcal{M}}(^mE;F)\right)$ é fechado. Portanto $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é um ideal de Banach de polinômios.

A classe $\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ é chamada de *ideal de polinômios gerado pelo ideal de operadores multilineares* $\mathcal{M}$.

2.5 Operadores Absolutamente Somantes

A teoria de operadores absolutamente somantes teve início com Grothendieck na década de 50 através do trabalho [20]. Entretanto, a noção utilizada por Grothendieck era muito complicada e suas ideais ficaram algum tempo inexploradas. Apenas na década de 60 essa teoria foi verdadeiramente compreendida por meio das contribuições de J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, A. Pietsch, dentre outros.

Além disso, no trabalho de A. Pietsch [19], os operadores absolutamente somantes começaram a ser generalizados para o contexto não linear. Em particular, para operadores multilineares e polinômios homogêneos.

Como motivação, começaremos esta seção tratando do caso linear.

Se $T \in \mathcal{L}(E;F)$, com $E, F \in BAN$, e $1 \leq q \leq p < \infty$, os operadores $\widetilde{T}^s : \ell_q(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ e $\widetilde{T}^w : \ell_q^w(E) \longrightarrow \ell_p^w(F)$, induzidos por T pela relação $(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, sempre serão operadores lineares contínuos. De fato, para qualquer $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{T}^s((x_n)_{n=1}^{\infty}) \right\|_p &= \|(T(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|T\|^p \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\| \, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \|T\| \, \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_q . \end{aligned} \tag{2.3}$$

Assim, o operador $\widetilde{T}^s$ está bem definido, é claramente linear e por (2.3) também é contínuo. De modo similar mostra-se que $\widetilde{T}^w$ está bem definido, é linear e contínuo.

Consideremos agora E um espaço de Banach de dimensão infinita e $id_E : E \longrightarrow E$ o operador identidade. O Teorema de Dvoretsky-Rogers (versão fraca), garante que o operador induzido $\widetilde{id_E} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p(E)$, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \mapsto (id_E(x_n))_{n=1}^{\infty}$ nunca está bem definido, para qualquer $1 \leq p < \infty$.

O caso particularmente interessante ocorre quando dado $T \in \mathcal{L}(E;F)$, com $E, F \in BAN$, e $1 \leq q \leq p < \infty$, o operador induzido por T de $\ell_q^w(E)$ em $\ell_p(F)$ está bem definido. Neste caso, temos a seguinte definição.

Definição 2.10. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que T é *absolutamente (p,q)-somante (ou simplesmente (p,q)-somante)*, se o operador induzido

$$\widetilde{T} : \ell_q^w(E) \longrightarrow \ell_p(F),$$

dado por $\widetilde{T}((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ está bem definido. Neste caso, $\widetilde{T}$ será claramente linear. De maneira equivalente, diz-se que T é (p,q)-somante quando $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \in$

$\ell_p(F)$ sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

O conceito acima nos faz dizer que os operadores lineares absolutamente somantes são uma classe que melhoram a convergência de séries.

Vejamos agora a definição dos operadores multilineares absolutamente somantes. A teoria linear é recuperada fazendo $m = 1$.

Definição 2.11. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq q, p < \infty$ com $p \geq \dfrac{q}{m}$ e $E_1, \ldots, E_m, F \in BAN$. Um operador multilinear contínuo $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dito ser *absolutamente $(p;q)$-somante* ou simplesmente *$(p;q)$-somante*, quando

$$\left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$$

sempre que $\left(x_j^s\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_s)$, $s = 1, \ldots, m$. Quando $q = p$ o operador T é simplesmente chamado de *absolutamente p-somante.*

Denotamos por $\prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ o espaço vetorial formado pelos operadores multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F que são $(p;q)$-somantes. Quando $q = p$ escrevemos $\prod_p(E_1, \ldots, E_m; F)$ e quando $E_1 = \cdots = E_m = E$ escrevemos $\prod_{(p;q)}(^mE; F)$.

Se $p < \dfrac{q}{m}$ na definição acima, então o único elemento de $\prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é o operador m-linear nulo. De fato, se $T \in \prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e $T \neq 0$, então existe $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \cdots \times E_m$ com $T(x_1, \ldots, x_m) \neq 0$. Tomando $\varphi_k \in E_k'$, com $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi_k \left(\frac{x_k}{j^{\frac{1}{mp}}} \right) \right|^q = |\varphi_k(x_k)|^q \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{q}{mp}}} \right) < \infty,$$

sendo a última desigualdade devido a $mp < q$. Segue que $\left(\dfrac{x_k}{j^{\frac{1}{mp}}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E_k)$, para todo $k = 1, 2, \ldots, m$. Em contrapartida,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| T \left(\frac{x_1}{j^{\frac{1}{mp}}}, \ldots, \frac{x_m}{j^{\frac{1}{mp}}} \right) \right\|^p = \|T(x_1, \ldots, x_m)\|^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \right) = \infty,$$

e isso contradiz o fato de T ser (p,q)-somante.

O objetivo agora é caracterizar os operadores multilineares (p,q)-somantes. Essa caracterização, além de simplificar a identificação desses operadores, nos permitirá definir uma norma para o espaço vetorial $\prod_{(p,q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$.

Para isso, faremos uso do trabalho feito por G. Botelho e J. R. Campos em [22]. O resultado de interesse para nosso estudo, contido no trabalho citado acima, descreve como a transformação de sequências vetoriais por operadores multilineares trabalha.

Para tanto, foi definido um ambiente abstrato baseado em Classes de Sequências, que englobam vários espaços de sequências. Em particular, os espaços $\ell_p(E)$ e $\ell_p^w(E)$ com $1 \leq p < \infty$, que fazem parte do nosso trabalho. A seguir veremos a definição dos principais conceitos desse ambiente abstrato.

Definição 2.12. Uma *classe de sequências* X é uma aplicação que, a cada espaço de Banach E, faz corresponder um espaço de Banach $X(E) \subseteq E^{\mathbb{N}}$ tal que

$$c_{00}(E) \subseteq X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E) \text{ e } \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

A classe de sequência X é dita ser *finitamente determinada* se para cada sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^{\mathbb{N}}$, tem-se $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se, $\sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)} < \infty$. Neste caso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{X(E)} = \sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{X(E)}.$$

Denotamos a classe de sequência $E \mapsto X(E)$ por $X(\cdot)$ ou, não havendo perigo de ambiguidade, denotaremos simplesmente por X.

De acordo com o que já fizemos até aqui, não é difícil ver que $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são classes de sequências, com $1 \leq p < \infty$. Veremos agora que essas classes são finitamente determinadas. De fato, começamos mostrando que a classe de sequências $\ell_p(\cdot)$ é finitamente determinada. Para isso, basta observar que se $(x_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência em E, então

$$\begin{aligned}
\sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_p(E)} &= \sup_k \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_p.
\end{aligned}$$

Vamos agora verificar que a classe de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ é finitamente determinada. De fato, basta observar que se $(x_j)_{j=1}^\infty$ é uma sequência em E, então

$$\begin{aligned}
\sup_k \left\|(x_j)_{j=1}^k\right\|_{\ell_p^w(E)} &= \sup_k \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sup_k \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

A proposição seguinte é um dos primeiros resultados obtidos no trabalho [22] mencionado acima.

Proposição 2.15 ([22], Proposition 2.4)**.** Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m, Y$ classes de sequências. As seguintes condições são equivalentes para um dado operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$:

(a) $\left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ sempre que $(x_j^i)_{j=1}^{\infty} \in X_i(E_i)$, com $i = 1, \ldots, m$.

(b) O operador induzido $\widetilde{T} : X_1(E_1) \times \cdots \times X_m(E_m) \longrightarrow Y(F)$, dado por

$$\widetilde{T}\left((x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (x_j^m)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^{\infty},$$

é um operador bem definido, m-linear e contínuo.

As condições acima implicam na condição **(c)** abaixo, e elas são todas equivalentes se as classes de sequências $X_1, \ldots, X_m$ e Y são finitamente determinadas.

(c) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\|\left(T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right)_{j=1}^{k}\right\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{i=1}^{m} \left\|(x_j^i)_{j=1}^{k}\right\|_{X_i(E_i)}, \tag{2.4}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e toda sequência finita $x_j^i \in E_i$, $j = 1, \ldots, k$ e $i = 1, \ldots, m$. Nesse caso,

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \inf\left\{C : (2.4) \text{ é válida}\right\}.$$

O próximo resultado caracteriza por uma desigualdade os operadores multilineares $(p;q)$-somantes.

Proposição 2.16. Sejam $m \in \mathbb{N}, 1 \leq q, p < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F \in BAN$. Então $T \in \prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left\|T(x_j^1, \ldots, x_j^m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{s=1}^{m} \left\|\left(x_j^s\right)_{j=1}^{n}\right\|_{w,q}, \tag{2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_1^i, \ldots, x_n^i \in E_i$ com $i = 1, \ldots, m$. Além disso, o ínfimo dos C tais que a desigualdade (2.5) é válida, define uma norma em $\prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ que será denotada por $\pi_{(p;q)}(T)$. Neste caso,

$$\pi_{(p;q)}(T) = \left\|\widetilde{T}\right\|.$$

Demonstração. Como $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são classes de sequências finitamente determinadas, para qualquer $1 \leq p < \infty$, a Proposição 2.15 garante à equivalência e que

$\pi_{(p;q)}(T) = \left\| \widetilde{T} \right\|$. Falta apenas mostrar que $\pi_{(p;q)}(\cdot)$ define uma norma. De fato, $\pi_{(p;q)}(T) \geq 0$ para qualquer $T \in \prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e

$$\pi_{(p;q)}(T) = 0 \Leftrightarrow \left\| \widetilde{T} \right\| = 0 \Leftrightarrow \widetilde{T} = 0 \Leftrightarrow T = 0.$$

Para qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\pi_{(p;q)}(\lambda T) = \left\| \widetilde{\lambda T} \right\| = \left\| \lambda \widetilde{T} \right\| = |\lambda| \left\| \widetilde{T} \right\| = |\lambda| \pi_{(p;q)}(T).$$

Se $T_1, T_2 \in \prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$, então

$$\begin{aligned} \pi_{(p;q)}(T_1 + T_2) = \left\| \widetilde{T_1 + T_2} \right\| &= \left\| \widetilde{T}_1 + \widetilde{T}_2 \right\| \\ &\leq \left\| \widetilde{T}_1 \right\| + \left\| \widetilde{T}_2 \right\| = \pi_{(p;q)}(T_1) + \pi_{(p;q)}(T_2). \end{aligned}$$

Logo, $\pi_{(p;q)}(\cdot)$ define uma norma em $\prod_{(p;q)}(E_1, \ldots, E_m; F)$. $\square$

O seguinte Teorema de Inclusão para os operadores lineares, cuja demonstração omitiremos, será de grande utilidade no próximo capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em [1, Theorem 10.4].

Teorema 2.17 (Teorema de Inclusão)**.** *Sejam E e F espaços de Banach. Suponha que $1 \leq q_j \leq p_j < \infty$ $(j = 1, 2)$ satisfazem*

$$\begin{aligned} q_1 &\leq q_2, \\ p_1 &\leq p_2, \\ \tfrac{1}{q_1} - \tfrac{1}{p_1} &\leq \tfrac{1}{q_2} - \tfrac{1}{p_2} \quad . \end{aligned}$$

Então, $\prod_{p_1,q_1}(E; F) \subset \prod_{p_2,q_2}(E; F)$ e para cada $T \in \prod_{p_1,q_1}(E; F)$, temos $\pi_{p_2,q_2}(T) \leq \pi_{p_1,q_1}(T)$.

Vejamos um resultado de coincidência para operadores lineares absolutamente somantes.

Teorema 2.18 ([1], Theorem 11.14)**.** *Suponha que F tem cotipo finito q e que K é um espaço de Hausdorff compacto. Então*

(a) *Se $q = 2$, então $\mathcal{L}(C(K); F) = \prod_2(C(K); F)$.*

(b) *Se $2 < q < \infty$, então $\mathcal{L}(C(K); F) = \prod_{(q,p)}(C(K); F)$, para todo $p < q$.*

Uma vez definido e caracterizado a classe dos operadores multilineares absolutamente somantes, a definição de polinômios homogêneos absolutamente somantes surge de forma natural.

Definição 2.13. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q < \infty$, com $p \geq \dfrac{q}{m}$ e $E, F \in BAN$. Um polinômio m-homogêneo contínuo $P : E \longrightarrow F$ é *absolutamente (p;q)-somante (ou (p;q)-somante)* quando

$$(P(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F),$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

Denotamos por $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios m-homogêneos de E em F que são $(p;q)$-somantes.

Como já sabemos, o conceito de polinômios m-homogêneos entre espaços de Banach está fortemente relacionado ao conceito de operadores m-lineares entre espaços de Banach. Mais adiante, veremos que esse fato também se verifica para os operadores e polinômios absolutamente somantes. No que se segue, omitiremos algumas demonstrações de resultados para o caso polinomial uma vez que esses resultados decorrem do caso multilinear.

Se $p < \dfrac{q}{m}$ na definição acima, então o único elemento de $\mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$ é o polinômio m-homogêneo nulo. De fato, se $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$ tal que $P \neq 0$, então existe $x \in E$ com $P(x) \neq 0$. Neste caso, dado $\varphi \in E'$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi\left(\frac{x}{j^{\frac{1}{mp}}}\right) \right|^q = |\varphi(x)|^q \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\frac{q}{mp}}} \right) < \infty,$$

sendo a última desigualdade devido a $mp < q$. Assim, temos que $\left(\dfrac{x}{j^{\frac{1}{mp}}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.
Entretanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| P\left(\frac{x}{j^{\frac{1}{mp}}}\right) \right\|^p = \|P(x)\|^p \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \right) = \infty,$$

e isso contradiz o fato de P ser $(p;q)$-somante.

O próximo resultado mostra uma relação entre os polinômios absolutamente somantes e os operadores multilineares absolutamente somantes, por meio de uma caracterização.

Proposição 2.19. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p, q < \infty$ e $E, F \in BAN$. Então, $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in \prod_{(p;q)}(^mE;F)$.

Demonstração. Suponha que $\check{P} \in \prod_{(p;q)}(^mE;F)$ e seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$(P(x_j))_{j=1}^{\infty} = (\check{P}x_j^m)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Logo, $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$.

Reciprocamente, suponha que $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$. Sejam $\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, $k = 1,\ldots,m$. Pela Fórmula de Polarização, para cada $j \in \mathbb{N}$ e tomando $x_0 = 0$, temos

$$\begin{aligned}\check{P}(x_j^1,\ldots,x_j^m) &= \frac{1}{m!2^m}\sum_{\epsilon_i \pm 1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m\check{P}(\epsilon_1 x_j^1+\cdots+\epsilon_m x_j^m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m}\sum_{\epsilon_i \pm 1}\epsilon_1\cdots\epsilon_m P(\epsilon_1 x_j^1+\cdots+\epsilon_m x_j^m).\end{aligned}$$

Como $\ell_p(F)$ é um espaço vetorial, segue que $\check{P} \in \prod_{(p;q)}(^mE;F)$. □

Assim como para operadores multilineares absolutamente somantes, os polinômios absolutamente somantes dispõem de uma caracterização através de uma desigualdade. Essa caracterização, além de simplificar a identificação desses polinômios, nos permitirá definir uma norma para o espaço vetorial $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$.

Proposição 2.20. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p,q < \infty$ e $E,F \in BAN$. Então, $P \in \mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$ se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m, \tag{2.6}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, com $j = 1,\ldots,n$. Além disso, o ínfimo dos C tais que a desigualdade (2.6) é válida, define uma norma em $\mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$ que será denotada por $\|P\|_{\mathcal{P}(p;q)}$.

Demonstração. Se $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^mE;F)$, então pela Proposição 2.19, temos que $\check{P} \in \prod_{(p;q)}(^mE;F)$. Logo pela Proposição 2.16 existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\check{P}(x_j^1,\ldots,x_j^m)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\prod_{s=1}^{m}\left\|(x_j^s)_{j=1}^n\right\|_{w,q},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $(x_j^s)_{j=1}^n \in \ell_q^w(E)$, com $s = 1,\ldots,m$. Em particular, para todo $x_j \in E$, com $j = 1,\ldots,n$, e todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\check{P}x_j^m\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m.$$

Reciprocamente, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, temos que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n\left(\sum_{j=1}^{n}\|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_n C\left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m \tag{2.7}$$

$$= C \sup_n \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{m}{q}} = C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_n \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{m}{q}}$$

$$= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{m}{q}} = C \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q}^{m}.$$

Isso mostra que $P \in \mathcal{P}_{(p;q)}(^m E; F)$. Falta mostra que $\|\cdot\|_{\mathcal{P}(p;q)}$ define uma norma, mas isso segue do caso multilinear tratado na Proposição 2.16. □

Antes de mostrarmos que os operadores e polinômios absolutamente somantes possuem uma estrutura de ideal, vejamos um resultado de coincidência para polinômios absolutamente somantes.

Teorema 2.21 ([33])**.** *Seja $m \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{P}(^m \ell_1; \ell_2) = \mathcal{P}_{(\frac{2}{m+1},1)}(^m \ell_1, \ell_2)$.*

O objetivo agora é mostrar que a classe $\prod_{(p;q)}$ dos operadores multilineares absolutamente somantes munido da norma $\pi_{(p;q)}(\cdot)$ é um ideal de Banach.

Para isso, faremos uso novamente do trabalho feito por G. Botelho e J. R. Campos em [22]. O resultado de interesse para nosso objetivo, contido no trabalho citado acima, caracteriza os ideais de operadores multilineares por meio de transformações entre espaços de sequências. Para tanto, precisaremos de mais algumas definições do ambiente abstrato do citado trabalho.

Definição 2.14. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m, Y$ classes de sequências. Um operador multilinear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é $(X_1, \ldots, X_m, Y)$-somante se as condições equivalentes da Proposição 2.15 verificam-se para T, dentre elas, $(T(x_j^1, \ldots, x_j^m))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ sempre que $(x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in X_k(E_k), k = 1, \ldots, m$. Denotamos $T \in \mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m;Y}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e definimos

$$\|T\|_{X_1,\ldots,X_m;Y} = \left\| \widetilde{T} \right\|_{\mathcal{L}(X_1(E_1),\ldots,X_m(E_m);Y(F))}.$$

Definição 2.15. Dizemos que uma classe de sequências X é *linearmente estável* se para quaisquer espaços de Banach E, F e para qualquer $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é verdade que

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$$

e $\left\| \widetilde{T} : X(E) \longrightarrow X(F) \right\| = \|T\|$.

Vejamos que as classes de sequências $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são linearmente estáveis, para todo $1 \leq p < \infty$. De fato, vimos no começo desta seção que se $T \in \mathcal{L}(E; F)$ com $E, F \in BAN$, então os operadores induzidos $\widetilde{T}^s : \ell_p(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ e $\widetilde{T}^w : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p^w(F)$ são sempre lineares e contínuos. Assim, para quaisquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, temos

$$\left\|\widetilde{T}^s((x_j)_{j=1}^\infty)\right\|_p \leq \|T\| \left\|(x_j)_{j=1}^\infty\right\|_p \quad \text{e} \quad \left\|\widetilde{T}^w((y_j)_{j=1}^\infty)\right\|_{w,p} \leq \|T\| \left\|(y_j)_{j=1}^\infty\right\|_{w,p} \tag{2.8}$$

e, em ambos os casos, obtemos uma das desigualdades da norma.

Note que, dado $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e sendo $x \in B_E$, temos $(x, 0, 0, \ldots) \in B_{\ell_p(E)}$ e portanto

$$\begin{aligned}\left\|\widetilde{T}^s\right\|_{\mathcal{L}(\ell_p(E);\ell_p(F))} &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p(E)}} \left\|\widetilde{T}^s((x_j)_{j=1}^\infty)\right\|_{\ell_p(F)} = \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p(E)}} \left\|(T(x_j)_{j=1}^\infty)\right\|_{\ell_p(F)} \\ &\geq \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p(E)}} \left\|(T(x_j)_{j=1}^\infty)\right\|_\infty \geq \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|T\|.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Note também que se $x \in B_E$, então $(x, 0, 0, \ldots) \in B_{\ell_p^w(E)}$ e seguindo de forma análoga a (2.9) temos

$$\left\|\widetilde{T}^w\right\|_{\mathcal{L}(\ell_p^w(E);\ell_p^w(F))} \geq \|T\|. \tag{2.10}$$

Logo, de (2.8), (2.9) e (2.10) segue que $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são linearmente estáveis.

Sejam $X_1, \ldots, X_m, Y$ classes de sequências, dizemos que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_m(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$ se $(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^m)_{j=1}^\infty \in Y(\mathbb{K})$ e

$$\left\|(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^m)_{j=1}^\infty\right\|_{Y(\mathbb{K})} \leq \prod_{k=1}^m \left\|(\lambda_j^k)_{j=1}^\infty\right\|_{X_k(\mathbb{K})},$$

sempre que $(\lambda_j^k)_{j=1}^\infty \in X_k(\mathbb{K})$, $k = 1, \ldots, m$.

O teorema que enunciamos agora é um dos principais resultados de [22].

Teorema 2.22 ([22], Theorem 3.6). *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $X_1, \ldots, X_m, Y$ classes de sequências linearmente estáveis tais que $X_1(\mathbb{K}) \cdots X_m(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$. Então o par*

$$\left(\mathcal{L}_{X_1,\ldots,X_m;Y}, \|\cdot\|_{X_1,\ldots,X_m;Y}\right)$$

é um ideal de Banach de operadores m-lineares.

O próximo resultado mostra que a classe $\prod_{(p;q)}$ dos operadores multilineares absolutamente (p,q)-somantes munido da norma $\pi_{(p;q)}(\cdot)$ é um ideal de Banach. Antes disso, vamos apresentar a conhecida desigualdade de Hölder generalizada em espaços ℓ_p, cuja demonstração pode ser encontrada em [23, Teorema 1.1.].

Proposição 2.23 (Desigualdade de Hölder). Sejam $0 < p, q_1, \ldots, q_m \leq \infty$ satisfazendo $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q_1} + \cdots + \frac{1}{q_m}$. Se $(\lambda_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_{q_k}$ com $k = 1, \ldots, m$, então $(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^m)_{j=1}^\infty \in \ell_p$ e, além disso,

$$\left\|(\lambda_j^1 \cdots \lambda_j^m)_{j=1}^\infty\right\|_p \leq \left\|(\lambda_j^1)_{j=1}^\infty\right\|_{q_1} \cdots \left\|(\lambda_j^m)_{j=1}^\infty\right\|_{q_m}$$

Teorema 2.24. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q, p < \infty$ com $p \geq \dfrac{q}{m}$. Então $\left(\prod_{(p;q)}; \pi_{(p;q)}(\cdot)\right)$ é um ideal de Banach de operadores m-lineares.*

Demonstração. Já mostramos que $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são classes de sequências linearmente estáveis, para qualquer $1 \leq p < \infty$. Basta mostra que $\ell_q^w(\mathbb{K}) \cdots \ell_q^w(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p(\mathbb{K})$ e aplicar o Teorema 2.22. Então, uma vez que $\ell_q^w(\mathbb{K}) = \ell_q$ e $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$, a Desigualdade de Hölder garante o que nos faltava. □

O próximo resultado mostra que a classe $\mathcal{P}_{(p,q)}$ dos polinômios homogêneos absolutamente (p, q)-somantes munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{P}_{(p;q)}}$ é um ideal de Banach de polinômios. Entretanto, não se faz necessário sua demonstração uma vez que decorrerá do caso multilinear.

Teorema 2.25. *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq q, p < \infty$ com $p \geq \dfrac{q}{m}$. Então $\left(\mathcal{P}_{(p;q)}, \|\cdot\|_{\mathcal{P}_{(p;q)}}\right)$ é um ideal e Banach de polinômios m-homogêneos.*

Apresentaremos agora uma generalização (para o contexto multilinear) do conceito de operadores absolutamente somantes, a saber, a noção de operador múltiplo somante. Esse conceito foi introduzido no ano de 2003 por D. Pérez-García em [24] e por M. C. Matos em [25], de maneira independente.

Definição 2.16. Sejam $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq p < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F \in BAN$. Um operador m-linear $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ é dito ser *múltiplo (p,q)-somante* se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_1=1}^{n}\right\|_{w,q}, \tag{2.11}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Quando $p < q$ na definição acima, o único operador m-linear múltiplo (p, q)-somante é o operador nulo (veja [23, Proposição 2.17]).

O espaço vetorial de todos os operadores múltiplo (p, q)-somantes é denotado por $\prod_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$. O ínfimo $\pi_{(p,q)}^{mult}(T)$, tomado sobre todas as possibilidades de constante C satisfazendo (2.11), define uma norma completa em $\prod_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ (veja [23, Teorema 2.20]). Além disso, quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\prod_{(p,q)}^{mult}({}^m E; F)$ e quando $k_1 = \cdots = k_m = k$, recuperamos a definição da classe dos operadores m-lineares absolutamente (p, q)-somantes.

Por fim, ressaltamos que $\left(\prod_{(p,q)}^{mult}, \pi_{(p,q)}^{mult}(\cdot)\right)$ é um ideal de Banach. Entretanto, o Teorema 2.22 não garante esse resultado, pois o ambiente abstrato criado em [22] não trata dos operadores múltiplos somantes. Para maiores detalhes sobre essa classe de operadores sugerimos os trabalhos [24], [25], [26] e [27].

Uma última observação: Embora tenhamos, por uma razão de simplicidade e didatismo, dedicado muito do texto ao estudo de resultados relacionados à operadores multilineares absolutamente somantes, no capítulo que segue o índice de somabilidade é definido para operadores e polinômios múltiplo somantes.

Capítulo 3

Um Índice de Somabilidade para Pares de Espaços de Banach

O objetivo deste capítulo é introduzir um índice, uma espécie de "medida", que estime a qual distância o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ (respectivamente $\mathcal{P}(^m E; F)$) está de coincidir com o espaço $\prod_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{(p,q)}(^m E; F)$). Veremos que sempre existem estimativas superiores finitas para esse índice e, em alguns casos, apresentamos estimativas inferiores.

3.1 Preliminares

Começamos esta seção com algumas observações e conceitos importantes. O trabalho [28] é a principal referência para este capítulo.

Sejam E um espaço vetorial e $0 < r < 1$. Dizemos que uma função $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma *r-norma* se satisfaz as duas primeiras condições na definição de norma e além disso satisfaz:

$$\|x + y\|^r \leq \|x\|^r + \|y\|^r, \text{ para quaisquer } x, y \in E.$$

Neste caso, podemos considerar a métrica em E,

$$(x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|^r,$$

induzida pela r-norma e considerar E com a estrutura topológica de espaço métrico induzida por esta métrica. Assim, quando E for completo com respeito a esta métrica, dizemos que $(E, \|\cdot\|)$ é um espaço r-Banach.

Sendo um pouco mais sucinto, se todas as componentes, na definição de ideal, forem espaços de Banach relativamente a topologia induzida pela r-norma $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$, então dizemos que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|_{\mathcal{M}})$ é um ideal r-Banach.

Além disso, para $0 < p < \infty$ e E um espaço de Banach, os espaços $\ell_p(E)$ e $\ell_p^w(E)$ são p-Banach se $0 < p < 1$ (resp. Banach se $p \geq 1$). Mencionamos o fato de que a teoria dos operadores múltiplos (p,q)-somantes, bem como a teoria dos polinômios homogêneos (p,q)-somante, foi desenvolvida com $1 \leq q, p < \infty$. Mas a partir de agora, quando necessário, consideraremos $q, p > 0$ e toda teoria criada até aqui se mantém. As possíveis exceções serão apresentadas explicitamente.

Já vimos que $T \in \prod_{(p,q)}(E;F)$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Além disso, $\pi_{p,q}(T)$ denota o ínfimo das constantes $C \geq 0$ que satisfaz a desigualdade (3.1).

Quando consideramos apenas sequências $(x_k)_{k=1}^n$ com $n \in \mathbb{N}$ fixado, o ínfimo sobre todas as constantes $C \geq 0$ satisfazendo (3.1) será denotado por $\pi_{p,q}^{(n)}(T)$ (ou $\pi_p^{(n)}(T)$ quando $p = q$). Naturalmente, $\pi_{p,q}^{(n)}(T) \leq \pi_{p,q}(T)$. Nos trabalhos [29] e [30] os autores investigam estimativas do tipo

$$\pi_{p,q}(T) \leq M \pi_{p,q}^{(n)}(T),$$

onde M é uma constante positiva. Essa estimativa mostra que a norma de um operador (p,q)-somante pode ser as vezes bem aproximada usando apenas "poucos" vetores na definição de norma (p,q)-somante. Apresentaremos agora duas estimativas nessa linha de raciocínio que serão muito importantes mais adiante.

Teorema 3.1 ([29], Proposition 2.). *Existe uma constante universal M tal que se $T : E \longrightarrow F$ (E,F espaços de Banach) é um operador linear de posto finito (digamos posto(T)=n) e $q \geq 2$, então*

$$\pi_{q,2}(T) \leq M \pi_{q,2}^{(n)}(T).$$

Teorema 3.2 ([31], Corollary 2). *Seja id_{X_n} a identidade no espaço n-dimensional X_n. Para $q > 2$, temos*

$$(2e)^{-1} n^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{q,2}(id_{X_n}).$$

Vimos também, no capítulo anterior, que $T \in \prod_{(p,q)}^{mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C \prod_{i=1}^{m} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q}, \tag{3.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$. Também vimos que $P \in \mathcal{P}_{(p,q)}(^m E; F)$ se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left\| (x_k)_{k=1}^n \right\|_{w,q}^m , \tag{3.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_k \in E$ com $k = 1, \ldots, n$.

Não é difícil perceber que quando a expressão (3.2) ou a expressão (3.3) não é válida, significa que uma tal constante C não existe. Daí surge a seguinte pergunta: será que se fixarmos $n \in \mathbb{N}$ existirá uma constante C_n que depende de n satisfazendo (3.2) ou (3.3), variando-se arbitrariamente apenas os vetores? Observe que se $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ não é múltiplo (p,q)-somante, então poderia acontecer que variando os vetores $x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}$ com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$, a constante C_n poderia ir para infinito.

Iremos mostrar que tal constante C_n existe e é finita, podendo ser escrita da forma $C_n = C_1 n^s$, onde $s \geq 0$ e depende apenas de m, p, q. Assim, poderemos observar que o número s desempenha o papel de um tipo de índice de (não) somabilidade: quando $s = 0$, o operador é múltiplo (p,q)-somante, quando s não pode ser zero, o operador não será múltiplo (p,q)-somante e o valor "ótimo" de $s \neq 0$ poderá ser identificado naturalmente como um índice de não somabilidade do operador. Neste caso, quanto maior for s poderemos dizer que o operador estará mais distante de ser múltiplo (p,q)-somante.

3.2 O Índice de Somabilidade

Vamos adotar uma abordagem um pouco diferente. Em vez de definir o índice de somabilidade s para um único operador, como acabamos de descrever acima, vamos definir o índice de somabilidade para o par de espaços de Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m; F)$.

Definição 3.1. O *m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade* de um par de espaços de Banach $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$ é definido como

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) = \inf s_{m,p,q},$$

onde $s_{m,p,q} \geq 0$ satisfaz: Para cada $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, existe uma constante $C \geq 0$ (não dependente de n) tal que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q} ,$$

para todo inteiro positivo n e todos os vetores $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$. Quando $E_1 = \cdots = E_m = E$, escrevemos $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E;F)$.

Observemos agora que com a abordagem da definição, o m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade introduz uma espécie de "medida", que mede a qual distância o espaço $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$ está de coincidir com o espaço $\prod_{(p,q)}^{mult}(E_1,\ldots,E_m;F)$. Quando $s_{m,p,q} = 0$ temos que $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F) = \prod_{(p,q)}^{mult}(E_1,\ldots,E_m;F)$. De forma similar, podemos definir o índice de somabilidade no contexto polinomial.

Definição 3.2. O *m-índice polinomial de (p,q)-somabilidade* de um par de espaços de Banach (E,F) é definido como

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E,F) = \inf s_{m,p,q},$$

onde $s_{m,p,q} \geq 0$ satisfazendo o seguinte: Para cada $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, existe uma constante $C \geq 0$ (não dependendo do n) tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|P(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C n^{s_{m,p,q}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m,$$

para todo inteiro positivo n e todos os vetores $x_j \in E$, com $1 \leq j \leq n$.
Quando $m = 1$, temos $\prod_{(p,q)}^{mult}(^1E;F) = \mathcal{P}_{(p,q)}(^1E;F) = \prod_{(p,q)}(E;F)$ e neste caso escreveremos simplesmente $\eta_{(p,q)}(E;F)$.

O m-índice polinomial de (p,q)-somabilidade introduz uma espécie de "medida", que mede a qual distância o espaço $\mathcal{P}(^mE;F)$ está de coincidir com o espaço $\mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$. Quando $s_{m,p,q} = 0$ temos que $\mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{P}_{(p,q)}(^mE;F)$.

3.2.1 Estimativas Superiores

Vamos agora verificar que o índice de somabilidade é sempre finito. Antes disso, vejamos alguns fatos e resultados necessários a este fim.

O próximo resultado mostra qual é a norma 2-somante do operador identidade id_E quando E tem dimensão finita.

Teorema 3.3 ([30], Proposition 9.11)**.** *Se E é um espaço de Banach e $dimE = n$, então $\pi_2(id_E) = \sqrt{n}$.*

Veremos agora um corolário do teorema acima que será muito usado durante esta seção. Além disso, note que nesse corolário extrapolamos a noção de operadores absolutamente p-somantes para $p > 0$.

Corolário 3.4. Seja $0 < p < \infty$. Se E é um espaço de Banach e $\dim E = n$, então

$$\pi_p^{(n)}(id_E) \leq n^{\max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}}.$$

Demonstração. Dividimos a demonstração em dois casos. Para $0 < p < 2$, existe $r > 0$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$. Assim, dados $x_1, \ldots, x_n \in E$ e aplicando a Desigualdade de Hölder, o Teorema 3.3 e o fato de que $\ell_p^w(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_2^w(E)$ implicam em

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|id_E(x_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |1|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \pi_2^{(n)}(id_E) \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,2} n^{\frac{1}{r}} \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{r}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,p}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi_p^{(n)}(id_E) \leq n^{\frac{1}{p}}.$$

Para o caso $p \geq 2$, aplicamos o Teorema de Inclusão e novamente o Teorema 3.3 para obtermos

$$\pi_p^{(n)}(id_E) \leq \pi_2^{(n)}(id_E) \leq \pi_2(id_E) = n^{\frac{1}{2}}.$$

$\square$

Note que, se X é um subespaço de um espaço normado n-dimensional E, então

$$\pi_p^{(n)}(id_X) \leq (\dim X)^{\max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}} \leq n^{\max\left\{\frac{1}{p},\frac{1}{2}\right\}}.$$

Observação 3.1. Se X é um subespaço de dimensão finita do espaço de Banach E e $0 < q \leq p < \infty$, então id_X é absolutamente (p,q)-somante e daí, para qualquer $x_1, \ldots, x_n \in X$, temos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|id_X(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_{p,q}^{(n)}(id_X) \sup_{\psi \in B_{X'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\psi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para cada $\psi \in X'$ existe uma extensão $\bar{\psi} \in E'$ tal que $\|\psi\| = \|\bar{\psi}\|$. Assim,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \|id_X(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \pi_{p,q}^{(n)}(id_X) \sup_{\bar{\psi} \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\bar{\psi}(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \pi_{p,q}^{(n)}(id_X) \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\varphi(x_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

$$= \pi_{p,q}^{(n)}(id_X) \left\|(x_k)_{k=1}^n\right\|_{w,q}.$$

O próximo resultado mostra que o m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade do par $(E_1,\ldots,E_m;F)$ é finito, para o caso em que $q=p$, independentemente da escolha dos espaços de Banach $E_1,\ldots,E_m$ e F.

Proposição 3.5. Seja $0<p<\infty$ e $E_1,\ldots,E_m,F$ espaços de Banach. Então

$$\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F) \leq \frac{m}{p} \text{ para } 0<p\leq 2;$$
$$\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F) \leq \frac{m}{2} \text{ para } p\geq 2.$$

Demonstração. Sejam $T\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_m;F)$, $x_{k_i}^{(i)}\in E_i$ e $X_i := span\left\{x_{1_i}^{(i)},\ldots,x_{n_i}^{(i)}\right\}\subset E_i$ com $k_i=1,\ldots,n$ e $i=1,\ldots,m$. Então, pela continuidade de T, temos

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\left(\sum_{k_1=1}^{n}\left\|x_{k_1}^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdots\left(\sum_{k_m=1}^{n}\left\|x_{k_m}^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|T\|\prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|id_{X_i}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma vez que X_i tem dimensão finita, pela Observação 3.1 segue que id_{X_i} é absolutamente p-somante e que

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n}\left\|id_{X_i}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p^{(n)}(id_{X_i})\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p},$$

para cada $i=1,\ldots,m$. Consequentemente, obtemos

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\prod_{i=1}^{m}\left(\pi_p^{(n)}(id_{X_i})\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p}\right).$$

Desta desigualdade, pelo Corolário 3.4, temos os casos:
1) Se $0<p\leq 2$, então

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n}\left\|T\left(x_{k_1}^{(1)},\ldots,x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\left(n^{\frac{1}{p}}\right)^m\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p}$$
$$= \|T\|\,n^{\frac{m}{p}}\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,p}$$

e, dessa forma, $\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F)\leq\frac{m}{p}$.

2) Se $p \geq 2$, então

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \, n^{\frac{m}{2}} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,p}$$

e, dessa forma, $\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{m}{2}$. □

O próximo resultado mostra que a estimativa anterior não pode ser melhorada sem perder a sua generalidade.

Corolário 3.6. $\eta_{(2,2)}^{m-mult}(\ell_2; c_0) = \frac{m}{2}$.

Demonstração. Seja t um número real positivo, onde para cada $T \in \mathcal{L}(^m\ell_2; c_0)$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C n^t \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,2}, \tag{3.4}$$

para todo inteiro positivo n e todo $x_{k_i}^{(i)} \in \ell_2$ com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Agora, seja $T \in \mathcal{L}(^m\ell_2; c_0)$ definido por

$$T\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}\right) = \left(\left(x_{j_1}^{(1)} \cdots x_{j_m}^{(m)} \right)_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n}, 0, 0, 0, \ldots \right).$$

Note que $\|T\| = 1$ e que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \|T(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{m}{2}}. \tag{3.5}$$

Além disso, sabemos pela Proposição 1.10 que $(\ell_2)'$ é isomorfo isometricamente a ℓ_2 e assim temos que

$$\left\| (e_{j_i})_{j_i=1}^{n} \right\|_{w,2} = \sup_{\varphi \in B_{(\ell_2)'}} \left(\sum_{j_i=1}^{n} |\varphi(e_{j_i})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sup_{(b_{j_i})_{j_i=1}^{\infty} \in B_{\ell_2}} \left(\sum_{j_i=1}^{n} |b_{j_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1, \tag{3.6}$$

para cada $i = 1, \ldots, m$. Como t não depende de T, C e n, de (3.4), (3.5) e (3.6) temos que

$$n^{\frac{m}{2}} \leq C n^t \Rightarrow n^{\frac{m}{2} - t} \leq C, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então $\frac{m}{2} \leq t$ e assim $\eta_{(2,2)}^{m-mult}(\ell_2; c_0) \geq \frac{m}{2}$. A desigualdade inversa é garantida pela proposição anterior. □

Note que se $q < p$, então $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$, pois nesse caso $\ell_q^w(\cdot) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_p^w(\cdot)$ e para qualquer $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq C n^{\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F)} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,p} \\ &\leq C n^{\eta_{(p,p)}^{m-mult}(E_1,\ldots,E_m;F)} \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q},\end{aligned}$$

para todo inteiro positivo n e $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ com $1 \leq k_i \leq n$ e $1 \leq i \leq m$.

Assim, quando $q < p$ temos que $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{m}{p}$, para o caso $0 < p \leq 2$ e temos $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{m}{2}$, para o caso $p \geq 2$.

Podemos nos perguntar se conseguimos obter uma melhor estimativa para o m-índice multilinear de (p, q)-somabilidade, em certos casos. Veremos na próxima proposição que isso de fato é possível, mas antes apresentamos uma observação importante, no qual sua demonstração pode ser encontrada em [32], pág. 269.

Observação 3.2. Sejam E e F espaços de Banach. Suponha que $1 \leq q \leq p_1 \leq p_2$ e que $T \in \prod_{p_1,q}(E; F)$. Então $\pi_{p_2,q}(T) \leq \|T\|^{1-\frac{p_1}{p_2}} \left(\pi_{p_1,q}(T)\right)^{\frac{p_1}{p_2}}$.

Proposição 3.7. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Então

$$\begin{aligned}\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) &\leq \frac{m}{p} \text{ para } 1 \leq q \leq 2; \\ \eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) &\leq \frac{mq}{2p} \text{ para } q \geq 2.\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ e $X_i = span\left\{x_{1_i}^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\right\} \subset E_i$, com $k_i = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m$. Note que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\|x_{k_1}^{(1)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\|x_{k_m}^{(m)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Uma vez que X_i tem dimensão finita segue que id_{X_i} é absolutamente q-somante, para cada $i = 1, \ldots, m$. Pela Observação 3.2, temos que

$$\pi_{p,q}^{(n)}(id_{X_i}) \leq \pi_q^{(n)}(id_{X_i})^{\frac{q}{p}}. \tag{3.7}$$

Assim, para cada $i = 1, \ldots, m$, obtemos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\| x_{k_i}^{(i)} \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{Observação3.1}}{\leq} \pi_{p,q}^{(n)}(id_{X_i}) \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q} \overset{(3.7)}{\leq} \pi_q^{(n)}(id_{X_i})^{\frac{q}{p}} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}$$

e para $q \geq 2$, pelo Corolário 3.4, temos

$$\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\| x_{k_i}^{(i)} \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(n^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{q}{p}} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q} = n^{\frac{q}{2p}} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\, n^{\frac{mq}{2p}} \prod_{i=1}^{m} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}$$

e assim $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{mq}{2p}$. Analogamente, quando $1 \leq q \leq 2$ concluímos que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\|\, n^{\frac{m}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left\| (x_{k_i}^{(i)})_{k_i=1}^{n} \right\|_{w,q}$$

e $\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{m}{p}$. □

Sabemos que quando $p < q$ o único operador múltiplo (p,q)-somante é o operador nulo e por isso, até agora, consideramos $p \geq q$. Entretanto, curiosamente, em nosso contexto faz sentido extrapolar a definição e considerar o caso em que $p < q$, pois os espaços $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ e $\prod_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F)$ não coincidem e assim faz sentido calcular o índice de somabilidade para o par $(E_1 \times \cdots \times E_m, F)$.

O próximo resultado mostra então que, mesmo neste caso, o m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade do par $(E_1, \ldots, E_m; F)$ é finito.

Proposição 3.8. Sejam $0 < p < q < \infty$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços de Banach. Então,

$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{m}{p} \text{ para } 0 < q \leq 2;$$
$$\eta_{(p,q)}^{m-mult}(E_1, \ldots, E_m; F) \leq \frac{(qp - 2p + 2q)m}{2qp} \text{ para } q \geq 2.$$

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$ e $X_i = span\left\{x_{1_i}^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}\right\} \subset E_i$, com $k_i = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m$. Note que

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right) \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|T\| \left(\sum_{k_1=1}^{n} \left\| x_{k_1}^{(1)} \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \left\| x_{k_m}^{(m)} \right\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para cada $i = 1, \ldots, m$, pela Desigualdade de Hölder com $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{\frac{pq}{q-p}}$ temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k_i=1}^{n} |1|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{pq}} = \left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|x_{k_i}^{(i)}\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{q-p}{qp}} \\
&= \left(\sum_{k_i=1}^{n} \left\|id_{X_i}\left(x_{k_i}^{(i)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{q-p}{qp}} \overset{\text{Obs.3.1}}{\leq} \pi_q^{(n)}(id_{X_i}) \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}.
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 3.4, para $q \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|T\| \prod_{i=1}^{m} \left(n^{\frac{1}{2}} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right) \\
&= \|T\|\, n^{\frac{(qp-2p+2q)m}{2qp}} \prod_{i=1}^{m} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q}
\end{aligned}$$

e, para $0 < q \leq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\|T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \|T\| \prod_{i=1}^{m} \left(n^{\frac{1}{q}} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q} n^{\frac{q-p}{qp}}\right) \\
&= \|T\|\, n^{\frac{m}{p}} \prod_{i=1}^{m} \left\|\left(x_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^{n}\right\|_{w,q},
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. $\square$

É claro que o m-índice polinomial de (p,q)-somabilidade pode ser estimado usando as estimativas para o m-índice multilinear de (p,q)-somabilidade. No próximo resultado apresentamos estimativas mais precisas que estas.

Proposição 3.9. Sejam E, F espaços de Banach, $m \in \mathbb{N}$, $q > 0$ e $p < \frac{q}{m}$. Então

$$\begin{aligned}
\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) &\leq \frac{1}{p} \text{ para } 0 < q \leq 2; \\
\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) &\leq \frac{1}{p} + \frac{m(q-2)}{2q} \text{ para } q \geq 2.
\end{aligned}$$

Demonstração. Sejam $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, $x_1, \ldots, x_n \in E$ e $X = span\{x_1, \ldots, x_n\} \subset E$, onde $n \in \mathbb{N}$. Pela Desigualdade de Hölder com os índices conjugados $\frac{q}{mp}$ e $\frac{q}{q-mp}$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|P\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{mp}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|P\| \left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\|x_k\|^{mp})^{\frac{q}{mp}} \right)^{\frac{mp}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |1|^{\frac{q}{q-mp}} \right)^{\frac{q-mp}{q}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|P\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{q} \right)^{\frac{m}{q}} n^{\frac{q-mp}{qp}} = \|P\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|id_X(x_k)\|^{q} \right)^{\frac{m}{q}} n^{\frac{q-mp}{qp}}$$

$$\stackrel{Obs.3.1}{\leq} \|P\| \left(\pi_q^{(n)}(id_X) \right)^m \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m n^{\frac{q-mp}{qp}}.$$

Assim, pelo Corolário 3.4, para $0 < q \leq 2$, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|P\| n^{\frac{m}{q}} n^{\frac{q-mp}{qp}} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m = \|P\| n^{\frac{1}{p}} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m$$

e, dessa forma, $\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{1}{p}$. Para $q \geq 2$, obtemos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|P\| n^{\frac{m}{2}} n^{\frac{q-mp}{qp}} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m = \|P\| n^{\frac{mpq+2q-2pm}{2pq}} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{w,q}^m$$

e assim $\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \leq \frac{mpq+2q-2pm}{2pq} = \frac{1}{p} + \frac{m(q-2)}{2q}$. □

3.2.2 Estimativas Inferiores

Apresentamos agora estimativas inferiores, em alguns casos, para o índice de somabilidade polinomial. Vejamos primeiro um lema técnico.

Lema 3.10. Seja E um espaço de Banach onde $\dim E = n$. Se $1 \leq d \leq s \leq 2$, onde $s = 2$ e $d = 1$ não ocorrem simultaneamente, então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$K n^{\frac{2d+s(d-2)}{2sd}} \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E).$$

Demonstração. Note que

$$\frac{2sd}{2d+s(d-2)} \geq 2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{d} - \frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{2sd}{2d+s(d-2)}}.$$

Assim, pelo Teorema de Inclusão, temos

$$\pi^{(n)}_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E) \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E)$$

e o Teorema 3.1 garante que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{C} \pi_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E) \leq \pi^{(n)}_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E).$$

Pelo Teorema 3.2, temos que

$$(2e)^{-1} n^{\frac{1}{\frac{2sd}{2d+s(d-2)}}} \leq \pi_{\frac{2sd}{2d+s(d-2)},2}(id_E), \tag{3.8}$$

para $\frac{2sd}{2d+s(d-2)} > 2$ e, quando $\frac{2sd}{2d+s(d-2)} = 2$ aplicando o Teorema 3.3 e pelo fato de que $(2e)^{-1} < 1$, não difícil ver que a desigualdade (3.8) também é válida. Logo,

$$Kn^{\frac{2d+s(d-2)}{2sd}} \leq \pi_{s,d}^{(n)}(id_E),$$

onde $K = \frac{(2e)^{-1}}{C}$. □

Teorema 3.11. *Sejam E,F espaços de Banach de dimensão infinita e $r = \cot(F) < \infty$.*

(a) *Para $1 \leq q \leq 2$ e $0 < p \leq \frac{rq}{mr+q}$, temos*

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F).$$

(b) *Para $1 \leq q \leq 2$ e $\frac{rq}{mr+q} \leq p \leq \frac{2r}{mr+2}$, temos*

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F),$$

desde que $q = 1$ e $p = \frac{2r}{mr+2}$ não ocorram simultaneamente.

(c) *Para $2 \leq q < \infty$ e $0 < p \leq \frac{2r}{mr+2}$, temos*

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F).$$

(d) *Para $2 \leq q < \infty$ e $\frac{2r}{mr+2} < p < r$, temos*

$$\frac{r-p}{pr} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F).$$

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n$ em E e $a_1, \ldots, a_n$ escalares tais que $\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{r}{p}} = 1$. Como F é um espaço de Banach de dimensão infinita, o Teorema 1.24 nos diz que

$$\cot(F) = \sup\{2 \leq s \leq \infty : F \text{ fatora finitamente a inclusão formal } \ell_s \hookrightarrow \ell_\infty\}$$

e vimos no primeiro capítulo que esse supremo é atingido. Assim F fatora finitamente

$\ell_r \hookrightarrow \ell_\infty$ e portanto existem $C_1, C_2 > 0$ e $y_1, \ldots, y_n \in F$ de modo que

$$C_1 \left\|(a_j)_{j=1}^n\right\|_\infty \leq \left\|\sum_{j=1}^n a_j y_j\right\| \leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{3.9}$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach, existem $x_1', \ldots, x_n' \in B_{E'}$ tais que $x_j'(x_j) = \|x_j\|$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Defina

$$P_n : E \longrightarrow F,\ P_n(x) = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x)^m y_j.$$

É claro que P_n está bem definido e note que P_n é um polinômio m-homogêneo associado ao operador m-linear $T : E^m \longrightarrow F$ definido por

$$T(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x_1) \cdots x_j'(x_m) y_j.$$

Além disso, P_n é contínuo, pois para qualquer $x \in E$,

$$\begin{aligned}\|P_n(x)\| = \left\|\sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x)^m y_j\right\| &\overset{(3.9)}{\leq} C_2 \left(\sum_{j=1}^n \left||a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x)^m\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_2 \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}} \|x\|^m = C_2 \|x\|^m,\end{aligned}$$

e assim

$$\|P_n\| \leq C_2. \tag{3.10}$$

Note que, para cada $k = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}\|P_n(x_k)\| = \left\|\sum_{j=1}^n |a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x_k)^m y_j\right\| &\overset{(3.9)}{\geq} C_1 \left\|\left(|a_j|^{\frac{1}{p}} x_j'(x_k)^m\right)_{j=1}^n\right\|_\infty \\ &\geq C_1 |a_k|^{\frac{1}{p}} x_k'(x_k)^m = C_1 |a_k|^{\frac{1}{p}} \|x_k\|^m.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^{mp} |a_j|\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\|x_j\|^m |a_j|^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{C_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(C_1 \|x_j\|^m |a_j|^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(3.11)}{\leq} \frac{1}{C_1} \left(\sum_{j=1}^n \|P_n(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Supondo que existam $t \geq 0$ e $D > 0$ tais que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|P_n(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq Dn^t \|P_n\| \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m,$$

temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp} |a_j|\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{D}{C_1} \|P_n\| n^t \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m. \tag{3.12}$$

Note que está última desigualdade é valida para $p < r$ e $\sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{r}{p}} = 1$. Pelo Teorema 1.10, temos que $\left(\ell_{\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)'$ é isomorfo isometricamente a $\ell_{\left(\frac{r}{p}\right)}$ e daí

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{r}{p}\right)^*}} &= \left\|\left(\|x_j\|^{mp}\right)_{j=1}^n\right\|_{\left(\frac{r}{p}\right)^*} \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{\left(\ell_{\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)'}} \left|\varphi\left(\left(\|x_j\|^{mp}\right)_{j=1}^n\right)\right| \\
&= \sup_{(a_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_{\left(\frac{r}{p}\right)}}} \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \|x_j\|^{mp}\right| \\
&= \sup \left\{\left|\sum_{j=1}^{n} a_j \|x_j\|^{mp}\right| : \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{r}{p}} = 1\right\} \\
&\leq \sup \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_j| \|x_j\|^{mp} : \sum_{j=1}^{n} |a_j|^{\frac{r}{p}} = 1\right\} \\
&\overset{(3.12)}{\leq} \left(\frac{D}{C_1} \|P_n\| n^t \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m\right)^p \overset{(3.10)}{\leq} \left(\frac{DC_2}{C_1} n^t \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^m\right)^p
\end{aligned}$$

e assim, denotando $Q = \frac{DC_2}{C_1}$, obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq n^{tp} Q^p \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}^{mp}.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade acima a $\frac{1}{mp}$ temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}. \tag{3.13}$$

Note que (3.13) é válido para qualquer $x_1, \ldots, x_n$. Assim, para qualquer subespaço X

de E, com dim$X = n$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}\right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}, \tag{3.14}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in X$.

(a) Uma vez que $0 < p \leq \frac{rq}{mr+q}$, temos

$$mp\left(\frac{r}{p}\right)^* = \frac{mpr}{r-p} \leq q$$

e assim, $\ell_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}(\cdot) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q(\cdot)$. Logo,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\|(x_j)_{j=1}^n\right\|_{w,q}$$

e dessa forma, $\pi_q^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}$. Como $q \leq 2$, pelo Teorema de Inclusão obtemos

$$\pi_2^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.15}$$

O Teorema 3.1 assegura que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X). \tag{3.16}$$

Pelo Teorema 3.3 e por (3.15) e (3.16) obtemos

$$\frac{1}{C} n^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \;\Rightarrow\; n^{\frac{1}{2}-\frac{t}{m}} \leq CQ^{\frac{1}{m}}, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Então $t \geq \frac{m}{2}$ e portanto,

$$\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{m}{2}.$$

(b) Uma vez que $\frac{rq}{mr+q} \leq p \leq \frac{2r}{mr+2}$ e $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* = \frac{mpr}{r-p}$ temos $1 \leq q \leq mp\left(\frac{r}{p}\right)^* \leq 2$. Dessa forma,

$$\pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,q}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}. \tag{3.17}$$

Além disso, pelo Lema 3.10 existe uma constante $K > 0$ tal que

$$Kn^{\frac{2q+mp\left(\frac{r}{p}\right)^*(q-2)}{2mp\left(\frac{r}{p}\right)^* q}} \leq \pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,q}(id_X). \tag{3.18}$$

De (3.17) e (3.18) segue que

$$Kn^{\frac{2q+mp\left(\frac{r}{p}\right)^*(q-2)}{2mp\left(\frac{r}{p}\right)^* q}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}.$$

Assim,

$$\frac{t}{m} \geq \frac{2q+mp\left(\frac{r}{p}\right)^*(q-2)}{2mp\left(\frac{r}{p}\right)^* q} = \frac{mp+2}{2mp} - \frac{mr+q}{mrq}$$

e concluímos que

$$t \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq}.$$

Portanto, $\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq}$.

(c) Uma vez que $q \geq 2$, segue de (3.14) e de $\ell_2^w(\cdot) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q^w(\cdot)$ que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*} \right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,2},$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$. Como $\frac{2r}{mr+2} \geq p$ temos que $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* \leq 2$, e assim

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,2}.$$

Logo, $\pi_2^{(n)}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}$. Do Teorema 3.1, existe $C > 0$ tal que

$$\pi_2(id_X) \leq C\pi_2^{(n)}(id_X).$$

Pelo Teorema 3.3, temos

$$\frac{1}{C} n^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{C} \pi_2(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}$$

e concluímos que $t \geq \frac{m}{2}$, ou seja, $\eta_{(p,q)}^{m-pol}(E;F) \geq \frac{m}{2}$.

(d) Uma vez que $q \geq 2$, como no item (c), segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|id_X(x_j)\|^{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*} \right)^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}} \left\| (x_j)_{j=1}^n \right\|_{w,2},$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$. Como $\frac{2r}{mr+2} < p$, temos que $mp\left(\frac{r}{p}\right)^* > 2$. Logo,

$$\pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X) \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}$$

e, portanto, segue do Teorema 3.1 que

$$\pi_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X) \leq C\pi^{(n)}_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X).$$

Pelo Teorema 3.2, temos que

$$(2e)^{-1} n^{\frac{1}{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*}} \leq \pi_{mp\left(\frac{r}{p}\right)^*,2}(id_X) \;\Rightarrow\; \frac{(2e)^{-1}}{C} n^{\frac{r-p}{mpr}} \leq n^{\frac{t}{m}} Q^{\frac{1}{m}}$$

e concluímos que $t \geq \frac{r-p}{pr}$, ou seja, $\eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F) \geq \frac{r-p}{pr}$. $\square$

No teorema anterior, existe um tipo de continuidade. Note que quando $p = \frac{rq}{mr+q}$, do item (a) temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F).$$

Por outro lado, considerando $p = \frac{rq}{mr+q}$ do item (b) segue que

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{mr+q}{rq} = \frac{m}{2} \leq \eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F).$$

Agora, quando $p = \frac{2r}{mr+2}$, do item (c) temos

$$\frac{m}{2} \leq \eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F). \tag{3.19}$$

Dado $\epsilon > 0$ e tomando $p_\epsilon = \frac{2r}{mr+2} + \epsilon$, do item (d) segue que

$$\frac{r - p_\epsilon}{p_\epsilon r} \leq \eta^{m-pol}_{(p_\epsilon,q)}(E;F). \tag{3.20}$$

Novamente, existe um tipo de continuidade entre as estimativas (3.19) e (3.20), pois fazendo $\epsilon \to 0$ obtemos

$$p_\epsilon \to \frac{2r}{mr+2} \quad \text{e} \quad \frac{r-p_\epsilon}{p_\epsilon r} \to \frac{m}{2}.$$

O mesmo ocorre quando $q = 2$.

O Teorema 3.11 garante, em alguns casos, estimativas inferiores para o m-índice polinomial $\eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F)$. Por outro lado, na seção anterior vimos que sempre existe estimativas superiores para $\eta^{m-pol}_{(p,q)}(E;F)$. Assim, obtemos melhores estimativas nos casos em que conseguimos estimativas superiores e inferiores simultaneamente. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.1. Considerando $q = 1$, $m = 2$, $p = \frac{1}{3}$ e $r = 2$, pelo Teorema 3.11 (item (a)) e pela Proposição 3.9, temos que

$$1 \leq \eta_{(\frac{1}{3},1)}^{m-pol}(E;F) \leq 3.$$

Mostraremos agora que em alguns casos o índice ótimo de somabilidade é calculado.

Corolário 3.12. Se $\frac{2}{2m+1} \leq p < \frac{2}{m+1}$, então $\eta_{(p,1)}^{m-pol}(\ell_1;\ell_2) = \frac{1}{p} - \frac{m+1}{2}$.

Demonstração. Como ℓ_2 é um espaço de Hilbert, a Proposição 1.23 garante que $\cot(\ell_2) = 2$. Assim, considerando $r = 2$ e $q = 1$ no Teorema 3.11 (item (b)), temos

$$\eta_{(p,1)}^{m-pol}(\ell_1;\ell_2) \geq \frac{1}{p} - \frac{m+1}{2}.$$

Do Teorema 2.21, sabemos que qualquer polinômio m-homogêneo contínuo de ℓ_1 em ℓ_2 é absolutamente $(\frac{2}{m+1}, 1)$-somante. Como $p < \frac{2}{m+1}$, tome $w > 0$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2}{m+1}} + \frac{1}{w}.$$

Dado $P \in \mathcal{P}(^m\ell_1;\ell_2)$, pela Desigualdade de Hölder e como P é $(\frac{2}{m+1}, 1)$-somante, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{w}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|P(x_k)\|^{\frac{2}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2}} \leq Dn^{\frac{1}{p}-\frac{m+1}{2}} \left\|(x_k)_{k=1}^n\right\|_{w,1}^m.$$

Portanto, $\eta_{(p,1)}^{m-pol}(\ell_1;\ell_2) \leq \frac{1}{p} - \frac{m+1}{2}$. □

Corolário 3.13. Seja K um espaço de Hausdorff compacto e F um espaço de Banach de dimensão infinita, com $\cot(F) = r$. Se $\frac{2r}{r+2} < p < r$, então

$$\eta_{(p,2)}(C(K);F) = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.11 (item (d)), se $q = 2$ e $\cot(F) = r$, então

$$\eta_{(p,2)}(C(K);F) \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}.$$

Do Teorema 2.18, sabemos que todo operador linear contínuo de $C(K)$ em F, com

$\cot(F) = r$, é absolutamente $(r, 2)$-somante. Como $p < r$, tome $w > 0$ tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{w}.$$

Dado $T \in \mathcal{L}(C(K); F)$, pela Desigualdade de Hölder e como T é $(r, 2)$-somante, temos

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{w}} \left(\sum_{k=1}^{n} \|T(x_k)\|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq D n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \left\| (x_k)_{k=1}^{n} \right\|_{w,2}.$$

Portanto, $\eta_{(p,2)}(C(K); F) \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$. □

Finalizamos nosso trabalho com um resultado que complementa o Teorema 3.11, agora considerando o caso em que $F = \mathbb{R}$. Entretanto, não demonstraremos esse resultado, pois sua demonstração segue um caminho similar a da demonstração do Teorema 3.11.

Teorema 3.14 ([28], Theorem 4.1)**.** *Sejam m um número inteiro positivo e E um espaço de Banach real de dimensão infinita.*

(a) *Se $1 \leq q \leq 2$ e $0 < p \leq \frac{q}{m+q}$, então*

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; \mathbb{R}).$$

(b) *Se $1 \leq q \leq 2$ e $\frac{q}{m+q} \leq p \leq \frac{2}{m+2}$, então*

$$\frac{mp+2}{2p} - \frac{m+q}{q} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; \mathbb{R}).$$

(c) *Se $2 \leq q < \infty$ e $0 < p \leq \frac{2}{m+2}$, então*

$$\frac{m}{2} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; \mathbb{R}).$$

(d) *Se $2 \leq q < \infty$ e $\frac{2}{m+2} < p < 1$, então*

$$\frac{1-p}{p} \leq \eta_{(p,q)}^{m-pol}(E; \mathbb{R}).$$

Referências Bibliográficas

[1] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol **43**, Cambridge University Press, 1995.

[2] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2° Ed., 2015.

[3] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 3° Ed., 2009.

[4] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

[5] F. S. S. Leite, *Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2017.

[6] D. F. Nogueira, *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2016.

[7] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[8] J. S. Santos, *Resultados de Coincidência para Aplicações Absolutamente Somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[9] M. B. Maia, *Um índice de somabilidade para operadores entre espaços de Banach*, Tese de Doutorado, UFPB, 2017.

[10] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math. **3** (1922), 133-181.

[11] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Monografie Matematyczne 1, Warsaw, 1932.

[12] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and Uniconditional Convergence in Normed Spaces*, Proceedings of the National Academy of Sciences of USA, **36** (1950), 192-197.

[13] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[14] A. Pietsch, *Absolut p-summierende abbildungen in normierten räumen*, Studia Mathematica, **28** (1967), 333-353.

[15] B. Mitjagin e A. Pełczyński, *Nuclear operators and approximative dimension*, Proc. of ICM, Moscow, 1966, 366-372.

[16] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L_p spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 276-326.

[17] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, Dover Publications, Mineola, New York, 2010.

[18] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[19] A. Pietsch, *Ideals of Multilinear Functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, Leipzig Teubner Texte Math, vol. **62** (1983), 185-199.

[20] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo **8** (1956), 1-79.

[21] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16**, 1955.

[22] G. Botelho e J. R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh Math, (2016), doi: 10.1007/s00605-016-0963-4.

[23] D. T. Araújo, *Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2016.

[24] D. Pérez-García, *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Thesis, Universidad Complutense de Madrid, 2003.

[25] M. C. Matos, *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings*, Collect. Math. **54** (2003), 111-136.

[26] D. Pellegrino and J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: a panorama, Quaestiones Mathematicae*, **34** (2011), 447–478.

[27] F. Bombal, D. Peréz-García, and I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem*, Q. J. Math. **55** (2004), 441-450.

[28] M. Maia, D. Pellegrino and J. Santos, *An index of summability for pairs of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **441** (2016), 702-722.

[29] S. J. Szarek, *Computing summing norms and type constants on few vectors*, Studia Math. **98** (1991) 148-156.

[30] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Longman, Harlow, and Wiley, New York, 1988.

[31] H. König, J.R. Retherford, N. Tomczak-Jaegermann, *On the eigenvalues of (p, 2)-summing operators and constants associated with normed spaces*, J. Funct. Anal. **37** (1980) 88-126.

[32] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[33] A. T. L. Bernardino, *On cotype and a Grothendieck-type theorem for absolutely summing multilinear operators*, Quaest. Math. **34** (2011) 513-519.