

Marco Maciel Dias e Costa

**Buracos negros com nuvem de cordas e
quintessência**

João Pessoa, PB, Brasil
24 de fevereiro de 2017

Marco Maciel Dias e Costa

Buracos negros com nuvem de cordas e quintessência

Dissertação apresentada a Coordenação do Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física da Universidade Federal da Paraíba, em complementação aos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Física na Área de Concentração Gravitação e Cosmologia.

Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Física

Orientador: Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra

João Pessoa, PB, Brasil

24 de fevereiro de 2017

C837b Costa, Marco Maciel Dias e.
Buracos negros com nuvem de cordas e quintessência /
Marco Maciel Dias e Costa. - João Pessoa, 2017.
93 f.: il. -

Orientador: Valdir Barbosa Bezerra.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/ PPGF

1. Física. 2. Buraco negro. 3. Nuvem de cordas.
4. Quintessência. I. Título.

UFPB/BC

CDU: 53(043)



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Física

DECLARAÇÃO DE TITULAÇÃO
Mestrado

A Comissão Examinadora que abaixo assina este documento, reunida no dia 24 de fevereiro de 2017, na Sala de Reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, APROVA **Marco Maciel Dias e Costa** na defesa de sua dissertação intitulada "*Buracos negros com nuvem de cordas e quintessência*".

João Pessoa, 24 de fevereiro de 2017.

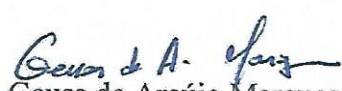
Orientador:


Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
(UFPB)

1º Examinador:


Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
(UFPB)

2º Examinador:


Profª. Dra. Geusa de Araújo Marques
(UFCG)

Ata da Sessão Pública da Defesa de
Dissertação de **Mestrado** do aluno **Marco
Maciel Dias e Costa**, candidato ao Título de
Mestre em Física na Área de Concentração
Gravitação e Cosmologia.

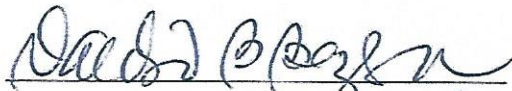
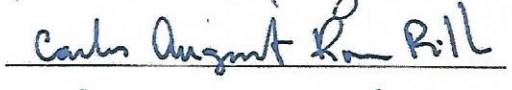
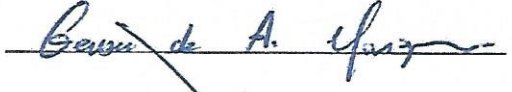
Aos vinte e quatro dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e dezessete, às 16h00, na sala de reuniões do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal da Paraíba, reuniram-se os membros da Banca Examinadora constituída para examinar o candidato ao grau de Mestre em Física na área de Gravitação e Cosmologia, **Marco Maciel Dias e Costa**. A comissão examinadora composta pelos professores doutores: Valdir Barbosa Bezerra (DF/UFPB), orientador e presidente da banca examinadora, Carlos Augusto Romero Filho (DF/UFPB) e Geusa de Araújo Marques (UFCG). Dando início aos trabalhos, o Prof. Valdir Barbosa Bezerra comunicou aos presentes a finalidade da reunião. A seguir, passou a palavra o candidato para que o mesmo fizesse, oralmente, a exposição do trabalho de dissertação intitulado "*Buracos negros com nuvem de cordas e quintessência*". Concluída a exposição, o candidato foi arguido pela Banca Examinadora que emitiu o seguinte parecer: "**aprovado**". Assim sendo, deve a Universidade Federal da Paraíba expedir o respectivo diploma de Mestre em Física na forma da lei. E para constar, eu, Danilo Wilson Lemos Menezes, lavrei esta ata que vai assinada por mim e pelos membros da Banca Examinadora. João Pessoa, **24 de fevereiro de 2017**.

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra
Orientador - UFPB

Prof. Dr. Carlos Augusto Romero Filho
UFPB

Profa. Dra. Geusa de Araújo Marques
UFCG

Lic. Danilo Wilson Lemos Menezes
Técnico em Assuntos Educacionais


Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Francisco Reginaldo da Costa e Teresinha Maria Dias de Paiva e Costa por ter me lançado ao mundo e pelo que já fizeram por mim neste pequeno planeta Terra; aos meus irmãos Márcio Costa, Reginaldo Júnior e Mateus Costa, torcedores fiéis pelas minhas conquistas acadêmicas; aos meus tios e tias, com destaque para tio João Batista que contribuiu de forma direta, desde o ensino médio, para meu ingresso na UFPB. Não poderia deixar de lembrar de meus avós, principalmente de Francisca Costa de Souza(*in memoriam*), exemplo de ser humano a ser seguido, portadora de um elevado potencial intelectual, que mostrava na prática a importância de estudar. À memória dela me influencia bastante. Agradeço a minha esposa Suely Pereira Galdino, por cuidar de mim. Quero agradecer a todos que compõe o Departamento de Física da UFPB, com destaque para dois professores, Dr. Valdir Barbosa Bezerra e Dr. Edmundo Marinho. Prof. Valdir me orienta desde a graduação e o Prof. Edmundo foi quem me inseriu no grupo da Gravitação e Cosmologia. Mas para mim, os dois são mais do que isso, pois os considero amigos do peito. Levarei os ensinamentos destes dois por toda a vida. Outra pessoa a quem sou muito grato é Horácio Vieira, por tudo que ele tem me ajudado aqui no pós-graduação, assim como ao meu amigo e pós-graduando Antônio José Gomes Carvalho. Por fim, quero agradecer à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Investigamos o papel desempenhado por nuvem de cordas e quintessência nas soluções das equações de Einstein. Neste contexto, obtivemos a solução estática e esfericamente simétrica que corresponde a um buraco negro estático com uma nuvem de cordas e quintessência como fontes, além da massa do buraco negro (espaço-tempo de Letelier com quintessência). Usando a solução estática, aplicamos o método de complexificação das coordenadas para construir, a partir desta, a correspondente solução para um buraco negro com rotação, com nuvem de cordas e quintessência (espaço-tempo de Letelier com rotação e quintessência).

Palavras-chave: Buraco negro; nuvem de cordas; quintessência.

Abstract

We investigate the role played by a cloud of strings and quintessence on the solutions of the Einstein's equations. In the context, the static spherically symmetric solution that correspond to a black hole with a cloud of strings and quintessence (Letelier spacetime with quintessence) was obtained. Using this static solution we applied a method of coordinate complexification to construct the rotating black hole solution with a cloud of strings and quintessence (rotating Letelier spacetime with quintessence).

Keywords: Black hole; cloud of strings; quintessence.

Lista de ilustrações

Figura 1	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).	73
Figura 2	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -\frac{2}{3}$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).	73
Figura 3	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -1$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).	74
Figura 4	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).	75
Figura 5	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 0.89$ (curva preta).	75
Figura 6	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{2}{3}$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).	76
Figura 7	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -1$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).	77
Figura 8	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 50$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$ e $\alpha = 0.1$.	77
Figura 9	- Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 50$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$ e $a = 0.89$.	78

Sumário

1	INTRODUÇÃO GERAL	12
2	NUVEM DE CORDAS NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL .	15
2.1	Introdução	15
2.2	Nuvem de poeira	15
2.3	Modelo para nuvem de cordas	19
2.4	Condições de energia	28
2.4.1	Condição fraca de energia	28
2.4.2	Condição dominante de energia	28
2.4.3	Condição forte de energia	29
2.5	Solução das equações de Einstein para nuvem de cordas com simetria esférica	29
3	MODELO DE FLUIDO DE CORDAS	34
3.1	Introdução	34
3.2	Fluido de cordas	34
3.2.1	Condições de energia	38
3.3	Solução das equações de Einstein para um fluido de cordas	39
4	MODELOS COSMOLÓGICOS COM NUVEM DE CORDAS	44
4.1	Introdução	44
4.2	Revisitando o modelo com cordas	44
4.3	Equações de Einstein associadas a nuvem de cordas massivas	50
4.4	Modelo cosmológico de Bianchi tipo I	53
5	BURACO NEGRO ESTÁTICO COM NUVEM DE CORDAS E QUINTESSÊNCIA (ESPAÇO-TEMPO DE LETELIER COM QUINTESSÊNCIA)	61
5.1	Introdução	61
5.2	Buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência	61
5.3	Solução correspondente ao buraco negro estático com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) imerso em quintessência	63
5.3.1	Nuvem de cordas e quintessência	64
5.4	Singularidades do espaço-tempo de Letelier com quintessência	66
5.5	Equações do movimento	69
5.5.1	Equações geodésicas no plano equatorial e potencial efetivo	70

5.5.2	Gráficos do potencial efetivo	72
5.5.3	Trajetória de uma partícula teste	76
6	BURACO NEGRO ESTACIONÁRIO COM NUVEM DE CORDAS E QUINTESSÊNCIA (ESPAÇO-TEMPO DE LETELIER ESTACIONÁRIO COM QUINTESSÊNCIA)	80
6.1	Introdução	80
6.2	Buraco negro com rotação	80
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	86
	REFERÊNCIAS	87
	 APÊNDICES	 91
	APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS DO POTENCIAL EFETIVO	92

1 Introdução geral

Em 1916, Schwarzschild publicou uma solução das equações de Einstein que corresponde ao campo gravitacional, gerado por uma distribuição esfericamente simétrica de massa, eletricamente neutra e sem rotação [1], que atualmente é conhecida como buraco negro de Schwarzschild, após a constatação de que o objeto descrito corresponde a um buraco negro [[2], [3]]. Esta solução é uma das mais importantes da teoria da relatividade geral (TRG), em virtude de sua aplicação para descrever o sistema solar, que permite obter confirmação muito precisa da TRG.

A primeira generalização da solução de Schwarzschild, no sentido de que a carga não é nula, é chamada de solução de Reissner-Nordström [[4], [5]]. Ela é estática e esfericamente simétrica, mas possui um campo elétrico associado a uma carga localizada no centro da distribuição de massa. Do ponto de vista teórico esta solução é bastante interessante, porém, ela não se aplica para descrever estrelas, por exemplo, pela simples razão de que as estrelas não são carregadas eletricamente.

Em 1963, Kerr encontrou uma generalização da solução de Schwarzschild, no sentido de incluir rotação [6]. Esta solução corresponde ao campo gravitacional na região exterior a uma distribuição esfericamente simétrica de massa, com rotação. Ela é, portanto, estacionária ao invés de estática, e axialmente simétrica em vez de esfericamente simétrica. Tendo em vista que a maioria dos objetos astrofísicos possuem rotação, a solução de Kerr é bastante aplicada no contexto da astrofísica. A generalização da solução de Kerr, de modo a considerar o buraco negro com carga elétrica, foi obtida como solução das equações de Einstein- Maxwell por Newman e colaboradores [7]. A solução obtida corresponde à geometria de Kerr-Newman que descreve os campos gravitacional e eletromagnético na região exterior a um buraco negro estacionário eletricamente carregado.

A partir dos anos setenta do século passado, foram feitos vários estudos teóricos sobre buracos negros, com demonstração de vários teoremas [8], a análise dos modos próprios de vibração destes objetos [[9] - [11]] e de aspectos da dinâmica relativística de dois corpos [[12], [13]]. Esses avanços teóricos à respeito da física de buracos negros foram motivados, em parte pelas descobertas dos quasares em 1963, pulsares em 1968 e fontes compactas de raio-X em 1962. Considerando esses avanços, juntamente com os que ocorreram com os cálculos numéricos na TRG [[14] - [16]], foi possível modelar um processo correspondente a colisão de dois buracos negros e estimar a ordem de grandeza do sinal associado a uma onda gravitacional prevista na TRG [[17], [18]], que foi detectada recentemente [19].

Os buracos negros são os mais fascinantes objetos obtidos como solução das equações

de Einstein. Eles podem influenciar a dinâmica de galáxias e liberar grandes quantidades de energia via um processo de colisão de dois buracos negros, sendo assim uma fonte de ondas gravitacionais, que poderão nos ensinar muito acerca da física desses objetos, bem como diferentes aspectos da física fundamental e da cosmologia do universo primitivo.

A observação da colisão de dois buracos negros, que se fundem em um só, ocorrida há cerca de 13 bilhões de anos e observada recentemente, via a detecção de ondas gravitacionais [19], traz a possibilidade de compreendermos a física destas estruturas astrofísicas.

Cordas cósmicas são defeitos topológicos unidimensionais previstos em algumas teorias de campo. Estes defeitos devem ter surgidos como resultado de um processo de quebra espontânea de simetria devido a transições de fase ocorridas no universo primitivo [[20], [21]]. As cordas podem formar laços “loop” ou linhas infinitamente longas, e são caracterizadas por um único parâmetro que é dado pela massa por unidade de comprimento. No caso da linha infinita, que corresponde a uma corda de Nambu-Goto, a geometria do espaço-tempo exterior à corda é cônica, o que significa dizer que é equivalente ao espaço-tempo de Minkowski com a retirada de um setor, que é proporcional a sua densidade linear de massa. Neste caso, diz-se que o espaço-tempo é localmente plano, porém, não é plano do ponto de vista global.

Esses defeitos foram muito estudados nos anos oitenta e noventa do século passado, pois, pareciam oferecer um mecanismo que pudesse gerar as perturbações de densidade que explicariam a formação de estruturas em larga escala, tais como galáxias e aglomerados. Mais recentemente, no início dos anos 2000 os dados sobre a anisotropia da radiação cósmica de fundo excluíram a possibilidade de que esses defeitos sejam responsáveis pela formação de estruturas. Mais recentemente, as cordas despertaram, novamente, o interesse, em virtude da possibilidade de terem um papel importante, mesmo sendo secundário, no processo de formação de estruturas, num cenário em que a inflação é considerada [22].

O estudo de cordas cósmicas (cordas de Nambu-Goto) no contexto da TRG foi iniciado por Letelier [23] e Stachel [24]. Letelier obteve as soluções das equações de Einstein cuja fonte consistia numa nuvem de cordas [23], com diferentes simetrias, a saber, plana, cilíndrica e esférica. Neste último caso, a solução corresponde ao buraco negro de Schwarzschild com o horizonte modificado pelo parâmetro que está associado à presença da nuvem, o que significa dizer que a presença da nuvem de cordas modifica a estrutura do horizonte do buraco negro em comparação com o de Schwarzschild.

O trabalho de Letelier sobre nuvem de cordas [23] foi generalizado de modo a considerar a pressão produzida pelas cordas [25], o que significa dizer que, agora, trata-se de um fluido de cordas. Neste caso, foi obtida a solução das equações de Einstein com simetria esférica.

Desde o trabalho pioneiro de Letelier [23] até os dias de hoje, foram analisados

vários sistemas contendo nuvens de cordas, tanto no contexto da gravitação [[26] - [28]] como que em modelos cosmológicos [[29] - [32]].

As observações astronômicas recentes indicam que o nosso universo está numa fase de expansão acelerada [42], fenômeno este atribuído à chamada energia escura, sobre a qual não temos nenhuma informação a respeito de sua natureza, o que leva a se pensar em várias possibilidades em relação ao que pode representar esta energia. Dentre os candidatos a energia escura, podemos mencionar a quintessência [[34] - [38]], a qual permeia todo espaço-tempo. Isto significa dizer que um buraco negro envolto por quintessência terá sua geometria modificada, com várias consequências em relação as propriedades físicas desses objetos. Em razão disto, foram investigadas algumas situações em que um buraco negro é envolto por quintessência, e as soluções correspondentes das equações de Einstein foram obtidas [[39] - [47]].

Esta dissertação está dividida em sete capítulos. No capítulo 2, fazemos uma revisão sobre o formalismo para tratar nuvem de cordas usando bivectores e apresentamos a solução correspondente ao espaço-tempo de Letelier [23]. No capítulo 3, apresentamos uma breve revisão sobre o modelo com fluido de cordas [25] e no capítulo 4 revisamos o trabalho de Letelier [31] que trata da obtenção da solução de Bianchi I utilizando um fluido de cordas como fonte. No capítulo 5, apresentamos a solução das equações de Einstein para o espaço-tempo de Letelier com quintessência, e no capítulo 6, encontramos a versão com rotação do espaço-tempo de Letelier com quintessência. No capítulo 7, fazemos a conclusão do trabalho. Admitiremos que a métrica do espaço-tempo tem assinatura $(+,-,-,-)$. O sistema de unidade que consideramos é aquele em que $\hbar = c = 1$.

2 Nuvem de cordas na teoria da relatividade geral

2.1 Introdução

O estudo das soluções das equações de Einstein considerando como fonte uma nuvem de cordas foi iniciado por Letelier [23], em 1979. A justificativa apresentada, então, para a obtenção das soluções, neste cenário, foram as seguintes:

- Em primeiro lugar, cordas relativísticas podem ser usadas para construir bons modelos para as interações [[48] - [51]].
- Em segundo lugar, a possibilidade de se considerar o universo como sendo descrito por uma coleção de objetos com extensão, e portanto, não pontuais, ao invés de objetos pontuais(partículas).

Levando em consideração essa ideia de cordas(cordas de Nambu-Goto), Letelier apresentou o formalismo para tratar nuvem de cordas [23] e obteve a solução das equações de Einstein para uma nuvem de cordas esfericamente simétrica, que estamos denominando espaço-tempo de Letelier [52]. Adicionalmente, ele obteve as soluções com simetria plana e cilíndrica.

Neste capítulo vamos fazer uma breve revisão sobre o formalismo usado por Letelier, bem como reobter a solução para uma nuvem de cordas com simetria esférica.

2.2 Nuvem de poeira

Nesta seção vamos apresentar, brevemente, o formalismo para estudar uma nuvem de poeira, conforme descrito na seção II de [23]. As partículas que compõem esta poeira podem ser descritas a partir da parametrização da folha-mundo $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$, onde τ é o tempo próprio e σ é um parâmetro que rotula cada folha-mundo.

A trajetória de uma partícula pontual é parametrizada, classicamente, por um parâmetro τ , que é o tempo próprio [23]. A posição da partícula para cada instante de tempo τ é dada por $x^\mu = x^\mu(\tau)$.

A ação S para uma partícula de massa m é:

$$S = m \int \sqrt{\left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}\right)^2} d\tau, \quad (2.1)$$

onde o integrando é o comprimento infinitesimal do elemento de linha-mundo.

Como veremos na subseção sobre nuvem de cordas, a ação S de uma corda é proporcional a área da superfície, resultante da evolução da corda no espaço-tempo.

A ação dada por eq(2.1) pode ser descrita do seguinte modo:

$$S = m \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\tau, \quad (2.2)$$

onde

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (2.3)$$

Por outro lado, o tensor energia-momentum de uma partícula é definido por:

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}}, \quad (2.4)$$

onde L é a lagrangiana. De eq(2.2) temos:

$$L = m \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}. \quad (2.5)$$

Então, o tensor energia-momentum da partícula pode ser escrito na forma

$$T^{\mu\nu} = m \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \delta(x - x_p(x)). \quad (2.6)$$

Consideremos uma nuvem de partículas, com linhas-mundo descritas por $X^\mu = X^\mu(\tau, \xi, \eta, \zeta)$, onde ξ , η e ζ são parâmetros que indicam linhas-mundo particulares e τ é o tempo próprio. A densidade de energia própria ρ da nuvem de partículas é a energia por unidade de volume medida por um observador local, em repouso com relação a nuvem de partículas [23].

Por analogia com a eq(2.6), dizemos que o tensor energia-momentum da nuvem de partículas é:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}, \quad (2.7)$$

onde

$$u^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}. \quad (2.8)$$

Vamos considerar a reparametrização do tempo próprio, isto é,

$$\tau \longrightarrow \tau^* = \tau^*(\tau, \xi, \eta, \zeta), \quad \frac{\partial \tau^*}{\partial \tau} \neq 0, \quad (2.9)$$

para mostrar que este formalismo é invariante por reparametrização. Assim, vemos que X^μ se transforma como um escalar, $X^\mu(\tau^*, \xi, \eta, \zeta) = X^\mu(\tau, \xi, \eta, \zeta)$, enquanto que $u^{*\mu} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau^*}$ se transforma do seguinte modo:

$$u^{*\mu} \equiv \frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} u^\mu. \quad (2.10)$$

Em termos dos parâmetros τ^* , ξ , η e ζ , o tensor energia-momentum da nuvem de partículas é:

$$T^{*\mu\nu} = \rho^* \frac{u^{*\mu} u^{*\nu}}{\sqrt{u^{*\alpha} u_{*\alpha}}}. \quad (2.11)$$

Como $u^{*\mu}$ se transforma como mostrado na eq(2.10), então

$$u^{*\mu} u^{*\nu} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} \right)^2 u^\mu u^\nu. \quad (2.12)$$

Substituindo a eq(2.12) na eq(2.11), obtemos:

$$T^{*\mu\nu} = \rho^* \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} \right) \frac{u^\mu u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}. \quad (2.13)$$

Admitindo que o tensor energia-momentum é invariante pela transformação dada pela eq(2.9), então, a densidade de energia ρ se transforma do seguinte modo:

$$\rho = \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau^*} \right) \rho^*. \quad (2.14)$$

As equações de Einstein para as nuvens de partículas podem ser escritas na forma [23]

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = -T^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

onde fizemos a constante de acoplamento K igual a -1 .

As identidades de Bianchi nos dizem que

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.16)$$

Substituindo a eq(2.7) na eq(2.16) obtemos

$$\frac{\nabla_\mu (\rho u^\mu) u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} + \rho u^\mu \nabla_\mu \left[\frac{u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \right] = 0, \quad (2.17)$$

onde ∇_μ denota a derivada covariante usual.

Multiplicando a eq(2.17) por $\frac{u_\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}}$, temos:

$$\frac{\nabla_\mu (\rho u^\mu) u^\nu u_\nu}{u^\alpha u_\alpha} + \rho \frac{u^\mu u_\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \nabla_\mu \left(\frac{u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \right) = 0. \quad (2.18)$$

Conforme mostrado em [54],

$$\frac{u_\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \nabla_\mu \left(\frac{u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \right) = 0 \quad (2.19)$$

e substituindo o resultado dado pela eq(2.19) na eq(2.18), obtemos:

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0 \quad (2.20)$$

que é a equação que representa a lei de conservação.

Considerando as eq(2.18) e (2.20), obtemos a seguinte equação de geodésica

$$u^\mu \nabla_\mu \left(\frac{u^\nu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} \right) = 0. \quad (2.21)$$

As expressões usuais para descrever uma nuvem de partículas podem ser obtidas se escolhermos uma parametrização tal que

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad (2.22)$$

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) = 0, \quad (2.23)$$

$$u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0. \quad (2.24)$$

Note que a eq(2.24) leva a

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\alpha u_\alpha) = 0, \quad (2.25)$$

pois

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\alpha u_\alpha) = u^\mu u_\alpha \nabla_\mu u^\alpha + u^\mu u^\alpha \nabla_\mu u_\alpha. \quad (2.26)$$

Como $u^\alpha \nabla_\mu u_\alpha = 0$, então

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\alpha u_\alpha) = 0, \quad (2.27)$$

o que significa dizer que a norma do vetor tangente é constante ao longo do transporte paralelo, ao longo de geodésicas.

2.3 Modelo para nuvem de cordas

Nesta seção vamos apresentar, brevemente, o formalismo para estudar uma nuvem de poeira, conforme descrito na seção III da [23].

Uma corda é parametrizada pelos parâmetros τ e σ , sendo descrita por uma equação $x^\mu = x^\mu(\tau, \sigma)$, como indicada anteriormente. Fazendo $\tau = x^0 = t$ num dado instante de tempo t , a corda será uma curva no espaço tridimensional dada pelas funções $x^i = x^i(\tau, \sigma)$.

Supondo que a corda se propaga com velocidade menor ou igual a velocidade da luz, seu movimento satisfará a seguinte relação

$$1 - \left(\frac{\partial x^i}{\partial t} \right)^2 \geq 0. \quad (2.28)$$

Com a evolução da corda uma superfície é formada. Em cada ponto desta superfície existe um vetor tangente tipo-tempo, assim como um vetor tangente tipo-espaço. Por analogia com a eq(2.1), podemos supor que a ação relativística para uma corda livre (corda de Nambu-Goto) é proporcional a área da superfície resultante da evolução da própria corda, no espaço-tempo.

O elemento de área de uma superfície é

$$dA = \sqrt{\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2} d\sigma d\tau, \quad (2.29)$$

que é positiva desde que

$$\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2 \geq 0. \quad (2.30)$$

Introduzindo a notação $(\zeta^0, \zeta^1) = (\tau, \sigma)$, o tensor métrico do espaço-tempo bidimensional é dado por

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x_\mu, \quad (2.31)$$

onde os índices α e β assumem os valores 0 ou 1. A partir da eq(2.31) vemos que

$$\det g(\zeta) = \left[\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \right)^2 - \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial \sigma} \right)^2 \right]. \quad (2.32)$$

Usando as eq((2.29)-(2.32)), o elemento de área dA , pode ser escrito em termos da métrica da seguinte forma

$$dA = \sqrt{-\det g(\zeta)} d\zeta^1 d\zeta^0. \quad (2.33)$$

O elemento de área é invariante sob uma mudança qualquer de parâmetro. Se fizermos

$$\tilde{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_i(\zeta_0, \zeta_1), \quad (2.34)$$

temos que

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = \sum_{i,j} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{\zeta}_i} \frac{\partial \tilde{\zeta}_i}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tilde{\zeta}_j} \frac{\partial \tilde{\zeta}_j}{\partial \zeta_\beta}, \quad (2.35)$$

que podemos escrever como

$$g_{\alpha\beta}(\zeta) = M_{\alpha i}^T g_{ij}(\tilde{\zeta}) M_{j\beta}, \quad (2.36)$$

onde

$$M_{ab} = \frac{\partial \tilde{\zeta}_a}{\partial \zeta_b}. \quad (2.37)$$

Usando a eq(2.36), obtemos

$$\det g = \det \tilde{g} (\det M)^2. \quad (2.38)$$

Para que o elemento infinitesimal dA seja invariante, temos que ter

$$d\tilde{A} = \sqrt{-\det \tilde{g}} d\tilde{\zeta}^1 d\tilde{\zeta}^0. \quad (2.39)$$

Substituindo a eq(2.38) na eq(2.39), obtemos:

$$d\tilde{A} = \sqrt{-\det g} \frac{d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_0}{\det M}. \quad (2.40)$$

Se $d\tilde{A} = dA$, então, usando a eq(2.33) e a eq(2.40), concluimos que

$$d\zeta_1 d\zeta_0 = \frac{d\tilde{\zeta}_1 d\tilde{\zeta}_0}{\det M}. \quad (2.41)$$

Como supomos acima, a ação relativística de uma corda livre é proporcional a área. Portanto, podemos afirmar que a lagrangiana é uma função de $\dot{x}$ e x' , onde o ponto significa a derivada em relação a τ e a linha é a derivada em relação a σ . Fazendo uma variação infinitesimal do caminho traçado pela corda durante sua evolução, isto é,

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + \delta x^\mu(\tau, \sigma), \quad (2.42)$$

podemos obter, a partir do princípio da mínima ação,

$$\delta S = 0, \quad (2.43)$$

a equação de movimento da corda. Fazendo esse cálculo, obtemos

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int_0^\pi \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial \sigma} \right) d\sigma. \quad (2.44)$$

Como

$$\delta x^\mu(\tau = \tau_1) = 0 = \delta x^\mu(\tau = \tau_2) \quad (2.45)$$

e

$$\delta x^\mu(\sigma = 0), \delta x^\mu(\sigma = \pi) \quad (2.46)$$

são arbitrárias, então, usando a eq(2.43), devemos ter:

$$\frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = 0 \quad (2.47)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial L}{\partial x'_\mu} = 0, \quad (2.48)$$

onde a equação de movimento da corda livre é dada por eq(2.48).

Outro modo de estudar as cordas é descrevendo-as por meio de um bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$. A ação de uma corda, como já visto, é

$$S = \int L d\zeta^0 d\zeta^1 \quad (2.49)$$

e

$$L \equiv M \sqrt{-\gamma}, \quad (2.50)$$

onde M é uma constante adimensional que caracteriza a corda e

$$\gamma \equiv \det \gamma_{AB}, \quad (2.51)$$

onde

$$\gamma_{AB} \equiv g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B}. \quad (2.52)$$

Um bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ é um tensor de ordem 2 que é associado à folha-mundo da corda, sendo dado por

$$\Sigma^{\mu\nu} = \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B}, \quad (2.53)$$

onde ϵ^{AB} é o símbolo de Levi-Civita bidimensional normalizado, de modo que $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$.

Substituindo a eq(2.52) na eq(2.51), obtemos

$$\gamma = g_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^0} g_{\beta\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^1} - g_{\mu\alpha} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^0} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^1} g_{\beta\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^0}. \quad (2.54)$$

A forma covariante do bivetor dada pela eq(2.53) é

$$\Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \Sigma^{\mu\nu}. \quad (2.55)$$

Portanto, $\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}$ pode ser escrito na forma

$$\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma^{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

Substituindo a eq(2.53) na eq(2.56), obtemos

$$\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\beta\nu} \epsilon^{CD} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \zeta^C} \frac{\partial x^\beta}{\partial \zeta^D} \epsilon^{AB} \frac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^A} \frac{\partial x^\nu}{\partial \zeta^B}. \quad (2.57)$$

Efetuada a soma nos índices C , D , A e B , vemos que

$$\gamma = \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}. \quad (2.58)$$

Considerando a expressão para γ dada pela eq(2.58) e substituindo na eq(2.50), podemos escrever a lagrangiana em termos dos bivectores, da seguinte forma

$$L = M \sqrt{-\frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}}. \quad (2.59)$$

Neste formalismo, o tensor energia-momentum para uma corda é expresso na forma

$$T^{\mu\nu} = \frac{M}{\sqrt{-\gamma}} \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\nu} \quad (2.60)$$

tendo em vista o fato de que $\Sigma^{\alpha\beta} = -\Sigma^{\beta\alpha}$.

Analogamente a eq(2.60), o tensor energia-momentum de uma nuvem de cordas de densidade ρ é dado por

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\nu}}{\sqrt{-\gamma}}. \quad (2.61)$$

Usando a eq(2.34), a folha-mundo x^{μ} e o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ transformam-se dos seguintes modos:

$$x^{*\mu}(\zeta^*) = x^{\mu}(\zeta) \quad (2.62)$$

e

$$\Sigma^{*\mu\nu}(\zeta^*) = J \left(\frac{\zeta^C}{\zeta^{*B}} \right) \Sigma^{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

onde

$$\Sigma^{*\mu\nu}(\zeta^*) = \epsilon^{A^*B^*} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \zeta^{A^*}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \zeta^{B^*}}, \quad (2.64)$$

necessitando que o jacobiano J da transformação seja diferente de zero.

Para que o tensor energia-momentum $T^{\mu\nu}$ seja invariante sob reparametrizações da folha-mundo da corda, a densidade de energia, ρ , deve se transformar como $\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}$. Para demonstrar esse resultado procedemos do mesmo modo que fizemos para mostrar a eq(2.14).

À medida que a nuvem de corda evolui no tempo, uma superfície é formada. Como estamos usando bivectores para escrever seu tensor energia-momentum e, por conseguinte,

obtermos suas equações de movimento, o bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ deverá satisfazer as duas condições abaixo [54]:

$$\Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (2.65)$$

e

$$\nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (2.66)$$

onde os colchetes indicam a anti-simetrização dos índices envolvidos.

Tais condições garantem que o bivetor $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivetor simples e que x_0 e x_1 formam uma superfície. Portanto, pela primeira condição, $\Sigma^{\mu\nu}$ pode ser escrito do seguinte modo:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu, \quad (2.67)$$

onde ξ e η são vetores que delimitam um elemento de área da superfície.

Note que se expandirmos a soma nos índices A e B na eq(2.53) obtém-se uma expressão na forma semelhante a da eq(2.67). A partir desta última expressão para $\Sigma^{\mu\nu}$, temos que

$$\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} = 2(\xi^\mu \xi_\mu \eta^\nu \eta_\nu - \xi^\mu \eta_\mu \eta^\nu \xi_\nu). \quad (2.68)$$

Das eqs(2.58) e (2.68), vemos que

$$\gamma = \xi^\mu \xi_\mu \eta^\nu \eta_\nu - \xi^\mu \eta_\mu \eta^\nu \xi_\nu. \quad (2.69)$$

É importante notar que

$$\Sigma_\alpha^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_\beta^\nu = -(\xi^\beta \xi_\beta \eta^\alpha \eta_\alpha - \xi^\alpha \eta_\alpha \eta^\beta \xi_\beta)(\xi^\mu \eta^\nu - \xi^\nu \eta^\mu). \quad (2.70)$$

Substituindo as eqs(2.67) e (2.69) na eq(2.70), obtemos

$$\Sigma_\alpha^\mu \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_\beta^\nu = \gamma \Sigma^{\mu\nu}. \quad (2.71)$$

A expressão eq(2.71), assim como

$$\Sigma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Sigma_{\beta\nu} = \frac{3}{2} \Sigma^{\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Sigma_{\beta\nu]} - \frac{1}{4} \nabla_\nu (\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}), \quad (2.72)$$

é uma identidade muito útil, [23]. Mais adiante faremos uso de ambas.

A partir do tensor energia-momentum da nuvem de cordas, dado pela eq(2.61), e da identidade de Bianchi, temos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} + \rho \Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0, \quad (2.73)$$

e multiplicando a eq(2.73) por $\frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}}$, obtemos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}} + \rho \Sigma^{\mu\beta} \frac{\Sigma_{\nu\alpha}}{\sqrt{-\gamma}} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0. \quad (2.74)$$

Escrevendo o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ como na eq(2.67), vemos que o segundo termo do lado esquerdo da igualdade na eq(2.74) é igual a zero. Então,

$$\frac{\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu \Sigma_{\nu\alpha}}{\gamma} = 0. \quad (2.75)$$

Considerando a eq(2.75), podemos concluir que

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma_\beta^\nu = 0, \quad (2.76)$$

que pode ser reescrita, usando a representação de $\Sigma^{\mu\nu}$ dada pela eq(2.53), na seguinte forma

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) = 0. \quad (2.77)$$

A partir da eq(2.77) podemos demonstrar a eq(2.66). De fato, usando eq(2.77), podemos escrever as seguintes identidades

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\nu}) \Sigma^{\beta\gamma} = 0, \quad (2.78)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\alpha}) \Sigma^{\gamma\beta} = 0, \quad (2.79)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\gamma}) \Sigma^{\alpha\beta} = 0, \quad (2.80)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\gamma}) \Sigma^{\beta\alpha} = 0, \quad (2.81)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma^{\gamma\alpha} = 0 \quad (2.82)$$

e

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\beta}) \Sigma^{\alpha\gamma} = 0. \quad (2.83)$$

Usando as equações de eq(2.78) a eq(2.83), obtemos

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]}) = 0, \quad (2.84)$$

que equivale a dizer que

$$(\partial_\mu \rho) \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} + \rho \nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0. \quad (2.85)$$

Agora, substituindo a eq(2.65) na eq(2.85), obtemos

$$\nabla_\mu (\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]}) = 0. \quad (2.86)$$

Portanto, demonstramos a eq(2.66).

A combinação das eqs(2.76) e (2.73), nos permite escrever a seguinte igualdade

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0, \quad (2.87)$$

que é a equação de movimento para a nuvem de cordas.

Portanto, usando às equações de Einstein e suas condições de integrabilidade, à saber, as identidades de Bianchi, podemos escrever

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -\rho \frac{\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}}, \quad (2.88)$$

$$\Sigma^{\mu[\alpha} \Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (2.89)$$

$$\nabla_\mu (\rho \Sigma^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.90)$$

e

$$\Sigma^{\mu\beta} \nabla_\mu \left[\frac{\Sigma_\beta^\nu}{\sqrt{-\gamma}} \right] = 0. \quad (2.91)$$

Tomando o traço da eq(2.88), temos:

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} R = -\rho g^{\mu\nu} \frac{\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}}, \quad (2.92)$$

que implica em

$$R = 2\rho\sqrt{-\gamma}. \quad (2.93)$$

Então, podemos usar a eq(2.92), para reescrever as equações de Einstein, dadas pela eq(2.88), da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\rho}{\sqrt{-\gamma}} \left(\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta} \right). \quad (2.94)$$

A lei de conservação dada pela eq(2.77) pode ser escrita na forma equivalente abaixo

$$\partial_\mu (\rho\sqrt{-g}\Sigma^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.95)$$

Consideremos os componentes do bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ e da densidade de energia ρ da nuvem de cordas, quando o espaço-tempo tem uma simetria descrita por meio de um vetor de Killing ξ^μ , isto é,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.96)$$

onde $\mathcal{L}_\xi$ denota a derivada de Lie, cuja definição é:

$$\mathcal{L}_\xi A_{\mu\nu} = \xi^\lambda \partial_\lambda A_{\mu\nu} + A_{\lambda\nu} \partial_\mu \xi^\lambda + A_{\mu\lambda} \partial_\nu \xi^\lambda, \quad (2.97)$$

onde $A_{\mu\nu}$ representa um tensor covariante arbitrário de ordem 2.

Para um escalar, a derivada de Lie se reduz a

$$\mathcal{L}_\xi \phi = \xi^\lambda \partial_\lambda \phi. \quad (2.98)$$

Como consequência da eq(2.96), temos, portanto, que

$$\mathcal{L}_\xi R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.99)$$

pois podemos expressar o tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, em termos da métrica. Então, usando as eqs(2.88) e (2.99), obtemos os seguintes resultados:

$$\mathcal{L}_\xi \Sigma_{\mu\nu} = 0 \quad (2.100)$$

e

$$\mathcal{L}_\xi \rho = 0, \quad (2.101)$$

o que significa dizer que a simetria de $\Sigma^{\mu\nu}$ e ρ corresponde a mesma simetria do espaço-tempo.

2.4 Condições de energia

Nesta seção vamos analisar as restrições que as diferentes condições de energia conhecidas como condição fraca, dominante e forte, impõe ao bivector $\Sigma^{\mu\nu}$.

2.4.1 Condição fraca de energia

A condição fraca de energia, compreendida como uma densidade local da energia, é:

$$T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu \geq 0, \quad (2.102)$$

onde U_μ é um vetor arbitrário tipo-tempo com norma maior que zero.

Aplicando, então, essa condição expressa pela eq(2.102), no caso em que estamos considerando uma nuvem de cordas, cujo tensor energia-momentum é dado pela eq(2.61), encontramos a seguinte desigualdade

$$\frac{\rho U_\mu \Sigma^{\mu\beta} \Sigma_\beta^\nu U_\nu}{\sqrt{-\gamma}} \geq 0. \quad (2.103)$$

2.4.2 Condição dominante de energia

A condição dominante de energia está relacionada à densidade local de energia e a direção do fluxo local de energia, isto é,

$$T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu > 0, \quad (2.104)$$

e

$$U_\mu T^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu U_\nu \geq 0. \quad (2.105)$$

Portanto, o uso dessas restrições, quando aplicadas a eq(2.61), nos fornece o seguinte resultado

$$U_\mu T^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu U_\nu = \rho^2 U_\mu \Sigma^{\mu\theta} \Sigma_\theta^\nu U_\nu. \quad (2.106)$$

Portanto

$$\rho^2 U_\mu \Sigma^{\mu\theta} \Sigma_\theta^\nu U_\nu \geq 0. \quad (2.107)$$

2.4.3 Condição forte de energia

Essa condição é expressa pela seguinte desigualdade:

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (2.108)$$

Usando a relação

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\theta} \Sigma_{\mu\theta}}{\sqrt{-\gamma}} \quad (2.109)$$

e o fato de que $\Sigma^{\mu\theta} \Sigma_{\mu\theta} = 2\gamma$, obtemos

$$T = 2\rho\sqrt{-\gamma}. \quad (2.110)$$

Finalmente, substituindo as eqs(2.61) e (2.110) na eq(2.108), obtemos o seguinte resultado:

$$\rho \frac{U_\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} U_\nu}{\sqrt{-\gamma}} \geq \rho\sqrt{-\gamma}. \quad (2.111)$$

2.5 Solução das equações de Einstein para nuvem de cordas com simetria esférica

Nesta seção será feita uma revisão do estudo que levou à obtenção da solução das equações de Einstein para uma nuvem de cordas com simetria esférica. Inicialmente, será considerada a forma mais geral para uma fonte esfericamente simétrica, composta por uma partícula colocada na origem do sistema de coordenadas, envolvida por uma nuvem de cordas esfericamente simétrica.

As soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein podem ser escritas na forma geral dada por

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.112)$$

onde ν e λ são funções somente de r (coordenada radial).

Tendo em vista a simetria esférica do espaço-tempo e o fato de estarmos considerando um sistema com massa bem definida, ou seja, não há variação do conteúdo de

matéria e energia com o tempo, ao longo da corda, a densidade de energia ρ e o bivector $\Sigma_{\mu\nu}$ devem ser funções somente de r . Neste caso, as componentes do bivector, Σ_{01} e Σ_{10} são diferentes de zero, enquanto as demais componentes são nulas.

A lei de conservação, eq(2.77), pode ser escrita do seguinte modo:

$$\partial_\mu (\sqrt{-g}\rho\Sigma^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.113)$$

Da eq(2.112), obtemos que

$$g = -e^{\nu+\lambda}r^4\sin^2\theta. \quad (2.114)$$

Substituindo a eq(2.114) na eq(2.113),

$$\partial_1 \left(r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \rho \Sigma^{01} \right) = 0, \quad (2.115)$$

cuja solução é

$$\Sigma^{01} = \frac{ae^{-\frac{(\nu+\lambda)}{2}}}{\rho r^2}, \quad (2.116)$$

onde a é uma constante de integração.

Considerando o produto $\Sigma^{\mu\theta}\Sigma_{\mu\theta} = 2\gamma$, obtemos

$$\Sigma^{01}\Sigma_{01} = \gamma, \quad (2.117)$$

o que implica

$$g_{00}g_{11}\Sigma^{01}\Sigma^{01} = \gamma. \quad (2.118)$$

Substituindo $g_{00} = e^\nu$, $g_{11} = -e^\lambda$ e Σ^{01} dada pela eq(2.116) na eq(2.118), obtemos

$$\sqrt{-\gamma}\rho = \frac{a}{r^2}, \quad (2.119)$$

de onde concluímos que $\sqrt{-\gamma}$ é função somente de r . Considerando a métrica dada pela eq(2.112), as equações de Einstein são escritas da seguinte forma

$$2\nu'' - \lambda'\nu' + \frac{4\nu'}{r} + \nu'^2 = 0, \quad (2.120)$$

$$2\nu'' - \lambda'\nu' - \frac{4\lambda'}{r} + \nu'^2 = 0 \quad (2.121)$$

e

$$e^{-\lambda} \left(1 + \frac{r(\nu' - \lambda')}{2} \right) - 1 = -a, \quad (2.122)$$

onde consideramos $T_0^0 = T_1^1 = \frac{a}{r^2}$ e $T_2^2 = T_3^3 = 0$. A linha indica derivada em relação à coordenada radial.

Considerando as eqs(2.120) e (2.121), e subtraindo membro a membro, obtemos

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad (2.123)$$

o que nos leva a concluir que

$$\nu = -\lambda, \quad (2.124)$$

a menos de uma constante de integração que na realidade estamos fazendo igual a zero, pois sempre podemos fazer isso por meio de uma redefinição da coordenada t .

Usando a relação entre ν e λ , dada pela eq(2.124) e substituindo na eq(2.122), obtemos

$$e^{-\lambda} (1 - r\lambda') = (re^{-\lambda})' = 1 - a, \quad (2.125)$$

cuja solução é

$$re^{-\lambda} = (1 - a)r + k, \quad (2.126)$$

onde k é uma constante de integração.

Note que para $a = 0$, isto é, na ausência da nuvem de cordas, a eq(2.126) nos fornece resultado semelhante ao obtido no caso do espaço-tempo de Schwarzschild. Neste caso, a análise comparativa feita na aproximação de campo fraco, nos permite escolher, por uma questão de consistência $k = -2m$, onde m representa, fisicamente, a massa Newtoniana do corpo central. Uma outra forma de justificar esta escolha, pode ser vista se absorvermos o parâmetro a na redefinição das coordenadas temporal e radial, bem como da massa. Neste caso, a métrica fica reduzida, formalmente, à de Schwarzschild, com uma deficiência de ângulo sólido. Portanto, no limite, quando o ângulo sólido tende a 4π , o que equivale a dizer que a deficiência angular vai a zero, e desta forma esperamos obter a solução de Schwarzschild, o que somente ocorrerá se identificarmos k com $-2m$. Por isso, com essa escolha para a relação entre a constante de integração e a massa, podemos escrever

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 - a - \frac{2m}{r}. \quad (2.127)$$

Portanto, a métrica do espaço-tempo na presença da nuvem de cordas é dada por

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - a - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.128)$$

Esta métrica descreve a geometria do espaço-tempo que chamaremos espaço-tempo de Letelier [52]. Ela representa o espaço-tempo associado a uma partícula de massa m centrada na origem de um sistema de coordenadas rodeada por uma nuvem de cordas, com simetria esférica (as cordas distribuídas radialmente). Note que a métrica de Schwarzschild pode ser obtida da métrica de Letelier fazendo $a = 0$, desde que as condições de energia sejam respeitadas. Isto significa dizer que o espaço-tempo de Letelier corresponde a um buraco negro com uma nuvem de cordas radialmente distribuída.

Vejam os quais limitações as condições de energia impõe a constante de integração a . Pela condição forte, eq(2.111), e eq(2.116), obtemos

$$\frac{2\rho}{\sqrt{-\gamma}} \left(\frac{a}{\rho r^2}\right)^2 e^\nu > \rho \sqrt{-\gamma}. \quad (2.129)$$

A partir deste resultado, vemos que a constante a só não pode admitir valor nulo.

Pelas condições fraca e dominante, eqs(2.103) e (2.107), respectivamente, e eq(2.116), obtemos

$$-\frac{2\rho}{\sqrt{-\gamma}} \left(\frac{a}{\rho r^2}\right)^2 e^{-\lambda} \geq 0 \quad (2.130)$$

e

$$-2\rho^2 \left(\frac{a^2}{\rho r^2}\right) e^{-\lambda} \geq 0. \quad (2.131)$$

A partir destes dois últimos resultados, concluímos que a constante de integração a só pode ser zero. Com isso, podemos afirmar que, a partir das três condições de energia, a constante a pode ser nula, negativa ou positiva.

O espaço-tempo de Letelier, dado pela (2.128), tem um horizonte de eventos em

$$r_H = \frac{2m}{1-a}, a \neq 1. \quad (2.132)$$

Note que $a \rightarrow 0$, o raio de Schwarzschild é reobtido. Por outro lado, se $a \rightarrow 1$, o raio do horizonte de eventos tende ao infinito. Se $0 < a < 1$, a nuvem de cordas aumenta o raio de Schwarzschild do buraco negro por uma quantidade de $(1-a)^{-1}$. Se $a < 0$, o raio do buraco negro de Schwarzschild é reduzido por uma quantidade $(1-a)^{-1}$. Se $a > 1$, a

eq(2.128) representa um espaço-tempo homogêneo. Note que se $m = 0$, então $r_H = 0$. O que significa dizer que a nuvem de cordas sozinha não tem horizonte de eventos. Ela tem somente uma singularidade em $r = 0$.

3 Modelo de fluido de cordas

3.1 Introdução

Neste capítulo, faremos uma breve revisão sobre a generalização [25] do modelo de nuvem de cordas [23] estudado no segundo capítulo desta dissertação, que consiste em admitir que as cordas que formam as nuvens produzem uma pressão ou uma tensão. Neste cenário que corresponde a um fluido de cordas, analisaremos as condições de energia e resolveremos as equações de Einstein, considerando como fonte um fluido de cordas esfericamente simétrico.

3.2 Fluido de cordas

Nesta seção, iremos apresentar uma generalização [25] do modelo de nuvem de cordas por meio da introdução da pressão. Para isto, será introduzido o tensor energia-momento associado ao fluido de cordas, que contém o termo de pressão ou tensão.

Inicialmente, vamos rever como se introduz o conceito de pressão para um fluido perfeito, e usá-lo como referência para introduzir a pressão do fluido de cordas. O tensor energia-momentum de uma nuvem de partículas é dado por

$$K^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu, \quad (3.1)$$

onde u^μ é a velocidade de fluxo de partículas, que satisfaz a condição de normalização ($u^\mu u_\mu = 1$), e ρ é a densidade de energia de repouso da nuvem de partículas. O tensor energia-momentum dado pela eq(3.1) é caracterizado somente pela parte cinética.

Usando a eq(3.1), podemos verificar que u^μ é um autovetor de $K^{\mu\nu}$, com autovalor ρ . Matematicamente, este fato é expresso através da seguinte equação

$$K^{\mu\nu} u_\nu = \rho u^\mu, \quad (3.2)$$

onde usamos a condição de normalização. Podemos dizer, então, que ρu^μ é a densidade de momento.

Suponhamos, agora, que a nuvem de partículas tem pressão ou tensão. Esta nuvem de partículas nada mais é que um fluido perfeito. O tensor energia-momentum para tal nuvem pode ser escrito, portanto, da seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + S^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde $S^{\mu\nu}$ é o tensor de *stress*.

Para manter a interpretação de u^μ como sendo a velocidade de fluxo da nuvem de partículas, é necessário que u^μ seja autovetor de $T^{\mu\nu}$ com autovalor ρ . Esta condição é satisfeita desde que

$$S^{\mu\nu}u_\nu = 0. \quad (3.4)$$

O tensor mais simples que satisfaz a eq(3.4) é

$$S^{\mu\nu} = -ph^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

onde $h^{\mu\nu}$ é o tensor projeção dado por

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu. \quad (3.6)$$

Este projeta qualquer vetor numa direção perpendicular a u^μ . A pressão p é o fator de proporcionalidade entre o tensor de *stress* $S^{\mu\nu}$ e o tensor projeção $h^{\mu\nu}$. O sinal negativo de p indica que temos pressão em vez de tensão.

Agora, escreveremos o tensor energia-momentum de um fluido de cordas seguindo o mesmo raciocínio que utilizamos para, a partir de um fluido incoerente, escrever o tensor energia-momentum de um fluido perfeito de cordas. O tensor energia-momentum, equivalente ao de um fluido incoerente, para uma nuvem de cordas é:

$$K^{\mu\nu} = \rho\sqrt{-\gamma}\frac{\Sigma^{\mu\lambda}\Sigma_\lambda^\nu}{(-\gamma)}, \quad (3.7)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivector que forma uma superfície a medida que evolui e satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Sigma^{\mu\nu} = -\Sigma^{\nu\mu}, \quad (3.8)$$

$$\Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (3.9)$$

e

$$\nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (3.10)$$

que são as mesmas apresentadas no capítulo anterior. A densidade da corda descrita covariantemente é dada por $\rho\sqrt{-\gamma}$, sendo γ escrita em termos do bivector $\Sigma^{\mu\nu}$, da seguinte forma

$$\gamma = \frac{1}{2}\Sigma^{\alpha\beta}\Sigma_{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

Duas outras identidades mencionadas no capítulo anterior, são [23]:

$$\Sigma^\mu_\alpha \Sigma^{\alpha\beta} \Sigma^\beta_\nu = -\gamma \Sigma^{\mu\nu} \quad (3.12)$$

e

$$\Sigma^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \Sigma_{\beta\nu} = \frac{3}{2}\Sigma^{\alpha\beta} \partial_{[\alpha} \Sigma_{\beta\nu]} - \frac{1}{4} \partial_\nu (\Sigma^{\alpha\beta} \Sigma_{\alpha\beta}). \quad (3.13)$$

Como já visto, a quadrivelocidade u^μ é um autovetor do tensor energia-momentum $K^{\mu\nu}$ da nuvem de partículas com autovalor ρ . Por extensão, poderemos supor que o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ é um autovetor do tensor energia-momentum dado pela eq(3.7). Partindo dessa equação, vemos que

$$K^{\mu\nu} \Sigma^\lambda_\nu = \rho\sqrt{-\gamma} \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma^\nu_\alpha}{(-\gamma)} \Sigma^\lambda_\nu. \quad (3.14)$$

Substituindo a identidade dada pela eq(3.12) na eq(3.14), obtemos

$$K^{\mu\nu} \Sigma^\lambda_\nu = \rho\sqrt{-\gamma} \Sigma^{\mu\lambda}, \quad (3.15)$$

ou seja, o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ é um autovetor do tensor energia-momentum, dado por eq(3.7), com autovalor $\rho\sqrt{-\gamma}$.

Tomando por base o mesmo raciocínio usado para escrever o tensor energia-momentum da nuvem de cordas com pressão ou tensão, a partir do tensor que representa o conteúdo de matéria e energia de um fluido incoerente, o tensor energia-momentum para um fluido com pressão ou tensão, isto é, para o fluido de cordas, é

$$T^{\mu\nu} = \rho\sqrt{-\gamma} \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma^\nu_\alpha}{(-\gamma)} + S^{\mu\nu}, \quad (3.16)$$

onde $S^{\mu\nu}$ é o tensor de *stress*. Para que $\Sigma^{\mu\nu}$ seja um autotensor de $T^{\mu\nu}$, dado pela eq(3.16), com autovalor $\rho\sqrt{-\gamma}$, é necessário que seja satisfeita a seguinte condição

$$S^{\mu\nu} \Sigma^\lambda_\nu = 0. \quad (3.17)$$

O tensor mais simples que satisfaz esta condição é um tensor proporcional ao tensor projeção $H^{\mu\nu}$. Tal tensor projeta qualquer grandeza numa direção que é perpendicular à superfície gerada por $\Sigma^{\mu\nu}$. Portanto,

$$S^{\mu\nu} = -qH^{\mu\nu} \quad (3.18)$$

e

$$H^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{\Sigma^{\alpha\nu}\Sigma_\alpha^\mu}{(-\gamma)}, \quad (3.19)$$

onde q é o fator de proporcionalidade.

Para cordas não é claro se q é a pressão ou a tensão. Por isso, não estabeleceremos nenhuma restrição a q neste momento. Substituindo as eqs(3.18) e (3.19) na eq(3.16), temos que o tensor energia-momentum do fluido perfeito de cordas é

$$T^{\mu\nu} = \rho\sqrt{-\gamma}\frac{\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_\alpha^\nu}{(-\gamma)} - q\left(g^{\mu\nu} - \frac{\Sigma^{\alpha\nu}\Sigma_\alpha^\mu}{(-\gamma)}\right), \quad (3.20)$$

que implica em

$$T^{\mu\nu} = (q + \rho\sqrt{-\gamma})\frac{\Sigma^{\mu\alpha}\Sigma_\alpha^\nu}{(-\gamma)} - qg^{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

que é o tensor energia-momentum para um fluido perfeito de cordas.

A lei de conservação para o tensor energia-momentum, dado pela eq(3.21), é expressa da seguinte forma

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\mu} = 0. \quad (3.22)$$

Usando as eqs(3.8)-(3.11), (3.22), (3.12), (3.13), (3.19),(3.21) e (3.22), obtemos

$$(q + \rho\sqrt{-\gamma})\frac{\Sigma^{\alpha\beta}}{\sqrt{-\gamma}}\nabla_\alpha\left(\frac{\Sigma_{\beta\mu}}{\sqrt{-\gamma}}\right) = H_\mu^\nu\partial_\nu q \quad (3.23)$$

e

$$\nabla_\alpha(\rho\Sigma^{\alpha\nu}) + q\nabla_\alpha\left(\frac{\Sigma^{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}}\right) = 0 \quad (3.24)$$

As eqs(3.23) e (3.24) também podem ser reescritas , respectivamente, do seguinte modo [25]

$$\frac{\Sigma^{\alpha\beta}}{\sqrt{-\gamma}}\partial_{[\alpha}(\Sigma_{\beta\mu]}\sqrt{-\gamma}) = \frac{2}{3}H_\mu^\nu\partial_\nu q \quad (3.25)$$

e

$$\partial_\alpha (\sqrt{-g} \rho \Sigma^{\alpha\nu}) + q \partial_\alpha \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{\alpha\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Veremos que as condições de integrabilidade das equações de Einstein para o tensor energia-momentum, dado pela eq(3.21), correspondem às mesmas relações expressas pelas eqs(3.25) e (3.26).

3.2.1 Condições de energia

Para o tensor energia-momentum que descreve o conteúdo de matéria e energia de um fluido perfeito com pressão ou tensão, quais as restrições impostas sobre o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ pelas condições de energia?

A condição fraca de energia nos diz que

$$T^{\mu\nu} U_\mu U_\nu \geq 0, \quad (3.27)$$

onde U_μ é um vetor tipo-tempo arbitrário, e portanto,

$$U_\mu U^\mu > 0. \quad (3.28)$$

Usando a condição expressa pela eq(3.27), encontramos que o tensor energia-momento dado pela eq(3.21) deve satisfazer a seguinte desigualdade:

$$(q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha^\nu}{(-\gamma)} U_\mu U_\nu - q g^{\mu\nu} U_\mu U_\nu \geq 0. \quad (3.29)$$

Considerando $\hat{U}^\mu \equiv \frac{U^\mu}{\sqrt{U^\alpha U_\alpha}}$, a condição (3.29) pode ser escrita como

$$(q + \rho\sqrt{-\gamma}) \hat{U}^\mu \frac{\Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu}}{(-\gamma)} \hat{U}^\nu \geq q. \quad (3.30)$$

A condição dominante de energia é estabelecida a partir das seguintes restrições:

$$T^{\mu\nu} U_\mu U_\nu > 0 \quad (3.31)$$

e

$$U_\mu T^{\mu\alpha} T_\alpha^\nu U_\nu \geq 0. \quad (3.32)$$

Substituindo a eq(3.21) nas eqs(3.31) e (3.32), obtemos, respectivamente, a mesma expressão dada pela eq(3.30) e a seguinte condição:

$$U_\mu \left[(q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma^{\mu\beta}\Sigma_\beta^\alpha}{(-\gamma)} - qg^{\mu\alpha} \right] \left[(q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma_\alpha^\theta\Sigma_\theta^\nu}{(-\gamma)} - qg_\alpha^\nu \right] U_\nu \geq 0, \quad (3.33)$$

que implica em

$$(q + \rho\sqrt{-\gamma})^2 U_\mu \frac{\Sigma^{\mu\beta}\Sigma_\beta^\alpha\Sigma_\alpha^\theta\Sigma_\theta^\nu}{(-\gamma)^2} U_\nu - (q + \rho\sqrt{-\gamma}) U_\mu \frac{\Sigma^{\mu\beta}\Sigma_\beta^\alpha}{(-\gamma)} qg_\alpha^\nu U_\nu - qg^{\mu\alpha} U_\mu (q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma_\alpha^\theta\Sigma_\theta^\nu}{(-\gamma)} U_\nu + q^2 g^{\mu\alpha} g_\alpha^\nu U_\mu U_\nu \geq 0,$$

e que se reduz a

$$\left[(\rho\sqrt{-\gamma})^2 - q^2 \right] \frac{\hat{U}_\mu \Sigma^{\mu\theta}\Sigma_\theta^\nu \hat{U}_\nu}{(-\gamma)} + q^2 \geq 0 \quad (3.34)$$

quando fazemos uso da eq(3.12).

A condição forte de energia nos diz que

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) U^\mu U^\nu \geq 0. \quad (3.35)$$

Portanto, usando a expressão para o tensor energia-momentum, dada pela eq(3.21), e substituindo na eq(3.35), obtemos

$$(\rho\sqrt{-\gamma} + q) \frac{\hat{U}^\mu \Sigma_\mu^\alpha \Sigma_{\alpha\nu} \hat{U}^\nu}{(-\gamma)} \geq \rho\sqrt{-\gamma}, \quad (3.36)$$

onde usamos o fato de que o traço de $T^{\mu\nu}$ é dado por

$$T = 2 (\rho\sqrt{-\gamma} - q). \quad (3.37)$$

Note que as expressões eq(3.30), eq(3.34) e eq(3.36), que estabelecem restrições sobre o tensor energia-momentum, advindas das condições de energia, não impõe nenhuma restrição sobre os possíveis valores da grandeza q . Portanto, ela pode representar, em princípio, tanto a pressão $q > 0$, quanto a tensão $q < 0$.

3.3 Solução das equações de Einstein para um fluido de cordas

Nesta seção vamos rever a solução das equações de Einstein obtidas por Letelier [25], que descreve o espaço-tempo gerado por um fluido de cordas, no caso em que a

simetria é considerada esférica. As equações de Einstein para o tensor energia-momentum, dado pela eq(3.21), é escrita na seguinte forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = - \left(q + \rho\sqrt{-\gamma} \right) \frac{\Sigma_{\mu\alpha}\Sigma_{\nu}^{\alpha}}{(-\gamma)} + qg_{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

na qual a constante de proporcionalidade entre a geometria e o conteúdo de energia-momentum está sendo considerada igual à unidade.

As condições de integrabilidade para a eq(3.38), consequência das identidades de Bianchi, são análogas as eqs(3.25) e (3.26). A condição que $\Sigma^{\mu\nu}$ seja um bivector simples se reduz a eq(3.9). A eq(3.10) é uma consequência das eqs(3.9) e (3.24), como mencionado em [25].

A métrica do espaço-tempo, estático e esfericamente simétrico, pode ser escrita como

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.39)$$

onde ν e λ são funções de r .

Devido a simetria que estamos considerando, ρ , q e $\Sigma^{\mu\nu}$ são funções somente de r . Adicionalmente, somente $\Sigma^{01} = -\Sigma^{10}$ e $\Sigma^{23} = -\Sigma^{32}$ são diferentes de zero. Por outro lado, a condição $\gamma < 0$ e a eq(3.9) nos dizem que somente Σ^{01} deve ser considerado. Portanto, a eq(3.25) é satisfeita e a eq(3.26) se reduz a:

$$\begin{aligned} & \partial_0 (\sqrt{-g}\rho\Sigma^{0\nu}) + \partial_1 (\sqrt{-g}\rho\Sigma^{1\nu}) + \partial_2 (\sqrt{-g}\rho\Sigma^{2\nu}) + \partial_3 (\sqrt{-g}\rho\Sigma^{3\nu}) \\ & + q \left[\partial_0 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{0\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) + \partial_1 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{1\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) + \partial_2 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{2\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) + \partial_3 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{3\nu}}{\sqrt{-\gamma}} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Fazendo $\nu = 0$ e $\nu = 1$ na equação acima, obtemos, respectivamente,

$$\partial_1 \left(\sqrt{-g}\rho\Sigma^{10} \right) + q\partial_1 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{10}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0 \quad (3.40)$$

e

$$\partial_0 \left(\sqrt{-g}\rho\Sigma^{01} \right) + q\partial_0 \left(\sqrt{-g} \frac{\Sigma^{01}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0. \quad (3.41)$$

O determinante da métrica dada pela eq(3.39) é

$$g = -r^4 \sin^2 \theta e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (3.42)$$

Substituindo a eq(3.42) na eq(3.40), obtemos

$$\partial_1 \left(r^2 e^{(\nu+\lambda)} \rho \Sigma^{01} \right) + q\partial_1 \left(r^2 e^{(\nu+\lambda)} \frac{\Sigma^{01}}{\sqrt{-\gamma}} \right) = 0. \quad (3.43)$$

Note que, usando a eq(3.11), obtemos

$$\gamma = \frac{1}{2} \Sigma^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \Sigma^{\mu\nu}. \quad (3.44)$$

Realizando as somas, na eq(3.44), temos o seguinte resultado:

$$\gamma = g_{00} g_{11} \Sigma^{01} \Sigma^{01}, \quad (3.45)$$

que pode ser escrito como

$$\sqrt{-\gamma} = \Sigma^{01} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}}. \quad (3.46)$$

Substituindo a eq(3.46) na eq(3.43), obtemos

$$\partial_1 \left(e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \rho \Sigma^{01} r^2 \right) + q \partial_1 (r^2) = 0. \quad (3.47)$$

Da eq(3.47), temos

$$e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} \rho \Sigma^{01} r^2 = a - \int q d(r^2), \quad (3.48)$$

onde a é uma constante de integração. Usando a eq(3.46), podemos reescrever a eq(3.48) do seguinte modo:

$$\sqrt{-\gamma} \rho = \frac{a - \int q d(r^2)}{r^2}. \quad (3.49)$$

Considerando as eqs(3.21) e (3.48), encontramos que as componentes não-nulas de $T^{\mu\nu}$ são dadas por

$$T_0^0 = \left(q + \rho \sqrt{-\gamma} \right) \frac{\Sigma^{0\alpha} \Sigma_{\alpha 0}}{(-\gamma)} - q g_0^0. \quad (3.50)$$

Como a soma em α se reduz a $\Sigma^{01} \Sigma_{10}$, e

$$-\gamma = \Sigma^{01} \Sigma_{10}, \quad (3.51)$$

então eq(3.50) é dada, simplesmente, por

$$T_0^0 = \rho \sqrt{-\gamma}, \quad (3.52)$$

que pode ser escrita na forma

$$T_0^0 = \frac{a - \int q d(r^2)}{r^2}, \quad (3.53)$$

com o uso da eq(3.49).

A componente T_1^1 do tensor energia-momentum também é não-nula.

$$T_1^1 = (q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma^{1\alpha}\Sigma_{\alpha 1}}{(-\gamma)} - qg_1^1. \quad (3.54)$$

Comparando a eq(3.54) com (3.50), levando em conta que $\Sigma^{0\alpha}\Sigma_{\alpha 0}$ se reduz a $\Sigma^{10}\Sigma_{01}$, e as relações entre g_0^0 e g_1^1 , concluímos que $T_1^1 = \rho\sqrt{-\gamma}$. Então,

$$T_1^1 = \frac{a - \int qd(r^2)}{r^2}. \quad (3.55)$$

As outras duas componentes não-nulas do tensor energia-momentum são T_2^2 e T_3^3 . Elas são escritas como

$$T_2^2 = (q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma^{2\alpha}\Sigma_{\alpha 2}}{(-\gamma)} - qg_2^2 \quad (3.56)$$

e

$$T_3^3 = (q + \rho\sqrt{-\gamma}) \frac{\Sigma^{3\alpha}\Sigma_{\alpha 3}}{(-\gamma)} - qg_3^3. \quad (3.57)$$

Considerando o fato de que $\Sigma^{2\alpha}\Sigma_{\alpha 2} = \Sigma^{3\alpha}\Sigma_{\alpha 3} = 0$, concluímos que

$$T_2^2 = T_3^3 = -q. \quad (3.58)$$

Assim, as equações de Einstein, dadas pela eq(3.38), para a métrica eq(3.39), se reduzem a

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a - \int qd(r^2)}{r^2}, \quad (3.59)$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{a - \int qd(r^2)}{r^2} \quad (3.60)$$

e

$$\frac{e^{-\lambda}}{2} \left(\frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'^2}{2} - \nu'' \right) = -q, \quad (3.61)$$

onde a linha indica derivada em relação à coordenada radial.

Subtraindo, membro a membro, as eqs(3.59) e (3.60), obtemos

$$\nu' + \lambda' = 0, \quad (3.62)$$

cuja solução é

$$\nu = -\lambda, \quad (3.63)$$

a menos de uma constante de integração, que sempre pode ser tomada igual a zero, por redefinição da coordenada temporal. Então, usando essa relação entre ν e λ , a eq(3.59) pode ser reescrita do seguinte modo:

$$(e^{-\lambda}r)' = 1 - a + \int qd(r^2). \quad (3.64)$$

Da eq(3.64) obtemos

$$(e^{-\lambda}r)'' = 2rq, \quad (3.65)$$

cuja solução geral é

$$e^{-\lambda} = 1 - a - \frac{2m}{r} + \int dr \left(\int qd(r^2) \right) = e^{\nu}, \quad (3.66)$$

onde m é uma constante de integração. Esta solução representa a métrica associada ao espaço-tempo gerado por uma massa central m , num fluido de cordas, no qual as cordas estão orientadas radialmente, possuem uma densidade $\rho\sqrt{-\gamma}$ e a pressão(ou tensão) é diferente de zero. Note que, se considerarmos a pressão (ou tensão) nula, o que equivale a fazer $q = 0$, reobteremos a solução que corresponde ao espaço-tempo de Letelier, gerado por uma massa pontual envolvida por uma nuvem de cordas [23].

4 Modelos cosmológicos com nuvem de cordas

4.1 Introdução

Nos modelos, cujas fontes de campo gravitacional são uma massa central envolta por uma nuvem ou fluido de cordas, estudados nos dois últimos capítulos, quando $m = 0$, as fontes ficam restritas a nuvem ou fluido de cordas. Assim, se considerarmos uma corda ideal, a saber, estática, infinitamente longa e retilínea, a sua massa gravitacional se anula, uma vez que o efeito gravitacional da tensão compensa aquele gerado pela sua massa. Isto significa que localmente não há nenhum efeito gravitacional, porém, isto não significa que não existem efeitos gravitacionais. Na realidade, existem efeitos gravitacionais de origem global, que estão associados com a deficiência angular [[55]-[57]]. No caso em que a configuração da nuvem ou fluido de cordas possui simetria esférica, mesmo quando $m = 0$, existem efeitos gravitacionais, neste caso de natureza global, como já mencionamos, mas agora associados com a deficiência de ângulo sólido, a qual depende do parâmetro a , determinada pela presença da nuvem ou fluido de cordas.

Neste capítulo vamos considerar uma nuvem de cordas, na qual as cordas possuem massa gravitacional diferente de zero. Esta configuração é formada por cordas com massa gravitacional nula (cordas geométricas), ao longo das quais são colocadas partículas com massa. Estas configurações de nuvens de cordas com partículas colocadas ao longo destas, chamadas cordas com massa (corda massiva), serão usadas como fonte do modelo cosmológico de Bianchi tipo I [31]. Usando este cenário, fazemos uma breve revisão do trabalho sobre cosmologia de cordas [31].

4.2 Revisitando o modelo com cordas

Já estudamos o modelo de nuvem de cordas no capítulo 2. Contudo, iremos rever alguns conceitos relativos a nuvem de cordas nesta seção para introduzirmos as cordas massivas, que consistem de cordas geométricas com partículas massivas distribuídas ao longo de sua extensão. O tensor energia-momentum $T_c^{\mu\nu}$ para uma nuvem de cordas geométricas com densidade própria de energia $\bar{\lambda}$ é

$$T_c^{\mu\nu} = \bar{\lambda} \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha^\nu, \quad (4.1)$$

onde $\Sigma^{\mu\nu}$ é um bivector simples associado a folha-mundo e satisfaz às seguintes equações:

$$\Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0 \quad (4.2)$$

e

$$\nabla_\mu \Sigma^{\mu[\alpha}\Sigma^{\beta\gamma]} = 0, \quad (4.3)$$

onde os colchetes indicam anti-simetrização nos índices no seu interior. Outra condição satisfeita pelo bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ é $\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} < 0$, pois $\Sigma^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu} = 2\gamma$ e $\gamma < 0$.

O tensor energia-momentum $T_p^{\mu\nu}$ para uma nuvem de partículas de densidade ρ_p é

$$T_p^{\mu\nu} = \rho_p u^\mu u^\nu, \quad (4.4)$$

onde u^μ é a quadrivelocidade da nuvem de partículas, que obedece a $u^\mu u_\mu = 1$.

Pelo fato da folha-mundo das cordas serem superfícies bidimensionais que satisfazem a eq(4.2), então, o bivector $\Sigma^{\mu\nu}$ pode ser escrito do seguinte modo:

$$\Sigma^{\mu\nu} = v^\mu \bar{x}^\nu - v^\nu \bar{x}^\mu, \quad (4.5)$$

com v^μ e $\bar{x}^\mu$ satisfazendo, respectivamente, a

$$v^\mu v_\mu > 0 \quad (4.6)$$

e

$$\bar{x}^\mu \bar{x}_\mu < 0. \quad (4.7)$$

É sempre possível definir um novo tensor $\bar{v}^\mu$ de modo que

$$\bar{v}^\mu \bar{v}_\mu > 0 \quad (4.8)$$

e

$$\bar{v}^\mu \bar{x}_\mu = 0. \quad (4.9)$$

Podemos verificar que uma possível forma para $\bar{v}^\mu$ em termos de v^μ e $\bar{x}^\mu$, que satisfaz as condições estabelecidas nas eqs(4.8) e (4.9), é dada por

$$\bar{v}^\mu = v^\mu - \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta} \bar{x}^\mu. \quad (4.10)$$

Note que

$$\bar{v}^\mu \bar{v}_\mu = \left[v^\mu - \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta} \bar{x}^\mu \right] \left[v_\mu - \frac{\bar{x}^\alpha v_\alpha}{\bar{x}_\beta \bar{x}^\beta} \bar{x}_\mu \right], \quad (4.11)$$

que implica em

$$\bar{v}^\mu \bar{v}_\mu = v^\mu v_\mu - \frac{\bar{x}^\alpha v_\alpha}{\bar{x}_\beta \bar{x}^\beta} v^\mu \bar{x}_\mu - \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta} \bar{x}^\mu v_\mu + \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta} \frac{\bar{x}^\alpha v_\alpha}{\bar{x}_\beta \bar{x}^\beta} \bar{x}^\mu \bar{x}_\mu. \quad (4.12)$$

Desta expressão vemos que a eq(4.8) é satisfeita, pois todos os termos são positivos. Da mesma forma, podemos verificar que a eq(4.9) é identicamente satisfeita.

O conteúdo de matéria e energia de uma corda massiva tem contribuições tanto de partículas quanto da corda geométrica. Portanto, o tensor energia-momentum de uma corda massiva é

$$T^{\mu\nu} = T_c^{\mu\nu} + T_p^{\mu\nu}. \quad (4.13)$$

Como os tensores energia-momentum das cordas geométricas e das partículas são dados pelas eqs(4.1) e (4.4), respectivamente, então, podemos escrever

$$T^{\mu\nu} = \bar{\lambda} \Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_\alpha^\nu + \rho_p u^\mu u^\nu. \quad (4.14)$$

Substituindo a eq(4.5) na eq(4.14), temos

$$T^{\mu\nu} = \bar{\lambda} (v^\mu \bar{x}^\alpha - v^\alpha \bar{x}^\mu) (v_\alpha \bar{x}^\nu - v^\nu \bar{x}_\alpha) + \rho_p u^\mu u^\nu. \quad (4.15)$$

Substituindo a eq(4.10) na eq(4.15), após algumas operações matemáticas, chegamos em

$$T^{\mu\nu} = \bar{\lambda} (v^\mu v_\alpha \bar{x}^\alpha \bar{x}^\nu - v^\mu v^\nu \bar{x}^\alpha \bar{x}_\alpha - v^\alpha v_\alpha \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu + v^\alpha v^\nu \bar{x}^\mu \bar{x}_\alpha) + \rho_p u^\mu u^\nu. \quad (4.16)$$

Note que

$$v^\mu v_\alpha = \left(\bar{v}^\mu + \frac{\bar{x}_\beta v^\beta}{\bar{x}^\gamma \bar{x}_\gamma} \bar{x}^\mu \right) \left(\bar{v}_\alpha + \frac{\bar{x}^\theta v_\theta}{\bar{x}_\lambda \bar{x}^\lambda} \bar{x}_\alpha \right), \quad (4.17)$$

que implica em

$$v^\mu v_\alpha = \bar{v}^\mu \bar{v}_\alpha + \bar{v}^\mu \frac{\bar{x}^\theta v_\theta}{\bar{x}_\lambda \bar{x}^\lambda} \bar{x}_\alpha + \frac{\bar{x}_\beta v^\beta}{\bar{x}^\gamma \bar{x}_\gamma} \bar{x}^\mu \bar{v}_\alpha + \frac{\bar{x}^\theta v_\theta}{\bar{x}_\lambda \bar{x}^\lambda} \frac{\bar{x}_\beta v^\beta}{\bar{x}^\gamma \bar{x}_\gamma} \bar{x}^\mu \bar{x}_\alpha. \quad (4.18)$$

Substituindo a eq(4.18) na eq(4.16), e fazendo algumas manipulações algébricas, matemáticas, obtemos

$$T^{\mu\nu} = \bar{\lambda} (-v^\mu v^\nu \bar{x}^\alpha \bar{x}_\alpha - v^\alpha v_\alpha \bar{x}^\mu \bar{x}^\nu) + \rho_p u^\mu u^\nu. \quad (4.19)$$

Para este tensor energia-momentum, a quadrivelocidade u^μ das partículas é paralela ao quadri vetor $\bar{v}^\mu$ que descreve o movimento de cada elemento da corda. Da condição de que $u^\mu || \bar{v}^\mu$ e $u^\mu u_\mu = 1$, temos

$$u^\mu = \frac{\bar{v}^\mu}{\sqrt{\bar{v}^\alpha \bar{v}_\alpha}}. \quad (4.20)$$

Definindo

$$x^\mu \equiv \frac{\bar{x}^\mu}{\sqrt{-\bar{x}^\alpha \bar{x}_\alpha}}, \quad (4.21)$$

$$\lambda \equiv -\bar{\lambda} \bar{x}_\alpha \bar{x}^\alpha \bar{v}_\beta \bar{v}^\beta \quad (4.22)$$

e

$$\rho \equiv \rho_p + \lambda, \quad (4.23)$$

o tensor energia-momentum dado pela eq(4.19) pode ser reescrito do seguinte modo:

$$T^{\mu\nu} = \lambda \frac{\bar{v}^\mu \bar{v}^\nu}{\bar{v}_\beta \bar{v}^\beta} + \lambda \frac{\bar{x}^\mu \bar{x}^\nu}{\bar{x}_\alpha \bar{x}^\alpha} + \rho_p u^\mu u^\nu. \quad (4.24)$$

Substituindo as eqs(4.20) e (4.21) na eq(4.24), obtemos

$$T^{\mu\nu} = (\lambda + \rho_p) u^\mu u^\nu - \lambda x^\mu x^\nu. \quad (4.25)$$

Fazendo uso de eq(4.23), a eq(4.25) toma a seguinte forma

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu - \lambda x^\mu x^\nu. \quad (4.26)$$

Note que $\lambda \geq 0$ e $\rho \geq 0$. Também temos das eqs(4.20) e (4.21) que

$$u^\mu u_\mu = 1 \quad (4.27)$$

e

$$x^\mu x_\mu = -1, \quad (4.28)$$

que implica em,

$$u^\mu u_\mu = -x^\mu x_\mu = 1, \quad (4.29)$$

assim como,

$$u^\mu x_\mu = \frac{\bar{v}^\mu}{\sqrt{\bar{v}^\alpha \bar{v}_\alpha}} \frac{\bar{x}_\mu}{\sqrt{-\bar{x}_\alpha \bar{x}^\alpha}} = 0, \quad (4.30)$$

pois $\bar{v}^\mu \bar{x}_\mu = 0$.

A densidade ρ é a densidade de energia de repouso, u^μ é a quadrivelocidade e x^μ representa a direção da anisotropia, isto é, a direção da corda, e λ é a densidade de tensão da nuvem de cordas.

Para finalizar esta seção, desejamos chamar a atenção para o fato de que a condição dada pela eq(4.3), conforme afirmada em [31], é equivalente a qualquer uma das seguintes relações:

$$\epsilon_{\delta\alpha\beta\gamma} u^\beta x^\gamma (u'^\alpha - \dot{x}^\alpha) = 0, \quad (4.31)$$

$$\dot{x}^\mu - u'^\mu = u_\alpha \dot{x}^\alpha u^\mu + x_\alpha u'^\alpha x^\mu, \quad (4.32)$$

ou

$$H_\alpha^\mu (u^\beta \partial_\beta x^\alpha - x^\beta \partial_\beta u^\alpha) = 0, \quad (4.33)$$

onde $\epsilon_{\delta\alpha\beta\gamma}$ é o símbolo de Levi-Civita. O “ponto” e a “linha” denotam derivadas direcionais na direção de u^μ e x^μ , respectivamente, isto é, $(\dot{}) = u^\mu \nabla_\mu$ e $(\prime) = x^\mu \nabla_\mu$. O tensor H_α^μ é o operador projeção que projeta nas direções perpendiculares a u^μ e x^μ , isto é, nas direções perpendiculares a folha-mundo da corda. Tal operador pode ser escrito na forma

$$H_\alpha^\mu = \delta_\alpha^\mu - u^\mu u_\alpha + x^\mu x_\alpha. \quad (4.34)$$

Dentre as propriedades desse operador, podemos mencionar aquelas dadas pelas seguintes relações:

$$H_\nu^\mu u^\nu = H_\nu^\mu v^\nu = 0, \quad (4.35)$$

$$H_\alpha^\mu H_\nu^\alpha = H_\nu^\mu, \quad (4.36)$$

$$H_\alpha^\alpha = 2, \quad (4.37)$$

$$\det(H_\nu^\mu) = 0, \quad (4.38)$$

e

$$H_{\mu\nu} = H_{\nu\mu}. \quad (4.39)$$

Essas propriedades podem ser demonstradas a partir da eq(4.34). Vamos mostrar a título de ilustração, algumas dessas propriedades. Para isto, note que

$$H_\nu^\mu u^\nu = \delta_\nu^\mu u^\nu - u^\mu u_\nu u^\nu + x^\mu x_\nu u^\nu \quad (4.40)$$

e, portanto,

$$H_\nu^\mu u^\nu = x^\mu x_\nu u^\nu. \quad (4.41)$$

Substituindo as eqs(4.20) e (4.21) na eq(4.41), obtemos

$$H_\nu^\mu u^\nu = x^\mu \frac{\bar{x}_\nu}{\sqrt{-\bar{x}_\alpha \bar{x}^\alpha}} \frac{\bar{v}^\nu}{\sqrt{\bar{v}^\alpha \bar{v}_\alpha}} = 0, \quad (4.42)$$

pois $\bar{x}_\nu \bar{v}^\nu = 0$. Por outro lado, temos que

$$H_\nu^\mu v^\nu = \delta_\nu^\mu v^\nu - u^\mu u_\nu v^\nu + x^\mu x_\nu v^\nu, \quad (4.43)$$

que implica em

$$H_\nu^\mu v^\nu = v^\mu - u^\mu u_\nu v^\nu + x^\mu x_\nu v^\nu. \quad (4.44)$$

Substituindo as eqs(4.10) e (4.21) na eq(4.44), obtemos

$$H_\nu^\mu v^\nu = \bar{v}^\mu + \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta} \bar{x}^\mu - u^\mu u_\nu v^\nu + x^\mu \frac{\bar{x}_\nu}{\sqrt{-\bar{x}_\alpha \bar{x}^\alpha}} v^\nu. \quad (4.45)$$

Substituindo as eqs(4.20) e (4.10) na eq(4.45), obtemos

$$H_\nu^\mu v^\nu = \bar{v}^\mu + \frac{\bar{x}_\alpha v^\alpha}{\sqrt{-\bar{x}^\beta \bar{x}_\beta \bar{x}^\beta \bar{x}_\beta}} \bar{x}^\mu - u^\mu \frac{\bar{v}_\nu \bar{v}^\nu}{\sqrt{\bar{v}_\alpha \bar{v}^\alpha}}, \quad (4.46)$$

de onde temos que

$$H_\nu^\mu v^\nu = \bar{v}^\mu - u^\mu \sqrt{\bar{v}_\alpha \bar{v}^\alpha}. \quad (4.47)$$

Das eqs(4.47) e (4.20), temos

$$H_\nu^\mu v^\nu = \bar{v}^\mu - \bar{v}^\mu = 0. \quad (4.48)$$

Usando as eqs(4.42) e (4.48), podemos verificar a relação dada pela eq(4.35).

Note que

$$H_\alpha^\mu H_\nu^\alpha = (\delta_\alpha^\mu - u^\mu u_\alpha + x^\mu x_\alpha) (\delta_\nu^\alpha - u^\alpha u_\nu + x^\alpha x_\nu), \quad (4.49)$$

o que implica em

$$H_\alpha^\mu H_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu + x^\mu x_\nu - u^\mu u_\nu + u^\mu u_\nu + u^\mu u_\alpha x^\alpha x_\nu. \quad (4.50)$$

Substituindo as eqs(4.20) e (4.21) na eq(4.51), vemos que o último termo se anula e obtemos como resultado

$$H_\alpha^\mu H_\nu^\alpha = \delta_\nu^\mu - u^\mu u_\nu + x^\mu x_\nu = H_\nu^\mu, \quad (4.51)$$

o que corresponde à relação expressa pela eq(4.36).

Portanto, podemos escrever

$$H_\alpha^\alpha = \delta_\alpha^\alpha - u^\alpha u_\alpha + x^\alpha x_\alpha. \quad (4.52)$$

Levando em conta que $\delta_\alpha^\alpha = 4$, $u^\alpha u_\alpha = 1$ e $x^\alpha x_\alpha = -1$, e substituindo em (4.52), concluímos que $H_\alpha^\alpha = 2$.

Podemos verificar, também, que $H_{\mu\nu}$ é simétrico. Para isto, basta usar a eq(4.51). Assim, temos

$$H_\nu^\mu = \delta_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu + x_\mu x_\nu = \delta_{\nu\mu} - u_\nu u_\mu + x_\nu x_\mu = H_\mu^\nu. \quad (4.53)$$

4.3 Equações de Einstein associadas a nuvem de cordas massivas

Nesta seção vamos apresentar as equações de Einstein para uma fonte que corresponde a uma nuvem de cordas massivas, consideradas como fonte do modelo de Bianchi tipo I.

As equações de Einstein para este caso, com tensor energia-momentum dado pela eq(4.26), é

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\rho u_\mu u_\nu + \lambda x_\mu x_\nu. \quad (4.54)$$

As identidades de Bianchi para eq(4.54) é equivalente a

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (\rho u^\mu u^\nu - \lambda x^\mu x^\nu), \quad (4.55)$$

ou seja,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu (\rho u^\mu) u^\nu + \rho \dot{u}^\nu - \nabla_\mu (\lambda x^\mu) x^\nu - \lambda x^{\nu\prime}. \quad (4.56)$$

Multiplicando a eq(4.56) por pelo tensor covariante u_ν , temos

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) u^\nu u_\nu + \rho \dot{u}^\nu u_\nu - \nabla_\mu (\lambda x^\mu) x^\nu u_\nu - \lambda x^{\nu\prime} u_\nu = 0. \quad (4.57)$$

Note que

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) = 0, \quad (4.58)$$

o que implica em

$$u^\mu \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) = 0 \Rightarrow \quad (4.59)$$

$$u^\mu (\nabla_\mu u^\nu) u_\nu + u^\mu (\nabla_\mu u_\nu) u^\nu = 0. \quad (4.60)$$

Fazendo o abaixamento e levantamento do índice ν no último termo da eq(4.60), temos que

$$u^\mu (\nabla_\mu u^\nu) u_\nu = 0 \Rightarrow \dot{u}^\nu u_\nu = 0. \quad (4.61)$$

Usando as eqs(4.30), (4.61) e (4.57), obtemos, finalmente, o seguinte resultado:

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) - \lambda x^{\nu\prime} u_\nu = 0. \quad (4.62)$$

Multiplicando a eq(4.56) pelo tensor covariante x_ν , temos

$$\nabla_\mu (\rho u^\mu) u^\nu x_\nu + \rho \dot{u}^\nu x_\nu - \nabla_\mu (\lambda x^\mu) x^\nu x_\nu - \lambda x^{\nu\prime} x_\nu = 0. \quad (4.63)$$

Usando o mesmo raciocínio utilizado para mostrar a eq(4.61) chega-se a $x^{\nu\prime} x_\nu = 0$. Portanto, levando-se em consideração este fato e a eq(4.30), obtemos

$$\nabla_\mu (\lambda x^\mu) + \rho \dot{u}^\nu x_\nu = 0. \quad (4.64)$$

As equações eq(4.62) e eq(4.64) são as condições de integrabilidade da eq(4.54) e descrevem a evolução da nuvem de cordas massivas. As equações de Einstein e as condições de integrabilidade formam um sistema de 14 equações para $g_{\mu\nu}$, ρ , λ , u^μ e x^μ desconhecidos, isto é, para 17 incógnitas. Duas outras equações podem ser obtidas a partir de u^μ e x^μ , pois em cada ponto tais tensores permanecem juntos para formar a folha-mundo, sendo este fato descrito por qualquer uma das equações eq(4.31), eq(4.32) ou eq(4.33). Mesmo assim, necessitamos de mais uma equação para que possamos ter um sistema de equações possível e determinado. Outra equação que podemos utilizar é a equação de estado da corda. Para isso, consideraremos três situações, a saber, quando tivermos somente cordas geométricas; quando tivermos uma nuvem de cordas de Takabayasi [58]; e o caso mais geral que consiste de um sistema barotrópico.

A equação de estado para nuvens de cordas geométricas é

$$\rho = \lambda, \quad (4.65)$$

uma vez que $\rho_p = 0$, pois não há partículas distribuídas ao longo da corda.

A equação de estado para uma nuvem de corda de Takabayasi é

$$\rho = (1 + \omega) \lambda, \quad (4.66)$$

onde $\rho_p = \omega \lambda$ é a densidade de partículas grudadas a corda geométrica e ω é uma constante positiva.

A equação barotrópica geral de estado é

$$\rho = \rho(\lambda), \quad (4.67)$$

com $\rho_p = \rho - \lambda$.

As condições de energia, já estudadas anteriormente, estabelecem restrições para as equações de estado. Para o tensor energia-momentum, eq(4.26), a aplicação da condição fraca de energia

$$T^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \geq 0, \quad (4.68)$$

implica na seguinte desigualdade

$$(\rho u^\mu u^\nu - \lambda x^\mu x^\nu) u_\mu u_\nu \geq 0 \Rightarrow \rho \geq 0, \quad (4.69)$$

pois $u^\mu x_\mu = 0$.

Considerando a condição forte, expressa pela relação

$$\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)u^\mu u^\nu \geq 0, \quad (4.70)$$

o tensor energia-momentum, eq(4.26), deve satisfazer

$$\left(\rho u_\mu u_\nu - \lambda x_\mu x_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\rho + \lambda)\right)u^\mu u^\nu \geq 0 \quad (4.71)$$

uma vez que $T^\mu_\mu = T = \rho + \lambda$. Como $u^\mu x_\mu = 0$, a eq(4.71) se reduz a

$$\rho \geq \lambda, \quad (4.72)$$

com $\lambda \geq 0$.

Considerando a condição dominante de energia, definida pelas relações

$$T^{\mu\nu}u_\mu u_\nu > 0 \quad (4.73)$$

e

$$u_\mu T^{\mu\alpha}T^\nu_\alpha u_\nu \geq 0, \quad (4.74)$$

e substituindo o tensor energia-momentum na eq(4.73), temos como consequência que $\rho \geq 0$. Por outro lado, a aplicação da condição dada pela eq(4.74), nos remete ao seguinte resultado

$$u_\mu (\rho u^\mu u^\alpha - \lambda x^\mu x^\nu) (\rho u_\alpha u^\nu - \lambda x_\alpha x^\nu) u_\nu \geq 0 \Rightarrow \quad (4.75)$$

$$u_\mu (\rho u^\mu u^\alpha - \lambda x^\mu x^\nu) \rho u_\alpha \geq 0 \Rightarrow \quad (4.76)$$

$$u_\mu \rho^2 u^\mu u^\alpha u_\alpha \geq 0 \Rightarrow \quad (4.77)$$

$$\rho^2 \geq 0. \quad (4.78)$$

Portanto, a análise das restrições impostas pelas diferentes condições de energia, nos permite concluir que ρ e λ podem assumir quaisquer valores positivos.

4.4 Modelo cosmológico de Bianchi tipo I

Iremos fazer uma breve revisão do modelo de Bianchi tipo I, estudado por Letelier [31], cuja fonte consiste de uma nuvem de cordas massivas. A métrica do modelo cosmológico de Bianchi tipo I é

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2 d\xi^2 - \beta^2 d\eta^2 - \gamma^2 d\zeta^2, \quad (4.79)$$

onde α , β e γ são funções somente do tempo t . Para métrica dada pela eq(4.79), temos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0 \quad (4.80)$$

quando $\mu \neq \nu$.

A partir das eqs(4.29), (4.30), (4.54), (4.79) e (4.80), concluímos que

$$u^\mu = u_\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (4.81)$$

e que x^μ deve estar ao longo de qualquer uma das direções $\frac{\partial}{\partial \xi}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ ou $\frac{\partial}{\partial \zeta}$. Deste modo, sem perda de generalidade, escolhemos $x^\mu \parallel \frac{\partial}{\partial \xi}$, isto é,

$$x^\mu = (0, \alpha^{-1}, 0, 0). \quad (4.82)$$

Como mostrado em [31], a partir das eqs(4.79), (4.81) e (4.82), conclui-se que as identidades de Bianchi, eqs(4.62) e (4.64), se reduzem a

$$\dot{\rho} + \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho - \lambda) + \left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\rho = 0, \quad (4.83)$$

onde o “ponto” indica derivada com relação ao tempo t . Note que, como consequência das equações de Einstein, ρ e λ são funções somente do tempo t .

As equações de Einstein, para $\mu = \nu$, são equivalentes a

$$\frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{\alpha\beta} + \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{\beta\gamma} + \frac{\dot{\gamma}\dot{\alpha}}{\gamma\alpha} = \rho, \quad (4.84)$$

$$\frac{\ddot{\beta}}{\beta} + \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} + \frac{\dot{\beta}\dot{\gamma}}{\beta\gamma} = \lambda, \quad (4.85)$$

$$\alpha\ddot{\gamma} + \dot{\alpha}\dot{\gamma} + \ddot{\alpha}\gamma = 0 \quad (4.86)$$

e

$$\alpha\ddot{\beta} + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \ddot{\alpha}\beta = 0. \quad (4.87)$$

Outro modo de obter a eq(4.83) é usando as eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87). Neste caso, a eq(4.83) é obtida como consequência natural das eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87). Para isto, calculemos $\dot{\rho}$ a partir da eq(4.84), subtraímos a eq(4.85) deste resultado e multipliquemos por $\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}$, depois calculemos $\left(\frac{\dot{\beta}}{\beta} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right)\rho$, substituindo a eq(4.84) no resultado obtido anteriormente. Somemos as equações membro a membro para obtermos, então, a

eq(4.83). Note que as eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87) envolvem cinco funções a determinar, que são α , β , γ , ρ e λ . Para determinar tais funções, precisamos de mais uma equação para que possamos ter um sistema, cuja solução possa ser determinada de maneira unívoca. A outra equação que podemos usar é a equação de estado ou alguma função explícita de α , β , γ , ρ ou λ .

Consideremos a equação de estado de Takabayasi, eq(4.66). Façamos

$$x = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha}, \quad (4.88)$$

$$y = \frac{\dot{\beta}}{\beta} \quad (4.89)$$

e

$$z = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \quad (4.90)$$

nas eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87). Neste caso, a equação eq(4.84) resultará em

$$\rho = xy + yz + zx \geq 0. \quad (4.91)$$

De x , y e z , temos, respectivamente,

$$\dot{x} = \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - x^2, \quad (4.92)$$

$$\dot{y} = \frac{\ddot{\beta}}{\beta} - y^2 \quad (4.93)$$

e

$$\dot{z} = \frac{\ddot{\gamma}}{\gamma} - z^2. \quad (4.94)$$

Com estas mudanças, as eqs(4.85), (4.86) e (4.87) podem ser reescritas, respectivamente, como segue

$$\dot{y} + y^2 + \dot{z} + z^2 + yz = \lambda, \quad (4.95)$$

$$\dot{z} + z^2 + xz + \dot{x} + x^2 = 0 \quad (4.96)$$

e

$$\dot{y} + y^2 + xy + \dot{x} + x^2 = 0. \quad (4.97)$$

Subtraindo a eq(4.96) da eq(4.95) e somando o resultado com a eq(4.97), obtemos

$$2(\dot{y} + y^2) + xy + yz - \lambda - xz = 0. \quad (4.98)$$

Da eq(4.91), temos

$$y(x + z) = (1 + \omega)\lambda - xz. \quad (4.99)$$

Substituindo esse resultado na eq(4.98), obtemos

$$2(\dot{y} + y^2) + y(x + z) - \left[\frac{y(x + z) + xz}{1 + \omega} \right] - xz = 0 \Rightarrow \quad (4.100)$$

$$\dot{y} = -y^2 + \frac{2 + \omega}{2(1 + \omega)}xz - \frac{\omega}{2(1 + \omega)}y(x + z). \quad (4.101)$$

Subtraindo a eq(4.97) da (4.95) e somando o resultado com a eq(4.96), obtemos

$$2(\dot{z} + z^2) + z(x + y) - xy - \lambda = 0. \quad (4.102)$$

Mas, da eq(4.91), temos

$$\lambda = \frac{xy + z(x + y)}{1 + \omega}, \quad (4.103)$$

que substituindo na eq(4.102), resulta em

$$\dot{z} = -z^2 + \frac{2 + \omega}{2(1 + \omega)}xy - \frac{\omega}{2(1 + \omega)}z(x + y). \quad (4.104)$$

Somando as eqs(4.96) e (4.97), obtemos

$$2(\dot{x} + x^2) + x(y + z) + \dot{y} + y^2 + \dot{z} + z^2 = 0. \quad (4.105)$$

Substituindo as eqs(4.101) e (4.104) na eq(4.105), temos o seguinte resultado:

$$\dot{x} = -x^2 + \frac{\omega}{2(1 + \omega)}yz - \frac{2 + \omega}{2(1 + \omega)}x(y + z). \quad (4.106)$$

As eqs(4.91), (4.101), (4.104) e (4.106) são equivalentes as eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87), para a equação de estado de Takabayasi. Essas equações constituem um sistema de equações diferenciais autônomo do tipo quadrático. Note que as eqs(4.101), (4.104) e (4.106) têm somente um ponto crítico em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Quando $\omega \rightarrow 0$, haverá

somente nuvem de cordas geométricas, e quando $\omega \rightarrow \infty$, haverá somente nuvem de partículas.

Usando as transformações de x , y e z feitas anteriormente, podemos reescrever a eq(4.83) em termos destas variáveis, do seguinte modo:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = - \left[\frac{\omega}{1 + \omega} x + y + z \right]. \quad (4.107)$$

Uma maneira de encontrar as soluções particulares das equações de Einstein pode ser explicitando α , β , γ , ρ ou λ . Quanto a ρ e λ , as formas explícitas devem ser sempre analisadas à luz das condições de energia. Vamos admitir que

$$\alpha = at + b, \quad (4.108)$$

onde $a \neq 0$ e b são constantes arbitrárias.

Substituindo a eq(4.108) na eq(4.86), obtemos

$$a\dot{\gamma} + (at + b)\ddot{\gamma} = 0. \quad (4.109)$$

Se $f(t) = \dot{\gamma}(t)$, então $\dot{f}(t) = \ddot{\gamma}(t)$. Daí, a equação eq(4.109) se torna

$$af + (at + b)\dot{f} = 0. \quad (4.110)$$

A solução geral desta equação é

$$f = e^{-A} (at + b)^{-1} \quad (4.111)$$

e a solução geral da eq(4.109) é

$$\gamma = \frac{C_1}{a} \ln(at + b) + d_1, \quad (4.112)$$

onde C_1 e d_1 são constantes arbitrárias.

Substituindo a eq(4.108) na eq(4.87), obtemos

$$(at + b)\ddot{\beta} + a\beta = 0, \quad (4.113)$$

cuja solução geral, por analogia com a eq(4.109), é

$$\beta = \frac{C_2}{a} \ln(at + b) + d_2, \quad (4.114)$$

onde C_2 e d_2 são constantes arbitrárias.

A métrica dada pela eq(4.79), bem como as eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87) são invariantes por uma mudança da origem do tempo. Além disso, as eqs(4.84), (4.85), (4.86) e (4.87) são invariantes por uma multiplicação dos coeficientes da métrica α , β e γ por uma constante. Note que estas constantes, na métrica dada pela eq(5.1), podem ser absorvidas pela redefinição das coordenadas ξ , η e ζ . Assim, sem perdas de generalidade, podemos redefinir a , b , C_1 , C_2 , d_1 e d_2 de modo que

$$\alpha = t, \quad (4.115)$$

$$\beta = \ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \quad (4.116)$$

e

$$\gamma = \ln \left(\frac{t}{t_2} \right), \quad (4.117)$$

onde t_1 e t_2 são novas constantes arbitrárias.

Portanto, das eqs(4.84), (4.115), (4.116) e (4.117), obtemos

$$\rho = \frac{1 + \ln \left(\frac{t^2}{t_1 t_2} \right)}{t^2 \ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \ln \left(\frac{t}{t_2} \right)}. \quad (4.118)$$

Por outro lado, das eqs(4.85), (4.115), (4.116) e (4.117), concluimos que

$$\lambda = \frac{1 - \ln \left(\frac{t^2}{t_1 t_2} \right)}{t^2 \ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \ln \left(\frac{t}{t_2} \right)}. \quad (4.119)$$

Neste modelo, o coeficiente de expansão, o escalar de *shear* e a vorticidade escalar são, respectivamente,

$$\theta = \frac{1}{t} \left[1 + \frac{\ln \left(\frac{t^2}{t_1 t_2} \right)}{\ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \ln \left(\frac{t}{t_2} \right)} \right], \quad (4.120)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{t^2} \left\{ 1 + \left[\ln \left(\frac{t}{t_1} \right) \right]^{-2} + \left[\ln \left(\frac{t}{t_2} \right) \right]^{-2} - \frac{(t\theta)^2}{3} \right\} \quad (4.121)$$

e

$$\omega = 0. \quad (4.122)$$

Note que para $t = 0$, t_1 e t_2 arbitrários, o determinante da métrica dada pela eq(4.79) é nulo, pois $\det(g_{\mu\nu}) = -(\alpha\beta\gamma)^2$ e $\alpha = 0$, $\beta = 0$ e $\gamma = 0$, neste caso. Estes três

instantes não representam apenas singularidades da métrica, mas singularidades reais, como podemos ver a partir do comportamento de ρ , λ , θ e σ . Esta solução não satisfaz as condições de energia para todo t , entre zero e infinito. Quando $t_0 \equiv t_1 = t_2$, temos $\beta = \gamma$. Neste caso, o espaço-tempo tem simetria plana e as eq(4.118) e (4.119) se reduzem, respectivamente, a

$$\rho = \frac{1 + 2\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}{t^2 \left[\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2} \quad (4.123)$$

e

$$\lambda = \frac{1 - 2\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}{t^2 \left[\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right]^2}. \quad (4.124)$$

Para um dado valor constante t_0 , tal que $0 < t_0 < e$, a evolução da matéria no intervalo $t_0 < t < \sqrt{e}t_0$ apresenta as seguintes propriedades:

- Todas as condições de energia são satisfeitas durante o intervalo de tempo considerado.

De fato, se $\rho \geq 0$, então

$$t \geq \frac{t_0}{\sqrt{e}}. \quad (4.125)$$

Se $\lambda \geq 0$, então

$$t \leq \sqrt{e}t_0. \quad (4.126)$$

Se $\rho \geq \lambda$, então

$$t \geq t_0. \quad (4.127)$$

Se $\lambda < 0$, então

$$t > t_0\sqrt{e}. \quad (4.128)$$

Daí, a interseção dos intervalos nas eqs(4.125), (4.126), (4.127) e (4.128) resulta em $t_0 < t < \sqrt{e}t_0$.

- Para $t \approx t_0$, temos $\rho \approx \lambda$, o que significa dizer que a matéria se comporta como uma nuvem de cordas geométricas.

De fato, a partir das eqs(4.123) e (4.124), temos

$$\frac{\rho}{\lambda} = \frac{1 + 2\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}{1 - 2\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)}. \quad (4.129)$$

Daí, para $t \approx t_0$, resulta que $\rho \approx \lambda$.

- Quando $t \rightarrow \sqrt{et_0}$, a densidade de tensão λ da nuvem de cordas tende a zero. O que significa dizer que prevalece somente uma nuvem de partículas, pois $\rho \rightarrow \rho_p$.

De fato, para $t = \sqrt{et_0}$, a densidade de tensão da nuvem de cordas λ é dada por

$$\lambda = \frac{1 - 2\ln\left(\frac{\sqrt{et_0}}{t_0}\right)}{t^2 \left[\ln\left(\frac{\sqrt{et_0}}{t_0}\right)\right]^2} \Rightarrow \lambda = 0. \quad (4.130)$$

Quando $t > \sqrt{et_0}$, a fase de cordas do universo desaparece, porque $\lambda < 0$. Isso significa dizer que temos somente um fluido anisotrópico de partículas. Para esse intervalo as condições de energia são satisfeitas desde que $\rho > 0$ e $\rho > |\lambda|$. O instante de tempo crítico $t_c = \sqrt{et_0}$ é calculado a partir da temperatura crítica T_c , dada pelas teorias de grande unificação (GUT), conforme mencionado em [31].

Vamos admitir que na eq(4.108), $a = 0$ e $b = 1$. As soluções gerais das eqs(4.86) e (4.87), quando $\alpha = 1$, são, respectivamente,

$$\lambda = ct + d \quad (4.131)$$

$$\beta = c_1 t + d_1. \quad (4.132)$$

Mas,

$$\lambda = t - t_0 \quad (4.133)$$

$$\beta = t, \quad (4.134)$$

podem ser usadas como soluções particulares.

Neste caso, as quantidades ρ e λ são dadas por

$$\rho = \lambda = \frac{1}{t(t - t_0)}. \quad (4.135)$$

Este modelo particular apresenta duas singularidades essenciais em $t = 0$ e $t = t_0$. A eq(4.135) nos diz que a nuvem é formada somente por cordas geométricas. Portanto, podemos usar modelo que considera nuvem de cordas como fontes do modelo cosmológico de Bianchi tipo I.

5 Buraco negro estático com nuvem de cordas e quintessência (Espaço-tempo de Letelier com quintessência)

5.1 Introdução

Um estudo realizado por V. V. Kiselev [39], em 2003, sobre buracos negros apresentou soluções exatas esfericamente simétricas das equações de Einstein para esse tipo de objeto rodeado por quintessência. Esta matéria com pressão negativa foi proposta como uma possível alternativa para resolver o problema relacionado a aceleração do universo.

Neste capítulo vamos estudar os buracos negros com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) e quintessência [59], e obter soluções exatas com simetria esférica para as equações de Einstein. Usando estas soluções, vamos investigar o movimento geodésico de partículas nesta geometria. Neste capítulo teremos um prelúdio para o que desenvolveremos no próximo, à saber, buracos negros estacionários com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) com rotação e quintessência [59].

Inicialmente, vamos fazer uma revisão da solução das equações de Einstein que descreve um buraco negro estático (buraco negro de Schwarzschild) com quintessência, na sec.(5.2). Às demais seções, (4.3), (4.4) e (4.5) são dedicadas ao estudo do buraco negro estático com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) e quintessência.

5.2 Buraco negro de Schwarzschild imerso em quintessência

Um dos grandes desafios da cosmologia contemporânea diz respeito à determinação da composição do universo. Os dados recentes sobre a radiação cósmica de fundo são coerentes com a existência de um universo espacialmente plano, o que indica a existência de uma quantidade de energia muito superior à observada. Para contornar esse problema, e apresentar uma grandeza que é responsável pela energia que falta, foi feita uma proposta que consiste em considerar a constante cosmológica [[40], [41]], que serviria, também, para explicar a expansão acelerada do universo [[42], [43]]. Outra proposta para explicar essa energia que falta corresponde ao que chamamos de quintessência (para uma revisão ver [44]), que corresponde à componente do fluido cósmico com pressão negativa, de modo que a razão entre a pressão, p , e a densidade de energia, ρ , dada pelo parâmetro ω , é tal que $-1 < \omega < 0$ [[36], [37]]. Essa proposta pode ser simulada por um campo escalar cósmico, que constitui um elemento fundamental na construção de uma teoria além do modelo

padrão da física de partículas elementares e da teoria geral da relatividade. Na realidade, de um modo mais geral, teorias construídas com base na teoria geral da relatividade e no modelo padrão das partículas elementares, sugerem a possibilidade de se usar campos escalares como campos cósmicos, um dos quais pode ser usado como quintessência, e assim poderia explicar a energia que falta no cenário cosmológico. Essa possibilidade nos motiva a estudar um cenário em que o buraco negro está envolto por quintessência, a qual permeia todo o universo, e com certeza, modificaria o campo gravitacional em torno de um buraco negro, quaisquer que sejam suas características.

A solução exata das equações de Einstein para um campo gravitacional estático, em coordenadas esféricas, tem a seguinte forma geral

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.1)$$

onde ν e λ são funções somente da coordenada radial r .

Consideremos que o espaço-tempo é preenchido por quintessência, cujo conteúdo de matéria e energia é dado por um tensor energia-momentum de componentes [39]

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q \quad (5.2)$$

e

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}\rho_q(3\omega_q + 1), \quad (5.3)$$

onde ω_q é o parâmetro de quintessência e ρ_q sua densidade de energia.

Admitindo $4\pi G = 1$, as equações de campo de Einstein ficam

$$2T_t^t = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (5.4)$$

$$2T_r^r = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (5.5)$$

e

$$2T_\theta^\theta = 2T_\phi^\phi = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right), \quad (5.6)$$

onde a linha denota a derivada em relação a r .

A partir das eqs(5.2), (5.4) e (5.5), concluímos que $\lambda = -\nu$. Podemos admitir este resultado sem perda de generalidade, uma vez que a constante que surge da resolução da equação diferencial ordinária, resultante dessas três equações, pode ser anulada por

meio da redefinição do coordenada temporal. Supondo $\lambda = -\ln(1+f)$, com $f = f(r)$, as eqs(5.4), (5.5) e (5.6) podem ser reescritas de modo que

$$T_t^t = T_r^r = -\frac{1}{2r^2} (f + rf') \quad (5.7)$$

e

$$T_\theta^\theta = T_\phi^\phi = -\frac{1}{4r} (2f' + rf''). \quad (5.8)$$

Substituindo a eq(5.2) na eq(5.7), e a eq(5.3) na eq(5.8), e somando as equações resultantes, obtemos

$$(3\omega_q + 1)f + 3(1 + \omega_q)rf' + r^2f'' = 0, \quad (5.9)$$

que é uma equação diferencial de Euler homogênea, cuja solução geral é

$$f = -\frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (5.10)$$

Daí, conhecemos λ e ν . Portanto, o elemento de linha dado pela eq(5.1) que descreve a geometria do espaço-tempo desse buraco negro, é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \quad (5.11)$$

Tal resultado, obtido por V. V. Kiselev [39], se reduz ao buraco negro de Schwarzschild quando o termo de quintessência é nulo. Por consequência da mudança da geometria do espaço-tempo de Schwarzschild, devido a quintessência, espera-se que as trajetórias(geodésicas) das partículas nesta região mudem em relação as trajetórias das mesmas na vizinhança de um buraco negro de Schwarzschild. Para uma compreensão mais detalhada destas consequências consulte [60].

5.3 Solução correspondente ao buraco negro estático com nuvem de cordas (espaço-tempo de Letelier) imerso em quintessência

No segundo capítulo desta dissertação estudamos as soluções exatas das equações de Einstein, esfericamente simétricas, que descreve o espaço-tempo correspondente a um buraco negro com uma nuvem de cordas(geométricas), obtidas por P. S. Letelier no final

da década de 1970. São estas soluções que estamos chamando de espaço-tempo de Letelier. O tensor energia-momentum da fonte dessa geometria, como sabemos, é

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{\Sigma^{\mu\alpha} \Sigma_{\alpha}^{\nu}}{\sqrt{-\gamma}}, \quad (5.12)$$

onde somente $\Sigma^{01} = \Sigma^{10} = \frac{ae^{\frac{\nu+\lambda}{2}}}{\rho r^2}$ é não nula, sendo ρ a densidade própria de energia da nuvem de cordas.

5.3.1 Nuvem de cordas e quintessência

Considerando o espaço-tempo preenchido por nuvem de cordas e quintessência, podemos concluir com base nas eqs(5.2), (5.3) e (5.12), que o conteúdo de matéria e energia deste espaço-tempo é descrito por um tensor cujas componentes são as seguintes:

$$T_t^t = T_r^r = \rho_q + \frac{a}{r^2} \quad (5.13)$$

e

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = -\frac{1}{2}\rho_q (3\omega_q + 1). \quad (5.14)$$

As equações de campo de Einstein, nesse caso, são dadas por

$$T_t^t = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (5.15)$$

$$T_r^r = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (5.16)$$

e

$$T_{\theta}^{\theta} = T_{\phi}^{\phi} = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} \right). \quad (5.17)$$

Substituindo a eq(5.13) nas eqs(5.15) e (5.16), bem como eq(5.14) na eq(5.17), obtemos, o seguinte conjunto de equações:

$$\rho_q + \frac{a}{r^2} = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}, \quad (5.18)$$

$$\rho_q + \frac{a}{r^2} = -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \quad (5.19)$$

e

$$\rho_q (3\omega_q + 1) = e^{-\lambda} \left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu' \lambda'}{2} \right). \quad (5.20)$$

Como o tensor energia-momentum da nuvem de cordas com quintessência satisfaz às condições de linearidade e aditividade, pois vemos em eq(5.13) que

$$T_t^t = T_r^r, \quad (5.21)$$

então, a partir das eqs(5.18) e (5.19), temos $\lambda = -\nu$, resultado obtido anteriormente. Levando em consideração este resultado e fazendo a seguinte mudança $\lambda = -\ln(1 + f)$ na eq(5.18) ou eq(5.19), obtemos

$$\rho_q + \frac{a}{r^2} = -\frac{1+f}{r^2} - \frac{f'}{r} + \frac{1}{r^2}. \quad (5.22)$$

Substituindo λ na eq(5.20), encontramos a seguinte equação diferencial:

$$\rho_q (3\omega_q + 1) = f'' + \frac{2}{r}f'. \quad (5.23)$$

Expressando a densidade de energia ρ_q da quintessência, a partir de eq(5.22), em termos de r , de f e de sua devirada primeira, além do termo a relacionado a corda, e substituindo tal resultado na eq(5.23), obtemos a seguinte equação diferencial

$$r^2 f'' + 3(\omega_q + 1) r f' + (3\omega_q + 1) f + a(3\omega_q + 1) = 0, \quad (5.24)$$

que é uma equação de Euler não-homogênea. Note que, a eq(5.24) é igual a eq(5.9), com o acréscimo do termo $a(3\omega_q + 1)$.

A solução geral da eq(5.24) é a soma de uma solução particular f_p , com a solução homogênea f_h , dada por eq(5.10), ou seja,

$$f = f_h + f_p. \quad (5.25)$$

Pelo fato de termos exposto, apenas, a solução homogênea de eq(5.24), explicitaremos, agora, o modo de se obter esta solução, além da solução particular. Sendo $f_p = A = \text{const}$, temos, por substituição desta solução na eq(5.24), que

$$A = -a \Rightarrow f_p = -a. \quad (5.26)$$

Seja $f_h = r^k$ a solução homogênea da eq(5.24). Substituindo esta função potencial na equação em questão, obtemos

$$k^2 + (3\omega_q + 2)k + 3\omega_q + 1 = 0. \quad (5.27)$$

A equação eq(5.27) nada mais é que uma equação do 2º grau em k , cujas soluções são

$$k = -(3\omega_q + 1) \quad (5.28)$$

$$k = -1. \quad (5.29)$$

Daí, a solução homogênea é

$$f_h = Br^{-(3\omega_q+1)} + Cr^{-1}. \quad (5.30)$$

Admitindo, por conveniência, que $B = -\alpha$ e $C = -2m$, a solução geral da eq(5.24) pode ser escrita na forma

$$f(r) = -a - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{(3\omega_q+1)}}. \quad (5.31)$$

Substituindo a eq(5.31) na relação entre λ e f , e considerando que $\lambda = -\nu$, a métrica do espaço-tempo da nuvem de cordas imersa em quintessência é dada por

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) dt^2 - \frac{1}{\left(1 - a - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.32)$$

Tal resultado é uma forma geral das soluções exatas, com simetria esférica, das equações de Einstein que descrevem um buraco negro com nuvens de cordas, sem rotação, imerso em quintessência.

5.4 Singularidades do espaço-tempo de Letelier com quintessência

Podemos dizer que singularidades são pontos do espaço-tempo nos quais o elemento de linha ds^2 degenera. Tais singularidades podem ser removíveis ou não, sob uma transformação de coordenadas. Se, sob uma dada transformação, a singularidade não for removível dizemos que ela é real, como pode ser visto em [63]. Nas singularidades reais, o escalar de curvatura R do espaço-tempo tende ao infinito, enquanto que nas singularidades

removíveis, essa grandeza é igual a um valor constante. Para a métrica dada pela eq(5.32) o escalar de curvatura é

$$R = \frac{3\omega\alpha(3\omega - 1) + 2ar^{3\omega+1}}{r^{3\omega+3}}. \quad (5.33)$$

As singularidades do espaço-tempo de Letelier com quintessência podem ser obtidas do seguinte modo:

$$1 - a - \frac{2m}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} = 0 \Rightarrow (1 - a)r^2 - 2mr - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q-1}} = 0. \quad (5.34)$$

Para resolver esta equação devemos explicitar os valores de a , m , α e ω_q . Admitamos os casos abaixo.

- Seja o parâmetro de quintessência $\omega_q = -\frac{1}{3}$. Neste caso a eq(5.34) se reduz a seguinte equação polinomial

$$(1 - a - \alpha)r^2 - 2mr = 0, \quad (5.35)$$

cujas soluções são

$$r = 0 \quad (5.36)$$

e

$$r = \frac{2m}{1 - (a + \alpha)}. \quad (5.37)$$

Este resultado permite concluir que, para este caso, há duas singularidades, $r = 0$ e $r = \frac{2m}{1 - (a + \alpha)}$, onde a primeira é a singularidade real e a segunda é uma singularidade removível, como pode ser verificado a partir da eq(5.33). Fisicamente, chamamos as singularidades removíveis de horizonte de eventos, superfície limite que se ultrapassada por uma partícula clássica não é mais possível obter informações enviadas pela mesma. Falamos em horizonte de eventos desde que $a + \alpha < 1$. Caso contrário, temos um resultado que descreve um espaço-tempo homogêneo. Também observamos um resultado já visto por Letelier [23], que é o aumento ou a redução do raio do horizonte de eventos quando comparado ao raio de Schwarzschild, dependendo do valor de a . Este efeito é amplificado ou reduzido, no caso que estamos tratando, quando a quintessência está presente. De fato, se $0 < a + \alpha < 1$, o raio do horizonte de eventos será maior, enquanto que, se $a + \alpha < 0$ seu raio será menor, quando comparado ao raio do horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild de mesma massa. Vale lembrar que $\alpha > 0$, como pode ser visto em [60]. Então $a < 1$, pois $a + \alpha < 1$, como previsto para o espaço-tempo de Letelier [23].

- Seja o parâmetro de quintessência $\omega_q = -\frac{2}{3}$. Neste caso a equação eq(5.34) se reduzirá ao seguinte polinômio

$$-\alpha r^3 + (1 - a) r^2 - 2mr = 0, \quad (5.38)$$

cujas soluções são

$$r = 0, \quad (5.39)$$

$$r = \frac{1 - a + \sqrt{(1 - a)^2 - 8m\alpha}}{2\alpha} \quad (5.40)$$

e

$$r = \frac{1 - a - \sqrt{(1 - a)^2 - 8m\alpha}}{2\alpha}. \quad (5.41)$$

Para que este resultado tenha significado físico, isto é, para que ele represente um buraco negro é necessário que pelo menos uma das raízes não-nulas reais da eq(5.38) seja positiva. As raízes são reais desde que $\alpha < \frac{(1-a)^2}{8m}$. Se uma destas raízes não-nulas for positiva a outra também será, obrigatoriamente, neste caso. De fato, o segundo termo do numerador de $r = \frac{1-a \pm \sqrt{(1-a)^2 - 8m\alpha}}{2\alpha}$ é menor do que $1 - a$. Nesta situação, o buraco negro estático com nuvem de cordas e quintessência (espaço-tempo de Letelier com quintessência) tem uma singularidade real em $r = 0$ e dois horizontes, um externo e outro interno, que chamamos de horizonte de eventos e de Cauchy, respectivamente. A existência de dois horizontes, neste caso, deve-se a quintessência. Logo, temos um novo conjunto de buracos negros que também podem ter dois horizontes, assim como ocorre em outros tipos de buracos negros, como o de Kerr, Kerr-Newman e Reissner-Nordström. Se as raízes não-nulas forem complexas, a solução não descreverá um buraco negro.

- Seja o parâmetro de quintessência $\omega_q = -1$. Neste caso, a eq(5.34) se reduzirá ao seguinte polinômio:

$$-\alpha r^4 + (1 - a) r^2 - 2mr = 0, \quad (5.42)$$

onde uma de suas quatro soluções é $r = 0$. As outras três soluções são raízes da equação

$$\alpha r^3 - (1 - a) r + 2M = 0. \quad (5.43)$$

Sejam r_1 , r_2 e r_3 soluções da eq(5.43). Uma das relações de Girard para esta equação nos diz que $r_1 r_2 r_3 = -\frac{2M}{\alpha}$. Então, se duas delas forem complexas a outra será real negativa. Caso contrário, as três seriam reais negativas ou duas delas positivas com a outra negativa. Somente nesta última situação teríamos uma solução que descreveria um buraco negro, com dois horizontes de eventos, um externo e outro interno, ou com um único horizonte, situação que ocorre quando os raios dos horizontes de evento e de Cauchy são iguais.

Podemos fazer esta discussão para diversos outros casos. Entretanto, escolhemos esses, por conveniência, para que tenhamos uma ideia das possíveis consequências da métrica dada pela eq(5.32). Estamos diante de uma solução que descreve buracos negros com um ou dois horizontes de eventos dependendo das características da corda e da quintessência.

5.5 Equações do movimento

Sabemos da teoria da relatividade geral de Einstein, [63], que as equações geodésicas e de vínculos de uma partícula numa determinada geometria são, respectivamente,

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0 \quad (5.44)$$

e

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = p. \quad (5.45)$$

Esta última equação determinará se as geodésicas são tipo-espaço, nula ou tipo-tempo desde que p seja igual a -1, 0 ou 1, respectivamente.

Nesta seção estudaremos as equações do movimento de uma partícula na vizinhança de um buraco negro estático com nuvem de cordas e quintessência (espaço-tempo de Letelier com quintessência), isto é, num espaço-tempo descrito pela eq(5.32), cujo elemento de linha é dado por

$$ds^2 = h(r) dt^2 - \frac{1}{h(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.46)$$

onde

$$h(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (5.47)$$

Calculando os símbolos de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}$ para a métrica eq(5.46), escrevemos as seguintes equações geodésicas:

$$\ddot{t} + \frac{h'(r)}{h(r)} \dot{r} \dot{t} = 0, \quad (5.48)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} h(r) \left[h'(r) \dot{t}^2 + \frac{1}{h'(r)} \dot{r}^2 - 2r \dot{\theta}^2 - 2r \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] = 0, \quad (5.49)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 = 0 \quad (5.50)$$

e

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \quad (5.51)$$

A equação de vínculo tipo-tempo é

$$h(r) \dot{t}^2 - \frac{1}{h(r)} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 1, \quad (5.52)$$

obtida fazendo-se $p = 1$ na eq(5.45), com a métrica dada pela eq(5.46). Por mais que tenhamos explicitado $h(r)$ na eq(5.47), esta função $h = h(r)$ é geral. Isso significa dizer que a eq(5.46) é uma forma geral da métrica e por consequência as equações geodésicas dadas pelas eqs(5.48), (5.49), (5.50) e (5.51) também são gerais. Para o caso em questão, a equação de vínculo tipo-tempo é

$$\left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right) \dot{t}^2 - \frac{1}{\left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \right)} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2) = 1. \quad (5.53)$$

Estudaremos o comportamento das equações geodésicas no plano equatorial e compararemos com o caso correspondente para um buraco negro de Schwarzschild.

5.5.1 Equações geodésicas no plano equatorial e potencial efetivo

Consideremos o plano equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$. Neste caso, resolvendo a eq(5.48) para determinar $\dot{t}$, obtemos

$$\dot{t} = \frac{E}{h(r)}, \quad (5.54)$$

onde E é uma constante de integração que, fisicamente, é a energia do sistema. Para $h(r)$ dado pela eq(5.47), a eq(5.54) é escrita na forma

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}}. \quad (5.55)$$

Resolvendo a eq(5.51) para determinar $\dot{\phi}$, obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (5.56)$$

onde L é uma constante de integração que, fisicamente, é o momento angular da partícula que está se movendo no espaço-tempo do buraco negro.

Substituindo as eqs(5.54) e (5.56) na equação de vínculo, dada pela eq(5.52), obtemos

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + h(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (5.57)$$

A equação da conservação de energia é:

$$E^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{ef}, \quad (5.58)$$

onde V_{ef} é o potencial efetivo. Comparando as eqs(5.57) e (5.58), vemos que o potencial efetivo é dado por

$$V_{ef} = h(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (5.59)$$

Para o espaço-tempo de Letelier com quintessência, o potencial efetivo, obtido substituindo-se a eq(5.47) na eq(5.59), é

$$V_{ef} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} - a \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (5.60)$$

Os três primeiros termos são os mesmos obtidos com a solução de Schwarzschild, onde o primeiro está associado ao potencial gravitacional Newtoniano, o segundo é o potencial centrífugo repulsivo e o terceiro termo é uma correção relativística. Os dois últimos termos estão relacionados a quintessência ou a nuvem de cordas. O potencial efetivo dado pela eq(5.60) pode ser reescrito do seguinte modo:

$$V_{ef} = \left(1 - a - \frac{2M}{r}\right) + (1 - a) \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (5.61)$$

Como mostrado por Letelier [23], o parâmetro a relacionado a nuvem de cordas pode assumir qualquer valor, exceto $a = 1$. No potencial efetivo dado pela eq(5.61), a nuvem de cordas estabelece mudanças no potencial centrífugo repulsivo. Note que se $a > 1$, o efeito centrífugo é atrativo em vez de repulsivo. Se $0 < a < 1$, o potencial centrífugo sofre uma correção de modo que a nuvem de cordas provoca redução no efeito repulsivo

deste potencial. Se $a < 0$, o potencial centrífugo repulsivo provoca um efeito gravitacional, sobre uma determinada partícula, maior do que o efeito centrífugo Newtoniano.

Agora, analisemos o potencial efetivo, dado pela eq(5.61), para os seguintes valores possíveis do parâmetro de quintessência ω_q :

- Para o parâmetro de quintessência $\omega_q = -\frac{1}{3}$, o potencial efetivo é

$$V_{ef} = \left(1 - a - \alpha - \frac{2M}{r}\right) + (1 - a - \alpha) \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}, \quad (5.62)$$

de onde concluímos que a quintessência, assim como a nuvem de cordas, também provoca uma correção no potencial centrífugo com um termo extra atrativo, pois α é sempre positivo.

- Para o parâmetro de quintessência $\omega_q = -\frac{2}{3}$, o potencial efetivo é

$$V_{ef} = \left(1 - a - \frac{2M + \alpha L^2}{r}\right) + (1 - a) \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} - \alpha r, \quad (5.63)$$

de onde concluímos que a quintessência provoca uma correção no potencial gravitacional Newtoniano, aumentando a contribuição deste termo no efeito gravitacional, e um termo extra atrativo $-\alpha r$.

- Para o parâmetro de quintessência $\omega_q = -1$, o potencial efetivo é

$$V_{ef} = \left(1 - a - \frac{2M}{r}\right) + (1 - a) \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3} - \alpha r^2 - \alpha L^2, \quad (5.64)$$

onde as correções aparecem nos dois últimos termos.

Portanto, a nuvem de cordas e a quintessência estabelecem correções nos termos do potencial efetivo V_{ef} que refletem no comportamento de partículas no espaço-tempo de Letelier com quintessência. A nuvem de cordas estabelece, portanto, uma correção direta na energia potencial centrífuga, provocando os efeitos descritos anteriormente, enquanto as correções estabelecidas pela quintessência dependem dos valores assumidos pelo parâmetro ω_q , isto é, dependem do comportamento do campo escalar através da equação de estado $p = \omega_q \rho_q$. De acordo com dados da literatura [60], observações da supernova SNe Ia, assim como outras realizadas pelo CMB, BAO e pelo telescópio Hubble, o parâmetro de quintessência é medido no intervalo $-1.16 < \omega_q < -0.92$ com 95% de confiabilidade.

5.5.2 Gráficos do potencial efetivo

No que segue, esboçamos gráficos do potencial efetivo, dado pela eq(5.61), para diferentes valores do parâmetro de quintessência ω_q e da constante associada a nuvem de cordas a .

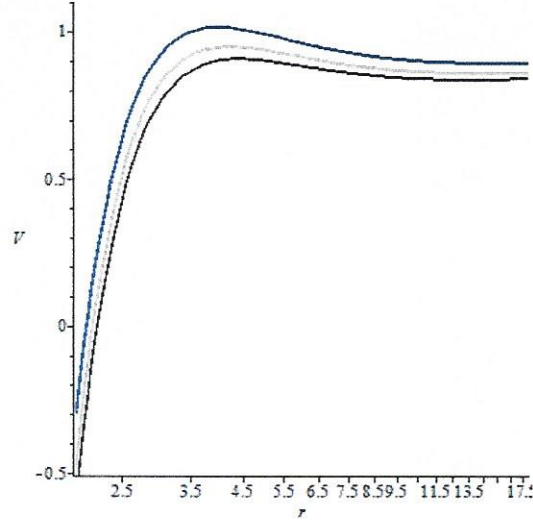


Figura 1 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).

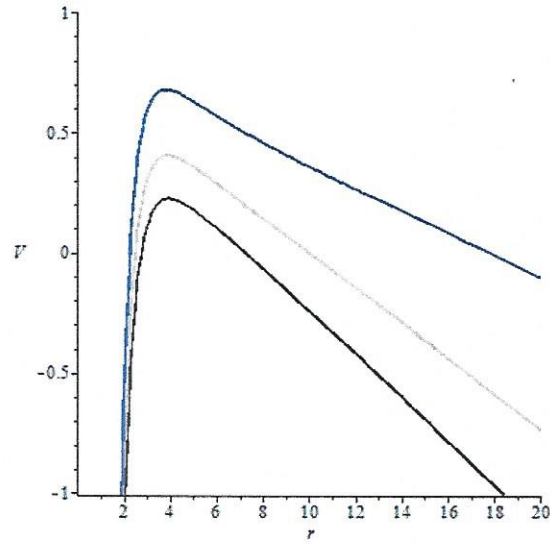


Figura 2 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -\frac{2}{3}$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).

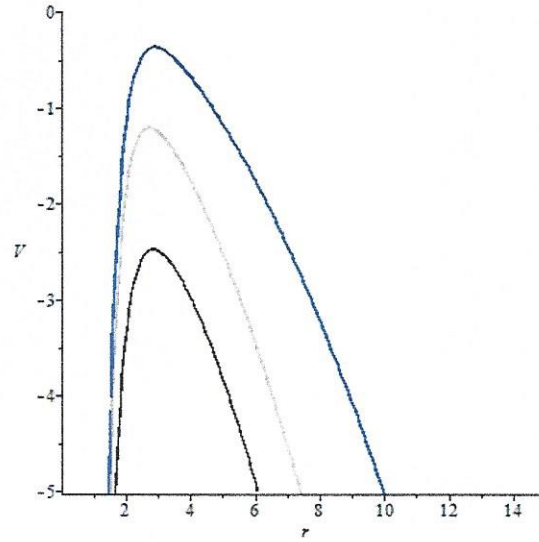


Figura 3 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\omega_q = -1$, $\alpha = 0.05$ (curva azul), $\alpha = 0.08$ (curva cinza) e $\alpha = 0.1$ (curva preta).

Os três primeiros gráficos desta subseção mostram como a quintessência interfere no potencial sentido por uma partícula com momento angular não nulo, constante, na presença desse tipo de buraco negro, como visto em [60]. Note que a medida que vamos tomando valores maiores de α , o valor máximo do potencial efetivo diminui. Na fig(1), vemos que, para um buraco negro com quintessência, onde $\omega_q = -1/3$, o potencial efetivo tende assintoticamente a ser constante para $r \rightarrow \infty$ e tende ao infinito negativo quando $r \rightarrow 0$. Na fig(2), onde o parâmetro de quintessência $\omega_q = -2/3$, vemos que o potencial efetivo vai para o infinito negativo quando $r \rightarrow \infty$, bem como quando $r \rightarrow 0$. Este fato também ocorre para o potencial efetivo, quando $\omega_q = -1$, da fig(3), com a diferença de que neste caso $V_{ef} \rightarrow -\infty$ mais rapidamente quando $r \rightarrow \infty$.

O potencial efetivo mostrado na fig(4) está relacionado ao buraco negro de Letelier. As curvas esboçadas são para três valores diferentes de a , constante relacionada as nuvens de cordas. Note que a medida que tomamos valores maiores para a constante a o potencial efetivo vai diminuindo seu valor de máximo a ponto do “pico da curva” desaparecer. Tal potencial tem a mesma forma que o da fig(1). Portanto, tudo que dissemos de fig(1) é válido para fig(4). Entretanto, há efeitos gravitacionais provocados pela nuvem de cordas que a quintessência não provoca, por exemplo, o aumento do efeito centrífugo repulsivo, como pode ser visto pela eq(5.61).

Os gráficos das figs(5), (6) e (7), a seguir, são do potencial efetivo do espaço-tempo de Letelier com quintessência.

O potencial de fig(5) tem a mesma forma que os das figs(1) e (4). Contudo, inferimos que, dependendo dos valores da constante da corda a e do α relacionado à quintessência,

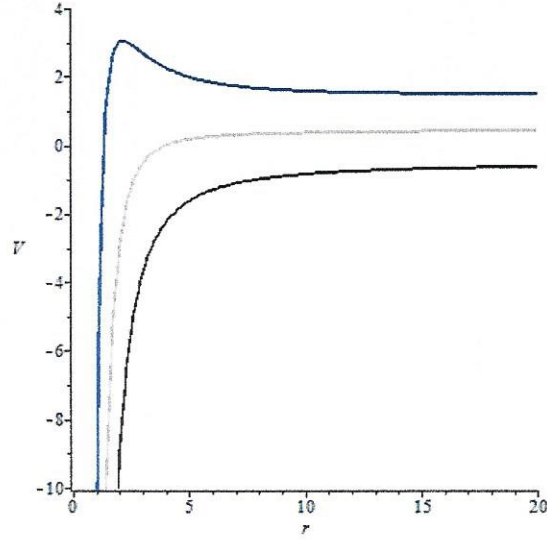


Figura 4 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).

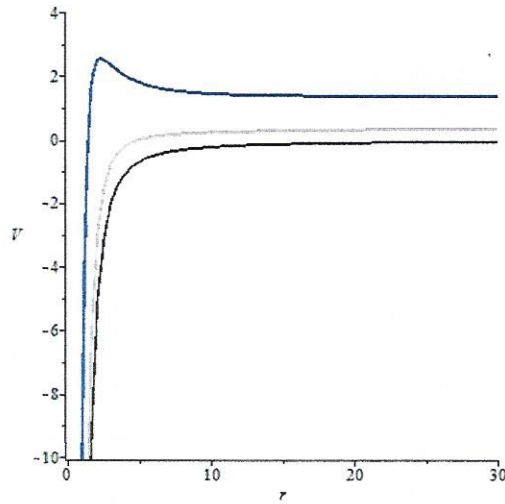


Figura 5 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 0.89$ (curva preta).

com seu parâmetro $\omega_q = -1/3$, pode haver uma “competição” entre cordas e quintessência, desde que a primeira contribua para elevação do valor de máximo do potencial efetivo, enquanto que a segunda contribua para a diminuição deste valor e vice-versa. No gráfico em questão, fixamos o valor de $\alpha = 0.1$ e tomamos três valores diferentes para a constante a da nuvem de corda. Note que se $r \rightarrow \infty$, o potencial efetivo V_{ef} tende assintoticamente a uma constante, enquanto que vai ao infinito negativo quando $r \rightarrow 0$.

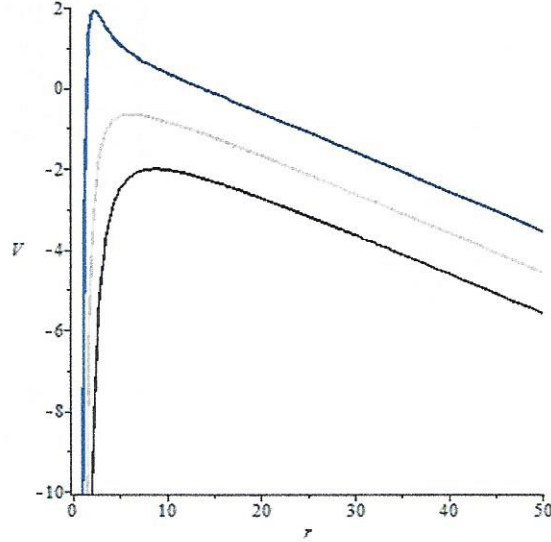


Figura 6 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{2}{3}$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).

Na fig(6) representamos o potencial efetivo de um buraco negro estático com nuvem de cordas e quintessência, onde o parâmetro $\omega_q = -\frac{2}{3}$. Note como a quintessência mudou o padrão de variação do potencial efetivo com a mudança de seu parâmetro quando comparamos a fig(5). Agora, quando $r \rightarrow \infty$, o potencial efetivo $V_{ef} \rightarrow -\infty$, assim como ocorre quando $r \rightarrow 0$.

Na fig(7) representamos o potencial efetivo para o parâmetro $\omega_q = -1$. Note como a quintessência mudou o padrão de variação do potencial efetivo com a mudança de seu parâmetro quando comparamos com a fig(6), por exemplo. Agora, quando $r \rightarrow \infty$, o potencial efetivo $V_{ef} \rightarrow -\infty$ mais rapidamente, do mesmo modo quando $r \rightarrow 0$ o potencial $V_{ef} \rightarrow -\infty$.

5.5.3 Trajetória de uma partícula teste

A partir do potencial efetivo e da lei de conservação da energia discutiremos as geodésicas tipo-tempo não-radiais de uma partícula teste, isto é, com momento angular $L \neq 0$, fora do buraco negro. Portanto, consideraremos um buraco negro com $M = 1$, parâmetro de quintessência $\omega_q = -\frac{1}{3}$, $\alpha = 0.1$, $L^2 = 50$ e a constante da corda $a = 0.89$.

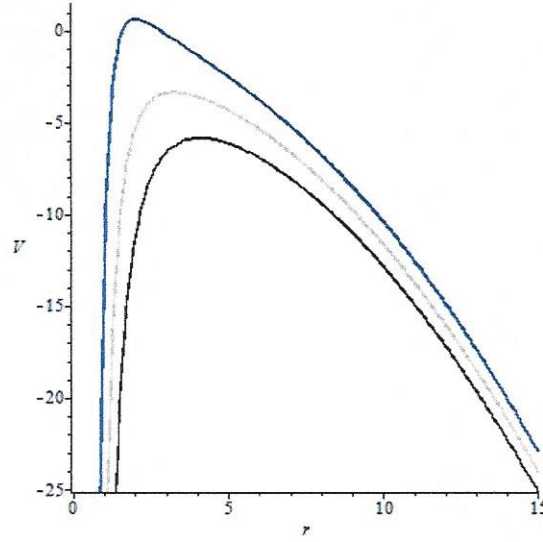


Figura 7 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 20$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -1$, $a = -0.5$ (curva azul), $a = 0.5$ (curva cinza) e $a = 1.5$ (curva preta).

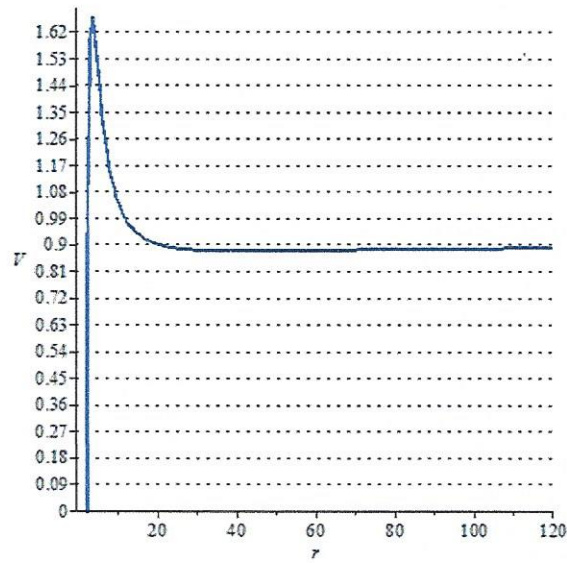


Figura 8 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 50$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$ e $\alpha = 0.1$.

Com base na fig(8), gráfico do potencial efetivo, o movimento de uma partícula teste, classicamente falando, é tal que

- Se a partícula, inicialmente em repouso, partir de uma distância finita com uma energia maior que o máximo do potencial efetivo em direção ao buraco negro, a mesma cairá na singularidade.
- Se a partícula tem energia igual ao máximo do potencial efetivo, sua órbita será instável, podendo, a depender das condições iniciais do movimento, mover-se em direção a singularidade ou afastar-se definitivamente do buraco negro.
- Se a partícula tem energia $E = 1.246$ e está movendo-se em direção ao buraco negro, a mesma terá uma órbita de vôo de modo que a partícula atinge uma distância mínima do buraco negro, sua velocidade se anula nesta posição, sendo recocheteada em seguida para longe do mesmo.
- Se a partícula tem energia $E = 0.89$ e está movendo-se em direção ao buraco negro, a mesma ficará orbitando-o após alcançar uma distância que está dentro do poço potencial da figura. Note que há uma distância de máximo e de mínimo na sua órbita em torno do buraco negro, representando o afélio e o periélio, respectivamente.

Essa discussão pode ser vista em [60].

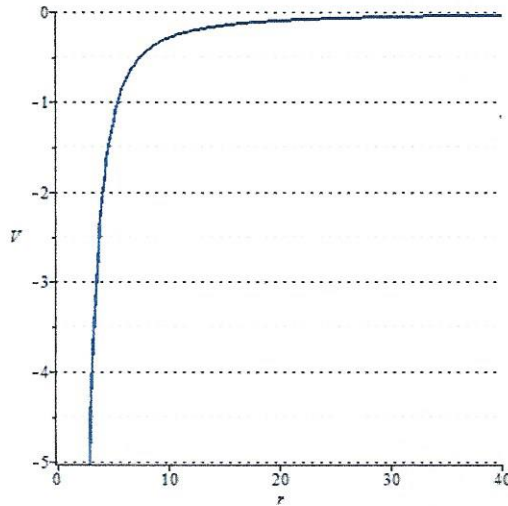


Figura 9 – Potencial efetivo para $M = 1$, $L^2 = 50$, $\alpha = 0.1$, $\omega_q = -\frac{1}{3}$ e $a = 0.89$.

Na fig(9) temos o gráfico do potencial efetivo do buraco negro correspondente ao da fig8. A diferença é que há, agora, a nuvem de cordas, além da quintessência. Note como o potencial efetivo mudou. A partícula teste, agora, ao mover-se em direção do buraco negro

- ou cairá em direção ao buraco negro, quando sua energia $E = -0.5$, por exemplo.
- ou se aproximará de uma distância tal que sua energia seja igual ao potencial efetivo, sendo recocheteada para longe do buraco negro.

Além disso, a partir do potencial efetivo da fig(9), vemos que a partícula teste nunca ficará orbitando o buraco negro em questão. Assim, o potencial efetivo experimentado por uma partícula teste, depende fortemente dos valores dos parâmetros associados à presença da nuvem de cordas, da quintessência, e à equação de estado.

6 Buraco negro estacionário com nuvem de cordas e quintessência (espaço-tempo de Letelier estacionário com quintessência)

6.1 Introdução

Um algoritmo descoberto por Newman e Janis [61] permite transformar uma solução das equações de Einstein, estática e esfericamente simétrica, na solução estacionária e axialmente simétrica associada, usando a complexificação de coordenadas. Como exemplo, podemos mencionar que a solução de Schwarzschild pode ser transformada na de Kerr [61] e a solução de Reissner-Nordström pode ser transformada na de Kerr- Newman [7], dentre outras.

Neste capítulo, usaremos o método de complexificação de coordenadas para construir a solução com rotação correspondente ao espaço-tempo de Letelier com quintessência, obtida no capítulo anterior.

6.2 Buraco negro com rotação

A solução das equações de Einstein que descreve um buraco negro com nuvem de cordas e quintessência é dada pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = h(r) dt^2 - \frac{1}{h(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (6.1)$$

onde

$$h(r) = 1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}. \quad (6.2)$$

Neste capítulo obteremos a solução com rotação associada ao elemento de linha dado pela eq(6.1), com a definição de $h(r)$ dada pela eq(6.2), usando o algoritmo de Newman e Janis [61]. Para obter a métrica de um buraco negro de Letelier em rotação com quintessência fazamos, inicialmente, uma mudança de coordenadas na eq(6.1) para as coordenadas de Eddington-Finkelstein, isto é,

$$du = dt + \frac{1}{h(r)} dr. \quad (6.3)$$

Substituindo a eq(6.3) na eq(6.1), obtemos

$$ds^2 = h(r) du^2 - 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (6.4)$$

ou, substituindo-se a expressão para $h(r)$, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) du^2 - 2dudr - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (6.5)$$

De acordo com o método de Newman-Janis, a métrica pode ser escrita em termos de tétradas nulas, $Z^a = (l^a, n^a, m^a, \bar{m}^a)$, de modo que

$$g^{ab} = l^a n^b + l^b n^a - m^a \bar{m}^b - \bar{m}^a m^b, \quad (6.6)$$

onde os vetores nulos que formam as tétradas são

$$l^a = \delta_r^a, \quad (6.7)$$

$$n^a = \delta_u^a - \frac{1}{2} \left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}}\right) \delta_r^a, \quad (6.8)$$

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^a + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^a\right) \quad (6.9)$$

e

$$\bar{m}^a = \frac{1}{\sqrt{2}r} \left(\delta_\theta^a - \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^a\right), \quad (6.10)$$

onde $\bar{m}^a$ é o complexo conjugado de m^a .

Admitamos que r possa ser complexo. As tétradas nulas, nesta condição, podem ser reescritas do seguinte modo:

$$l^a = \delta_r^a, \quad (6.11)$$

$$n^a = \delta_u^a - \frac{1}{2} \left[1 - a - M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\bar{r}}\right) - \frac{\alpha}{(r\bar{r})^{3\omega_q+1}}\right] \delta_r^a \quad (6.12)$$

e

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{r}} \left(\delta_\theta^a + \frac{i}{\sin\theta} \delta_\phi^a\right), \quad (6.13)$$

onde $\bar{r}$ é o complexo conjugado de r . De acordo com o método de Newnam-Janis, façamos a seguinte transformação

$$x'^a = x^a + iJ(\delta_r^a - \delta_u^a) \cos \theta, \quad (6.14)$$

onde J é o parâmetro que foi introduzido para ser identificado com a rotação. Desta transformação, temos:

$$u' = u - iJ \cos \theta, \quad (6.15)$$

$$r' = r + iJ \cos \theta, \quad (6.16)$$

$$\theta' = \theta \quad (6.17)$$

e

$$\phi' = \phi. \quad (6.18)$$

É importante chamar a atenção para o fato de que esse procedimento de complexificação não é único [62]. Isto significa dizer que a forma final da métrica é dependente da complexificação adotada. Em alguns casos, a forma obtida para a métrica com rotação não guarda semelhança com a obtida resolvendo diretamente as equações de Einstein. A escolha que fizemos permite obter a métrica, em coordenadas de Boyer - Lindquist, que efetivamente é estacionária e axialmente simétrica.

A tétrada Z^a se transforma como um tensor contravariante de primeira ordem, isto é, $Z'^a = \frac{\partial x'^a}{\partial x^b} Z^b$. Daí

$$l^a = \delta_r^a, \quad (6.19)$$

$$n^a = \delta_u^a - \frac{1}{2} \left(1 - a - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_g+1}{2}}} \right) \delta_r^a \quad (6.20)$$

e

$$m^a = \frac{1}{\sqrt{2r + iJ \cos \theta}} \left(iJ(\delta_u^a - \delta_r^a) \sin \theta + \delta_\theta^a + \frac{i}{\sin \theta} \delta_\phi^a \right), \quad (6.21)$$

onde

$$\Sigma(r, \theta) = r^2 + J^2 \cos^2 \theta. \quad (6.22)$$

Os elementos da métrica do espaço-tempo de Letelier com quintessência, que possui rotação, obtidos a partir das eqs(6.6), (6.19), (6.20) e (6.21), são

$$g^{rr} = -\frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} - \zeta, \quad (6.23)$$

com

$$\zeta(r, \theta) = 1 - a - \frac{2Mr}{\Sigma} - \frac{\alpha}{\Sigma^{\frac{3\omega_q+1}{2}}}, \quad (6.24)$$

$$g^{ru} = 1 + \frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (6.25)$$

$$g^{r\phi} = \frac{J}{\Sigma}, \quad (6.26)$$

$$g^{uu} = -\frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}, \quad (6.27)$$

$$g^{u\phi} = -\frac{J}{\Sigma}, \quad (6.28)$$

$$g^{\theta\theta} = -\frac{1}{\Sigma} \quad (6.29)$$

e

$$g^{\phi\phi} = -\frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta}, \quad (6.30)$$

sendo nulos os demais elementos.

O tensor métrico contravariante $[g^{\mu\nu}]$, na forma matricial, é

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -\frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} - \zeta & 1 + \frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & \frac{J}{\Sigma} \\ 1 + \frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & -\frac{J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & -\frac{J}{\Sigma} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\Sigma} & 0 \\ \frac{J}{\Sigma} & -\frac{J}{\Sigma} & 0 & \frac{1}{\Sigma \sin^2 \theta} \end{bmatrix}.$$

O tensor métrico covariante $[g_{\mu\nu}]$, na sua forma matricial, é dado por

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -J \sin^2 \theta \\ 1 & \zeta & 0 & -J(\zeta - 1) \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ -J \sin^2 \theta & -J(\zeta - 1) \sin^2 \theta & 0 & \sin^2 \theta [J^2(\zeta - 2) \sin^2 \theta - \Sigma] \end{bmatrix}.$$

O elemento de linha associado é dado por

$$ds^2 = \zeta du^2 + 2dudr - 2J \sin^2 \theta dr d\phi - \Sigma d\theta^2 + \sin^2 \theta \left[J^2 (\zeta - 2) \sin^2 \theta - \Sigma \right] d\phi^2 - 2J (\zeta - 1) \sin^2 \theta dud\phi. \quad (6.31)$$

Façamos mais uma mudança de coordenadas, desta vez para as chamadas coordenadas de Boyer-Lindquist, pois por meio delas podemos explicitar a rotação e obter a solução particular para os casos sem rotação, quando fazemos $J = 0$. Consideremos, então, a seguinte transformação de coordenadas

$$du = dt - \left(\frac{r^2 + j^2}{\Delta} \right) dr, \quad (6.32)$$

onde

$$\Delta = \zeta \Sigma + J^2 \sin^2 \theta \quad (6.33)$$

e

$$d\phi = d\phi' - \frac{J}{\Delta} dr. \quad (6.34)$$

Substituindo as eqs(6.32), (6.33) e (6.34) na eq(6.31), após algumas operações algébricas, obtemos

$$ds^2 = \left(\frac{\Delta - J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + 2J \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\Delta - J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) dt d\phi' - \Sigma d\theta^2 - \sin^2 \theta \left[\Sigma + J^2 \sin^2 \theta \left(2 - \frac{\Delta - J^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \right] d\phi'^2, \quad (6.35)$$

onde Σ , ζ e Δ são dadas pelas eqs(6.22), (6.24) e (6.33), respectivamente. Omitimos a linha da coordenada ϕ' , sem perder a generalidade do resultado.

Consideremos a constante associada a presença da corda, a , igual a zero na métrica que acabamos de obter, que é a solução das equações de Einstein para um buraco negro com nuvem de cordas e quintessência com rotação (espaço-tempo de Letelier com rotação e quintessência). Neste caso, obtemos o resultado que corresponde a métrica gerada por um buraco negro com quintessência [46]. Se fizermos o termo da rotação nulo, obteremos

$$\Sigma = r^2, \quad (6.36)$$

$$\zeta = 1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q+1}} \quad (6.37)$$

e

$$\Delta = (1 - a) r^2 - 2Mr - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q - 1}}. \quad (6.38)$$

Substituindo as eqs(6.36), (6.37) e (6.38) na métrica, obtemos

$$ds^2 = \left(1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - a - \frac{2M}{r} - \frac{\alpha}{r^{3\omega_q + 1}}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.39)$$

que é a métrica que descreve o buraco negro estático com nuvem de cordas e quintessência (espaço-tempo de Letelier com quintessência). Finalmente, se fizermos $a = 0$ e $\alpha = 0$, iremos obter a solução de Schwarzschild, para $J = 0$, e a de Kerr, para $J \neq 0$.

7 Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação estudamos o papel desempenhado por nuvem de cordas, que são objetos estendidos, e quintessência na construção das soluções das equações de Einstein que correspondem a buracos negros estáticos(sem rotação) e estacionários(com rotação).

Iniciamos com a obtenção da solução esfericamente simétrica, tomando como fontes do campo gravitacional, a própria massa do buraco negro, bem como, as contribuições adicionais relacionadas com a nuvem de cordas e a quintessência. Neste contexto, obtivemos a solução que corresponde ao campo gravitacional descrito por um buraco negro com nuvem de cordas e quintessência, que estamos denominando espaço-tempo de Letelier com quintessência. Para esta solução das equações de Einstein, estudamos aspectos relacionados às singularidades, equações geodésicas e potencial efetivo, destacando o papel desempenhado tanto pela nuvem de cordas, quanto pela quintessência.

Usamos essa solução estática para construir a correspondente solução estacionária, axialmente simétrica, que corresponde ao campo gravitacional gerado por um buraco negro com rotação, com nuvem de cordas, e rodeado por quintessência. Esta solução foi obtida da correspondente solução estática, que funciona como uma solução somente, a partir da aplicação do método de complexificação de coordenadas, desenvolvido em meados dos anos 1960.

Como perspectivas de desdobramentos desses resultados, podemos considerar o estudo da termodinâmica desses buracos negros, modos quase-normais e outros aspectos. Adicionalmente, podemos generalizar as soluções obtidas, no sentido de incluir um campo eletromagnético, o que corresponderia a solução de Reissner-Nordström ou a de Kerr-Newman com nuvem de cordas e quintessência.

Referências

- [1] K. Schwarzschild. *Gen. Rel. Grav*, 35:951, 2003. Citado na página 12.
- [2] D. Finkelstein. *Phys. Rev*, 110:915, 1956. Citado na página 12.
- [3] M. D. Kruskal. *Phys. Rev*, 119:1743, 1960. Citado na página 12.
- [4] H. Reissner. *Ann. Phys(Germany)*, 50:106, 1916. Citado na página 12.
- [5] G.Nordström. *Proc. kon. ned. Akad. wed*, 20:1238, 1918. Citado na página 12.
- [6] R. P. Kerr. *Phys. Rev. Lett*, 11:237, 1968. Citado na página 12.
- [7] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence. *J. math. phys*, 6:918, 1965. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 80.
- [8] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., **The large scale structure of space-time**. *Cambrige University press*. 1ed. Cambridge, 1973. Citado na página 12.
- [9] C. V. Vishveshwara. *Nature(London)*, 227:936, 1970. Citado na página 12.
- [10] W. H. Press. *Astrophys. J.*, 170: L105, 1971. Nenhuma citação no texto.
- [11] S. Chandrasekhar, S. L. Detweiler. *Proc. R. Soc. A*, 344: 441, 1975. Citado na página 12.
- [12] L. Blanchet. *Living Rev. Rel*, 17: 2, 2014. Citado na página 12.
- [13] A. Buonanno, T. Damour. *Phys. Rev. D*, 59: 084006, 1999. Citado na página 12.
- [14] F. Pretorius. *Phys. Rev. Lett*, 95: 121101, 2005. Citado na página 12.
- [15] M. Campanelli, C. O. Louste, P. Marroneti, Y. Zlochwor. *Phys. Rev. Lett*, 96: 111101, 2006. Nenhuma citação no texto.
- [16] J. G. Baker, J. Centrella, D. I. Choi, M. Koppitz, J. Van Meter. *Phys. Rev. Lett*, 96: 111102, 2006. Citado na página 12.
- [17] A. Einstein. *Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss*, 1: 688, 1916. Citado na página 12.
- [18] A. Einstein. *Sitz. K. Preuss. Akad. Wiss*, 1: 154, 1918. Citado na página 12.
- [19] B. P. Abbott et al. *Phys. Rev. Lett*, 116: 061102, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

- [20] Vilenkin, A., Shellard, E. P. S. **Cosmic strings and other topological defects.** *Cambridge University Press.* 1ed. Cambridge, 1994. Citado na página 13.
- [21] M. B. Haidmarsh, T. W. B. Kibble. *Rep. Prog. Phys*, 58: 477, 1998. Citado na página 13.
- [22] T. W. B. Kibble. **Cosmic Strings reborn?**. *arXiv: astro-ph/410073*. Citado na página 13.
- [23] P. S. Letelier. *Physical Review D*, 20:1294-1302, 1979. Citado 12 vezes nas páginas 13, 14, 15, 16, 17, 19, 24, 34, 36, 43, 67 e 71.
- [24] J. Stachel. . *Physical Review D*, 21: 217, 1980. Citado na página 13.
- [25] P. S. Letelier. *IL NUOVO CIMENTO*, 63:519-528, 1981. Citado 6 vezes nas páginas 13, 14, 34, 37, 39 e 40.
- [26] C. Bernard. *Phys. Rev. D*94, 8: 085007, 2016. Citado na página 14.
- [27] A. Ganguly, S. G. Ghosh, S. D. Maharaj. *Phys. Rev. D*90, 6: 064037, 2014. Nenhuma citação no texto.
- [28] M. G. Richarte, C. Simeone. *Int. J. Mod. Phys. D*17, 1179 - 1196, 2008. Citado na página 14.
- [29] J. K. Singh, N. K. Sharma. *Int. J. Theor. Phys.*, 49: 2902-2909, 2010. Citado na página 14.
- [30] A. K. Yadav, V. K. Yadav, L. Yadav. *Int. J. Theor. Phys.*, 48: 568-578, 2009. Nenhuma citação no texto.
- [31] P. S. Letelier. *Physical Review D*, 28:2414-2419, 1983. Citado 6 vezes nas páginas 14, 44, 48, 53, 54 e 60.
- [32] P. S. Letelier. *Physical Review D*22, 4: 807, 1980. Citado na página 14.
- [33] S. Perlmutter, et al. *Astrophys. J*, 517: 565, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 61.
- [34] B. Ratra, P. J. E. Peebles. . *Phys. Rev. D*, 37: 3406, 1988. Citado na página 14.
- [35] P. J. E. Peebles, B. Ratra. . *Astrophys. J*, 325: 217, 1988. Nenhuma citação no texto.
- [36] R. R. Caldwell, R. Dave, P. J. Steinhardt. . *Phys. Rev. Lett*, 80: 1582, 1998. Citado na página 61.

- [37] I. Zlatev, I. Wang, P. J. Steinhardt. . *Phys. Rev. Lett*, 82: 896, 1999. Citado na página 61.
- [38] M. Doran, J. Jaeckel. . *Phys. Rev. D*, 66: 043519, 2002. Citado na página 14.
- [39] V. V. Kiselev. *Class. Quantum Grav*, 20: 1187-1197, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 14, 61, 62 e 63.
- [40] L. M. Krauss, M. S. Turner. *Gen. Rel. Grav*, 27: 1137, 1995. Citado na página 61.
- [41] J. P. Ostriker, P. J. Steinhardt. *Nature*, 377: 600, 1995. Citado na página 61.
- [42] S. Perlmutter et al. *Astron. J*, 517: 565, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 61.
- [43] A. G. Riess et al. *Astron. J*, 116: 109, 1995. Citado na página 61.
- [44] R. R. Caldwell. . *Braz. J. Phys*, 30: 215, 2000. Citado na página 61.
- [45] S. Fernando *Mod. Phys. Lett A*. 28: 1350189, 2013. Nenhuma citação no texto.
- [46] S. G. Ghosh. *The European Physical Journal C*. 72:222, 2016. Citado na página 84.
- [47] B. Toshmatov, Z. Stuchlik, B. Ahmedov. *ArXiv*: 151201498 gr-qc. Citado na página 14.
- [48] M. Kalb, P. Ramond. *Phys. Rev. D*, 9: 2273, 1974. Citado na página 15.
- [49] M. Kalb. *Phys. Rev. D*, 17: 2713, 1978. Nenhuma citação no texto.
- [50] F. Lund, T. Regge. *Phys. Rev. D*, 14: 1524, 1976. Nenhuma citação no texto.
- [51] P. S. Letelier. *Physical Review D*, 15: 1056, 1977. Citado na página 15.
- [52] D. Barbosa, V. B. Bezerra. *Gen. Relativ. Grav*, 48: 149, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 32.
- [53] J. Scherk. *Reviews of Modern Physics*, 47:123-164, 1975. Nenhuma citação no texto.
- [54] Schouten, J.A. **Ricci - Calculus**. *Springer*. 2ed. Berlin, 1954. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 24.
- [55] A. Vilenkin. *Phys. Rev. D*, 24:2082, 1981. Citado na página 44.
- [56] J. R. Gott. *Astrophys. J.*, 288, 422, 1985. Nenhuma citação no texto.
- [57] W. A. Hiscock. *Phys. Rev. D*, 31, 3288, 1985. Citado na página 44.
- [58] Takabayasi, T. **Quantum mechanics, determinism, causality and particles**. *Reidel*. Dordrecht-Holland, 1976. Citado na página 52.

- [59] M. M. D. Costa, V. B. Bezerra. **On the Letelier spacetimes with quintessence.** *a ser submetido a publicação.* Citado na página 61.
- [60] U. Rashmi et. al. *Gen. Rel. Grav.* 47:2015. Citado 5 vezes nas páginas 63, 67, 72, 74 e 78.
- [61] E. T. Newnam, A. L. Janis. *J. math, phys.*, 6: 915, 1965. Citado na página 80.
- [62] M. Azreg-Ainou. *Phys. Rev. D*, 90: 064041, 2014. Citado na página 82.
- [63] D’Inverno, R. **Introducing Einstein’s Relativity.** *Oxford University Press.* 1^oed. United States, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 69.

Apêndices

APÊNDICE A – Construção de gráficos do potencial efetivo

Para esboçarmos os gráficos do potencial efetivo representados em fig1, fig2, fig3, fig4, fig5, fig6, fig7, fig8 e fig9 usamos um programa de computação algébrica chamado Maple17. Os comandos utilizados são, respectivamente,

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1 - 2/r + 19/r2 - 40/r3 - 0.05, r = 2..18, V = -0.5..1.1, color = blue], [1 - 2/r + 18.4/r2 - 40/r3 - 0.08, r = 2..18, V = -0.5..1.1, color = gray], [1 - 2/r + 18/r2 - 40/r3 - 0.1, r = 2..18, V = -0.5..1.1, color = black]);
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1 - 3/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.05*r, r = 0.1..20, V = -1..1, color = blue], [1 - 3.6/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.08*r, r = 0.1..20, V = -1..1, color = gray], [1 - 4/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.1*r, r = 0.1..20, V = -1..1, color = black])
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1 - 2/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.05*r2, r = 0.1..15, V = -5..0, color = blue], [1 - 2/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.08e - 1*r2, r = 0.1..15, V = -5..0, color = gray], [1 - 4/r + 20/r2 - 40/r3 - 0.1*r2, r = 0.1..15, V = -5..0, color = black])
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1.5 - 2/r + 30/r2 - 40/r3, r = 0.001..20, V = -10..4, color = blue], [0.5 - 2/r + 10/r2 - 40/r3, r = 0.001..20, V = -10..4, color = gray], [-0.5 - 2/r - 10/r2 - 40/r3, r = 0.001..20, V = -10..4, color = black])
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1.4 - 2/r + 28/r2 - 40/r3, r = 0.001..30, V = -10..4, color = blue], [0.4 - 2/r + 8/r2 - 40/r3, r = 0.001..30, V = -10..4, color = gray], [0.01 - 2/r - 0.2/r2 - 40/r3, r = 0.001..30, V = -10..4, color = black])
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [1.5 - 4/r + 30/r2 - 40/r3 - 0.1*r, r = 0.001..50, V = -10..2, color = blue], [0.5 - 4/r + 10/r2 - 40/r3 - 0.1*r, r = 0.001..50, V = -10..2, color = gray], [-0.5 - 4/r - 10/r2 - 40/r3 - 0.1*r, r = 0.001..50, V = -10..2, color = black])
```

- with(plots):

```
plots[multiple](plot, [-0.5 - 2/r + 30/r2 - 40/r3 - 0.1 * r2, r = 0.001..15, V =  
-25..1.5, color = blue], [-1.5 - 2/r + 10/r2 - 40/r3 - 0.1 * r2, r = 0.001..15, V =  
-25..1.5, color = gray], [-2.5 - 2/r - 10/r2 - 40/r3 - 0.1 * r2, r = 0.001..15, V =  
-25..1.5, color = black])
```

- plot($0.9 - 2/r + 45/r^2 - 100/r^3$, $r = 0.1..110$, $V = 0..1.7$, $color = blue$)
- plot($0.01 - 2/r - 0.5/r^2 - 100/r^3$, $r = 0.001..40$, $V = -5..0$, $color = blue$)