

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS
DE GRAVIDADE MODIFICADA

FRANCISCO GERALDO DA COSTA FILHO

JOÃO PESSOA

2015

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS
DE GRAVIDADE MODIFICADA

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
COORDENAÇÃO DOS CURSOS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS DE GRAVIDADE MODIFICADA

Tese realizada sob orientação do
Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho,
apresentada ao Departamento de
Física, em complementação aos pre-
quisitos para obtenção do título de
Doutor em Física.

FRANCISCO GERALDO DA COSTA FILHO

Catálogo na publicação
Setor de Catalogação e Classificação

C837a Costa Filho, Francisco Geraldo da.
Alguns aspectos das teorias de gravidade modificada / Francisco Geraldo da
Costa Filho. – João Pessoa, 2015.
117 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Dionísio Bazeia Filho.
Tese (Doutorado) – UFPB/CCEN/PPGF

1. Física. 2. Gravidade modificada - teoria. 3. Cosmologia padrão. 4. Buracos
negros. 5. Estrutura de Branas. I. Título.

UFPB/BC

CDU - 53(043)

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS DE GRAVIDADE MODIFICADA

FRANCISCO GERALDO A COSTA FILHO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Co-orientador

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Examinador Externo

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Examinador Externo

Prof. Dr. José Roberto do Nascimento
Examinador Interno

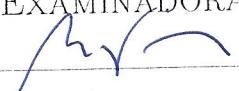
Prof. Dr. Laércio Losano
Examinador Interno

ALGUNS ASPECTOS DAS TEORIAS DE GRAVIDADE MODIFICADA

FRANCISCO GERALDO A COSTA FILHO

Aprovada em 27/02/2015

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho
Orientador

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito
Co-orientador

Prof. Dr. Bruno Geraldo Carneiro da Cunha
Examinador Externo

Prof. Dr. Carlos Alberto Santos de Almeida
Examinador Externo

Prof. Dr. José Roberto do Nascimento
Examinador Interno


Prof. Dr. Laércio Losano
Examinador Interno

A Deus

À Gerilany

A Gabriel

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dionisio Bazeia pela orientação, pela competência com que conduziu este trabalho e pela grande oportunidade concedida, a qual me permitiu chegar até aqui.
- Ao Prof. Francisco de Assis de Brito, pela sua co-orientação, competência, disponibilidade as quais foram fundamentais para conclusão deste trabalho.
- A todos os professores deste departamento que contribuíram com a minha formação.
- À Minha esposa Gerilany e a meu filho Gabriel, por entender a minha ausência, pelo amor e apoio incondicionais nesta caminhada.
- Aos meus familiares, por toda uma vida.
- Ao meu amigo Alcides Ribeiro que a 27 anos acompanha esta minha jornada.
- Aos colegas de graduação e pós-graduação (em especial a Jamilton, Joseclécio, Jaldair, Rodrigo Lima, Rodrigo César, Matheus Marques e Mário César) que de uma forma ou de outra me fizeram chegar até aqui.
- Aos funcionários do Departamento de Física pela grata convivência durante a minha permanência neste Departamento.
- A todos que direta ou indiretamente possibilitaram a conclusão deste trabalho.

RESUMO

Teorias de gravidade modificada tem como objetivo elucidar alguns problemas em aberto no âmbito da Relatividade Geral. Dentro desta perspectiva muitas teorias foram propostas ao longo dos anos. Neste trabalho abordamos algumas destas teorias e, para cada uma delas, demos a nossa contribuição propondo novos cenários que se mostraram promissores. Assim, no contexto das teorias de mundo-brana estudamos pela primeira vez teorias do tipo DGP em 2+1 dimensões, com termos de gravidade induzida do tipo nova gravidade massiva. O estudo dos propagadores da teoria perturbada mostrou a propagação de modos unitários e sem a presença de táquions. No que diz respeito à teoria de Horava-Lifshitz, estudamos a estrutura de branas com campos escalares em 4+1 dimensões e a formação de buracos em 1+1 foi obtida pela primeira vez. Nos dois casos anteriores tratamos da versão não projetável desta teoria. Estudamos ainda modelos de mundo-brana em uma teoria com bimétrica onde a gravidade se acopla ao campo escalar que conecta as duas métricas. Apesar de o campo escalar possuir um termo cinético linear a teoria se mostrou estável e localização da gravidade foi obtida. Por fim, aplicamos a teoria da gravitação com campos não dinâmicos a um modelo cosmológico e constatamos que para certa fase específica da expansão do Universo é possível termos um mecanismo que gera um auto ajuste da constante cosmológica.

Palavras-chave: Gravidade modificada. Cosmologia padrão. Buracos negros. Estrutura de Branas

ABSTRACT

Modified theories of gravity has the objective to elucidate some open issues in the context of general relativity. From this perspective many theories have been proposed over the years. In this paper we deal with some of these theories and, for each of them, we gave our contribution proposing new scenarios that showed promise. So in the context of braneworld theory we held the first studies in three dimensional DGP theory, with terms of induced gravity of the new massive gravity type. The study of the propagators of disturbed theory showed unit propagation modes without the presence of tachyons. As regards to the Horava-Lifshitz theory, we studied the structure of membranes with scalar fields in 4+1 dimensions and the formation of black holes in 1+1 dimensions has been obtained for the first time. In the two previous cases we deal with nonprojectable version of this theory. Have also studied braneworld models in a bimetric theory where gravity is coupled to the scalar field that connects the two metrics. Although the scalar field having a linear term kinetic the theory remained stable and gravity localization was obtained. Finally, we apply the theory of gravitation with nondynamical fields to a cosmological model and found that for a certain specific stage of the Universe Expansion is possible to have a mechanism that generates a self tuning of the cosmological constant problem.

Keywords: Modified Gravity. Standard Cosmology. Black-holes. Braneworld

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 8 |
| 2 | Gravitação de Einstein, Buracos Negros e Cosmologia | 12 |
| 2.1 | Gravitação de Einstein | 12 |
| 2.1.1 | As bases da teoria da relatividade geral | 13 |
| 2.2 | Buracos Negros | 15 |
| 2.2.1 | Buracos negros em 3+1 dimensões | 16 |
| 2.3 | Cosmologia Padrão | 17 |
| 2.3.1 | Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) | 18 |
| 2.3.2 | A lei de Hubble | 19 |
| 2.3.3 | Equações de Friedmann | 20 |
| 3 | Gravitação em Dimensões Inferiores | 23 |
| 3.1 | Buracos Negros em 2+1 Dimensões | 25 |
| 3.2 | Buracos Negros em 1+1 Dimensões | 25 |
| 4 | Teorias de Gravidade Modificada | 28 |
| 4.1 | O Cenário de Branas | 28 |
| 4.1.1 | A teoria de Kaluza e Klein | 28 |
| 4.1.2 | O Problema de hierarquia e o modelo ADD | 30 |
| 4.1.3 | Os modelos de Randall e Sundrum | 32 |
| 4.1.4 | A gravitação no modelo de Randall-Sundrum | 35 |
| 4.1.5 | O modelo de RSII | 37 |
| 4.1.6 | O modelo DGP | 40 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.1.7 | Estrutura de branas com campos escalares | 42 |
| 4.2 | Teoria da Gravitação com Duas Métricas (<i>Bimétricas</i>) | 44 |
| 4.3 | Nova Gravidade Massiva (NGM) | 46 |
| 4.4 | Gravitação de Horava-Lifshitz | 48 |
| 4.5 | Campos Auxiliares | 57 |
| 5 | Alguns Novos Cenários com Gravidade Modificada | 60 |
| 5.1 | Buracos Negros Tridimensionais em uma 2–Bрана no Espaço de Minkowski . . | 60 |
| 5.1.1 | Soluções de buracos negros circularmente simétricas em uma 2–brana . | 61 |
| 5.1.2 | Soluções de buracos negros com nova gravidade massiva induzida na brana | 65 |
| 5.2 | Gravidade Massiva de Alta Ordem Induzida em Uma 2-Bana Imersa no Espaço de Minkowski | 67 |
| 5.2.1 | Ação efetiva na fronteira | 70 |
| 5.2.2 | A estrutura do propagador para a ação completa sobre a 2–brana . . . | 72 |
| 5.2.3 | Propagador do gráviton com um termo de massa generalizado | 74 |
| 5.3 | Estrutura de Branas com Campos Escalares em Uma Teoria com Duas Métricas | 76 |
| 5.3.1 | Bimétrica e a dinâmica não convencional para campos escalares | 76 |
| 5.3.2 | Equações de campo e o formalismo de primeira ordem | 78 |
| 5.3.3 | Solução com brana plana | 79 |
| 5.3.4 | Solução com dinâmica modificada pura | 80 |
| 5.3.5 | Localização de gravidade | 81 |
| 5.4 | Cenários Cosmológicos com Campos Auxiliares | 82 |
| 5.4.1 | O formalismo | 83 |
| 5.4.2 | Cenários cosmológicos | 83 |
| 5.4.3 | Um mecanismo para o auto ajuste da constante cosmológica | 86 |
| 5.5 | Buracos Negros na Gravitação de Horava-Lifshitz em Duas Dimensões | 87 |
| 5.5.1 | Teoria de de Horava-Lifshitz em 1+1 dimensões | 87 |
| 5.5.2 | Buracos negros em 2–Dimensões na teoria de Horava | 88 |
| 5.5.3 | Solução do tipo Schwarzschild | 91 |

| | | |
|-------|--|-----|
| 5.5.4 | Solução do tipo Reissner-Nordström | 92 |
| 5.5.5 | Uma nova solução para buracos negros | 92 |
| 5.5.6 | Colapso gravitacional | 94 |
| 5.5.7 | Solução interior para o colapso gravitacional | 94 |
| 5.5.8 | Solução exterior para o colapso gravitacional | 96 |
| 5.6 | Estrutura de Branas com Campos Escalares na Gravitação de Horava | 97 |
| 5.6.1 | Cenário para uma solução de brana | 97 |
| 5.6.2 | Equações de campo e o formalismo de primeira ordem | 98 |
| 5.6.3 | Branas dilatônicas | 100 |
| 5.6.4 | Cenário tipo Randall-Sundrum | 102 |
| 5.7 | Considerações Finais | 103 |

Capítulo 1

Introdução

Desde a publicação de “*Os fundamentos da teoria da relatividade geral* (TRG)” [1], a teoria de Einstein passou por diversos testes ao longo de quase 100 anos. Dentre varios pontos que deram respaldo à teoria, podemos elencar previsões teóricas fantásticas como o avanço do periélio de Mercúrio, o desvio gravitacional da luz , a existência de buracos e a previsão de ondas gavitacionais. Mais recentemente, observações a cerca de aglomerados de galáxias, feitas pelo telescópio espacial *Chandra* da NASA, mostraram que a teoria de Einstein é uma boa construção teórica para entender alguns aspectos do Universo, pelo menos para distâncias da ordem de 130 milhões de anos-luz [2]. Contudo a não renormalizabilidade impede que esta possa ser formulada como uma teoria quântica de campo para a gravitação.

A teoria de Einstein descreve, em nível de linearização em torno do espaço de Minkowski, uma teoria para a interação gravitacional através de uma partícula de massa nula com spin 2. Porém, o quanta associado a esta interação, o gráviton (que possui dois estados independentes de polarização com helicidade 2) surge em uma teoria onde não é possível eliminar os infinitos de energia [3,4]. Também existe um problema recente e de difícil transposição conhecido como *problema da aceleração do Universo* [5,6]. No contexto da cosmologia padrão (usando a TRG), não é possível explicar este fenômeno a menos que se admita a existência de um componente exótico na dinâmica do Universo. Dentre as possibilidades podemos considerar, por exemplo, a constante cosmológica e os modelos de quintessência [7,8]. Devido à falta de uma explicação consistente surgiu a proposta da *Energia Escura*, uma forma hipotética de energia, com pressão negativa que permeia todo o espaço e que responderia pelo atual estágio de aceleração

do Universo [8]. Outra possibilidade seria abandonar a TRG e buscar por alternativas que contemplassem estes problemas. As motivações surgem, muitas vezes, na tentativa de resolver uma classe específica de problemas. Por exemplo, teorias de gravitação com derivadas superiores podem se tornar renormalizável [9], cenários com dimensões extras (mundo-brana) mostram uma possibilidade de resolver problemas como o da hierarquia [10, 11], gravitação em dimensões inferiores (menores que 4) pode servir como ‘laboratório’ para melhor compreender fenômenos como a formação e evaporação de buracos negros [12]. Contudo, nada impede, em princípio, que tais ideias possam ser usadas em situações bem distintas daquelas que as originou. Por exemplo, podemos usar cenários de mundo-brana para estudar a aceleração do Universo [13], ou tentar compreender melhor a cerca da renormalização de modelos formulados em dimensões inferiores [14]. É neste espírito que elaboramos este trabalho de tese. Vários cenários de gravidade modificada foram abordados, a saber: gravitação em $1+1$ e $2+1$ dimensões, cenários de mundo-brana nos modelos de Dvali-Gabadadz-Porrati (DGP) e Randall-Sundrum (RS), teorias de gravidade com duas métricas (bimétricas), nova gravidade massiva, a teoria de Horava-Lifshitz e a teoria da gravitação com campos não dinâmicos (auxiliares). Assim, aplicamos estas teorias em cenários e situações diferentes daqueles que motivaram seu estudo original e, assim, foi possível, por exemplo, analisar formação de buracos negros em teorias DGP em $2+1$ dimensões, estudar a localização da gravidade em um cenário de Randall-Sundrum com duas métricas acopladas a um campo escalar dentre outros resultados originais que foram publicados e constam nas referências [15], [16], [17], [18], [19] e [20].

O trabalho foi organizado como se segue. No Capítulo 2 foi feita uma breve revisão da teoria da Relatividade Geral onde apresentamos seus fundamentos bem como o ferramental matemático básico que será utilizado em muitas situações, principalmente na obtenção das equações de movimento via equações de Einstein. Continuamos com uma igualmente breve revisão sobre buracos negros e cosmologia padrão, mais uma vez desenvolvemos apenas os conceitos e técnicas úteis para a sequência do trabalho (o leitor que desejar se aprofundar pode seguir algumas das referências sugeridas). No Capítulo 3, também de revisão, tratamos da gravitação em $1+1$ e $2+1$ dimensões onde foi feita a aplicação destas teorias ao estudo dos buracos negros. No Capítulo 4 abordamos os aspectos gerais das teorias de gravidade

modificada que nos propusemos a estudar. Tratamos dos modelos de mundo-brana nos cenários DGP e RS, teoria de gravidade com duas métricas, abordamos a questão sobre renormalização e unitariedade da nova teoria massiva da gravidade em $2+1$, usamos a condição de não-projetabilidade para estendermos a lagrangeana do modelo de Horava-Lifshitz e, por fim, estudamos os campos auxiliares (não dinâmicos) em um cenário cosmológico.

O Capítulo 5 é formado a partir dos resultados originais obtidos durante este trabalho de tese. Primeiro tratamos da teoria DGP em $2+1$ de forma pioneira e, além disso, encontramos soluções de buracos negros sem a necessidade da presença de uma constante cosmológica a priori [15], fato contrário ao estabelecido na teoria de Bañados, Teitelboim e Zanelli (BTZ) [21]. Em seguida usamos este cenário para estudarmos, em detalhes, o comportamento das flutuações (grávitons) com termo induzido na brana do tipo padrão (apenas o escalar de Ricci) e com termos de ordem superior (do tipo nova gravidade massiva). Os propagadores são calculados e o espectro de partícula é analisado [20]. Na sequência abordamos um cenário de brana, do tipo RS, em um espaço com duas métricas onde o campo escalar (o biescalar), que faz a ponte entre a ‘métrica da matéria’ e a métrica da gravitação, terá uma dinâmica não usual e fará parte da estrutura de formação da brana. O problema da localização da gravidade neste cenário também será abordado [16]. Em seguida vamos analisar os aspectos cosmológicos de uma teoria muito recente que envolve campos auxiliares não dinâmicos, introduzida em 2013 por Pani, Sotiriou e Vernieri [23]. Esta teoria tem como objetivo modificar a teoria de Einstein sem introduzir novos graus de liberdade dinâmicos. Em nosso trabalho exploramos as modificações sofridas pela cosmologia devido à inclusão destes campos na teoria [17]. Por fim, trataremos de outra teoria, relativamente recente, e que tem despertado muito interesse na comunidade científica: A teoria da gravitação de Horava-Lifshitz [24]. Petr Horava, da Universidade de Berkeley, Califórnia, propôs, em 2009, uma candidata à teoria quântica da gravitação. Para isso a simetria de Lorentz deveria ser quebrada (na verdade, tal simetria surgiria apenas de forma acidental a baixas energias, sendo que no regime ultravioleta a física seria governada por uma anisotropia entre o espaço e o tempo, governada por um expoente crítico similar ao encontrado em matéria condensada). Esta teoria é renormalizável por contagem de potências, em $3+1$ dimensões e nos dá a RG quando o expoente crítico vai para 1. Dentro deste contexto nossa contribuição original surge no sentido de entender

dois pontos ainda muito pouco explorados relacionados à estrutura de branas com campos escalares na teoria de Horava e os aspectos teóricos da formação de buracos negros em $1 + 1$ dimensões, ambos na chamada versão não projetável da teoria [18, 19]. Nas considerações finais fizemos alguns comentários e abordamos sobre futuras perspectivas.

Capítulo 2

Gravitação de Einstein, Buracos Negros e Cosmologia

Neste Capítulo faremos uma breve revisão sobre as bases da teoria da Relatividade Geral. Estamos particularmente interessados na relação entre a geometria do espaço-tempo e o conteúdo de matéria e energia presentes na teoria. Para isso as equações de campo da teoria (equações de Einstein) serão de fundamental importância. Também abordaremos como os buracos negros surgem naturalmente dentro desta teoria e analisaremos algumas de suas propriedades básicas. Por fim, trataremos dos aspectos cosmológicos que podem ser obtidos a partir da RG; deduziremos as equações de Friedmann e veremos como elas podem ser usadas para descrever a evolução do Universo.

2.1 Gravitação de Einstein

A gravidade é a força mais universal na natureza. Observações e experimentos mostram que objetos e partículas no universo se atraem através de uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional à distância entre elas. A interação entre os corpos é mútua e igual em intensidade entre elas, cuja a expressão para dois objetos de massa M_1 e M_2 a uma distância R é dada por

$$F = G \frac{M_1 M_2}{R^2}. \quad (2.1)$$

A constante de proporcionalidade G é conhecida como *constante da gravitação de Newton*.

No sistema *MKS* o valor de G é [25]

$$G = 6.6738(8) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}. \quad (2.2)$$

Em alguns casos é conveniente fixar a unidade de massa de modo que a constante de Newton tenha o valor numérico $G = 1$. No sistema natural de unidades, no qual a velocidade da luz e a constante de Planck também são unitárias ($c = \hbar = 1$), a unidade de massa é a *massa de Planck*, m_P , dada por [25]

$$m_P = \sqrt{\hbar c / G} = 2.17651(13) \times 10^{-8} \text{ Kg} = 1.22093(7) \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2. \quad (2.3)$$

Lei da gravidade de Newton (2.1) é válida para quaisquer dois corpos que possuam massas e que estejam suficientemente distantes um do outro [26] e que não se movam muito rápido um em relação ao outro. Em especial, descreve a queda dos corpos próximos da terra, o movimento da lua em torno da terra, ou dos planetas que orbitam o Sol. Esta relação entre a mecânica celeste com a mecânica terrestre teve um grande impacto sobre a nossa visão do universo.

2.1.1 As bases da teoria da relatividade geral

Vamos iniciar nossa discussão sobre a teoria da Relatividade Geral (RG) abordando alguns pontos importantes que serão úteis no decorrer deste trabalho.

O *princípio de equivalência* afirma que sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes. Nas próprias palavras de Einstein em seu trabalho de 1915 [27]:

‘Nós iremos portanto assumir a completa equivalência física entre um campo gravitacional e a correspondente aceleração de um sistema de referência. Esta hipótese estende o princípio da relatividade especial para sistemas de referência uniformemente acelerados’.

Esse princípio é válido apenas para uma vizinhança do ponto considerado, onde podemos adotar um referencial local que se relaciona através de uma lei geral de transformação de coordenadas a um referencial inercial semelhante àquela da relatividade restrita [27]. Isto quer dizer que não temos a garantia de conseguir determinar um referencial acelerado que possa ser equivalente a um campo gravitacional global em uma certa região do espaço.

Um outro aspecto interessante do princípio de equivalência é a relação entre o campo gravitacional e a geometria do espaço-tempo. Na ausência de gravidade o espaço-tempo obedece às regras da geometria de Minkowski da relatividade especial. Em coordenadas cartesianas (ct, x, y, z) , a métrica (tensor métrico) do espaço de Minkowski é

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1). \quad (2.4)$$

A presença da gravidade (ou de forma equivalente a adoção de um referencial não-inercial) modifica a geometria do local. O espaço-tempo agora é *curvo* e passa a ser descrito por uma geometria não-euclideana. É importante notar que, no espaço-tempo curvo, o tensor métrico não possui seus elementos constantes como em (2.4). O tensor métrico passa a ser função das coordenadas do espaço-tempo (x^μ) e contém informações sobre a geometria local [27]. Porém, a expressão para o cálculo de intervalos infinitesimais ainda continua da mesma forma. Esta é uma importante propriedade do cálculo tensorial, o que nos permite escrever as equações independentemente do sistema de coordenadas utilizado (forma covariante). O tensor métrico $(g_{\mu\nu})$ desempenha um papel fundamental na teoria da Relatividade Geral. O fato do tensor $g_{\mu\nu}$ ser um tensor simétrico, ou seja $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, significa que (em quatro dimensões) temos apenas 10 componentes independentes, em vez de 16, para descrever completamente o campo gravitacional em uma certa região.

A determinação dos intervalos invariantes no espaço-tempo, ds , em termos das coordenadas locais x^μ é dado por [27–29]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.5)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Por convenção devemos realizar uma soma sobre os índices superiores e inferiores repetidos.

As *equações de Einstein* relacionam o conteúdo das fontes com a geometria do espaço-tempo, e assim podemos descrever a dinâmica do espaço-tempo em um certo cenário onde conhecemos a distribuição de matéria e energia que caracteriza o fenômeno que estamos analisando. Em sua forma mais geral, temos

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde Λ é a famosa *constante cosmológica*. $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e $G_{\mu\nu}$ é conhecido como o *tensor de Einstein*, definido por [29]

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda, \quad R = R_\mu{}^\mu = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

são, respectivamente, o *tensor de Ricci* e o *escalar de Ricci*, que são construídos a partir do *tensor de Riemann* dado por

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (2.9)$$

O conteúdo de energia-momento dos campos de matéria deve ser localmente conservado, o que implica que [29]

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Por razões dimensionais, devemos ter $\alpha = \frac{8\pi G}{c^4}$, com G sendo a constante gravitacional de Newton e c a velocidade da luz. O fator 8π surge devido ao fato da teoria de Einstein se reduzir à teoria de Newton da gravitação no limite de campo fraco [29].

As equações de Einstein podem ser obtidas a partir de um princípio variacional (veja, por exemplo, o apêndice E da referência [29]), ou seja, impondo que uma certa ação S seja estacionária sob variações em relação a $g_{\mu\nu}$ ($\delta g = 0$). A ação que gera as equações do campo gravitacional, incluindo acoplamento com campos de matéria e energia, é

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{8\pi G} (R - \Lambda) + \mathcal{L}_m \right), \quad (2.11)$$

onde \mathcal{L}_m corresponde à ação que descreve os campos de matéria e energia da teoria.

2.2 Buracos Negros

Um *buraco negro* pode ser entendido como um corpo astronômico que gera um campo gravitacional tão intenso de tal modo que a velocidade de escape da sua superfície excede a velocidade da luz. Esta idéia foi concebida há mais de dois séculos por John Michell [30] e Pierre-Simon de Laplace (*Exposition du Système du Monde*, 1796) [31, 32]. Supondo que a

densidade de um destes corpos fosse formada a partir da matéria ordinária, então a massa do ‘corpo invisível’ associado seria da ordem de 10^7 massas solares, o que corresponde ao que é chamado hoje em dia de um ‘buraco negro supermassivo’. A partir dos dados numéricos primeiramente propostos por Michell e Laplace, o raio crítico de um corpo de massa M é dado por

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \approx 3 \frac{M}{M_\odot} \text{km}, \quad (2.12)$$

onde M_\odot é a massa solar. Assim qualquer corpo esférico de massa M confinado dentro do raio crítico R_s deve ser um buraco negro.

Essas primeiras especulações foram rapidamente esquecidas, principalmente devido ao fato de que no desenvolvimento da teoria ondulatória da luz nada foi abordado à respeito das ações de campos gravitacionais sobre a luz. Com o advento da teoria da relatividade geral, e o fato de que nesta teoria é possível estudar os efeitos da gravidade sobre os raios luminosos, foi possível uma visão mais profunda à respeito da existência de buracos negros.

2.2.1 Buracos negros em 3+1 dimensões

No âmbito da relatividade geral, o estudo de buracos negros foi possível por causa da descoberta de soluções esfericamente simétricas das equações de Einstein devido à a Karl Schwarzschild, que a encontrou em 1915, pouco tempo depois da publicação da teoria da relatividade geral [33–36]. Schwarzschild morreu pouco depois da publicação do seu trabalho, resultado de uma doença que contraiu ao servir no exército alemão durante a Primeira Guerra Mundial. A solução de Schwarzschild descreve o espaço-tempo estático ($\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$) na vizinhança de um objeto sem rotação e esfericamente simétrico. Vamos adotar um sistema de referência em que as coordenadas x^μ são tais que ($x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi$). A métrica procurada é uma *solução de vácuo* (ou seja, exterior às fontes de matéria que possivelmente compõe o buraco negro) das equações de Einstein. Assim, para $\Lambda = 0$

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.13)$$

Contraindo esta equação temos $R = 0$ e, conseqüentemente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

Esta é a equação de campo a ser resolvida. Para isto, vamos tomar a métrica geral em sua forma diagonal

$$ds^2 = -A(r)^2 dt^2 + B(r)^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.15)$$

onde A e B são funções apenas de r .

A partir das equações de campo para o vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$, obtemos a seguinte forma para a métrica do espaço-tempo [29], [37], [38]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (2.16)$$

onde M é a massa do corpo central responsável pelo campo gravitacional e $-GM/r$ é o potencial gravitacional newtoniano.

A métrica (2.16) apresenta singularidades nos pontos $r = 0$ e $r = 2M$. No caso $r = 2M$ é possível mostrar que a singularidade correspondente é aparente, ou seja, não é uma singularidade física. Mediante uma transformação adequada de coordenadas é possível remover esta singularidade [29]. No caso $r = 0$ não é possível estabelecer qualquer transformação de coordenadas capaz de remover a singularidade (temos uma singularidade real, ou essencial). A superfície $r = 2M$ corresponde ao chamado *horizonte de eventos* do buraco negro. O raio de um buraco negro deste tipo, também designado por raio de Schwarzschild, é dado por

$$r_s = 2GM. \quad (2.17)$$

2.3 Cosmologia Padrão

Modelo Cosmológico Padrão (MCP) baseia-se no princípio cosmológico, segundo a qual o Universo é isotrópico e homogêneo em grande escala. Friedmann, em 1922, e Lemaître, em 1927 mostraram que um universo em expansão pode ser explicado no contexto da Relatividade Geral. Nesta seção usaremos as equações de campo da Relatividade para um Universo permeado por um fluido com uma equação de estado bem definida e, assim, descrever fases específicas na evolução do Universo.

2.3.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

O *princípio cosmológico* admite que o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas. Este princípio foi enunciado em 1933 pelo astrofísico britânico Edward Arthur Milne segundo o qual diferentes observadores, que estejam participando da expansão cosmológica, devem ter a mesma interpretação sobre as propriedades do Universo [39]. Uma consequência deste princípio é que o Universo deve ser homogêneo em grandes escalas. Sua confirmação, depois da acidental descoberta da radiação cósmica de fundo, por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965, fez desse princípio o ponto chave na elaboração do modelo cosmológico padrão. O modelo geométrico a ser considerado é uma generalização do espaço euclidiano, escrito em coordenadas esféricas e corrigido por um fator de escala. Como a isotropia implica em simetria esférica (de rotação) podemos reescrever o elemento de linha como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.18)$$

Note que esse elemento de linha é uma consequência do princípio cosmológico e estabelece a métrica FRW. Nessa relação k representa a curvatura da hipersuperfície de simultaneidade e define três geometrias:

- $k = 0$ (Universo Plano)

Baseada nos axiomas da geometria euclideana, sua linha geodésica é uma reta. O Universo descrito nessa geometria deve ter dimensão infinita e é por vezes denominado UNIVERSO PLANO. Atuais pesquisas observacionais apontam essa geometria como a que mais se aproxima da geometria do Universo [40].

- $k = 1$ (Universo Esférico)

Esse tipo de geometria viola os postulados de Euclides e descreve um UNIVERSO FECHADO, onde os ângulos internos de um triângulo somam mais que 180° e o comprimento de uma circunferência é menor que $2\pi r$. Linhas paralelas no equador se cruzam nos pólos e, embora de dimensão finita, esse tipo de Universo não tem limites ou barreiras.

- $k = -1$ (Universo Hiprbólico)

Quando a geometria do Universo é hiperbólica, que também é não-euclideana, as linhas paralelas sempre se distanciam umas das outras, caracterizando um UNIVERSO ABERTO e de tamanho infinito, onde a soma dos ângulos internos de um triângulo é menor que 180° e o comprimento de uma circunferência mede mais que $2\pi r$.

2.3.2 A lei de Hubble

Em 1929, Edwin Powell Hubble, estudando a luz emitida pelas galáxias distantes, observou que o comprimento de onda na maioria dos casos era maior que aquele obtido em laboratório. Esse fenômeno, uma consequência do chamado Efeito Doppler, ocorre quando a fonte e o observador se movem um em relação ao outro. Quando se afastam um do outro, o comprimento de onda visto pelo observador aumenta, diminuindo quando fonte e observador se aproximam. Portanto, se uma galáxia estiver se aproximando, sua luz se desloca para o azul; se estiver se afastando, para o vermelho. Em cada caso, a variação relativa do comprimento de onda é proporcional à velocidade com que a fonte se move. Hubble deduziu que as galáxias se afastam umas das outras (desvio para o vermelho) e que a velocidade de distanciamento é tanto maior quanto maior a distância entre elas.

A lei de Hubble [43] afirma, então, que a velocidade de afastamento das galáxias v é proporcional à distância R a um observador em um ponto qualquer do Universo. Ou seja

$$v = |\dot{R}| \hat{R} \implies v = \frac{|\dot{R}|}{|R|} R. \quad (2.19)$$

Escrevendo R em termos das *coordenadas comóveis*, $R = a(t)R_c$, temos

$$v = \frac{\dot{a}}{a} R. \quad (2.20)$$

O termo $H = \dot{a}/a$ é conhecido como *parâmetro de Hubble*. Atualmente seu valor é

$$H_0 = 100h \frac{Km}{sMpc}, \quad (2.21)$$

onde $1pc$ (*Parsec*) vale $3,08568025 \times 10^{16}m$ e

$$h = 0,72 \pm 0,08 \quad (2.22)$$

A descoberta de Hubble teve um profundo impacto na cosmologia da época, principalmente por suas idéias acerca da origem do Universo. Perceba que H tem dimensão de inverso do

tempo; isso permite avaliar a idade do Universo, que se estima ser da ordem de 13,7 bilhões de anos, tempo decorrido desde uma fase em que o Universo era muito quente e denso, denominada *big bang* [42]. O *Raio de Hubble* é a distância em que a velocidade de afastamento de uma galáxia se torna igual à velocidade da luz. Assim, temos

$$v = \frac{dr}{dt} = Hr = c. \quad (2.23)$$

Aqui, denotaremos simplesmente por r a distância radial. Da equação anterior podemos obter $r_H = c/H = 3000h^{-1}Mpc$.

2.3.3 Equações de Friedmann

As Equações de Friedmann constituem um conjunto de equações que governam a expansão do Universo em modelos de cosmologia homogênea e isotrópica baseada na Teoria Geral da Relatividade. Tais equações foram apresentadas, pela primeira vez, por Alexander Friedman em 1922 e obtidas a partir das equações de campo de Einstein para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker em um Universo permeado por um fluido com densidade de energia ρ e pressão p conhecidas. As equações de Einstein da gravitação são dadas por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento dos componentes do Universo que, em uma cosmologia homogênea e isotrópica, será dada por um fluido perfeito. Assim

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

Utilizando a métrica FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.25)$$

podemos obter as equações de Friedmann [42]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad (2.26)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -\kappa^2 p. \quad (2.27)$$

A densidade de energia que torna o Universo plano, $\rho_c = (3/\kappa^2)H^2$, é denominada densidade crítica. As observações indicam, para os dias de hoje

$$\rho_{c0} = (3/\kappa^2)H_0^2 = 1,879h^2 \times 10^{-29} gcm^{-3} = 8,099h^2 10^{-11} eV^4. \quad (2.28)$$

Podemos agora definir o parâmetro de densidade $\Omega = \rho/\rho_c$, e reescrever a equação de Friedmann como

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}. \quad (2.29)$$

As observações têm mostrado que o Universo tem uma geometria muito próxima da geometria plana, que torna $\Omega \approx 1$ [40].

Substituindo a equação (2.26) em (2.27), temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p) = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3\omega\rho) = -\frac{\kappa^2}{6}\rho(1 + 3\omega) \quad (2.30)$$

que é conhecida como *equação da aceleração ou de Raychaldhuri*, onde $\omega = p/\rho$ é a equação de estado do fluido. Uma outra forma de se descrever a aceleração do Universo é através da definição do *parâmetro de desaceleração* (q)

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}. \quad (2.31)$$

Perceba que para $q > 0$ teremos uma aceleração negativa (Universo desacelerado). Esta situação parece ser a mais natural, já que a gravidade é atrativa e, com isso, os corpos deveriam se atrair e freiar a expansão. Contudo, como veremos futuramente, foi constatado em 1998 que o Universo está em expansão acelerada [5,6]. Muitas propostas foram lançadas na tentativa de explicar este fenômeno que é um dos mais intrigantes mistérios da Física contemporânea [41].

Para encontrarmos soluções das equações de Friedmann, vamos introduzir alguns cenários através de escolhas da equação de estado ω do fluido cósmico. Da mecânica estatística sabemos que

1. Para a radiação $\omega = \frac{1}{3}$.
2. Para a matéria não-relativística ou 'fria' $\omega = 0$.

Derivando a equação de Friedmann em relação ao tempo

$$\frac{d}{dt}(\dot{a}^2 + k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\kappa^2}{3}\rho a^2\right) \implies 2\dot{a}\ddot{a} = \frac{\kappa^2}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \quad (2.32)$$

e usando a equação da aceleração, temos

$$2\dot{a}\left[-\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p)a\right] = \frac{\kappa^2}{3}(\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \implies \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0, \quad (2.33)$$

ou ainda

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (2.34)$$

que é a equação da continuidade para o fluido cósmico e expressa a conservação da energia em nosso sistema. Resolvendo a equação da continuidade chegamos a

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.35)$$

Quando a equação de estado do Universo é $\omega = 0$, a densidade de energia $\rho \propto a^{-3}$ e se define a era cosmológica dominada pela matéria. Por outro lado, para $\omega = 1/3$, teremos $\rho \propto a^{-4}$ o que caracteriza a era cosmológica dominada pela radiação. Para encontrarmos a evolução temporal do fator de escala vamos substituir $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$ na equação de Friedmann (com $k = 0$, por simplicidade) para obtermos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \propto a^{-3(1+\omega)} \implies \frac{\dot{a}}{a} \propto a^{-3(1+\omega)/2} \implies \dot{a} \propto a^{-(1+3\omega)/2}. \quad (2.36)$$

Integrando ambos lados, temos

$$\int a^{(1+3\omega)/2} da \propto \int dt \implies a^{3(1+\omega)/2} \propto t. \quad (2.37)$$

Assim, encontramos como o fator de escala depende do tempo (a menos de uma constante). A relação obtida é

$$a \propto t^{2/3(1+\omega)}. \quad (2.38)$$

Com isso, temos que para a matéria $a(t) \propto t^{2/3}$ e para a radiação $a(t) \propto t^{1/2}$. O caso da *constante cosmológica* ($\omega = -1$) deve ser tratado separadamente, e o seu resultado é $a(t) \propto e^{Ht}$.

Capítulo 3

Gravitação em Dimensões Inferiores

Alguns sistemas físicos são efetivamente descritos em dimensões inferiores, tais como cordas cósmicas, paredes de domínio [45] e mais recentemente cenários de matéria condensada envolvendo o grafeno [46, 47]. A análise destes fenômenos físicos exige a introdução de uma geometria efetivas em dimensões inferiores à 4. Por outro lado, a compreensão de uma série de problemas da teoria das cordas (motivado pelo trabalho original de Polyakov [48]) também requer um estudo de cenários em dimensões inferiores. O estudo da gravitação em dimensões inferiores pode fornecer informações sobre problemas em 3+1 dimensões com uma maior simplicidade técnica porém sem comprometer muito a complexidade do problema original [49]. Vários problemas físicos foram abordados dessa maneira como, por exemplo, questões conceituais relacionadas com a física dos buracos negro [50, 51]. Vamos fazer inicialmente uma breve revisão das principais características da gravitação em 2+1 e 1+1 dimensões analisando a possibilidade de obter soluções que indiquem a presença de buracos negros.

Para estudar gravitação em dimensões inferiores a quatro vamos considerar as equações de Einstein em $D+1$ dimensões

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_{D+1} T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde G_{D+1} é a constante da gravitação de Newton em $D+1$ dimensões e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Para $D \geq 3$, o tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$) será nulo se $T_{\mu\nu} = 0$, porém o tensor de Riemann ($R_{\mu\nu\alpha\beta}$) não será necessariamente nulo. É possível existir curvatura não nula em regiões do espaço-tempo onde não existe qualquer fonte de matéria, energia ou pressão.

Esta característica não é válida quando $D \leq 2$. Em 2+1 dimensões é possível escrever o

tensor de Riemann completamente em termos do tensor de Einstein

$$R_{\mu\nu\rho\tau} \equiv \epsilon_{\mu\nu\gamma}\epsilon_{\rho\tau\sigma}G^{\gamma\sigma}. \quad (3.2)$$

Desta forma, o tensor de Riemann será nulo sempre que o tensor de Einstein for nulo. Em 1+1 dimensões o tensor Einstein é nulo para todas as métricas e, conseqüentemente, o tensor de energia-momento também será nulo. Assim, poderíamos concluir que não pode existir uma teoria física da gravidade em dimensões inferiores.

A gravitação de Einstein em 2+1 dimensões tem algumas características interessantes. Uma delas é o fato de que esta formulação da gravitação de Einstein não admite limite newtoniano [52].

Os primeiros estudos da gravitação em 2+1 dimensões [12] revelou que a geometria do espaço-tempo em torno de uma partícula fonte é localmente plana, porém cônica, com um déficit angular proporcional à massa da partícula-fonte. Conseqüentemente, o espaço-tempo é apenas localmente plano. Além disso, não há limite newtoniano [52]. Como não existem efeitos gravitacionais fora da matéria, a luz emitida a partir da superfície de uma estrela irá sempre escapar dela e, portanto, buracos negros não existem em uma teoria de Einstein para a gravitação em três dimensões, a menos que exista uma onstante cosmológica negativa [21].

Um outro aspecto importante é a formação de buracos negros como estágio final do colapso de um disco de poeira [53]. Devido ao fato do tensor de Einstein ser trivial em 1+1 dimensões, uma teoria da gravitação de Einstein nesta dimensionalidade precisa de um outra abordagem . Uma maneira é escrever a constante de gravitação de Newton como $G_{D+1} = (1 - D)\hat{G}_{D+1}/2$, onde \hat{G}_2 assume um valor finito. Assim, é possível mostrar [54] que, quando $D \rightarrow 1$, as equações de Einstein (3.1) se tornam

$$R = 8\pi\hat{G}_2T, \quad (3.3)$$

onde $T = T^\mu_\mu$ é o traço do tensor energia-momento em 1+1 dimensões. A teoria descrita acima foi proposta por R. Mann *et al.* [55, 56] como uma generalização da teoria proposta R. Jakiw e C. Teitelboim [57]. Além disso, este modelo de gravidade em duas dimensões possui limite Newtoniano e foi proposto para ser um análogo da relatividade geral [58]. Existem alguns aspectos da teoria da relatividade geral em 3+1 dimensões que possuem análogos na teoria descrita em (3.3) [55, 59].

3.1 Buracos Negros em 2+1 Dimensões

Vamos considerar agora a situação em 2+1 dimensões. A métrica circularmente simétrica mais geral que podemos escrever tem a forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2d\theta^2. \quad (3.4)$$

Das equações de Einstein (3.1), com $D = 2$ e $T_{\mu\nu} = \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$, podemos obter

$$\begin{aligned} \frac{B'}{B^2} &= 2\Lambda r, \\ \frac{A'}{A} &= -2\Lambda B r, \\ A'' &= -2\Lambda, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde a linha significa derivada em relação a r e Λ é a constante cosmológica. As duas primeiras equações nos conduzem a $A(r) = 1/B(r) = C - \Lambda r^2$, com C sendo uma constante de integração. A terceira equação não produz novas restrições sobre C . Por isso, temos a seguinte solução exata das equações de Einstein.

$$ds^2 = -(C - \Lambda r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{C - \Lambda r^2} + r^2d\theta^2. \quad (3.6)$$

Esta é a forma canônica para uma métrica do tipo de Sitter. Com efeito, se $\Lambda > 0$, então (3.6) é a métrica para o espaço-tempo de de Sitter, e C deve ser positivo para $\partial/\partial t$ ser do tipo tempo. Se $C \neq 1$ a métrica possui uma singularidade cônica na origem, indicando a presença de uma massa. No limite $\Lambda \rightarrow 0$, podemos identificar $C = 1 - 2GM$ onde M é a massa associada à singularidade cônica [12].

Se $\Lambda < 0$ temos um espaço-tempo do tipo anti-de Sitter. Contudo teremos diferentes cenários dependendo do sinal de C . Para $C > 1$ temos um espaço anti-de Sitter com uma singularidade cônica. Para $C < 0$ o espaço-tempo tem um horizonte de eventos, indicando a presença de um buraco negro.

3.2 Buracos Negros em 1+1 Dimensões

Em duas dimensões a ação Einstein é um invariante topológico e por isso não possui uma dinâmica. No entanto, como vimos anteriormente, existem teorias da gravitação em 1+1

dimensões que possuem uma dinâmica não trivial. O análogo natural, mais próximo das equações de Einstein é dado pelo que foi proposto em (3.3), com a inclusão de um termo relativo à constante cosmológica [55, 58, 60–65]

$$R - \Lambda = 8\pi G_2 T, \quad (3.7)$$

onde R é o escalar de Ricci e T é o traço do tensor energia-momento.

Apesar da sua formulação simples, essa teoria bidimensional da gravitacional é bastante rica e formalmente muito semelhante à teoria quadridimensional. Foi demonstrado, por exemplo, que sob certas circunstâncias as soluções desta teoria preveem a existência de buracos negros. Para obtermos tais soluções vamos utilizar uma métrica dada por

$$ds^2 = -A(x)dt^2 + \frac{1}{A(x)}dx^2. \quad (3.8)$$

Em geral a função $A(x)$ pode assumir valores positivos e negativos, que corresponde, respectivamente, à regiões do tipo tempo e do tipo espaço. Os pontos em que a métrica muda sua assinatura são dados por um $A(x) = 0$ e indicam a localização do horizonte de eventos.

Na ausência de Λ e T , temos a seguinte solução geral

$$A(x) = Bx + C. \quad (3.9)$$

Vamos agora encontrar soluções das equações de movimento para valores de $T \neq 0$, considerando inicialmente o caso de um fluido perfeito cujo tensor energia-momento é dado por [58]

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

onde ρ é a densidade e p a pressão. A dois-velocidade u^μ é definida por

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, \quad (3.11)$$

Vamos analisar o caso especial do campo gravitacional gerado por uma partícula situada na origem. Para isso temos $p = 0$ e

$$\rho = \frac{M}{2\pi G}\delta(x). \quad (3.12)$$

Desta forma a métrica pode ser escrita como [58]

$$ds^2 = -\left(-\frac{1}{2}\Lambda x^2 + 2M|x| - C\right)dt^2 + \frac{1}{-\frac{1}{2}\Lambda x^2 + 2M|x| - C}dx^2. \quad (3.13)$$

Os sinais de M , Λ e C são completamente arbitrária. Assim, temos classes distintas de soluções dependendo dos sinais de cada uma destas quantidades.

Capítulo 4

Teorias de Gravidade Modificada

Vamos, agora, tratar dos aspectos gerais de algumas teorias de gravidade modificada. Abordaremos diversas teorias que pretendem resolver alguns problemas que parece não ter solução dentro da teoria de Einstein. São elas: os modelos de mundo-brana nos cenários DGP e RS, uma teoria de gravidade com duas métricas, nova gravidade massiva, a gravitação de Horava-Lifshitz e, por fim, a gravitação com campos auxiliares (não-dinâmicos).

4.1 O Cenário de Branas

Nesta seção introduzimos as idéias sobre dimensões extras e cenários de *mundo-brana* (*braneworlds*). Começaremos com a teoria Kaluza-Klein e, em seguida, veremos como a idéia de dimensões extras pode ser usada para tentar resolver o *problema de hierarquia*. Discutiremos o modelo ADD (Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali), bem como os modelos de Randall e Sundrum (RSI e RSII). Por fim, estudaremos as consequências físicas relativas à gravitação nos modelos de mundo-brana.

4.1.1 A teoria de Kaluza e Klein

O grande feito de Kaluza [66] foi mostrar que a teoria da Relatividade Geral, quando formulada em cinco dimensões, contém a teoria quadridimensional de Einstein da gravidade e a teoria do eletromagnetismo de Maxwell. Porém, o nosso Universo visível é quadridimensional. Ele impôs, então, restrições sobre as coordenadas de modo a impedir a aparição da dimensão

extra nas leis físicas.

A idéia original de Kaluza foi estender o espaço-tempo de 4–dimensões para 5–dimensões, acrescentando *uma* dimensão espacial extra. Em tal espaço teríamos um elemento de linha dado por

$$ds^2 = g_{ab}(x^\mu, y)dx^a dx^b, \quad (4.1)$$

onde $a, b = 0, 1, 2, 3, 5$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $x^5 = y$. As componentes deste tensor métrico são tais que $g_{5\nu} = 2\alpha A_\nu$, $g_{\mu 5} = 2\alpha A_\mu$ e $g_{55} = 2\phi$.

Levando em consideração que as quantidades envolvidas dependem muito fracamente da coordenada da dimensão extra (*condição cilíndrica*) podemos obter [66]

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (4.2)$$

$$R_{5\nu} = -\alpha \partial^\mu F_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

$$R_{55} = -\square\phi. \quad (4.4)$$

Esta equações podem reproduzir as equações da RG e as equações de Maxwell.

Além disso, se o campo escalar é constante, as equações dos campos vetoriais serão as equações de Maxwell no vácuo, e as equações para os campos tensoriais serão as equações de Einstein em 4–dimensões. Kaluza conseguiu este feito em uma única equação covariante escrita em cinco dimensões. Porém, um dos problemas da teoria de Kaluza era o fato de não se saber a real natureza da quinta dimensão

Em 1926 Oskar Klein [67] considerou que a quinta dimensão deveria estar compactificada em círculos com raio da ordem do comprimento de Planck. Ou seja, o espaço-tempo pentadimensional deveria ter uma topologia $R^4 \times S^1$, sendo a quinta coordenada (y) periódica, tal que $0 \leq my \leq 2\pi$, onde m é o inverso do raio de compactificação R .

Partindo destas suposições podemos obter uma relação entre as massas de Planck em 4 e 5–dimensões

$$M_4^2 = M_5^3(2\pi R). \quad (4.5)$$

Apesar da teoria de Kaluza-Klein conseguir de forma surpreendente unificar a gravidade e o eletromagnetismo, a presença do campo escalar se mostrava um problema. Além disso,

não se consegue explicar porque que a gravidade é muito mais fraca que as outras forças e porque que a dimensão extra deveria ser tão pequena. Seria necessário uma quantidade de energia da ordem de 10^{19}GeV (*energia de Planck*) para se sondar distâncias da magnitude do raio de compactificação. Desta forma, era impossível se testar tal teoria, fora o fato de que a maioria dos físicos da época não estava convencida de que a quinta dimensão realmente existia. Por outro lado, em 1925, o surgimento de uma nova teoria do mundo subatômico, a mecânica quântica, mudou o interesse dos físicos da época. A idéia de dimensões extras voltou à tona na década de 80, em algumas das chamadas Teorias de Grande Unificação [68]. No final da década de 90, dimensões extras foram utilizadas para tentar resolver o problema da hierarquia.

4.1.2 O Problema de hierarquia e o modelo ADD

Aparentemente existem pelo menos duas escalas fundamentais de energias na natureza que são a escala eletrofraca ($M_{EW} \sim 10^3\text{GeV}$) e a escala de Planck ($M_{Pl} \sim 10^{18}\text{GeV}$), onde gravidade se torna tão forte quanto as outras interações. As tentativas de explicar a enorme diferença entre estas escalas de energias foi um dos grandes motivadores para construção de teorias além do Modelo Padrão. Em 1998 Nima Arkani-Hamed, Savas Dimopoulos e Gia Dvali (ADD) [10] mostraram que se existem mais dimensões espaciais no Universo então há um cenário possível que resolve o problema. Um importante ponto a ser destacado é que o imenso valor da escala de Planck baseia-se em hipóteses não testadas acerca do comportamento da força gravitacional em pequenas distâncias. Em distâncias macroscópicas, a lei do inverso do quadrado da distância funciona bem, mas sendo a gravidade tão fraca ela tem sido testada experimentalmente até próximo de 1mm [26, 70] e, então, extrapolamos cerca de 32 ordens de grandezas para concluirmos que a gravidade se torna muito forte na escala de Planck. A lei do inverso do quadrado é natural em um espaço tridimensional. Porém, se existirem dimensões espaciais extras podemos ter uma dependência diferente entre distância e gravidade de modo que tal força pode se tornar extremamente forte em distâncias bem superiores aos $10^{-35}m$ da escala de Planck. No cenário ADD, a gravidade é fraca para distâncias $\geq 1\text{mm}$ devido à existência de $n \geq 2$ dimensões extras. Assumindo que a única escala fundamental é a escala eletrofraca, podemos obter a escala de Planck em quatro dimensões postulando a existência

de n -dimensões espaciais extras compactas de raio $\sim R$. Desta forma, uma massa m' situada a uma distância $r \ll R$ de uma massa m sentirá um potencial gravitacional dado por

$$V(r) \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{r^{n+1}}, (r \ll R). \quad (4.6)$$

Por outro lado, se as massas são colocados em distâncias $r \gg R$, o potencial habitual é recobrado,

$$V(r) \sim \frac{1}{M_{Pl(4+n)}^{n+2}} \frac{1}{R^n r}, (r \gg R). \quad (4.7)$$

Desta forma a constante de Planck em $4 - dim$, M_{Pl} , é

$$M_{Pl}^2 \sim M_{Pl(4+n)}^{2+n} R^n. \quad (4.8)$$

Fazendo $M_{Pl(4+n)} \sim M_{EW}$ e exigindo que R seja escolhido para reproduzir a M_{Pl} observada, temos

$$R \sim 10^{\frac{30}{n}-17} cm \times \left(\frac{1\text{TeV}}{M_{EW}}\right)^{1+\frac{2}{n}}. \quad (4.9)$$

Para $n = 1$ (uma dimensão espacial extra) deveríamos ter $R \sim 10^{13} cm$ que implica em desvios na gravidade Newtoniana em nível de sistema solar, de modo que este caso é empiricamente excluído. Para $n \gg 2$, porém, a modificação da gravidade torna-se perceptível apenas em distâncias menores do que as atualmente analisadas pela experiência. O caso $n = 2$ ($R \sim 1mm$) é particularmente interessante, já que novos experimentos serão realizados no futuro muito próximo à procura de desvios na gravidade precisamente nestas distâncias. Ao contrário do proposto por O. Klein, na teoria Kaluza-Klein, as dimensões extras do modelo ADD podem assumir valores enormes, comparados com os ínfimos $10^{-35}m$ da compactificação na teoria KK. Porém, se estas dimensões são tão grandes, por que não as vimos? Apesar de não termos medições da gravidade muito abaixo de $1mm$, temos, contudo, muito conhecimento do comportamento das outras forças em distância de aproximadamente $10^{-19}m$. Como poderia, então, existir dimensões extras grandes? A resposta para isso é que apenas a gravidade pode se propagar pelas dimensões extras enquanto todas as outras forças do Modelo Padrão devem estar confinadas em uma ‘parede’ quadridimensional imersa no espaço das dimensões extras.

4.1.3 Os modelos de Randall e Sundrum

No final da década de 90 Lisa Randall e Raman Sundrum [11, 69] propuseram um novo mecanismo para solucionar o problema da hierarquia. Os modelos de Randall-Sundrum (RS) são formulados em um espaço-tempo de 5–dimensões (*bulk*), com uma dimensão espacial extra, onde apenas a gravidade pode propagar-se livremente. Os modelos podem ter duas (RSI) ou uma brana (RSII), nas quais os campos de matéria permanecem confinados. Nestes modelos a dimensão extra possui tamanho finito (RSI) ou infinito (RSII) e a métrica do espaço pentadimensional é não fatorizável e do tipo anti-de Sitter (AdS_5) apresentando um fator de deformação que depende da dimensão extra. O fator de deformação corrige a escala de Planck resolvendo o problema de hierarquia.

O modelo RSI

O primeiro modelo (RSI) [11] é formado por duas branas que estão localizadas em pontos fixos no bulk, a uma distância finita uma da outra. O nosso Universo é a *brana visível* que possui tensão negativa. Em nosso mundo-brana medimos o valor habitual da massa de Planck (que passaremos a chamar simplesmente de M_4) que é da ordem de 10^{19} GeV. A outra brana é conhecida como *brana escondida*, e possui tensão positiva. Neste modelo, a grande diferença entre a escala electrofraca (da ordem de TeV) e a escala de Planck é explicada devido à curvatura do espaço AdS_5 . O nosso espaço-tempo quadridimensional não preenche todo o espaço de cinco dimensões, por isso precisamos especificar condições de contorno, que assumiremos serem periódicas em ϕ a coordenada angular que parametriza a coordenada da dimensão extra. Assumiremos, também, a identificação de (x, ϕ) com $(x, -\phi)$; ou seja adotaremos uma simetria espacial S_1/Z_2 com as branas separando o bulk em duas partes idênticas. A coordenada da dimensão extra pode ser indicada por y , tal que $0 \leq y \leq y_c$ ($0 \leq \phi \leq \pi$) e $y = r_c \theta$ onde r_c é o raio de compactificação da dimensão extra. Nosso mundo visível localiza-se em $y_c = r_c \pi$ ($\phi = \pi$), enquanto a brana escondida está localizada em $y = 0$ ($\phi = 0$). A ação clássica para o modelo RSI é

$$S_{RS} = S_{grav} + S_{vis} + S_{esc}, \quad (4.10)$$

onde

$$S_{grav} = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^4x \int_{-y_c}^{y_c} dy \sqrt{|g|} [R_5 - 2\Lambda_5], \quad (4.11)$$

$$S_{vis} = \int_{y=y_c} d^4x \sqrt{|g_{vis}|} [\mathcal{L}_{vis} - \sigma_{vis}], \quad (4.12)$$

$$S_{esc} = \int_{y=0} d^4x \sqrt{|g_{esc}|} [\mathcal{L}_{esc} - \sigma_{esc}]. \quad (4.13)$$

Aqui, g representa o determinante do tensor métrico g_{AM} em 5–dimensões, com $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$. g_{vis} e g_{esc} representam os determinantes dos tensores métricos $g_{\mu\nu}^{vis}$ e $g_{\mu\nu}^{esc}$, definidos sobre as branas, e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Aqui σ_{vis} e σ_{esc} são as tensões das branas e \mathcal{L}_{vis} é a densidade lagrangeana correspondente à presença de matéria no Universo e $\kappa_5^2 = 1/M_5^3$, onde M_5 é a massa de Planck em 5–dimensões. Vamos construir uma métrica para o bulk tal que as branas respeitem a invariância de Poincaré e possuam geometria M_4 . Assim, temos

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.14)$$

O tensor métrico do espaço M_4 é dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Calculando o tensor de Einstein para esta métrica temos

$$G_{\mu\nu} = -e^{2A} \eta_{\mu\nu} (3A'' + 6A'^2), \quad (4.15)$$

$$G_{55} = 6A'^2, \quad (4.16)$$

onde as linhas indicam derivadas em relação a y .

Variando a ação do modelo RSI podemos obter as equações de Einstein $G_{AB} = \kappa_5^2 T_{AB}$, onde $\kappa_5^2 = \frac{1}{M_5^3}$ e T_{AB} é o tensor energia-momento em 5–dimensões. T_{AB} é dado, como de forma usual, por $T_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{AB}}$. Estamos interessados em soluções onde as únicas fontes de gravidade são as tensões das brana, ou seja, desconsideramos as possíveis contribuições dos termos \mathcal{L}_{vis} e \mathcal{L}_{esc} . Desta forma podemos escrever T_{AB} , tal que

$$T_{MN} = [\Lambda_5 g_{MN} + \sigma_{vis} g_{\mu\nu}^{vis} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y - y_c) + \sigma_{esc} g_{\mu\nu}^{esc} \delta_M^\mu \delta_N^\nu \delta(y)]. \quad (4.17)$$

Podemos ainda escrever esta última expressão como

$$T_{\mu\nu} = [\Lambda_5 + \sigma_{vis}\delta(y - y_c) + \sigma_{esc}\delta(y)] e^{2A(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

$$T_{55} = -\Lambda_5. \quad (4.19)$$

Tomando a componente (5 – 5) das equações de Einstein, temos

$$6A'^2 = -\kappa_5^2\Lambda_5, \quad (4.20)$$

$$A' = \pm\sqrt{-\frac{\kappa_5^2\Lambda_5}{6}} = \pm k = \pm\frac{1}{\ell}. \quad (4.21)$$

Desta última equação concluímos que a constante cosmológica do *bulk*, Λ_5 , deve ser negativa. Assim, o espaço-tempo entre as duas branas deve ter uma geometria AdS_5 , sendo ℓ o *comprimento AdS*. Integrando a equação (4.21) obtemos

$$A = \pm\sqrt{-\frac{\kappa_5^2\Lambda_5}{6}} y = \pm ky = \pm\frac{y}{\ell}. \quad (4.22)$$

Como queremos uma solução que respeite a simetria de invariância sob a transformação $w \rightarrow -w$, vamos adotar

$$A = -k |y| = -\frac{|y|}{\ell}, \quad (4.23)$$

com $0 < y < y_c$.

Assim, a métrica de Randall-Sundrum é parametrizada como

$$ds^2 = e^{-2K|y|}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.24)$$

Através de condições de contorno impostas devido à presença da função delta, podemos concluir que [11]

$$\sigma_{vis} = -\sigma_{esc} = \frac{6}{\kappa_5^2\ell}, \quad (4.25)$$

com

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\kappa_5^2\ell^2}. \quad (4.26)$$

Uma importante implicação físicas deste modelo, é que podemos determinar parâmetros da teoria efetiva quadridimensional em termos de parâmetros da teoria em cinco dimensões,

M_5 e ℓ . Por exemplo, podemos determinar a massa de Planck em quatro dimensões (M_4) a partir da relação

$$M_4^2 = \ell M_5^3 (1 - e^{-2y/\ell}). \quad (4.27)$$

Este é um resultado importante, e que surge como uma alternativa para resolver o problema de hierarquia.

4.1.4 A gravitação no modelo de Randall-Sundrum

Vamos agora analisar o comportamento da gravidade no modelo de Randall-Sundrum. Para isso, temos que determinar explicitamente como surgem os grávitons, que correspondem a pequenas flutuações $h_{MN}(x, y)$ em torno da métrica do espaço-tempo de Minkowski. Assim, temos que encontrar o espectro das perturbações das componentes quadridimensionais da métrica, ou seja

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.28)$$

A equação de Einstein perturbada até segunda ordem é dada por

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} + e^{2A} \left(\frac{1}{2}\partial_y^2 + 2A'\partial_y \right) h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho} (\partial_\mu\partial_\nu h_{\lambda\rho} - \partial_\mu\partial_\lambda h_{\rho\nu} - \partial_\nu\partial_\lambda h_{\rho\mu}) \\ & + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} e^{2A} A'\partial_y(\nu^{\lambda\rho} h_{\lambda\rho}) = 0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde $\square = \partial_\mu\partial^\mu$.

Estamos interessados nas flutuações gravitacionais em torno da métrica de Randall-Sundrum, em um gauge axial, transverso e com traço nulo, dado por

$$h_{M5} = 0, \quad \partial^\mu h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = h_\mu^\mu = 0, \quad (4.30)$$

de onde obtemos (ver, por exemplo [71] para citações bibliográficas completas, bem como detalhes da obtenção das equações para as flutuações)

$$h''_{\mu\nu} + 4A'h'_{\mu\nu} = e^{-2A}\square h_{\mu\nu}. \quad (4.31)$$

Para obtermos as soluções desta equação vamos usar o método de separação das variáveis escrevendo

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \phi(x)\Psi(y). \quad (4.32)$$

Desta forma obtemos

$$(\partial_y^2 + 4A'\partial_y + m^2e^{-2A})\Psi(y) = 0, \quad (4.33)$$

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (4.34)$$

Podemos eliminar o termo proporcional à A' fazendo uma mudança de variável. Para isso vamos introduzir uma nova coordenada z que torna a métrica conformalmente plana. Assim, fazendo $dy = e^{A(z)}dz$ podemos escrever

$$ds^2 = e^{2A(z)}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (4.35)$$

Usando a solução de Randall-Sundrum, $A(y) = -k|y|$, podemos integrar esta última equação e obter

$$e^{-2k|y|} = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}. \quad (4.36)$$

Com esta nova coordenada a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = \frac{1}{(k|z| + 1)^2}(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - dz^2). \quad (4.37)$$

Vamos definir uma nova função $A(z)$ dada por

$$A(z) = \ln \left[\frac{1}{k|z| + 1} \right]. \quad (4.38)$$

Para estudarmos o espectro do gráviton de forma semelhante à um problema de mecânica quântica, podemos transformar (4.33) em uma equação *tipo Schrodinger*. Basta definirmos

$$\Psi(z) = e^{-\frac{3}{2}A(z)}\psi(z), \quad (4.39)$$

para obtermos

$$-\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + \left[\frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' \right] \psi(z) = m^2\psi(z), \quad (4.40)$$

que pode ser escrita como

$$\left[-\frac{d^2}{dz^2}\psi(z) + U(z) \right] \psi(z) = m^2\psi(z), \quad (4.41)$$

se definirmos um potencial dado por

$$U(z) = \frac{9}{4}A'^2(z) + \frac{3}{2}A''(z). \quad (4.42)$$

O cálculo do modo zero se dá quando temos $m = 0$, e equação de Schroedinger se reduz a

$$-\frac{d^2}{dz^2}\psi_0(z) + \left[\frac{9}{4}A'^2 + \frac{3}{2}A'' \right] \psi_0(z) = 0, \quad (4.43)$$

cuja solução é dada por

$$\psi_0(z) = e^{\frac{3}{2}A(z)} = \frac{1}{(k|z| + 1)^{3/2}}. \quad (4.44)$$

Para o modelo de Randall-Sundrum I é fácil perceber que para $A(z) = -\ln(k|z| + 1)$, temos

$$A'(z) = -\frac{\text{sgn}(z)k}{k|z| + 1}, \quad A''(z) = \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} - \frac{2k(\delta(z) - \delta(z - L))}{k|z| + 1}. \quad (4.45)$$

Da equação (4.42) o potencial escalar, tipo vulcão, é dado por

$$U(z) = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z| + 1)^2} - \frac{3k(\delta(z) - \delta(z - L))}{k|z| + 1}. \quad (4.46)$$

4.1.5 O modelo de RSII

No modelo ADD é possível reproduzir a gravidade newtoniana, a grandes distâncias, através da compactificação da dimensão extra. Randall e Sundrum propuseram um segundo modelo (RSII) que leva em consideração uma única brana [69] de tensão positiva e, com isso, é possível reproduzir a lei de Newton mesmo com dimensões extras não compactas. Para isso devemos ter uma métrica quadridimensional dependente da dimensão extra (métrica não fatorizável do tipo AdS_5). Assim, a gravidade fica localizada na brana devido à estrutura deformada do espaço-tempo. A ação do modelo RSII é praticamente a mesma do modelo RSI, simplesmente invertendo os papéis das branas. Ou seja, a brana visível está na origem e tem tensão positiva. Em seguida removemos a brana de controle fazendo com que sua posição tenda ao infinito ($y_c \rightarrow \infty$) ficando com apenas uma brana de tensão positiva. A função de onda do gráviton estará relacionada ao fator de deformação da métrica e a sua localização devido

ao fato de podermos integrar a amplitude de probabilidade ao longo da dimensão extra. Esta integração é finita mesmo com uma dimensão extra infinita. Veja que integrando o elemento de volume sobre todo espaço pentadimensional, temos [72]

$$\int d^5x \sqrt{g} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y/l} d^4x dy = \frac{l}{2} \int d^4x. \quad (4.47)$$

Desta forma, o gráviton pode sondar uma distância efetiva l ao longo da dimensão extra. Para o modelo RSII o potencial (4.42) pode ser escrito como

$$U(z) = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} - \frac{3k\delta(z)}{(k|z|+1)}. \quad (4.48)$$

A presença da função delta gera um estado ligado de massa nula, o gráviton usual. Os demais auto-estados formam o *contínuo de Kaluza-Klein (KK)*, que são ondas planas uma vez que o $U \rightarrow 0$ quando $|z| \rightarrow \infty$. Perto da origem temos uma barreira de potencial ($U \rightarrow \infty$), e isso reduz drasticamente a amplitude dos modos massivos (supressão dos modos massivos). Apesar de termos uma grande quantidade de modos massivos à baixas energias, a supressão destes estados gera apenas pequenas correções para a gravidade quadridimensional.

Fora da brana, os modos massivos de Kaluza-Klein (ψ_m) satisfazem a equação diferencial (4.41) com potencial dado por

$$U(z) = \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2}. \quad (4.49)$$

Ou seja

$$\psi_n'' + \left[m^2 - \frac{15}{4} \frac{k^2}{(k|z|+1)^2} \right] \psi_m = 0. \quad (4.50)$$

Os modos massivos são dados em termos de uma combinação linear de funções de Bessel

$$\psi_m(x) = a_m \sqrt{|z| + \frac{1}{k}} Y_2 \left[m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right] + b_m \sqrt{|z| + \frac{1}{k}} J_2 \left[m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right]. \quad (4.51)$$

Para estudarmos os modos de *KK* precisamos analisar os limites para pequenos e grandes valores do argumento das funções de Bessel. Para pequenos valores do argumento ($m_n(|z| \ll 1)$), temos

$$J_2 \left(m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) \sim \frac{m^2 \left(|z| + \frac{1}{k} \right)^2}{8}, \quad Y_2 \left(m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) \sim -\frac{4}{\pi m^2 \left(|z| + \frac{1}{k} \right)^2} - \frac{1}{\pi}. \quad (4.52)$$

Para satisfazer a condição de contorno, em $z = 0$, imposta pela função δ presente no potencial, devemos ter

$$\psi_m = C_m \sqrt{|z| + \frac{1}{k}} \left[Y_2 \left(m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) + \frac{4k^2}{\pi m^2} J_2 \left(m \left(|z| + \frac{1}{k} \right) \right) \right]. \quad (4.53)$$

Para $k/m_n \gg 1$, o termo que acompanha J_2 domina a expressão da função de onda. Assim, usando a aproximação para grandes argumentos ($m_n |z| \gg 1$)

$$\sqrt{z} J_2(m |z|) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos \left(m |z| - \frac{5}{4} \pi \right), \quad (4.54)$$

podemos obter um valor analítico para a constante de normalização C_m . Usando a condição de normalização, $\int_{-L}^{+L} dz |\psi|^2 = 1$, temos

$$\int_{-L}^{+L} dz C_m^2 \frac{32k^4}{\pi^3 m_n^5} \cos \left(m_n |z| - \frac{5}{4} \pi \right) = C_m^2 \left(\frac{32k^4}{\pi^3 m_n^5} \right) L = 1, \quad (4.55)$$

que nos fornece, finalmente

$$C_m = \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \frac{\pi m_n^{5/2}}{4k^2}. \quad (4.56)$$

Uma vez encontrado o espectro de KK para teoria efetiva quadridimensional, podemos encontrar o potencial não-relativístico entre duas partículas, de massas m_1 e m_2 , que se encontram na brana ($z = 0$), ou seja, o potencial estático corrigido pela presença do modo zero e dos modos massivos de KK. Este potencial é dado por [69]

$$V(r) \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty dm \frac{G_N}{k} \frac{m_1 m_2 e^{-mr}}{r} \frac{m}{k}, \quad (4.57)$$

onde G_N é a constante de gravitação de Newton, k é o inverso do comprimento AdS ($k = 1/l$) e m é a massa dos modos de KK. O auto-estado de massa m atua como um campo massivo que gera uma correção do tipo Yukawa [73].

Perceba uma supressão exponencial na contribuição dos modos massivos para $m > 1/r$. O termo extra m/k surge para suprimir as funções de onda em $z = 0$ de acordo com a equação (4.52). Assim, se torna

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{l}{r^2} \right). \quad (4.58)$$

Assim, podemos obter uma teoria efetiva quadridimensional da gravidade com correções advindas dos modos de KK. O primeiro termo, devido ao estado ligado (gráviton usual de massa nula), é o potencial newtoniano usual. Os modos de KK geram um termo de correção muito pequeno para $r \gg l$.

4.1.6 O modelo DGP

O modelo de Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) [74], é uma teoria para gravitação quadridimensional em uma brana do tipo Minkowski imersa em um espaço-tempo com uma dimensão extra *infinita e plana*. A lei de Newton pode ser recuperada devido a adição de um termo de curvatura quadridimensional na ação de Einstein-Hilbert em cinco dimensões. O modelo DGP recupera a gravidade quadridimensional para pequenas distâncias, enquanto que para grandes distâncias ela manifesta efeitos de uma gravitação em 5–dimensões. Notavelmente, é possível obter uma aceleração cósmica recente sem a introdução de algum tipo de matéria exótica [75].

Uma interação newtoniana $4D$ na brana pode ser obtida adicionando o termo

$$M_P^2 \int d^4x \sqrt{|g|} R ,$$

na ação em 5–dimensões, onde R é o escalar de curvatura (*escalar de Ricci*) em 4–dimensões.

Este termo preserva as simetrias do modelo e pode ser obtida por correções quânticas gerando automaticamente um potencial gravitacional do tipo $1/r$ em curtas distâncias para fontes localizadas na brana.

Vamos considerar uma 3–brana sem tensão imersa em um espaço-tempo de 4+1 dimensões. As coordenadas na brana é x^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$; e a coordenada extra será denotado por y . Letras maiúsculas serão usadas para quantidades em 5–dimensões ($A, B, C = 0, 1, 2, 3, 5$) e a assinatura da métrica é $(+, -, -, -, -)$.

Vamos considerar a ação

$$S = \frac{M_5^3}{2} \int d^5x \sqrt{G} R_{(5)} + \frac{M_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \mathcal{L}_{matter}, \quad (4.59)$$

onde M representa a massa de planck em 5–dimensões e M_P a massa de Planck em 4–dimensões.

A métrica em 5–dimensões será denotada por $G_{AB}(X) \equiv G_{AB}(x, y)$ com escalar de curvatura dado por $R_{(5)}$. A brana está localizada em $y = 0$ e a métrica induzida é dada por

$$g_{\mu\nu}(x) \equiv G_{\mu\nu}(x, y = 0) . \quad (4.60)$$

O escalar de Ricci em 4–dimensões para a métrica induzida, $g_{\mu\nu}(x)$, é dado por $R = R(x)$. Por questão de simplicidade, possíveis termos adicionais típicos de uma teoria

de supergravidade (*SUGRA*) ou de campos de matéria confinados na brana são omitidos na Eq. (4.59). No limite $M \rightarrow 0$ (com M_P finito) a ação (4.59) descreve uma gravidade em 4–dimensões na brana. Por outro lado, no limite $M_P \rightarrow 0$ (com M finito) temos uma gravitação essencialmente pentadimensional. A matéria confinada na brana é representada pelo tensor energia-momento dado por

$$T_{AB} = \delta(y)T_{\mu\nu}. \quad (4.61)$$

É possível mostrar que as flutuações da métrica em torno do espaço de Minkowski nos leva a à propagação de grávitons Sobre a brana ($y = 0$), cuja estrutura tensorial do seu propagador é dada por [74]

$$\tilde{h}_{\mu\nu}(p, y = 0)\tilde{T}'^{\mu\nu}(p) = \frac{\tilde{T}_{\mu\nu}\tilde{T}'^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\tilde{T}'_{\alpha}\tilde{T}'^{\alpha\beta}}{2M_5^3 p + M_4^2 p^2}. \quad (4.62)$$

Aqui, $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_5^2$ é a parte espacial do momento em 5–dimensões. O potencial gravitacional mediado pelo gráviton na brana é dado por

$$V(r) = \int h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}(t, \mathbf{x}, y = 0; 0, 0, 0) dt. \quad (4.63)$$

A partir da equação (4.62), podemos encontrar

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi^2 M_4^2 r} \left\{ \sin\left(\frac{r}{r_0}\right) Ci\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{r}{r_0}\right) \left[\pi - 2Si\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \right\}. \quad (4.64)$$

Aqui $Ci(z) \equiv \gamma + \ln(z) + \int_0^z (\cos(t) - 1)dt$ é a função *Cosseno Integral*, $Si(z) \equiv \int_0^z \sin(t)dt$ é a função *Seno Integral* e γ é a constante de Euler-Masceroni. r_0 é uma escala de distância característica da teoria, dada por

$$r_0 \equiv \frac{M_4^2}{2M_5^3}. \quad (4.65)$$

A partir dela podemos analisar regimes de comportamento do potencial gravitacional. No limite em que $r \ll r_0$, o potencial newtoniano é dado por

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2 M_4^2 r} \left\{ \frac{\pi}{2} + \left[-1 + \gamma + \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \right] \left(\frac{r}{r_0} + \mathcal{O}(r^2) \right) \right\}, \quad (4.66)$$

ou seja

$$V(r) \sim -\frac{1}{r}, \quad (4.67)$$

que representa o potencial gravitacional newtoniano em 4–dimensões.

Por outro lado, quando $r \gg r_0$, o potencial assume a forma

$$V(r) \simeq -\frac{1}{8\pi^2 M_4^2} \frac{1}{r} \left[\frac{r_0}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \right], \quad (4.68)$$

e assim, temos o seguinte comportamento assintótico

$$V(r) \sim -\frac{1}{r^2}, \quad (4.69)$$

típico de uma teoria de gravidade em 5–dimensões.

4.1.7 Estrutura de branas com campos escalares

Vamos agora analisar um modelo que descreve a gravidade em cinco dimensões na presença de campos escalares. A motivação para isso provém dos trabalhos desenvolvidos em [78–84], que abordam a possibilidade de se obter equações diferenciais de primeira ordem que resolvem as correspondentes equações de movimento. Este tipo de abordagem é importante, pois contribui diretamente para simplificar a obtenção de soluções, e abre a possibilidade para novos cenários. O presente estudo está relacionado com as técnicas desenvolvidas inicialmente em cosmologia [83]. É interessante notar que apesar da supersimetria se mostrar incompatíveis com modelos em geometria do tipo de Sitter (dS), é possível encontrar uma forma de escrever equações de primeira ordem que resolvem as equações de movimento do sistema original [84].

Consideramos modelos descritos por campos escalares reais em um espaço-tempo anti-de Sitter (AdS) em cinco dimensões com uma única dimensão extra. O espaço-tempo quadridimensional é plano e com uma geometria do tipo Minkowski. Os campos escalares são descritos com uma dinâmica padrão e usamos o seu potencial para inferir como o fator de empenamento (A) depende da dimensão extra. Este método faz com que modelos regidos pelo potencial de um campo escalar específico passe a depender de uma nova função, $W = W(\phi)$, que por sua vez está relacionada com o fator de empenamento, conduzindo a uma nova forma de investigar as soluções do modelo.

O modelo que vamos investigar é descrito pela seguinte ação

$$S = \int d^4x dy \sqrt{|g|} \left(-\frac{1}{4} R + \mathcal{L}(\phi, \partial_i \phi) \right), \quad (4.70)$$

onde ϕ representa um campo escalar real e $4\pi G = 1$. Essas teorias com campos escalares, sob certas condições, podem simular teorias de supergravidade em cinco dimensões [82, 146]. O

elemento linha ds_5^2 em cinco dimensões pode ser escrito como

$$ds_5^2 = g_{ij}dx^i dx^j = e^{2A} ds_4^2 - dy^2, \quad (4.71)$$

com $i, j = 0, 1, \dots, 4$. ds_4^2 representa o elemento de linha quadridimensional, cuja forma é

$$ds_4^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.72)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, descreve a geometria do espaço de Minkowski. A dinâmica do campo escalar é governada pela seguinte densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{ij} \partial^i \phi \partial^j \phi - V, \quad (4.73)$$

onde $V = V(\phi)$ representa o potencial que especifica o modelo considerado.

Vamos supor que A e ϕ são estáticos, e dependem apenas da dimensão extra, ou seja, $A = A(y)$ e $\phi = \phi(y)$. Neste caso a equação de movimento para o campo escalar será dada por

$$\phi'' + 4A'\phi' = V_\phi, \quad (4.74)$$

onde a linha indica a derivada em relação a y , e $V_\phi = dV/d\phi$. As equações de Einstein em uma geometria de Minkowski quadridimensional serão

$$A'' = -\frac{2}{3}\phi'^2, \quad (4.75a)$$

$$A'^2 = \frac{1}{6}\phi'^2 - \frac{1}{3}V(\phi). \quad (4.75b)$$

Para usarmos o formalismo de primeira ordem [78, 79, 85, 86], devemos introduzir uma nova função, $W = W(\phi)$, que pode ser encarada como um *superpotencial* em uma teoria de supergravidade. Escrevendo uma equação de primeira ordem

$$A' = -\frac{1}{3}W, \quad (4.76)$$

e usando (4.75a), temos

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi. \quad (4.77)$$

Assim, o potencial da equação (4.75b) pode ser escrito como

$$V = \frac{1}{8}W_\phi^2 - \frac{1}{3}W^2. \quad (4.78)$$

Podemos mostrar que as equações (4.76) e (4.77) são soluções de (4.74) e (4.75) para o potencial (4.78). A mudança W por $-W$ nos leva a uma outra solução sem alterar o potencial, como abordado em trabalhos anteriores [78, 79].

Para estudarmos a localização da gravidade nas branas obtidas como solução, vamos expressar as flutuações métrica em torno do espaço de Minkowski

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (4.79)$$

Como sabemos $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}(x, y)$ representa a métrica do espaço de Minkowski. $h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}(x, y)$ representa as flutuações da métrica e ϵ é um parâmetro infinitesimal. De acordo com [79, 87–89], introduzimos a coordenada z , para obtermos uma métrica conformalmente plana de modo que $dz = e^{-A(y)}dy$. Adotando o gauge transversal e de traço nulo temos a seguinte equação do tipo Schroedinger

$$-\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + U(z)\psi(z) = m^2\psi(z), \quad (4.80)$$

onde o potencial $U(z)$ é dado por

$$U(z) = \frac{9}{4}A'^2(z) + \frac{3}{2}A''(z). \quad (4.81)$$

Esta equação pode ser fatorada como

$$\left[-\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A'(z)\right] \left[\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A'(z)\right] \psi(z) = m^2\psi(z). \quad (4.82)$$

Isso mostra que não há estados ligados com massa negativa, e o modo zero do gráviton $\psi_0(z) = e^{-\frac{3}{2}A(z)}$ é o estado fundamental do respectivo problema de mecânica quântica. Devido à dificuldade de se obter uma forma analítica de $A(z)$ a partir de $A(y)$ devemos usar métodos numéricos em alguns casos para se determinar o espectro do gráviton [90].

4.2 Teoria da Gravitação com Duas Métricas (*Bimétricas*)

Teorias de *bigravidade* foi proposto pela primeira vez na década de setenta, no contexto das interações fortes como uma teoria que descreve a interação de um méson spin-2 com

o gráviton [91]. É conhecida também como a gravidade *fg* ou *gravidade forte*. Mais recentemente, a bigravidade tem sido reconsiderada em diferentes contextos. Por exemplo, é relevante no contexto de dimensões extras com certas compactificações específicas que permitem um *gap* de massa no Espectro KK [92]. É também importante em cenários de mundo-brana com certas configurações de ajuste-fino (*fine-tuned*) [93]. Porém, nesta seção, e no restante desta tese, abordaremos o ponto de vista tratado inicialmente em [94], no qual a teoria com duas métricas é usada para abordar mudanças, e possíveis consequências, na velocidade de propagação da luz. Na referência [16] damos nossa contribuição à respeito deste tema ao analisarmos o comportamento da estrutura de branas com campos escalares em uma teoria com duas métricas.

O aspecto causal da propagação dos campos eletromagnéticos é determinada a partir da métrica de espaço-tempo presente nas equações de Maxwell. Podemos alterar a velocidade de propagação da luz através de alterações nesta métrica. Para que isso tenha consequências físicas precisamos garantir que esta não é a única métrica no espaço-tempo e, desta forma, garantir que luz se propague com uma velocidade diferente da velocidade de propagação de outros campos. Vamos apresentar agora uma teoria de gravidade que incorpora o conteúdo físico de uma “velocidade da luz variável” e que seja invariante por difeomorfismo, sem a introdução de um sistema de referência preferencial global no espaço-tempo.

Vamos considerar um campo vetorial ψ_μ (*covetor*) que se relaciona a “métrica gravitacional” ($g_{\mu\nu}$) e a “métrica da matéria” ($\hat{g}_{\mu\nu}$) através de

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \beta\psi_\mu\psi_\nu, \quad (4.83)$$

onde $\beta > 0$ é uma constante adimensional. Vamos considerar modelos descritos pela ação

$$S_{\text{tot}} = S_{\text{gr}}[g] + S_\psi[\psi, g] + S_{\text{matter}}[\hat{g}, \text{matter fields}], \quad (4.84)$$

onde

$$S_{\text{gr}}[g] = -\frac{1}{\kappa} \int dt d^3x \sqrt{-g} (R[g] - 2\Lambda), \quad (4.85)$$

é a ação Einstein-Hilbert habitual, $\kappa = 16\pi G/c^4$ e Λ é a constante cosmológica. Observando que a estrutura de (4.83) não é invariante sob transformações locais $U(1)$, assumimos uma ação do tipo Maxwell-Proca para o campo vetorial

$$S_\psi[\psi, g] = \frac{1}{\kappa} \int dt d^3x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} B^2 + \frac{1}{2} m^2 \psi^2 \right), \quad (4.86)$$

onde $B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu$, $B^2 \equiv g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} B_{\mu\alpha} B_{\nu\beta}$ e $\psi^2 \equiv g^{\mu\nu} \psi_\mu \psi_\nu$. O parâmetro $m = \mu c/\hbar$ tem dimensões de inverso de comprimento.

Vamos admitir que a ação dos campos de matéria é dada de uma forma padrão, porém será construída a partir de $\hat{g}_{\mu\nu}$. As equações de campo satisfazem a lei de conservação $\hat{\nabla}_\nu T_{\text{matter}}^{\mu\nu}[\hat{g}] = 0$, onde $\hat{\nabla}_\nu$ representa a derivada covariante com respeito a $\hat{g}_{\mu\nu}$. Assim, o tensor energia-momento da matéria será dado por

$$T_{\text{matter}}^{\mu\nu}[\hat{g}] = \frac{2}{\sqrt{-\hat{g}}} \hat{g}^{\mu\alpha} \hat{g}^{\nu\beta} \left(\frac{\delta S_{\text{matter}}[\hat{g}]}{\delta \hat{g}^{\alpha\beta}} \right). \quad (4.87)$$

Variando a ação (4.84) com respeito a $g_{\mu\nu}$ e ψ_μ temos as seguintes equações de movimento

$$\sqrt{-g}(G^{\mu\nu}[g] - \Lambda g^{\mu\nu}) = \frac{1}{2} \sqrt{-g} T^{\mu\nu}[g, \psi] + \frac{\kappa}{2} \sqrt{-\hat{g}} T_{\text{matter}}^{\mu\nu}[\hat{g}], \quad (4.88)$$

$$\sqrt{-g}(-\nabla_\nu B^{\mu\nu} + m^2 \psi^\mu) = \beta \kappa \sqrt{-\hat{g}} T_{\text{matter}}^{\mu\nu}[\hat{g}] \psi_\nu. \quad (4.89)$$

Aqui ∇_ν representa a derivada covariante em relação a $g_{\mu\nu}$. O tensor energia-momento para o campo vetorial $\psi_{\mu\nu}$ será dado por

$$T_{\mu\nu} = -B_{\mu\alpha} B_\nu^\alpha + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} B^2 + m^2 \psi_\mu \psi_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} m^2 \psi^2. \quad (4.90)$$

É possível mostrar que as equações de campo e a lei de conservação são consistentes com as identidades de Bianchi, porém as condições de energia impostas sobre o tensor energia-momento não são as mesmas para as equações do campo gravitacional.

Podemos relacionar o covetor ψ_μ com um campo escalar ($\psi_\mu \equiv \partial_\mu \phi$) e com isso analisarmos a sua dinâmica em diversos contextos como, por exemplo, cosmologia, matéria escura [95,96] ou estrutura de branas com campos escalares [16].

4.3 Nova Gravidade Massiva (NGM)

Bergshoeff, Hohm e Townsend propuseram um modelo de gravitação tridimensional que propaga modos massivos de spin 2 e com ambas helicidades, ± 2 em um vácuo de Minkowski [14], ou seja é uma extensão covariante da teoria de Pauli-Fierz para o spin 2 massivo em em 3–dimensões. Vamos introduzir as definições e convenções relativas à NGM. Sejam $g_{\mu\nu}$

($\mu, \nu = 0, 1, 2$) a métrica do espaço-tempo em 3–dimensões (com determinante g), $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci e $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ o escalar de Riemann. A assinatura da métrica será $(+ - -)$. Considere a ação

$$S = \frac{1}{\kappa^2} \int d^3x \sqrt{g} \left[R + \frac{1}{m^2} K \right], \quad (4.91)$$

onde

$$K = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{3}{8}R^2. \quad (4.92)$$

A constante κ possui dimensão $[\kappa] = -1/2$, em unidades fundamentais. É o análogo em 3–dimensões da raiz quadrada da constante de Newton, m é um parâmetro de massa, que pode ser combinado com κ^2 em uma constante adimensional $m\kappa^2$, como na *gravidade topologicamente massiva* (GTM) [99]. Uma característica importante dessa teoria é o fato dela possuir um ‘sinal errado’ para o termo EH.

Modelos deste tipo são conhecidos por serem renormalizáveis em quatro dimensões [9], que implica em super-renormalizabilidade por contagem de potências em três dimensões. A unitariedade parece se confirmar em [97, 98]. Assim, NGM parece ser uma boa candidata para uma teoria de gravidade quântica, embora que em três dimensões os grávitons sejam massivos.

Considere as equações de campo

$$2m^2G_{\mu\nu} + K_{\mu\nu} = 0, \quad (4.93)$$

onde $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} = & 2D^2R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(D_\mu D_\nu R + g_{\mu\nu}D^2R) - 8R_\mu{}^\rho R_{\nu\rho} \\ & + \frac{9}{2}RR_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} \left[3R^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma} - \frac{13}{8}R^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

D_μ é a derivada covariante usual, e $D^2 \equiv D^\mu D_\mu$. Outra relação importante é uma identidade similar à identidade de Bianchi, que surge como consequência da invariância por difeomorfismo da ação.

Por outro lado, o traço da equação (4.93) é dado por

$$m^2R = K, \quad (4.95)$$

onde usamos a relação entre K e $K_{\mu\nu}$ dada por

$$g^{\mu\nu} K_{\mu\nu} = K. \quad (4.96)$$

Vamos agora linearizar as equações de campo, em torno das soluções de vácuo no espaço-tempo plano, fazendo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski $h_{\mu\nu}$ é a perturbação da métrica. As equações de campo linearizadas são

$$(\square + m^2) G_{\mu\nu}^{lin} = 0, \quad R^{lin} = 0, \quad (4.97)$$

Como mencionamos anteriormente, a NGM linearizada é equivalente à teoria de Pauli-Fierz para uma partícula massiva livre e de spin 2. Podemos ver que (4.91) é equivalente a uma ação com densidade lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\kappa^2} \sqrt{g} \left[R + f^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} m^2 (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^2) \right], \quad (4.98)$$

onde $f_{\mu\nu}$ é um campo tensorial simétrico auxiliar cujo traço é $f = g^{\mu\nu} f_{\mu\nu}$. Expandindo em torno do espaço-tempo de Minkowski e tomando apenas os termos quadráticos nas perturbações, temos

$$\mathcal{L}_2 = \left(f^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \right) [\mathcal{G}h]_{\mu\nu} - \frac{1}{4} m^2 (f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - f^2). \quad (4.99)$$

Se eliminarmos $f_{\mu\nu}$ obtemos a aproximação quadrática para (4.91) em torno da solução no espaço de Minkowski. Porém, vamos eliminar $h_{\mu\nu}$ através da equação $\mathcal{G}(h - f) = 0$. Como o operador de Einstein é inversível no espaço dos twnsores simétricos e transversos, a solução desta equação é $h_{\mu\nu} = f_{\mu\nu}$.

Substituindo, obtemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} f^{\mu\nu} [\mathcal{G}f]_{\mu\nu} - \frac{1}{4} m^2 (f^{\mu\nu} f_{\mu\nu} - f^2). \quad (4.100)$$

Esta é a ação de Pauli-Fierz par um campo de spin 2, $f_{\mu\nu}$, massivo. O primeiro termo é a termo de Einstein-Hilbert linearizado que agora tem o sinal ‘correto’.

4.4 Gravitação de Horava-Lifshitz

Teorias alternativas da gravitação, como a de Horava-Lifshitz, surgem da dificuldade de se obter uma teoria quântica da gravidade em quatro dimensões que seja, simultaneamente,

renormalizável e unitária. Do ponto vista da teoria quântica de campos, a grande dificuldade de se formular a teoria de Einstein como uma teoria de campo, a nível perturbativo (em 3+1 dimensões), é devido à dimensionalidade negativa da constante de Newton ($[G_N] = [k]^{-2}$, em unidades de momentum) [174]. A teoria da gravitação de Einstein-Hilbert fornece a nível clássico uma descrição consistente para gravitação, porém esta teoria não é renormalizável perturbativamente [?, 3, 101]. Alguns modelos para a gravitação relativística com termos de derivada superior se tornam renormalizáveis em quatro dimensões [9], porém tais modelos não são unitários.

De acordo com a teoria quântica de campos, um diagrama de Feynman de ordem N se comporta no regime de grandes momenta (altas energias) como $\int dk k^{A-ND}$, onde N depende do processo [101] e D é o expoente dimensional da constante de acoplamento ($[k]^D$). Portanto, em teorias que possuem constante de acoplamento com expoente dimensional negativo (como a constante de Newton), as integrais de espalhamento divergem para processos de ordem mais altas. Por outro lado, o propagador do gráviton na teoria de Einstein-Hilbert pode ser expresso como

$$\frac{1}{k^2}, \quad (4.101)$$

onde $k = \sqrt{\omega^2 - \vec{k}^2}$ e \vec{k} é o quadrimomento. Assim, a teoria da gravitação de Einstein-Hilbert não satisfaz as condições usuais de renormalizabilidade. Para que haja o cancelamento das divergências ultravioleta seria necessário um número infinito de contra-termos, o que caracteriza a teoria como não-renormalizável (pelo menos em nível perturbativo). Mesmo tratando a gravitação de Einstein-Hilbert como uma teoria de campos efetiva, precisamos definir de forma consistente o regime ultravioleta da teoria para termos uma descrição adequada dos fenômenos de gravitação quântica. Uma possibilidade seria incluir na lagrangeana de Einstein-Hilbert termos com derivadas superiores que não teriam influência no domínio de baixa frequência [9, 100]. Esses termos modificam a estrutura do propagador, que pode ser escrito esquematicamente como

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} G_N k^4 \frac{1}{k^2} + \dots = \frac{1}{k^2 - G_N k^4} \quad (4.102)$$

No regime de altas energias, o propagador é dominado pelo termo $1/k^4$, o que melhora as divergências ultravioleta da teoria. Por contagem de potências é possível mostrar que todas as

divergências envolvendo grávitons possuem grau de divergências menor ou igual a quatro [9]. A nova estrutura do propagador (4.102) possui dois polos. Isto significa a presença de uma excitação fantasma o que torna um problema para a consistência desse modelo (*ghost*). Ou seja, o propagador

$$\frac{1}{k^2 - G_N k^4} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - 1/G_N}. \quad (4.103)$$

correspondem aos grávitons com e sem massa. O sinal negativo no termo que contém o gráviton massivo corresponde a um fantasma e, portanto, ocorre violação da unitariedade (pelo menos ao nível perturbativo). Desta forma podemos entender que o problema da não-unitariedade da gravitação com derivadas de ordem superior parece surgir da introdução de derivadas temporais de ordens mais altas na estrutura do propagador. Uma forma de resolver esse problema consiste em abandonar a invariância de Lorentz e introduzir derivadas espaciais de ordens mais altas, sem necessariamente ter que introduzir derivadas temporais de ordem superior. Com isso evitamos o aparecimento de partículas fantasmas e melhoramos o comportamento do propagador no regime ultravioleta. Este método foi proposto inicialmente a sistemas de matéria condensada [102] e, posteriormente, introduzido por Petr Horava (no contexto das teorias de campos) como uma proposta para se obter uma teoria quântica de gravitação consistente [24, 103]. Neste caso, os propagadores podem ser escritos esquematicamente como

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 \vec{k}^2 - G(\vec{k})^{2z}}, \quad (4.104)$$

onde G é uma constante de acoplamento. De forma geral, o denominador poderá conter outras potências de \vec{k}^2 entre 1 e z , que não são relevantes em uma discussão inicial. No regime de altas energias, o termo $G(\vec{k})^{2z}$ predomina sobre $c^2(\vec{k})^2$ e propagador pode ser escrito como $1/(\omega^2 - G(\vec{k})^{2z})$.

Este modelo tem uma propriedade de escala anisotrópica para o espaço-tempo dada por um expoente crítico $z > 1$. No regime em que a teoria possui anisotropia de escala, temos

$$\vec{x} \rightarrow b\vec{x}, \quad t \rightarrow b^z t. \quad (4.105)$$

As dimensões canônicas das grandezas envolvidas serão dadas em unidades de momento espacial $[k^i]$ (ou simplesmente $[k]$), com $i = 1, 2, 3$. Desta forma as dimensões do espaço-tempo

são dadas por

$$[\vec{x}] = [k]^{-1}, \quad [t] = [k]^{-z}, \quad (4.106)$$

Para valores apropriados de z , podemos tornar a teoria renormalizável por contagem de potências. O termo $c(\vec{k})^2$ pode ser considerado como uma deformação importante no propagador, e deve ser incluído como correções perturbativas

$$\frac{1}{\omega^2 - c^2 \vec{k}^2 - G(\vec{k}^2)^z} = \frac{1}{\omega^2 - G(\vec{k}^2)^z} + \frac{1}{\omega^2 - G(\vec{k}^2)^z} c^2 \vec{k}^2 \frac{1}{\omega^2 - G(\vec{k}^2)^z} + \dots \quad (4.107)$$

No limite das baixas energias (regime *infra-vermelho*), o termo $c^2 \vec{k}^2$ predomina sobre $G(\vec{k}^2)^z$ e, assim, recobramos o regime relativístico ($z = 1$). Neste regime, os termos de altas ordens representam uma correção ao regime $z = 1$. Desta forma o propagador pode ser escrito como as

$$\frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2 - G(\vec{k}^2)^z} = \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} + \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} G(\vec{k}^2)^z \frac{1}{\omega^2 - \vec{k}^2} + \dots \quad (4.108)$$

Assim, o polo do propagador (4.108) não apresenta modos fantasmas e as derivadas temporais de ordem mais altas não aparecem. Neste contexto a simetria de Lorentz deve aparecer como uma simetria emergente a baixas energias (longas distâncias), mas que pode não se manifestar no regime de altas energias.

Vejamos agora uma formulação lagrangeana para gravitação que esteja de acordo com a estrutura do propagador (4.104) em 3+1 dimensões. Tal teoria deve satisfazer a propriedade anisotrópica do espaço-tempo para $z > 1$, com z sendo escolhido de modo a assegurar a que teoria permaneça renormalizável por contagem de potências. Sendo assim, a invariância por difeomorfismos

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^j, t), \quad (4.109)$$

deixa de ser uma simetria fundamental da teoria, devido ao fato de que a dimensão temporal tem um papel privilegiado mediante as propriedades anisotrópicas do espaço-tempo. Por isso devemos introduzir uma foliação tridimensional preferencial de superfícies tipo-espaço \mathcal{F} . Esta estrutura adicional deve ser incorporada à variedade diferencial do espaço-tempo, \mathcal{M} , para refletir o papel privilegiado da coordenada temporal. O novo grupo de transformações, adaptado às foliações, é um subgrupo dos difeomorfismos que contém as reparametrizações

temporais (sem dependência espacial) e os difeomorfismos puramente espaciais. Estas transformações são dadas por

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j, t), \quad \tilde{t} = \tilde{t}(t). \quad (4.110)$$

Estas transformações, denotadas por $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$, são conhecidas como *difeomorfismos que preservam a foliação*. As transformações infinitesimais locais de $\text{Diff}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ podem ser escritas como

$$\delta x^i = \zeta^i(t, \vec{x}), \quad \delta t = f(t). \quad (4.111)$$

Podemos simplificar nossa representação assumindo que a foliação do espaço-tempo é topologicamente dada por

$$\mathcal{M} = \mathbf{R} \times \Sigma, \quad (4.112)$$

onde todas as foliações são topologicamente equivalentes à uma certa variedade Σ .

Na construção de um modelo lagrangeana que apresente a simetria descrita acima é conveniente utilizar a decomposição ADM (Arnowitt-Deser-Misner) [104]. A métrica $g_{\mu\nu}$ é decomposta em termos dos funções lapso (*lapse*) N , deslocamento (*shift*) N_i e a métrica espacial g_{ij} como

$$ds^2 = -N^2 c^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt), \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (4.113)$$

Sob a transformação de escala (4.105) (com $z = 3$), os campos N , N^i e g_{ij} se transformam como

$$N \rightarrow N, \quad N^i \rightarrow b^{-2} N^i, \quad g_{ij} \rightarrow g_{ij}. \quad (4.114)$$

Por outro lado, sob as transformações que preservam o difeomorfismo, estes campos se transformam como

$$\delta g_{ij} = \nabla_i \zeta_j + \nabla_j \zeta_i + f g_{ij}, \quad (4.115)$$

$$\delta N_i = N_k \nabla_i \zeta^k + \zeta^k \nabla_k N_i + g_{ik} \dot{\zeta}^k + \dot{N}_i f + N_i \dot{f}, \quad (4.116)$$

$$\delta N = \zeta^k \nabla_k N + \dot{N} f + N \dot{f}. \quad (4.117)$$

Aqui, $\dot{f} \equiv df/dt$, ∇_i representa a derivada covariante com respeito a g_{ij} .

Partindo da análise dimensional das coordenadas do espaço-tempo (4.106) podemos determinar as dimensões das outras grandezas envolvidas na teoria. Assim, temos

$$[N^i] = [c] = \frac{[dx]}{[dt]} = [k]^2, \quad [g_{ij}] = [N] = [k]^0, \quad [K_{ij}] = [k]^3, \quad [\Gamma_{jk}^i] = [k], \quad [R_{ijkl}^i] = [k]^2. \quad (4.118)$$

Vamos agora analisar modelos que são invariantes por difeomorfismos que preservam a foliação (4.110) e que possuam a propriedade de escala anisotrópica do espaço-tempo (4.105) com $z > 1$. Podemos obter uma grande quantidade de termos independentes com vários coeficientes arbitrários no modelo lagrangeana. Vamos analisar alguns termos compatíveis com a simetria descrita acima. Os termos $K_{ij}K^{ij}$ e $K^2 = (g^{ij}K_{ij})^2$ são construídos a partir da curvatura extrínica

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i), \quad (4.119)$$

que é covariante sob difeomorfismos espaciais e transforma-se como um escalar sob reparametrizações temporais.

Estes termos são ditos *cinéticos* pelo fato de serem formados por derivadas temporais da métrica. A ação cinética é formada a partir de uma combinação destes termos e é dada por

$$S_K = g_K \int dt dx^3 x \sqrt{|g|} N (K_{ij}K^{ij} - \lambda K^2), \quad (4.120)$$

onde λ é um parâmetro livre na teoria de Horava-Lifshitz. Quando $\lambda = 1$ o termo cinético se reduz ao da ação de Einstein-Hilbert na decomposição ADM. Dimensionalmente podemos mostrar que $[K_{ij}] = [k]^z$. Assim

$$[S_K] = [g_K][t][x]^3[K_{ij}]^2 = [g_K][k]^{z-3}. \quad (4.121)$$

Como a ação (4.121) deve ser adimensional, é necessário impor que $z = 3$ para que a constante de acoplamento seja adimensional. Esta é a condição para que a gravitação de Horava-Lifshitz seja renormalizável por contagem de potências em quatro dimensões.

Vamos agora abordar os chamados *termos potenciais*, cuja ação é invariante por Diff $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ e pode ser expressa como

$$S_V = \int dt d^D \sqrt{g} N V[g_{ij}]. \quad (4.122)$$

O termos $V[g_{ij}]$ possuem a mesma dimensão de $[K_{ij}K^{ij}]$. No limite das grandes energias os termos de maior dimensão dominam na lagrangeana. Uma vez entendido o comportamento em altas energias, podemos estudar a teoria no limite de baixas energias analisando os termos relevantes induzidos. Os termos construídos somente com a métrica espacial g_{ij} (até a dimensão $[k]^6$) são dados por [105]

$$\begin{aligned}
 [k]^6 & : R^3, RR^i{}_jR^j{}_i, R^i{}_jR^j{}_kR^k{}_i, R\nabla^2R, \nabla_iR_{jk}\nabla^iR^{jk}, \\
 [k]^5 & : \epsilon^{ijk}R_{il}D_jR_k{}^l, K_{ij}R^{ij}, \\
 [k]^4 & : R^2, R^{ij}R_{ij}, \nabla^2R, \\
 [k]^3 & : e^{ijk}\left(\Gamma_{im}^l\partial_j\Gamma_{kl}^m + \frac{2}{3}\Gamma_{il}^n\Gamma_{jm}^l\Gamma_{kn}^m\right), \\
 [k]^2 & : R, \\
 [k]^0 & : 1
 \end{aligned} \tag{4.123}$$

Existem outras possibilidades para formação dos termos potenciais. De fato, Blas, Pujolás e Sibiryakov mostraram nas Referências [107, 108] que termos envolvendo o vetor

$$a_i = \frac{1}{N}\partial_i N, \tag{4.124}$$

geram deformações relevantes quando incluídos na ação da gravitacional. O campo a_i se transforma covariantemente sob difeomorfismos que preservam a foliação. Existem mais de 70 termos independentes, com dimensão ≤ 6 , que satisfazem os difeomorfismos que preservam a foliação [109, 110]. Vejamos alguns termos, formados a partir de a_i , que podem compor a parte potencial da lagrangeana de Horava-Lifshitz

$$\begin{aligned}
 [k]^6 & : (a_i a^i)^2 R, (a_i a^i)(a_i a_j R^{ij}), (a_i a^i)^3, a^i \Delta^2 a_i, (a^i{}_i) \Delta R, \dots \\
 [k]^5 & : \epsilon^{ijk} a_i a_l \nabla_j R_k{}^l, a_i a_j K^{ij}, K^{ij} a_{ij}, (a^i{}_i) K, \\
 [k]^4 & : (a_i a^i)^2, (a^i{}_i)^2, (a_i a^i) a^j{}_j, a^{ij} a_{ij}, (a_i a^i,) R, a_i a_j R^{ij}, R a^i{}_i, \\
 [k]^2 & : a_i a^i, \\
 [k]^0 & : \gamma_0.
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

Dado esse grande número de termos independentes, algumas simetrias adicionais podem ser impostas a fim de restringir a teoria. Por isso, ao se referir a gravitação de Hoava-Lifshitz

deve ser especificar claramente qual formulação está sendo considerada. Uma restrição que foi considerada na formulação original de Hořava é a condição de balanço detalhado (*detailed balance*), que impõe que os termos dependentes da métrica espacial sejam da forma

$$\mathcal{L}_{(V,D)} = E_{ij} \mathcal{G}^{ijkl} E_{kl}, \quad E^{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta W_g}{\delta g_{ij}}, \quad (4.126)$$

where \mathcal{G}^{ijkl} denotes the generalized De-Witt metric, defined as $\mathcal{G}^{ijkl} = \frac{1}{2}(g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) - \lambda g^{ij}g^{kl}$, and λ is a coupling constant. A utilização desta condição tem sua origem em modelos de teoria de campos na matéria condensada [111]. Esta condição diminui o número de constantes arbitrárias do modelo e pode simplificar as propriedades de renormalização da teoria [24, 112].

Outra restrição que modifica significativamente a estrutura da gravitação de Horava-Lifshitz é a condição de projetabilidade. Esta condição impõe que a função lapso N seja dependente apenas da coordenada temporal

$$N = N(t). \quad (4.127)$$

Interpretando a função lapso como o campo de calibre associado às transformações $t \rightarrow \tilde{t}(t)$, parece natural restringir esse campo com a mesma dependência do espaço-tempo que as reparametrizações temporais. Evidentemente, a condição de projetabilidade evita a presença de termos no lagrangeana que envolvam derivadas espaciais de N e, portanto, diminui o número de parâmetros livres da teoria. Estas duas condições simplificam a estrutura da teoria mas podem não ser compatíveis com aspectos fenomenológicas [113–115].

A condição de balanço detalhado implica que em alguns problemas como, por exemplo, a não existência de uma solução de vácuo do tipo de Sitter [116], dificuldades de se acoplar matéria [117], a não existência de um limite newtoniano [122] e instabilidade de campos escalares no regime UV [123]. Por isso, acredita-se que esta condição deva ser abandonada [124]. Porém, Borzou, Lin e Wang descobriram, recentemente, que o campo escalar pode ser estabilizado, se a condição de balanço detalhado for levemente quebrada [125].

A condição de projetabilidade implica que o modo extra de spin-0 é um modo fantasma [118] e isso gera instabilidades na teoria quântica. Além disso, esse modo spin-0 se acopla fortemente, o que pode trazer dificuldades em se obter um limite infravermelho que seja

compatível com aspectos fenomenológicos [114, 119]. Além disso, conforme discutido em [120], a condição de projetabilidade produz uma descontinuidade do tipo vDVZ (van Dam-Veltman-Zakharov) [76, 77] semelhante ao que ocorre na gravitação massiva de Pauli-Fierz [121]. Por outro lado, a condição projectabilidade reduz consideravelmente o número de constantes de acoplamento independentes, podendo ser reduzida de mais de 70 para apenas 11 [105] (See also [126]). Porém, o espaço-tempo de Minkowski torna-se instável [105, 106, 127], embora o espaço-tempo de Sitter seja estável [128, 129].

Uma outra abordagem totalmente diferente é eliminar o gráviton de spin-0 fixando o valor de λ como sendo 1. Isso foi feito por Horava e Melby-Thompson (HMT) [130]. Eles notaram que a teoria linearizada era invariante por $U(1)$ apenas no caso em que $\lambda = 1$ [24]. Assim, fazendo $\lambda = 1$, é possível estender a simetria que preserva os difeomorfismos por folheação. A nova simetria passa a ser

$$U(1) \times \text{Diff}(M, \mathcal{F}). \quad (4.128)$$

Para que esta simetria seja válida a nível não-perturbativo, HMT descobriram que é necessário introduzir um campo escalar (*prepotencial newtoniano*) e um campo de gauge $U(1)$. Com isso o gráviton de spin-0 é eliminado [130, 131] juntamente a instabilidade gerada pelo acoplamento forte. Além disso, é possível mostrar que a introdução do prepotencial newtoniana pode tornar a ação invariante por (4.128) mesmo que $\lambda \neq 1$ [132]. Assim, os grávitons de spin-0 podem ser eliminadas para qualquer valor de λ [132–134], de modo que o problema do acoplamento forte não existe mais no setor gravitacional puro, porém ainda existe quando a matéria está presente. Embora resolve a instabilidade e problemas de acoplamento fortes, a presença do campo vectorial a_i dá origem a uma proliferação de constantes de acoplamento independentes [109], isso limita potencialmente o poder de previsão da teoria quando aplicada à cosmologia e astrofísica.

Recentemente, Zhu, Shu, Wu e Wang prouseram uma extensão da teoria de Horava-Lifshitz sem a condição de projetabilidade (4.127) (mas com a simetria extendida (4.128) [135]) com o propósito de reduzir consideravelmente o número de constantes de acoplamento independentes. Contudo, para se obter uma teoria ‘saúdável’ nos limites UV e IR, devemos quebrar levemente a condição de balanço detlhado. Por outro lado a simetria extendida elimina o gráviton de

spin-0. Nesta tese, não estamos interessados em estudar o importante problema do spin-0 e sim os aspectos gravitacionais advindos da lagrangeana potencial propostas por Zhu *e tal.* Por isso, no restante desta seção, faremos uma abordagem geral desta proposta, deixando os detalhes técnicos (muitas vezes extensos e trabalhosos) para serem consultados na referência [136], onde os autores fazem uma interessante aplicação ao estudo da cosmologia. No Capítulo 5 apresentamos, como contribuição original dentro deste contexto, soluções de buracos negros em uma teoria de Horava-Lifshitz em 1+1 dimensões [18] e o estudo da estrutura de Branas formadas com campos escalares [19]. Nos dois casos o vetor a_i , gerado pela condição de não-projetabilidade, terá um papel crucial.

Como foi mencionado anteriormente, para que a teoria tenha um bom comportamento no limite infra-vermelho, a condição de balanço detalhado deve ser levemente quebrada. Isto é feito adicionando os termos relevantes com dimensão inferior a seis, presentes nas equações (4.123) e (4.125),

4.5 Campos Auxiliares

O teorema de Lovelock [?, ?], em quatro dimensões, afirma que o único tensor de rank-2 com divergente nulo construído unicamente a partir da métrica g_{ab} e de suas derivadas, até segunda ordem, é o tensor de Einstein ($G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$) somado a um termo relativo à constante cosmológica. Assim, podemos escrever as equações de Einstein como

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} . \tag{4.129}$$

onde $c = 8\pi G = 1$.

Aqui, T_{ab} é o tensor matéria-energia. A identidade Bianchi contraída implica que T_{ab} tem divergência nula, ou seja $\nabla_a T^{ab} = 0$. As possíveis modificações na equação (4.129) são bastante restritas devido ao teorema de Lovelock. Uma forma de contornar o teorema é adicionar campos dinâmicos extras. No entanto, somos forçado a introduzir graus de liberdade extra que podem impor restrições experimentais relacionadas à sua existência atual [139]. Outro problema é a dificuldade em se construir teorias estáveis com campos adicionais acoplados de forma não-mínima à gravidade [140]. Para contornar o teorema de Lovelock e, ao mesmo tempo, não adicionar graus de liberdade extra, vamos explorar a possibilidade de

incluir *campos auxiliares não dinâmicos*. Como os campos extras são auxiliares suas equações de campo serão determinadas algebricamente [23].

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} + S_{ab}[g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}]. \quad (4.130)$$

O tensor S_{ab} é nulo quando $T_{\mu\nu} = 0$. Por outro lado S_{ab} possui divergente nulo, como consequência da identidade de Bianchi e do fato de que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ quando os campos de matéria satisfazem as equações de campo. Assim, eliminando o campo auxiliar, obtemos equações de Einstein modificadas com a presença de um tensor de divergente nulo e que se anula no vácuo. De forma geral, o tensor energia-momento é formado a partir de derivadas de segunda ordem.

$$\begin{aligned} S_{ab} = & \alpha_1 g_{ab} T + \alpha_2 g_{ab} T^2 + \alpha_3 T T_{ab} + \alpha_4 g_{ab} T_{cd} T^{cd} + \alpha_5 T^c{}_a T_{cb} + \beta_1 \nabla_a \nabla_b T \\ & + \beta_2 g_{ab} \square T + \beta_3 \square T_{ab} + 2\beta_4 \nabla^c \nabla_{(a} T_{b)c} + \dots, \end{aligned} \quad (4.131)$$

onde α_i and β_j são coeficientes com dimensões apropriadas.

Impondo que S_{ab} tem divergência nula podemos encontrar relações entre os vários coeficientes presentes em (4.131). É possível mostrar que [23]

$$\begin{aligned} \alpha_1 = -\beta_1 \Lambda, \quad 4\alpha_2 = (1 + 2\alpha_1)(\beta_1 - \beta_4), \quad \alpha_3 = \beta_4(1 + 2\alpha_1) - \beta_1, \\ 2\alpha_4 = \beta_4, \quad \alpha_5 = -2\beta_4, \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad \beta_3 = -\beta_4. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Com isso, as equações de campo podem ser escritas como

$$\begin{aligned} G_{ab} = & T_{ab} - \Lambda g_{ab} - \beta_1 \Lambda g_{ab} T + \frac{1}{4}(1 - 2\beta_1 \Lambda)(\beta_1 - \beta_4)g_{ab} T^2 \\ & + [\beta_4(1 - 2\beta_1 \Lambda) - \beta_1] T T_{ab} + \frac{1}{2}\beta_4 g_{ab} T_{cd} T^{cd} - 2\beta_4 T^c{}_a T_{cb} + \beta_1 \nabla_a \nabla_b T \\ & - \beta_1 g_{ab} \square T - \beta_4 \square T_{ab} + 2\beta_4 \nabla^c \nabla_{(a} T_{b)c} + \dots \end{aligned} \quad (4.133)$$

onde todos os coeficientes são expressos em termos de β_1 e β_4 .

Para determinados valores das constantes β_1 e β_4 podemos obter algumas teorias com campos auxiliares. Podemos obter a teoria conhecida como Teoria de Born-Infeld inspirada em

Eddington (*Eddington-inspired Born-Infeld gravity* ou EiBI) [145], no limite de acoplamento fraco, com $\beta_1 = 0$, $\beta_4 = -\kappa/2$ (usando as definições da referência [22]). Palatini $f(R)$ corresponde a $\beta_4 = 0$ com Λ e β_1 dependentes dos parâmetros do modelo).

Nossa análise demonstra que as teorias com campos auxiliares (ou qualquer outro tipo de modificação que não permita a propagação de graus de liberdade extra) produzem equações com derivadas superiores no tensor energia-momento.

Capítulo 5

Alguns Novos Cenários com Gravidade Modificada

Neste Capítulo apresentamos a nossa contribuição original a respeito dos temas tratados no Capítulo anterior. São trabalhos desenvolvidos e publicados ao longo da construção desta tese. Cada uma das próximas seções corresponde a um dos trabalhos encontrados nas referências [15–20].

5.1 Buracos Negros Tridimensionais em uma 2–Brana no Espaço de Minkowski

Nesta seção consideramos um cenário em quatro dimensões que é análogo ao de DGP em cinco dimensões. Em nossa investigação, a teoria é construída a partir de um 2–brana, com um termo de curvatura escalar induzido, e imersa em um espaço-tempo de quatro dimensões. Investigamos soluções de buracos negros tridimensionais com um termo de curvatura padrão e do tipo nova gravidade massiva. Neste modelo não existe uma constante cosmológica, nem na brana nem no bulk. Somente os campos gravitacionais estão presentes, porém encontramos soluções de vácuo do tipo buracos negros em 2+1 dimensões. Constatamos a existência de uma *escala de cruzamento* (*crossover*) [74] que controla a distância em que a gravidade se manifesta como sendo tri ou tetradimensional.

5.1.1 Soluções de buracos negros circularmente simétricas em uma 2-brana

A ação completa pode ser separada em duas partes

$$S = S_{(4)} + S_{(3)}, \quad (5.1)$$

onde

$$S_{(4)} = -\frac{1}{2\kappa_4^2} \int d^4x \sqrt{|g|} (R^{(4)} - 2\kappa_4^2 L_m^{(4)}), \quad (5.2)$$

com $ds_4^2 = g_{ab}(r, z)dx^a dx^b$ ($a, b = 0, 1, 2, 3$) sendo a métrica do espaço-tempo de quatro dimensões e

$$S_{(3)} = -\frac{1}{2\kappa_3^2} \int d^3x \sqrt{|q|} (R^{(3)} - 2\kappa_3^2 L_m^{(3)}). \quad (5.3)$$

Além disso $ds_3^2 = q_{\mu\nu}(r)dx^\mu dx^\nu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$) é a métrica induzida na 2-brana em $z = 0$ com $q_{\mu\nu}(r) \equiv g_{\mu\nu}(r, z=0)$. O escalar de curvatura induzido $R^{(3)}$ está relacionado à métrica tridimensional e não tem nenhuma dependência em relação à coordenada extra z . As equações de Einstein em quatro dimensões para esta teoria são

$$G_{ab} = \kappa_{(4)}^2 S_{ab}, \quad (5.4)$$

onde

$$S_{ab} = T_{ab} + U_{ab}. \quad (5.5)$$

T_{ab} é o tensor energia-momento para os campos de matéria e U_{ab} é dado pela curvatura devido à métrica induzida sobre a 2-brana. o tensor T_{ab} pode ser escrito como

$$T_{ab} = T_{ab}|_{bulk} + T_{ab}|_{brane}. \quad (5.6)$$

Uma vez que só estamos interessados em soluções de vácuo, a lagrangeana dos campos de matéria serão nulas ($L_m^{(3)} = L_m^{(4)} = 0$), então nós temos que

$$T_{ab} = 0. \quad (5.7)$$

Como consequência, as equações de Einstein serão

$$G_{ab} = \kappa_{(4)}^2 U_{ab}, \quad (5.8)$$

onde

$$U_a^b = \delta(z) \text{diag} (-\rho_{curv}, p_{curv}, p_{curv}, 0) \quad (5.9)$$

define a energia e a pressão da curvatura brana.

Este termo será equivalente a um ‘fluido cósmico’ como foi introduzido em [75]. Para investigarmos soluções de buracos negros tridimensionais imersos em um espaço-tempo de quatro dimensões vamos utilizar o seguinte *Ansatz*

$$ds_4^2 = -A(r, z)dt^2 + \frac{1}{A(r, z)}dr^2 + r^2d\theta^2 + dz^2. \quad (5.10)$$

Vamos, agora, calcular as componentes do tensor de Einstein. Aqui pontos representam derivados com relação a r , enquanto que linhas representam derivadas em relação a z . Assim, temos

$$G_t^t = \frac{3}{4} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2r} \dot{A} - \frac{1}{2} \frac{A''}{A}, \quad (5.11)$$

$$G_r^r = -\frac{1}{4} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2r} \dot{A} + \frac{1}{2} \frac{A''}{A}, \quad (5.12)$$

$$G_\theta^\theta = \frac{1}{4} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \ddot{A}, \quad (5.13)$$

$$G_z^z = -\frac{1}{4} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{2} \ddot{A} + \frac{1}{r} \dot{A}. \quad (5.14)$$

Na ausência do 2-brana as equações de Einstein satisfazem a solução de vácuo do bulk $G_{ab} = 0$. Disso resulta que

$$G_t^t + G_r^r = 0, \quad (5.15)$$

e, conseqüentemente, a seguinte equação para $A(r, z)$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{r} \dot{A} = 0. \quad (5.16)$$

Vamos reintroduzir a brana através de condições de contorno em $z = 0$, ou seja $A(r, z)|_{z=0} \equiv A_0(r)$ and $\dot{A}(r, z)|_{z=0} \equiv \dot{A}_0(r)$. Para isso vamos tomar uma condição de junção $z = 0$. A curvatura extrínseca é dada por

$$K_{\mu\nu} = q_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu, \quad (5.17)$$

onde $n^\alpha = (0, 0, 0, 1)$. Para a métrica adotada temos que $K_{\mu\nu}$ é dado por

$$K_b^a = \left(\frac{A'}{2A}, -\frac{A'}{2A}, 0, 0 \right). \quad (5.18)$$

A relação entre K_{ab} e o tensor energia-momento é dado pela condição de junção de Israel em $z = 0$, $[A'] = A'(0^+) - A'(0^-)$. If $A'(0^-) = -A'(0^+)$ tal que $[A'] = 2A'(0^+)$ encontramos [75]

$$[K_{ab}] = K_{ab}(0^+) = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \left(U_{ab} - \frac{1}{2} U q_{ab} \right). \quad (5.19)$$

Usando (5.18) temos

$$K_r^r(0^+) = -\frac{A'(0^+)}{2A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \left(p_{curv} - \frac{1}{2} (\rho_{curv} + 2p_{curv}) \right), \quad (5.20)$$

que implica em

$$\frac{A'(0^+)}{A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \rho_{curv}. \quad (5.21)$$

Na 2-brana as equações de Einstein determinam a métrica induzida $q_{\mu\nu}$ de tal modo que podemos identificar o tensor energia-momento induzido pela curvatura na brana como $U_{ab} = \delta(z)U_{\mu\nu}$. Note que $U_{\mu\nu}$ não depende da coordenada z . Assim, podemos escrever as equações de Einstein para a métrica induzida como sendo

$$G_{\mu\nu} = \kappa_{(3)}^2 U_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2. \quad (5.22)$$

Isso nos permite obter os seguintes componentes

$$U_t^t = U_r^r = \frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}, \quad (5.23)$$

$$U_\theta^\theta = \frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\ddot{A}_0}{2}. \quad (5.24)$$

A densidade de energia da curvatura (ρ_{curv}) e a pressão da curvatura (p_{curv}) na brana fica sendo então

$$\rho_{curv} = -\frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}, \quad (5.25)$$

$$p_{curv} = \frac{1}{\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{2r}. \quad (5.26)$$

Note que $p_{curv} = -\rho_{curv}$, o que mostra que o ‘fluido cósmico’ atua como uma constante cosmológica. Isto indica a possibilidade de encontrar um buraco negro tridimensional na brana mesmo sem introduzirmos, a priori, uma constante cosmológica na teoria ou campos de matéria.

Usando Eqs. (5.21) e (5.25) temos

$$\frac{A'(0^+)}{A_0} = \frac{\kappa_{(4)}^2}{4\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{r}. \quad (5.27)$$

Usando esta solução em (5.16), para $z = 0$, encontramos

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\kappa_{(4)}^2}{4\kappa_{(3)}^2} \frac{\dot{A}_0}{r} \right]^2 + \frac{\dot{A}_0}{r} = 0, \quad (5.28)$$

ou seja

$$\dot{A}_0 = -\frac{32\kappa_{(3)}^4}{\kappa_{(4)}^4} r. \quad (5.29)$$

Esta equação pode ser facilmente integrada para obtermos

$$A_0(r) = c - \frac{r^2}{2r_0^2}, \quad (5.30)$$

onde $r_0^2 = \frac{\kappa_{(4)}^4}{32\kappa_{(3)}^4}$ é conhecido como ‘crossover’ e c é uma constante de integração. Isto nos dá uma solução *exata* de buraco negro tridimensional em uma 2-brana que pode ser expressa na forma usual

$$ds_{(3)}^2 = - \left(c - \frac{r^2}{2r_0^2} \right) dt^2 + \left(c - \frac{r^2}{2r_0^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (5.31)$$

Para $c = 1$, temos um espaço-tempo de Sitter, enquanto que para $c = 1 - 8G_3M$ temos uma solução buraco negro de Sitter-Schwarzschild (*SdS3*) tridimensional, com uma singularidade cônica associada a uma massa associada M [65]. Também definimos $k_{(3)}^2 \equiv 8\pi G_3$. Partindo do princípio de que a nossa métrica (5.10) passe a descrever um espaço plano de quatro dimensões com duas coordenadas tipo tempo t e z fornece uma solução *AdS3* resultado de uma troca de sinal na Eq. (5.16)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A'}{A} \right)^2 + \frac{1}{r} \dot{A} = 0. \quad (5.32)$$

Escolhemos $c = 1$ neste caso específico. Esta métrica é do mesmo tipo do modelo BTZ tratado inicialmente em Refs. [21, 55] com uma importante exceção. No nosso modelo não é

necessário uma constante cosmológica *priori*. Em vez disso, a curvatura induzida na 2-brana gera a um fluido ‘cósmico’ que desempenha o papel de uma ‘constante cosmológica’. Note que para $\kappa_{(4)}^2 \gg \kappa_{(3)}^2$ o caráter quadridimensional da gravidade domina, tal que r_0 é muito grande e então a solução (5.30) se aproxima de uma solução de espaço plano. No entanto, em uma gravidade em quatro dimensões esta não é a única solução de vácuo. Também existe a solução de Schwarzschild, cujo comportamento assintótico é $1/r$. Assim para $r \simeq r_0$ com r_0 grande, a solução (5.30) pode ser dada aproximadamente por $A_0 \simeq -\frac{1}{r} + 1$ para estar de acordo com a gravidade quadridimensional no regime de grandes distâncias. Voltaremos a esse ponto em breve no contexto da nova gravidade massiva (NGM) [14].

5.1.2 Soluções de buracos negros com nova gravidade massiva induzida na brana

Nesta seção iremos abordar a introdução de um termo induzido na 2-brana como sendo do tipo estudado em *nova gravidade massiva* (NGM), e dado seguinte ação [14]

$$S_{(3)} = \frac{1}{2\kappa_{(3)}^2} \int d^3x \sqrt{|q|} \left(R^{(3)} + \frac{1}{m^2} K \right), \quad (5.33)$$

where m^2 is the mass of the three-dimensional gravity and

$$K = R_{\mu\nu}^{(3)} R^{(3)\mu\nu} - \frac{3}{8} R^{(3)2}. \quad (5.34)$$

On the 2-brane podemos escrever

$$G_{ab} + \frac{1}{2m^2} K_{ab} = \kappa_{(3)}^2 U_{ab}, \quad (5.35)$$

onde $U_a^b = \delta(z) \text{diag} (-\rho_{curv}, p_{curv}, p_{curv}, 0)$.

Usando novamente a métrica do espaço-tempo de quatro dimensões (5.10), para obtermos a métrica tridimensional induzido em $z = 0$, temos

$$\begin{aligned} \rho_{curv} = -U_t^t = \frac{1}{\kappa_{(3)}^2} & \left[\frac{1}{2r} \frac{dA_0}{dr} - \frac{1}{8m^2} \frac{dA_0}{dr} \frac{d^3 A_0}{dr^3} - \frac{1}{4m^2} A_0 \frac{d^4 A_0}{dr^4} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4m^2} \frac{A_0}{r} \frac{d^3 A_0}{dr^3} - \frac{1}{8m^2} \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{1}{16m^2} \left(\frac{d^2 A_0}{dr^2} \right)^2 \right], \quad (5.36) \end{aligned}$$

e usando (5.21), i.e.,

$$\frac{A'(0^+)}{A_0} = -\frac{\kappa_{(4)}^2}{2} \rho_{curv}, \quad (5.37)$$

encontramos a importante relação

$$\begin{aligned} \frac{A'(0^+)}{A_0} = & -\frac{\kappa_{(4)}^2}{4\kappa_{(3)}^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} - \frac{1}{4m^2} \frac{dA_0}{dr} \frac{d^3 A_0}{dr^3} - \frac{1}{2m^2} A_0 \frac{d^4 A_0}{dr^4} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2m^2} \frac{A_0}{r} \frac{d^3 A_0}{dr^3} - \frac{1}{4m^2} \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{1}{8m^2} \left(\frac{d^2 A_0}{dr^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Podemos agora utilizar a equação (5.16) com a condição $z = 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{A'(0^+)}{A_0} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} = 0, \quad (5.39)$$

e obter

$$\begin{aligned} r_0^2 \left[\frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} - \frac{1}{2m^2} \left(\frac{1}{2} \frac{dA_0}{dr} + \frac{A_0}{r} \right) \frac{d^3 A_0}{dr^3} - \frac{1}{2m^2} A_0 \frac{d^4 A_0}{dr^4} \right. \\ \left. - \frac{1}{4m^2} \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} \frac{d^2 A_0}{dr^2} + \frac{1}{8m^2} \left(\frac{d^2 A_0}{dr^2} \right)^2 \right]^2 + \frac{1}{r} \frac{dA_0}{dr} = 0, \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde $r_0^2 = \frac{\kappa_{(4)}^4}{32\kappa_{(3)}^4}$ como visto anteriormente.

Para encontrarmos uma solução para esta equação vamos assumir o seguinte *Ansatz*

$$A_0(r) = \frac{a}{r^n} + br^2 + c. \quad (5.41)$$

Assim, encontramos uma classe de soluções *exatas* não-triviais para $n = 0$, assumindo $r_{0-}^2 = 8/\alpha^2(\alpha^2 + 4)^2 m^2$ e $r_{0+}^2 = 8/(\alpha^2 + 8)(\alpha^2 + 4)^2 m^2$, e usando Eq. (5.32) no lugar de Eq. (5.39), temos (c é uma constante arbitrária)

$$A_0^{(\alpha)}(r) = c \pm \frac{8}{(4 + \alpha^2)^2} \frac{r^2}{r_0^2}. \quad (5.42)$$

Lembre-se que para o caso do sinal de mais e $c < 0$ corresponde à solução do tipo BTZ [21]. Observe que o resultado acima sugere a existência de vários tipos de buracos negros tridimensionais, ‘ α -dependentes’, com horizontes não coincidentes $r_\alpha = (4 + \alpha^2)r_0/2\sqrt{2}$, onde $\alpha > 0$.

Por outro lado, também se podem explorar soluções aproximadas do tipo (5.41), com $n \neq 0$ para um regime *próximo do horizonte*, por exemplo, em torno de $r \simeq r_\alpha \simeq r_0$ para grandes valores de r_0 . Assim, podemos escrever

$$A_0^{(\alpha)}(r) \simeq \frac{a}{r_\alpha^n} + c, \quad (5.43)$$

que se aproxima da constante c para $a/r_\alpha^n \ll 1$. Para valores finitos de a isto é verdadeiro para grávitons sem massa ($m \rightarrow 0$) porque $r \simeq r_\alpha \simeq r_0 \sim 1/m \rightarrow \infty$. Na teoria usual quadridimensional o gráviton possui massa nula e o potencial newtoniano cai com $1/r$. Isso nos permite fixar $n = 1$, $a = -GM$ e $c = 1$ para encontrar um regime tipo Schwarzschild para buracos negros com grandes horizontes de evento $r_\alpha \simeq r_0$

$$A_0^{(2)}(r) \simeq 1 - \frac{GM}{r}, \quad (5.44)$$

com $r \simeq r_0$. Lembrando que $r_0^2 = \frac{\kappa_{(4)}^4}{32\kappa_{(3)}^4}$.

Assim, podemos ver que neste regime o acoplamento gravitacional quadridimensional $\kappa_{(4)}^2 \equiv 8\pi G$ domina sobre a parte da lagrangeana controlada pelo acoplamento gravitacional tridimensional $\kappa_{(3)}$. Isto acontece porque estamos sondando distâncias maiores que a escala de cruzamento, de modo que não é surpreendente que as soluções tridimensionais se aproximem de uma solução de quatro dimensões. De fato, como podemos ver em [15], soluções BTZ ou soluções tridimensionais do tipo de Sitter-Schwarzschild podem fluir para soluções de dimensões maiores ao sondar distâncias suficientes grandes ao longo do 2-brana

5.2 Gravidade Massiva de Alta Ordem Induzida em Uma 2-Bana Imersa no Espaço de Minkowski

Nesta seção estendemos a nossa analogia, estabelecida anteriormente, entre o cenário DGP em cinco dimensões [150] e em quatro dimensões. Assim, estudamos a localização da gravidade em uma 2-brana imersa em um espaço de Minkowski quadridimensional, com um termo de gravidade induzida do tipo nova gravidade massiva [14]. Estudamos a estrutura dos propagadores com um termo de massa generalizado [157] e encontramos um modelo consistente de gravidade massiva em 2+1 dimensões, com uma partícula massiva e unitária

de spin-2 e duas partículas sem massa: uma com spin-0 e outra com spin-1. A condição para a ausência de táquions é satisfeita para ambos os sinais, ‘errado’ e ‘certo’, do termo de Einstein-Hilbert na 2-brana. Também obtivemos o termo de massa de Pauli-Fierz adicionado ao de nova gravidade massiva em três dimensões e recuperamos o modelo de DGP em 2+1 dimensões.

A ação completa pode ser separado em duas partes (sem campos de matéria)

$$S = S_{(4)} + S_{(3)}, \quad (5.45)$$

onde

$$S_{(4)} = \frac{M_4^2}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} R^{(4)}. \quad (5.46)$$

e

$$S_{(3)} = \frac{M_3}{2} \int d^3x \sqrt{|q|} \left(\eta R^{(3)} + \gamma (R^{(3)})^2 + \delta R^{(3)\mu\nu} R^{(3)}_{\mu\nu} \right). \quad (5.47)$$

Este é um modelo de gravidade com derivadas de ordem superior [9] em um espaço-tempo de três dimensões. O elemento de linha quadridimensional é dado por $ds_4^2 = g_{ab}(x, w) dx^a dx^b$ ($a, b = 0, 1, 2, 4$) e $ds_3^2 = q_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2$) é a métrica induzida na 2-brane em $x^4 = w = 0$ with $q_{\mu\nu}(x) \equiv g_{\mu\nu}(x, w=0)$.

A fim de encontrarmos uma ação efetiva para a gravidade e o seu conteúdo de partículas vamos adotar a mesma metodologia usada em [152] para o caso da teoria DGP tradicional (veja [153] para uma recente revisão).

É conveniente escrever a ação em termos das variáveis ADM [154], $N = \sqrt{g^{44}}$ (lapse), $N_\mu = g_{4\mu}$ (shift) e da métrica em 4-dimensões $q_{\mu\nu}$ sobre a brana que está localizada em $w = x^4$. A parte quadridimensional da ação é escrita como

$$S_{(4)} = \frac{M_4^2}{2} \int d^4x N \sqrt{|q|} [R^{(3)} + (K^{(3)})^2 - K^{(3)\mu\nu} K_{(3)\mu\nu}]. \quad (5.48)$$

A curvatura extrínica em 3-dimensões é dada por

$$K_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{1}{2N} (q'_{\mu\nu} - \nabla_\mu N_\nu - \nabla_\nu N_\mu), \quad (5.49)$$

onde a linha denota derivada em relação a w .

O conteúdo de partícula desta teoria é obtido perturbando a ação (5.48) em torno do espaço plano. Após integração no bulk obtemos uma ação efetiva em 3-dimensões. Perturbando a

métrica em 4–dimensões, temos

$$g_{ab} = \eta_{ab} + H_{ab}, \quad (5.50)$$

e usando as variáveis tipo ADM e suas expansões em torno do espaço plano, temos

$$q_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad N_\mu = n_\mu, \quad N = 1 + n. \quad (5.51)$$

Além disso, temos as seguintes relações em ordem linear

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \quad H_{\mu 4} = h_\mu, \quad H_{44} = 2n. \quad (5.52)$$

Para se obter uma teoria efetiva em 3–dimensões devemos expandir (5.48) até segunda ordem em termos de $h_{\mu\nu}$, n_μ , e n . Em seguida resolvemos as equações de movimento em 4–dimensões, sujeito a valores arbitrário na brana e tendendo a zero no infinito. Por fim, reinserimos estas soluções de volta na brana.

Em primeiro lugar, as equações de movimento no bulk são as equações de Einstein vácuo, em ordem linear

$$[R_{ab}^{(4)}]_{lin} = -\frac{1}{2}\square^{(4)}H_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a\partial_b H + \frac{1}{2}\partial^c\partial_a H_{bc} + \frac{1}{2}\partial^c\partial_b H_{ac} = 0. \quad (5.53)$$

No gauge de de Donder,

$$\partial^b H_{ab} - \frac{1}{2}\partial_a H = 0, \quad (5.54)$$

podemos escrever a equação (5.53) como sendo

$$\square^{(4)}H_{ab} = 0. \quad (5.55)$$

Em termos das variáveis tipo ADM, Eq. (5.55) nos leva a três equações de onda no bulk para $h_{\mu\nu}$, n_μ and n ,

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_w^2 h_{\mu\nu} = 0, \quad (5.56)$$

$$\square n_\mu + \partial_w^2 n_\mu = 0, \quad (5.57)$$

$$\square n + \partial_w^2 n = 0, \quad (5.58)$$

onde \square é o Laplaciano em 3–dimensões. As soluções para $h_{\mu\nu}(x, w)$, $n_\mu(x, w)$ e $n(x, w)$, em termos dos valores na fronteira $h_{\mu\nu}(x)$, $n_\mu(x)$ e $n(x)$:

$$h_{\mu\nu}(x, w) = e^{-w\Delta}h_{\mu\nu}(x), \quad (5.59)$$

$$n_\mu(x, w) = e^{-w\Delta}n_\mu(x), \quad (5.60)$$

$$n(x, w) = e^{-w\Delta}n(x). \quad (5.61)$$

Aqui Δ é o operador formal raiz quadrada do Laplaciano 3–dimensões, $\Delta = \sqrt{\square}$.

Considerando as componentes $a = \mu$ e $a = 5$ na condição de gauge (5.54) temos

$$\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h + \partial_w n_\mu - \partial_\mu n = 0, \quad (5.62)$$

$$\partial^\mu n_\mu - \frac{1}{2}\partial_w h + \partial_w n = 0. \quad (5.63)$$

Os campos na fronteira satisfazem as seguintes equações (at $w = 0$):

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h - \Delta n_\mu - \partial_\mu n = 0, \quad (5.64)$$

$$\partial^\mu n_\mu + \frac{1}{2}\Delta h - \Delta n = 0. \quad (5.65)$$

5.2.1 Ação efetiva na fronteira

Vamos agora expandir, até segunda ordem, a parte quadridimensional da ação em termos de $h_{\mu\nu}$, n_μ , e n e inserir na nossa solução. Lembrando que a ação dada por (5.48) se escreve como

$$S_{(4)} = \frac{M_4^2}{2} \int d^4x N \sqrt{|q|} [R^{(3)} + (K^{(3)})^2 - K^{(3)\mu\nu} K_{(3)\mu\nu}]. \quad (5.66)$$

Precisamos expandir am primeira ordem a curvatura extrínica 3–dimensões, ou seja

$$K_{\mu\nu}^{(3)} = \frac{1}{2}(\partial_w h_{\mu\nu} - \partial_\mu n_\nu - \partial_\nu n_\mu). \quad (5.67)$$

Expandindo (5.66), usando (5.67) e integrando por partes em 4–dimensões temos

$$S_{(4)} = \frac{M_4^2}{2} \int d^3x dw \left[n \partial_\mu \partial_\nu h^{\mu\nu} - n \square h + \frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\nu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial_\nu h^{\mu\nu} - \partial_w h \partial_\mu n^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu n^\mu)^2 \right]$$

$$+\partial_w h_{\mu\nu} \partial^\mu n^\nu + \frac{1}{2} n_\mu \square n^\mu \Big] + \frac{M_4^2}{2} \int d^3x \left[-\frac{1}{4} h \partial_w h + \frac{1}{4} h_{\mu\nu} \partial_w h^{\mu\nu} \right]. \quad (5.68)$$

Vamos inserir o seguinte termo na ação

$$S_{gf} = -\frac{M_4^2}{2} \int d^4x \left(\partial^a H_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a H \right). \quad (5.69)$$

Este termo não contribui para a ação porque as equações de movimento em 4-dimensões resolvem a condição de de Donder (5.54). Assim, estamos livres para adicioná-lo. Podemos ainda escrevê-lo em termos das variáveis 3-dimensões

$$S_{gf} = \frac{M_4^2}{2} \int d^3x dw \left[-\frac{1}{2} \left(\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu h + \partial_w n_\mu - \partial_\mu n \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\partial_\mu n^\mu - \frac{1}{2} \partial_w h + \partial_w n \right)^2 \right]. \quad (5.70)$$

Colocando isso no nosso termo em 4-dimensões, a ação completa pode se reduzir a um termo na superfície da brana no limite em que $w = 0$, ou seja

$$S_{(4)} + S_{gf} = \frac{M_4^2}{2} \int d^3x \left[-\frac{1}{2} h_{\mu\nu} \Delta h^{\mu\nu} + \frac{1}{4} h \Delta h - n \Delta n - n_\mu \Delta n^\mu + h \Delta h + n^\mu (-2\partial_\mu n - \partial_\mu h + 2\partial^\nu h_{\mu\nu}) \right]. \quad (5.71)$$

Aqui n^μ faz o papel de um vetor de Stückelberg [156] enquanto n faz o papel de um campo de gauge auxiliar. Fixando o gauge $n^\mu = 0$ podemos eliminar n usando (5.65)

$$\Delta h = 2\Delta n, \quad h = 2n. \quad (5.72)$$

A ação resultante é similar à de Fierz-Pauli [155] contendo um operador dependente da massa (*termo ressonante*) $m\Delta$ [157]

$$S_{(4)} + S_{gf} = \frac{M_3}{2} \int d^3x \left[-\frac{1}{2} h_{\mu\nu} (m\Delta) h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} h (m\Delta) h \right], \quad (5.73)$$

onde

$$m = \frac{M_4^2}{M_3}, \quad (5.74)$$

faz o papel da escala DGP.

5.2.2 A estrutura do propagador para a ação completa sobre a 2-brana

Para obtermos uma ação completa na 2-brana, vamos introduzir um termo de gravidade induzida com derivadas de ordem superior, no espaço-tempo tridimensional, dada em (5.47),

$$S_{(3)} = \frac{M_3}{2} \int d^3x \sqrt{|q|} \left(\eta R^{(3)} + \gamma (R^{(3)})^2 + \delta R^{(3)\mu\nu} R^{(3)}_{\mu\nu} \right). \quad (5.75)$$

Da mesma forma que foi feito para quatro dimensões, vamos expandir a ação tridimensional em torno de um espaço plano de Minkowski, ou seja, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, e em seguida tomar apenas as contribuições até segunda ordem. Desta forma podemos escrever a ação em termos dos operadores de Barnes-Rivers $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-s)}$.

No espaço de momentos, o conjunto de operadores tridimensionais são [158]

$$\mathcal{L}_{\text{EH}} = \sqrt{g} \left(\eta \frac{M_3}{2} R^{(3)} \right) = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \eta \frac{M_3}{4} k^2 [P^{(2)} - P^{(0-s)}]^{\mu\nu, \alpha\beta} \right\} h_{\alpha\beta}, \quad (5.76)$$

$$\mathcal{L}_\gamma = \sqrt{g} \left(\frac{\alpha}{2} R^{(3)2} \right) = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ 2\gamma M_3 k^2 [P^{(0-s)}]^{\mu\nu, \alpha\beta} \right\} h_{\alpha\beta}, \quad (5.77)$$

$$\mathcal{L}_\delta = \sqrt{g} \left(\frac{\beta}{2} R^{(3)\mu\nu} R^{(3)}_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ \frac{\delta M_3}{4} k^4 [P^{(2)} + 3P^{(0-s)}]^{\mu\nu, \alpha\beta} \right\} h_{\alpha\beta}. \quad (5.78)$$

Agora, temos que expressar a lagrangeana (5.73) em termos dos operadores de projecção de spin. Primeiro vamos reescrever a lagrangeana na forma

$$\mathcal{L}_{(4)} + \mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2} h_{\mu\nu} [M_3(m\Delta)(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta})] h_{\alpha\beta}, \quad (5.79)$$

tal que

$$\mathcal{L}_{(4)} + \mathcal{L}_{gf} = \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \left\{ M_3(m\Delta) \left[-P^{(2)} - P^{(1)} + P^{(0-s)} + \sqrt{2}P^{(0-sw)} + \sqrt{2}P^{(0-ws)} \right]^{\mu\nu, \alpha\beta} \right\} \frac{1}{2} h_{\alpha\beta}. \quad (5.80)$$

Os operadores de projecção rotação em três dimensões do espaço-tempo $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(0-s)}$,

$P^{(0-w)}$, $P^{(0-sw)}$, and $P^{(0-ws)}$ formar um conjunto completo e são definidos como

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(2)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\theta_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\kappa} - \theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}), \quad (5.81)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(1)} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\kappa}\omega_{\nu\lambda} + \theta_{\mu\lambda}\omega_{\nu\kappa} + \theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}), \quad (5.82)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-s)} = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad (5.83)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-sw)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\kappa\lambda}, \quad P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-ws)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\kappa\lambda}, \quad (5.84)$$

Neste contexto, os operadores transversal e longitudinal ($\theta_{\mu\nu}$ and $\omega_{\mu\nu}$) são definidos como

$$\theta_{\mu\kappa} = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad \omega_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad (5.85)$$

e satisfazem a

$$\theta_{\mu\rho}\theta^\rho{}_\nu = \theta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = \omega_{\mu\nu} \quad \theta_{\mu\rho}\omega^\rho{}_\nu = 0. \quad (5.86)$$

Para escrever as lagrangeanas (5.76), (5.77) and (5.78) em termos de operadores de projecção podemos usar as seguintes relações

$$[P^{(2)} + P^{(1)} + P^{(0-s)} + P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{2}(\eta_{\mu\kappa}\eta_{\nu\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\kappa}) \equiv I_{\mu\nu,\kappa\lambda}, \quad (5.87)$$

$$\left\{ 2P^{(0-s)} + P^{(0-w)} + \sqrt{2}[P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] \right\}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \eta_{\mu\nu}\eta_{\kappa\lambda}, \quad (5.88)$$

$$[2P^{(1)} + 4P^{(0-w)}]_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\kappa}k_\nu k_\lambda + \eta_{\mu\lambda}k_\nu k_\kappa + \eta_{\nu\lambda}k_\mu k_\kappa + \eta_{\nu\kappa}k_\mu k_\lambda), \quad (5.89)$$

$$\sqrt{2} [P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}] + 2P^{(0-w)}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \frac{1}{k^2}(\eta_{\mu\nu}k_\kappa k_\lambda + \eta_{\kappa\lambda}k_\mu k_\nu), \quad (5.90)$$

$$P_{\mu\nu,\kappa\lambda}^{(0-w)} = \frac{1}{k^2}(k_\mu k_\nu k_\kappa k_\lambda). \quad (5.91)$$

A lagrangeana gravitacional total $\mathcal{L}_{Grav} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_\gamma + \mathcal{L}_\delta + \mathcal{L}_{(4)} + \mathcal{L}_{gf}$ fica sendo

$$\mathcal{L}_{Grav} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu}O^{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta}, \quad (5.92)$$

No espaço dos momentos, temos

$$\begin{aligned} O = & \left[\delta \frac{M_3}{4} k^4 + \eta \frac{M_3}{4} k^2 - M_3 m k \right] P^{(2)} - M_3 m k P^{(1)} \\ & + \left[\left(\frac{8\gamma + 3\delta}{4} \right) M_3 k^4 - \eta \frac{M_3}{4} k^2 + M_3 m k \right] P^{(0-s)} \\ & + \sqrt{2} M_3 m k (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Escrevendo O na forma

$$O = x_2 P^{(2)} + x_1 P^{(1)} + x_s P^{(0-s)} + x_w P^{(0-w)} + x_{sw} P^{(0-sw)} + x_{ws} P^{(0-ws)}, \quad (5.94)$$

podemos encontrar o propagador

$$O^{-1} = \frac{1}{x_2} P^{(2)} + \frac{1}{x_1} P^{(1)} + \frac{1}{x_s x_w - x_{sw} x_{ws}} (x_w P^{(0-s)} + x_s P^{(0-w)} - x_{sw} P^{(0-sw)} - x_{ws} P^{(0-ws)}), \quad (5.95)$$

que pode ser escrito explicitamente em termos dos momenta como

$$\begin{aligned} O^{-1} = & \frac{1}{\delta \frac{M_3}{4} k^4 + \eta \frac{M_3}{4} k^2 - M_3 m k} P^{(2)} - \frac{1}{M_3 m k} P^{(1)} \\ & + \frac{(8\gamma + 3\delta) M_3 k^4 - \eta M_3 k^2 - 4M_3 m k}{8M_3^2 m^2 k^2} P^{(0-w)} \\ & + \frac{4\sqrt{2} M_3 m k (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})}{8M_3^2 m^2 k^2}. \end{aligned} \quad (5.96)$$

A estrutura tensorial, bem como o comportamento do potencial gravitacional, para este propagador com $\gamma = \delta = 0$ (Einstein-Hilbert) foi investigado em [151].

5.2.3 Propagador do gráviton com um termo de massa generalizado

Substituindo o termo de massa por uma função arbitrária do Laplaciano, o termo de ressonância de gráviton massivo pode ser generalizado por [159], [160], [161]

$$m^2 \rightarrow m^2(\square). \quad (5.97)$$

Agora o propagador (5.96) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} O^{-1} = & \frac{1}{\delta \frac{M_3}{4} k^4 + \eta \frac{M_3}{4} k^2 - M_3 m^2(\square)} P^{(2)} - \frac{2}{2M_3 m^2(\square)} P^{(1)} \\ & + \frac{(8\gamma + 3\delta) M_3 k^4 - \eta M_3 k^2 - 4M_3 m^2(\square)}{8M_3^2 (m^2(\square))^2} P^{(0-w)} \\ & + \frac{4\sqrt{2} M_3 m^2(\square) (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)})}{8M_3^2 (m^2(\square))^2}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Não é difícil ver a partir da estrutura do propagador que temos modificações da dinâmica newtoniana na brana a grandes distâncias. Neste regime o termo de massa tem uma expansão de Taylor dada por

$$m^2(\square) = L^{2(\alpha-1)}\square^\alpha, \quad (5.99)$$

com L sendo uma escala de comprimento e α uma constante. A fim de modificar a dinâmica newtoniana em grandes distâncias, o termo de massa deve dominar sobre os termos cinéticos, por isso devemos ter $\alpha < 1$. Por outro lado, existe a restrição de que a função espectral deve ser definida positiva, de modo que não há fantasmas. Por isso devemos ter o limite inferior $\alpha \geq 0$ [160]. A teoria DGP padrão é retomada quando $\alpha = 1/2$.

Fazendo $\alpha = 0$ ($m^2(\square) = 1/L^2$), $\eta = -1$, $\delta = 1/M^2$ e $\gamma = -3/8M^2$ temos o caso particular

$$\begin{aligned} O^{-1} = & \frac{4}{M_3} \frac{1}{\left(\frac{1}{M^2}k^4 - k^2 - \frac{4}{L^2}\right)} P^{(2)} - \frac{L^2}{M_3} P^{(1)} \\ & - \frac{L^4}{8M_3} \left(k^2 + \frac{4}{L^2}\right) P^{(0-w)} + \frac{\sqrt{2}L^2}{2M_3} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \end{aligned} \quad (5.100)$$

Este é meramente o termo de massa de Pauli-Fierz adicionado ao de *nova gravidade massiva* em três dimensões [147]. Podemos ver por (5.100) que existem pólos massivos no setor de spin-2. Um é o modo unitário de massa positiva e norma positiva. O outro é um fantasma de massa taquiónico e norma negativa. Assim, a unitariedade e a causalidade são violados [162].

Estamos, agora, interessados em analisar um caso não explorado na literatura. Trata-se do regime em que $\alpha \rightarrow 1$. Assim, o termo massa generalizada é agora dado por

$$m^2(\square) \approx \square = k^2. \quad (5.101)$$

O propagador neste caso é escrito como

$$O^{-1} = \frac{4M^2}{M_3} \frac{1}{[k^2 - (4 - \eta)M^2]} P^{(2)} - \frac{1}{M_3 k^2} P^{(1)} - \frac{(4 - \eta)}{M_3 k^2} P^{(0-w)} + \frac{\sqrt{2}}{2M_3 k^2} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \quad (5.102)$$

Aqui $m_2^2 = (4 - \eta)M^2$ é a massa da partícula de spin-2. A condição para a ausência de táquions é satisfeita tanto para o sinal ‘certo’ quanto para o sinal ‘errado’ do parâmetro η . Como é bem conhecido, não existem fantasmas em três dimensões para propagadores na forma

$o1/k^2(k^2 - m^2)$ [163]. Portanto, temos um modelo consistente para gravidade tridimensional com derivadas superiores que contém uma partícula de spin-2, unitária, além de outras duas partículas sem massa: uma com spin-0 e outra com spin-1.

$$O^{-1} = \frac{4}{(4 - \eta)M_3} \frac{m_2^2}{(k^2 - m_2^2)k^2} P^{(2)} - \frac{1}{M_3 k^2} P^{(1)} - \frac{(4 - \eta)}{M_3 k^2} P^{(0-w)} + \frac{\sqrt{2}}{2M_3 k^2} (P^{(0-sw)} + P^{(0-ws)}). \quad (5.103)$$

5.3 Estrutura de Branas com Campos Escalares em Uma Teoria com Duas Métricas

Nesta seção Investigaremos a presença de soluções de mundo-brana em uma teoria com duas métricas (bimétrica), acoplando a gravidade ao campo escalar que é responsável pela conexão entre as duas métricas (biescalar). Além disso, consideramos um modelo de campo escalar com uma dinâmica fora do padrão (termo cinético linear) e mostramos que mesmo assim é possível gerar soluções de neste novo cenário. Em particular, não encontramos instabilidades gravitacionais para as soluções e alocalização da gravidade foi constatada.

5.3.1 Bimetrica e a dinâmica não convencional para campos escalares

O cenário alternativo de mundo-brana que iremos tratar aqui é descrito por uma teoria da gravidade em cinco dimensões acoplada a um campo escalar e a outros campos de matéria dado pela ação

$$S = S_g[g] + S_\phi[\phi, \partial_a \phi, g] + \hat{S}_M[\psi, \partial_a \psi, \hat{g}]. \quad (5.104)$$

A parte gravitacional desta ação, S_g , é a ação de Einstein-Hilbert, construída a partir do referencial de ‘Einstein’ (g_{ab}) de forma padrão como

$$S_g = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{|g|} R. \quad (5.105)$$

A ação do campo escalar é dada por

$$S_\phi = \int d^5x \sqrt{g} \left[\eta \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \psi \partial_b \psi - V(\phi) \right], \quad (5.106)$$

sendo η um parâmetro real. $S_M[\psi, \hat{g}]$ é a ação dos campos de matéria, onde ψ representa todos os campos de matéria, com \hat{g} sendo a métrica em relação a qual os campos interagem. Sendo mais explícito, a dinâmica será conduzida por uma constante cosmológica no bulk no referencial da matéria [167]

$$S_M[\psi, \hat{g}] = \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|} \tilde{\Lambda}_5. \quad (5.107)$$

Assim, a ação completa pode ser escrita como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{|g|} R + \int d^5x \sqrt{|g|} \left[\eta \frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi - V(\phi) \right] + \int d^5x \sqrt{|\hat{g}|} \tilde{\Lambda}_5.$$

Para $\eta = 1$ ($\eta = -1$) e $\tilde{\Lambda}_5 = 0$ temos um campo escalar padrão (fantasma) acoplado à gravidade de uma forma padrão. Para $\eta = 0$ e $\tilde{\Lambda}_5 \neq 0$ temos um modelo do tipo *Cuscuton* em uma teoria com bimétrica.

O escalar de Ricci é determinado a partir do referencial de Einstein ($g_{\mu\nu}$), enquanto os campos de matéria estão relacionados à ‘métrica da matéria’. Aqui será adotado $4\pi G = 1$. g_{ab} e \hat{g}_{ab} descreve o espaço-tempo pentadimensional, com $a, b = 0, 1, 2, 3, 4$ e $x_4 \equiv y$ é uma dimensão espacial extra.

A transformação que relaciona as duas métricas podem ser governada de uma forma dinâmica. Em um caso simples podemos usar o *campo bi-escalar* ϕ para escrever a relação

$$\hat{g}_{ab} = g_{ab} + \epsilon B^2 \partial_a \phi \partial_b \phi + C u_a u_b. \quad (5.108)$$

Aqui $u^a = (0, 0, 0, 0, 1)$ é um vetor normal à superfície da brana. Como ϕ tem dimensão de $M^{3/2}$, B e C são escolhidos para terem dimensão $M^{-5/2}$, com o parâmetro ϵ sendo um número real adimensional. O elemento de linha que relaciona g_{ab} e \hat{g}_{ab} será dado por

$$ds^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2 \quad (5.109)$$

e

$$d\hat{s}^2 = e^{2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - [(1 - C) - \epsilon B^2 \phi'^2] dy^2. \quad (5.110)$$

Vamos supor que o campo escalar só depende da coordena extra y , com linha denotando derivada em relação a y . e^{2A} é o fator de empenamento, e $A = A(y)$ uma função real da dimensão extra que origina a deformação da geometria. Por outro lado, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$ descreve o espaço-tempo plano de quatro dimensões, onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

A geometria do espaço-tempo de cinco dimensões é descrita por $A(y)$, e é função apenas de y . Podemos expressar a métrica completa em termos de g_{ab} . Usando (5.109) e (5.110) podemos escrever (5.108) como

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{|g|} R + \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{\eta}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right] + \int d^5x \sqrt{|g|} \sqrt{(1-C) - \epsilon B^2 \phi'^2} \tilde{\Lambda}_5. \quad (5.111)$$

Fazendo $C = 0$, $\epsilon = -1$ e $B = 1$ o terceiro termo se torna uma ação tipo DBI com um potencial constante $\tilde{\Lambda}_5$. Para $C = -1$, $\epsilon = -1$ and $B = 1$ temos

$$S = -\frac{1}{4} \int d^5x \sqrt{|g|} R + \int d^5x \sqrt{|g|} \left[-\frac{\eta}{2} \phi'^2 - V(\phi) \right] + \int d^5x \sqrt{|g|} \tilde{\Lambda}_5 B \phi'. \quad (5.112)$$

Aqui $L_\phi = -\frac{1}{2} \eta \phi'^2 + \tilde{\Lambda}_5 B \phi' - V(\phi)$ é a Lagrangian efetiva de um campo escalar contendo um termo cinético não padrão. A lagrangeana que descreve o campo escalar pode ser escrita sob a forma $L_\phi = F(X, \phi) - V(\phi)$, with $F(X) = \frac{1}{2} X + \tilde{\Lambda}_5 \sqrt{|X|}$ and $X = g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi$. Teoria semelhante com campo escalar dependente do tempo do dependente foi explorado em um modelo cosmológico com *Cuscuton* em [165, 166]. Outros modelos mais gerais aparecem em cenários de mundo-brana com campos escalares com termos cinéticos atípico acoplados à gravidade padrão [164].

5.3.2 Equações de campo e o formalismo de primeira ordem

Variando (5.112) com respeito a $g_{\mu\nu}$ temos (making $\eta = 1$)

$$A'^2 = \frac{1}{6} \phi'^2 - \frac{1}{3} V, \quad (5.113)$$

$$A'' = -\frac{2}{3} \phi'^2 + \frac{2}{3} \tilde{\Lambda}_5 B \phi'. \quad (5.114)$$

O caráter não linear das equações de Einstein geralmente resulta em um complicado sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas que são difíceis de resolver. Para encontrar soluções analíticas pode-se considerar situações específicas em que equações diferenciais de primeira ordem aparecem descrevendo campos escalares e funções métricas, com potenciais dados de forma específica [164], [168].

Para chegar ao formalismo de primeira ordem, introduzimos a função, $W = W(\phi)$, que pode ser usada para expressar o fator de empenamento como uma função do campo escalar. Fazemos isso escrevendo a equação de primeira ordem

$$A' = -\frac{1}{3}W. \quad (5.115)$$

Usamos essa equação e (5.114) para chegar a

$$\phi' = \frac{1}{2}W_\phi + \tilde{\Lambda}_5 B, \quad (5.116)$$

com o potencial (5.113) dado pela forma específica

$$V(\phi) = -\frac{1}{3}W^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}W_\phi + \tilde{\Lambda}_5 B \right]^2. \quad (5.117)$$

As equações (5.115) e (5.116) são as equações diferenciais de primeira ordem que nos leva à construção de soluções explícitas, para o potencial dado por (5.117). A seguir ilustraremos este procedimento com dois exemplos distintos.

5.3.3 Solução com brana plana

O exemplo que vamos tratar aqui é o famoso modelo $\lambda\phi^4$ obtido com [168]

$$W(\phi) = 2ab \left(\phi - \frac{b^2}{3}\phi^3 \right). \quad (5.118)$$

Para este modelo o campo escalar é dado por

$$\phi(y) = \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} \tanh \left[ab^3 \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} y \right], \quad (5.119)$$

e o fator de empenamento fica

$$A(y) = \frac{1}{9} \left(\frac{2\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} - \frac{4}{b^2} \right) \ln \left[\cosh \left(ab^3 \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} y \right) \right] \quad (5.120)$$

$$- \frac{1}{9} \left(\frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} + \frac{1}{b^2} \right) \tanh^2 \left(ab^3 \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3}} y \right). \quad (5.121)$$

Vamos agora analisar o comportamento assintótico do potencial nos limites $y \rightarrow \pm\infty$. Aqui nós temos

$$V(\pm\infty) \equiv \Lambda_5 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\tilde{\Lambda}_5 B}{ab^3} \right) \left(\frac{4ab}{3} - \frac{2\tilde{\Lambda}_5 B}{3} \right)^2, \quad (5.122)$$

onde Λ_5 é a constante cosmológica efetiva em cinco dimensões. Note que para $\tilde{\Lambda}_5 = 2ab/B$ temos $\Lambda_5 = 0$, correspondendo ao vácuo de um espaço de Minkowski em 4-dimensões (M_5). Para $\tilde{\Lambda}_5 \neq 2ab/B$ ($1/b^2 + \tilde{\Lambda}_5 B/ab^3 > 0$) temos $\Lambda_5 < 0$, que corresponde a um vácuo AdS_5 .

5.3.4 Solução com dinâmica modificada pura

Nesta seção, vamos considerar o caso em que a teoria não contém o termo cinética convencional (fazendo $\eta = 0$ na Eq. (5.112)). Portanto, neste caso, as equações de campo são

$$4\tilde{\Lambda}_5 A'' = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}, \quad (5.123)$$

$$A'^2 = -\frac{\kappa_5^2}{6} V, \quad (5.124)$$

$$A'' = \frac{\kappa_5^2}{3} \tilde{\Lambda}_5 B \phi'. \quad (5.125)$$

As equações (5.124) e (5.125) nos conduzem naturalmente ao seguinte potencial

$$V(\phi) = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5^2 B^2 \phi^2, \quad (5.126)$$

e (5.123) é uma equação consistência. Este é o único potencial permitido neste caso. No entanto, apesar da sua simplicidade, podemos encontrar soluções distintas para o modelo. Vamos supor que há uma solução do tipo *kink* da forma

$$\phi(y) = b \tanh(ay). \quad (5.127)$$

Para este modelo, o fator de empenamento é

$$A(y) = -\frac{\kappa_5^2 B b \tilde{\Lambda}_5}{3a} \ln(\cosh(ay)). \quad (5.128)$$

Notamos que o potencial se aproxima dos valores negativos $\Lambda_5 = V(\pm\infty) = -\frac{2}{3} \kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5^2 B^2 b^2$ no limite assintótica $y \rightarrow \pm\infty$. Isto mostra que o bulk é assintoticamente AdS_5 .

Podemos usar os resultados acima para construir um limite de *brana fina* para esta solução, tomando o limite $a \rightarrow \infty$ e $b \rightarrow 0$, com o produto ab assumindo um valor fixo. De (5.127) podemos ver que de tal forma que no limite de brana fina obtém-se

$$\phi'(y) = ab\delta(y). \quad (5.129)$$

Podemos notar que a presença da função delta em (5.125) e a ausência de singularidade em (5.124) implica que $T_0^0 = -\kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5 B \phi' + V \rightarrow -\kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5 B ab \delta(y)$ sendo $T_5^5 = V = 0$ no limite $y \rightarrow 0$. Assim, a tensão efetiva na brane torna-se $\sigma = -\kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5 B ab$ e então descobrimos que a solução (5.128) se aproxima de

$$A(y) = -\frac{\kappa_5^2}{3} \tilde{\Lambda}_5^2 B b |y|. \quad (5.130)$$

5.3.5 Localização de gravidade

Vamos agora analisar as flutuações gravitacionais neste cenário. Par isso vamos perturbar a ‘métrica gravitacional’, usando

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (5.131)$$

A equação de onda para as flutuações, em um número arbitrário de dimensões ($d > 3$), é dada por [169]

$$\partial_a(\sqrt{|g|}g^{ab}\partial_b\phi) = 0. \quad (5.132)$$

Vamos considerar $\phi = h(y)\varphi(x^\mu)$ e $\nabla_4\varphi = m^2\varphi$ into (5.132), onde $\nabla_4\varphi$ é o laplaciano no espaço plano. Assim, a equação de onda para o gráviton em termos da coordenada extra y fica sendo

$$\frac{\partial_y(\sqrt{|g|}g^{yy}\partial_y h(y))}{\sqrt{|g|}} = m^2 |g^{00}| h(y). \quad (5.133)$$

Este é o nosso ponto de partida para investigar os modos gravitacionais (massivos ou não) sobre a brana. Usando as componentes da métrica (5.109) na equação (5.133) temos

$$\partial_z^2 h + 4\partial_z A \partial_z h = m^2 e^{-2A} h. \quad (5.134)$$

Considerando agora as mudanças de variáveis $h(y) = \psi(z)e^{-\frac{3A(z)}{2}}$ e $z(y) = \int e^{-A(y)} dy$ podemos escrever (5.134) como uma equação do tipo Schroedinger

$$-\partial_z^2 \psi(z) + U(z)\psi(z) = m^2 \psi(z), \quad (5.135)$$

com o pontencial $U(z)$ dado por

$$U(z) = \frac{3}{2}\partial_z^2 A(z) + \frac{9}{4}(\partial_z A(z))^2. \quad (5.136)$$

Esta equação pode ser fatorada como

$$\left[-\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A'(z)\right] \left[\frac{d}{dz} - \frac{3}{2}A'(z)\right] \psi(z) = m^2 \psi(z). \quad (5.137)$$

Então, não existem estados ligados para o gráviton com massa negativa, e o modo zero $\psi_0(z) = e^{3A(z)/2}$ é o estado fundamental do problema de mecânica quântica. Usando (5.128) e fazendo $a = \kappa_5^2 \tilde{\Lambda}_5 Bb/3$ obtemos

$$A(z) = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 z^2}} \right]. \quad (5.138)$$

Desta forma o potencial do tipo Schroedinger tem a forma explícita

$$U(z) = \frac{21a^4 z^2}{4(1 + a^2 z^2)^2} - \frac{3a^2}{2(1 + a^2 z^2)}. \quad (5.139)$$

O modo zero ($m = 0$), que governa a localização de gravidade quadridimensional na brana, é dado por [16]

$$\psi_0(z) = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{(1 + a^2 z^2)^{3/4}}. \quad (5.140)$$

Aqui, $\psi_0(z)$ foi normalizada através da condição $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(z)|^2 dz = 1$.

5.4 Cenários Cosmológicos com Campos Auxiliares

Nesta seção exploramos alguns cenários cosmológicos com a gravitação de Einstein modificada através de campos não dinâmicos (auxiliares) [23]. Vimos que todos os cenários são controlados por um parâmetro específico, associado ao campo auxiliar. Abordamos vários regimes na evolução do Universo e, além disso, encontramos uma possível mecanismo de auto ajuste da constante cosmológica na era dominada pela radiação.

5.4.1 O formalismo

As equações de Einstein modificadas pela presença de campos auxiliares são

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} + S_{ab}, \quad (5.141)$$

onde [23]

$$S_{ab} = \alpha_1 g_{ab} T + \alpha_2 g_{ab} T^2 + \alpha_3 T T_{ab} + \alpha_4 T_{cd} T^{cd} + \alpha_5 T_a^c T_{cb} \quad (5.142)$$

$$+ \beta_1 \nabla_a \nabla_b T + \beta_2 g_{ab} \square T + \beta_3 \square T_{ab} + 2\beta_4 \nabla^c \nabla_{(a} T_{b)c} + \dots \quad (5.143)$$

Tomando apenas os termos lineares em T , considerando $\Lambda \rightarrow 0$ e assumindo $S_{ab} \ll T_{ab}$ para que as equações de Einstein permaneçam com divergência nula (5.141) para um campo não dinâmico parametrizado por α_1 temos

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G [T_{\mu\nu} + \alpha_1 T g_{\mu\nu}], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (5.144)$$

onde $T = \rho - 3p$ é o traço do tensor energia-momento usual na cosmologia. Retomamos o fator $8\pi G$, que foi considerado como sendo 1 na Ref. [23]. Adotando a métrica FRW (considerado plano, ou seja, $k = 0$), temos

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) d\vec{x}^2. \quad (5.145)$$

Usando (5.145) nas equações de Einstein (5.144) temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} [(1 + \alpha_1)\rho - 3\alpha_1 p], \quad (5.146)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} [(1 - 2\alpha_1)\rho + (6\alpha_1 + 3)p]. \quad (5.147)$$

5.4.2 Cenários cosmológicos

A partir das Eqs. (5.146)-(5.147) e da equação de estado $p = \omega\rho$ podemos escrever

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} [(1 + \alpha_1) - 3\alpha_1 \omega] \rho, \quad (5.148)$$

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3} [(1 - 2\alpha_1) + (6\alpha_1 + 3)\omega] \rho, \quad (5.149)$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Derivando a Eq. (5.148) em relação a t obtemos

$$3H\dot{H} = 4\pi G [(1 + \alpha_1) - 3\alpha_1 \omega] \dot{\rho}. \quad (5.150)$$

Substituindo Eq. (5.148) em Eq. (5.149) obtemos outra importante relação

$$\dot{H} = -4\pi G(1 + \omega)\rho. \quad (5.151)$$

A equação da continuidade é obtida combinando as Eqs. (5.150)-(5.151). O resultado é

$$\dot{\rho} + 3H\eta\rho = 0, \quad \eta = \left[\frac{(1 + \omega)}{(1 + \alpha_1) - 3\alpha_1\omega} \right], \quad (5.152)$$

onde $\eta \rightarrow (1 + \omega)$ no caso da gravitação de Einstein ($\alpha_1 \rightarrow 0$). Em nosso cenário a equação de estado é dada por $\omega_\eta = \eta - 1$. Resolvendo (5.152) temos a seguinte solução

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a^{3\eta(t)}}. \quad (5.153)$$

Para encontrarmos uma solução explícita para $a(t)$ devemos substituir a Eq. (5.153) na Eq. (5.148). Desta forma $a(t)$ como função de t é dada por

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3\eta}}, \quad a_0 = \left(\frac{3\eta}{2} \right)^{\frac{2}{3\eta}} \left[\frac{8\pi G}{3} \left((1 + \alpha_1) - 3\alpha_1\omega \right) \rho_0 \right]^{\frac{1}{3\eta}}. \quad (5.154)$$

A densidade em função de t é obtida das Eqs. (5.153)-(5.154). Assim

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{a_0^{3\eta} t^2}. \quad (5.155)$$

Isto implica que o parâmetro de Hubble $H^2 \sim \rho$ é dado por $H \sim 1/t$. Para o caso da constante cosmológica a equação de estado é $\omega = -1$. Desta forma a partir da equação (5.152) vemos que $\eta = 0$ e $\dot{\rho} = 0$, que implica que $H^2 \sim \rho = \rho_0 \equiv \text{const}$. Neste caso a expansão assume uma forma exponencial e (5.154) é substituída por uma evolução do tipo $a(t) \sim \exp[\rho_0^{1/2}t]$. Assim, o cenário de vácuo é tratado separadamente.

Substituindo $p = -\rho$, e considerando $\rho = \rho_0$, em Eqs. (5.146)-(5.147), temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (1 + 4\alpha_1) \rho_0, \quad (5.156)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3} (1 + 4\alpha_1) \rho_0, \quad (5.157)$$

ou simplesmente

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (5.158)$$

Ao usar qualquer uma dessas equações devemos encontrar a solução exponencial acima mencionada

$$a(t) = a_0 \exp \left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}(1 + 4\alpha_1)\rho_0} t \right). \quad (5.159)$$

A análise anterior mostra simplesmente que o regime de aceleração regulada pela expansão exponencial ($\omega = -1$) ocorre quando $\alpha_1 > -1/4$. O caso $\alpha_1 < -1/4$ é consistente com a solução oscilatória em um universo não plano, i.e., $k \neq 0$ em (5.156) — veja a Ref. [175, 176] para cosmologia cíclica em um contexto similar. O regime para $\alpha_1 = -1/4$ é especial e será discutido com mais detalhes na próxima seção. A seguir, abordaremos alguns cenários cosmológicos especiais.

O regime *dominado pela matéria* se desenvolve para $\eta = 1$ into (5.153), que nos fornece $\omega = \alpha_1/(3\alpha_1 + 1)$. Para $\alpha_1 = 0$ encontramos a solução usual $\omega = 0$, como podemos ver por Eqs. (5.152), (5.153) e (5.154). Se o parâmetro α_1 assume grandes valores $\omega \rightarrow 1/3$, que imita a equação de estado do regime ‘dominado pela radiação’ porém com um comportamento de matéria dominante. o seja, para $3\alpha_1 \ll 1$ encontramos $\omega = \alpha_1 \ll 1/3$ que pode ser relacionado a um cenário *dominado pela matéria escura*.

O regime *dominado pela radiação* ocorre para $\eta = 4/3$ em (5.153). Neste caso temos uma única solução $\omega = 1/3$, com uma equação de estado modificada dada por $\omega_\eta = \eta - 1 = 4/3 - 1 = \omega = 1/3$ que coincide com o a equação de estado do regime da radiação na teoria de Einstein.

O regime *dominado pela energia escura* surge para $\omega = 0$ e $\alpha_1 \neq 0$. Podemos ver a partir da Eq. (5.154) que um regime acelerado é possível para $2/3\eta > 1$. Isto é obtido quando $\alpha_1 > 1/2$. Supondo $\alpha_1 = 1$ a solução é

$$a(t) = a_0 t^{4/3} \sim t^{1.3}. \quad (5.160)$$

Em suma, os regimes tratados aqui (e outros regimes, como *fluido stiff* e *cosmologia de fantasmas*) podem ser explorados usando o importante parâmetro η dado na Eq. (5.152) ou, mais explicitamente, usando a equação de estado modificada

$$\omega_\eta = \eta - 1 = \frac{\omega - \alpha_1 + 3\alpha_1\omega}{1 + \alpha_1 - 3\alpha_1\omega}. \quad (5.161)$$

5.4.3 Um mecanismo para o auto ajuste da constante cosmológica

Vale a pena notar que a partir da Eqs. (5.146)-(5.147) que é possível obter um mecanismo de auto ajuste da constante cosmológica em uma fase específica da evolução cosmológica. De acordo com as Eqs. (5.156)-(5.158), fazendo $\alpha_1 = -1/4$ podemos excluir a influência do vácuo no cenário cosmológico. Além disso, com essa escolha temos a seguinte equação de Friedman modificada [173]

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{3}{4}\right) (\rho + p) = 2\pi G (\rho + p) \quad (5.162)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\frac{3}{2}\right) (\rho + p) = -2\pi G (\rho + p) \quad (5.163)$$

Mais uma vez, mesmo que a contribuição do vácuo venha do setor da matéria, isto é, por exemplo, se as espécies são distribuídos segundo $p = p_\Lambda + p_{radiation} + p_{matter}$ and $\rho = \rho_\Lambda + \rho_{radiation} + \rho_{matter}$, sendo $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$ a equação de estado da energia do vácuo, então nenhuma das equações acima pode ‘ver’ esta contribuição.

Comparando as equações Eqs. (5.162)-(5.163) temos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \quad (5.164)$$

Cuja solução descreve um universo dominado pela radiação

$$a(t) \sim t^{1/2} \quad (5.165)$$

Isto não é surpresa, uma vez que (5.162)-(5.163) são consistentes com a equação de estado $p = \omega\rho$ para para a radiação ($\omega = 1/3$) na gravidade de Einstein.

Substituindo (5.165) em Eq. (5.162) temos

$$2\pi G (\rho + p) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} \sim \frac{1}{t^2}. \quad (5.166)$$

Usando a equação de estado para a radiação, $p = (1/3)\rho$, encontramos

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4(t)} \quad (5.167)$$

É interessante notar que para $\alpha_1 = -1/4$ na Eq. (5.152) não há contribuição da equação de estado original ω . Neste caso particular, temos sempre $\eta = 4/3$ e a Eq. (5.153) coincide com a Eq. (5.167). Concluimos que se fixarmos o parâmetro auxiliar para $\alpha_1 = -1/4$ teremos um cenário cosmológico tipo dominado pela radiação. Além disso, não há contribuição do vácuo neste regime e o problema da constante cosmológica não aparece.

5.5 Buracos Negros na Gravitação de Horava-Lifshitz em Duas Dimensões

Nesta seção trataremos da existência de soluções de buraco negro em 1+1 dimensões na versão não projetável da teoria da gravidade de Horava-Lifshitz [177]. Consideraremos vários modelos para diferentes potenciais no setor de matéria escalar. Abordaremos também o colapso gravitacional de uma distribuição de poeira sem pressão que ocupa uma região no espaço unidimensional. O tempo do colapso pode ser mais rápido ou mais lento, dependendo do parâmetro λ da teoria.

5.5.1 Teoria de de Horava-Lifshitz em 1+1 dimensões

Vamos abordar a versão não projetável da gravitação de HL. Na teoria de Horava o espaço-tempo se decompõe da seguinte forma [24]

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij} (dx^i + N^i dt) (dx^j + N^j dt). \quad (5.168)$$

A partir disso, temos

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{ij} - \nabla_i N_j - \nabla_j N_i) \quad (5.169)$$

e a ação em D+1 dimensões é escrita como

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^D x dt \sqrt{g} (K_{ij} K^{ij} + \lambda K^2 + \mathcal{V}), \quad (5.170)$$

onde $\lambda > 1$ e o potencial \mathcal{V} está associado com a teoria não projetável de Horava definido como

$$\mathcal{V} = \xi R + \eta a^i a_i + \frac{1}{M_*^2} L_4 + \frac{1}{M_*^2} L_6, \quad (5.171)$$

sendo a_i um vetor que descreve a aceleração própria do campo de vetores unitários normais às superfícies das foliações [178] e dado por

$$a_i = \partial_i \ln N, \quad (5.172)$$

onde $i = 1, 2, 3$ em 3+1 dimensões embora vamos nos concentrar em 1+1 dimensões.

Em 1+1 dimensões a teoria se torna muito mais simples, de tal forma que

$$K = \frac{1}{2N} (\dot{g}_{11} - 2\nabla_1 N_1) \quad (5.173)$$

com $z = D = 1$, $g_{ij} = g_{11}$ e $a_i = a_1$. Desta forma, a ação de HL acoplado aos campos de matéria

$$S = S_{HL} + S_\phi \quad (5.174)$$

pode ser escrita em termos de

$$S_{HL} = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int dxdt \sqrt{g} [(1 - \lambda)K^2 + \eta g^{11} a_1 a_1] \quad (5.175)$$

e

$$S_\phi = \int dxdt N \sqrt{g} \left[\frac{1}{2N} (\partial_t \phi - N^1 \nabla_1)^2 - \alpha (\nabla_1 \phi)^2 - V(\phi) - \beta \phi \nabla^1 a_1 - \gamma \phi a^1 \nabla_1 \phi \right] \quad (5.176)$$

com α, β and γ sendo constantes de acoplamento adimensionais. No limite relativístico, temos $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = 0$ [179].

5.5.2 Buracos negros em 2-Dimensões na teoria de Horava

A partir da Eq. (5.175) o parâmetro λ será irrelevante para as soluções de buraco negro estáticos, porque neste case $K = 0$, contudo o parâmetro η estará presente na maior parte das soluções. Deve-se mencionar que, na próxima seção, onde é abordado o problema do colapso gravitacional, ocorrerá o oposto porque, nesse caso, $a_1 \rightarrow 0$ (projetabilidade).

Usando o fato de que $K = 0$, e admitindo $N_1(x) = 0$ no nosso caso, temos

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int dxdt \sqrt{-g} \left(\eta g^{11} a_1^2 - \frac{2}{M_{Pl}^2} \alpha g^{11} \phi'^2 - \frac{2}{M_{Pl}^2} V(\phi) \right), \quad (5.177)$$

ou simplesmente

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int dxdt \left(-\eta N^2 a_1^2 + \frac{2}{M_{Pl}^2} \alpha N^2 \phi'^2 - \frac{2}{M_{Pl}^2} V(\phi) \right) \quad (5.178)$$

desde que $\sqrt{-g} = 1$ no presente estudo.

Variando esta ação com respeito à N é fácil obter a seguinte condição

$$-\eta a_1^2 + \frac{2}{M_{Pl}^2} \alpha \phi'^2 = 0, \quad (5.179)$$

enquanto a variação de S em relação ao campo escalar ϕ fornece

$$\frac{d}{dx} (N^2 \phi') = \frac{1}{2\alpha} \frac{\partial V}{\partial \phi}. \quad (5.180)$$

Da equação (5.179) para $\alpha = \eta M_{Pl}^2/2$ encontramos $a_1 = |\phi'|$.

Isso nos dá uma importante relação entre o campo escalar da matéria e a_1 . Pela condição de não projetabilidade em 1+1 dimensões, a Eq. (5.172) se torna muito importante no nosso contexto. Assim

$$a_1 \equiv \frac{d \ln N}{dx} = |\phi'| \rightarrow N = e^{\pm \phi}, \quad (5.181)$$

onde usamos a condição acima entre a_1 and ϕ' .

A equação de movimento Eq. (5.180) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}(\eta e^{2\phi} \phi') = V_\phi, \quad V_\phi \rightarrow \frac{1}{M_{Pl}^2} \frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (5.182)$$

onde usamos a definição para α e a solução para N dada em Eq. (5.181). Aqui, usaremos $2/\kappa^2 \equiv M_{Pl}^2/2$ e adotaremos $M_{Pl}^2 = 1$ por simplicidade.

Vamos agora considerar o seguinte modelo com $V(\phi) = 0$. Usando a equação de movimento (5.180) temos

$$N^2 \phi' = M, \quad (5.183)$$

onde M é uma constante de integração. Usando a Eq. (5.181) encontramos

$$N \frac{dN}{dx} = \pm M. \quad (5.184)$$

Integrando $N(x)$ encontramos a solução geral

$$N(x) = \sqrt{2(M|x| + C)}. \quad (5.185)$$

Para $C = -1/2$ encontramos

$$N(x)^2 = 2M|x| - 1. \quad (5.186)$$

Consequentemente, o campo escalar pode ser encontrada através de relação $N = e^\phi$ dada por Eq. (5.181) tal que

$$\phi(x) = \ln \sqrt{2M|x| - 1}. \quad (5.187)$$

Esta solução para o campo escalar pode ser encarada como uma solução dilatônica. Seu comportamento divergente perto do horizonte está de acordo com outros cenários bem

conhecidos, onde o mesmo fenômeno se desenvolve. De fato, este comportamento tem semelhanças com buracos negros não extremos na teoria das cordas [180] e em teorias da gravitação com derivadas superiores como, por exemplo, a teoria dilatônica de Einstein-Gauss-Bonnet em Ref. [181]. Em ambas as situações as soluções dilatônicas divergem sobre o horizonte do buraco negro.

Assim, obtemos a seguinte solução de buraco negro na gravitação bidimensional HL

$$ds^2 = -(2M|x| - 1) dt^2 + \frac{1}{(2M|x| - 1)} dx^2, \quad (5.188)$$

que tem mesma forma da solução obtida em [148].

Se, em geral, tomarmos o potencial escalar $V(\phi)$ como sendo não nulo, é natural procurarmos por outras soluções. No entanto, não é possível encontrar soluções analíticas em alguns casos. Vamos, então, analisar o modelo $V(\phi) = \Lambda\phi$.

Usando a equação de movimento (5.182) e o fato de que $N = e^\phi$ obtemos

$$\eta(NN'' + N'^2) - V_\phi = 0. \quad (5.189)$$

Resolvendo para $N(x)$ e $\phi(x)$ temos, respectivamente

$$N(x)^2 = (\Lambda/\eta)x^2 - 2C_1x + 2C_2, \quad (5.190)$$

e

$$\phi(x) = \ln [(\Lambda/\eta)x^2 - 2C_1x + 2C_2]^{1/2}. \quad (5.191)$$

Fazendo $C_1 = -M$ e $\epsilon = 2C_2$ encontramos

$$\phi(x) = \ln [(\Lambda/\eta)x^2 + 2Mx - \epsilon]^{1/2}, \quad (5.192)$$

em como

$$N(x)^2 = (\Lambda/\eta)x^2 + 2Mx - \epsilon. \quad (5.193)$$

Assim, a solução para um buraco negro na teoria de HL fica sendo

$$ds^2 = -\left((\Lambda/\eta)x^2 + 2Mx - \epsilon\right) dt^2 + \frac{1}{\left((\Lambda/\eta)x^2 + 2Mx - \epsilon\right)} dx^2, \quad (5.194)$$

veja [149] para a primeira referência a respeito de uma solução similar.

Os casos estudados anteriormente são os mais simples, onde podemos escolher um potencial escalar e obter soluções explícitas. Para outros potenciais, de uma forma general, não podemos obter soluções analíticas explícitas. Desta forma, passamos a tratar com a derivada do potencial como função de um campo escalar que por sua vez depende da coordenada espacial.

Vamos considerar $V_\phi(\phi(x)) \equiv V_\phi(x)$ da forma

$$V_\phi(x) = A + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^4}. \quad (5.195)$$

Substituindo (5.195) na equação (5.182) encontramos $N(x)$ e $\phi(x)$ dados por

$$N(x)^2 = 2C_2 + \frac{A}{\eta}x^2 - 2C_1x + \frac{B}{\eta x} + \frac{C}{3\eta x^2} \quad (5.196)$$

e

$$\phi(x) = \ln \sqrt{2C_2 + \frac{A}{\eta}x^2 - 2C_1x + \frac{B}{\eta x} + \frac{C}{3\eta x^2}}. \quad (5.197)$$

O único problema com este procedimento é encontrar o potencial em termos do campo escalar ϕ porque, na maioria dos casos, não é possível inverter as soluções a fim de obter $x = \phi(\phi)$. Apesar disso, podemos encontrar várias soluções explícitas interessantes para $N(x)$ and $\phi(x)$ como veremos abaixo.

Ao escolher corretamente os parâmetros, obtemos soluções que podem representar um buraco negro, um buraco branco, uma singularidade nua, ou outras estruturas mais complicadas.

Vejamos alguns casos especiais

(i) Para $C_1 = -M$, $C_2 = -1/2$, $\eta = 1$ e $A = B = C = 0$ temos $V_\phi = 0$ ($V = const$), que corresponde a $V = 0$ e cujas soluções são dadas por Eqs. (5.187)-(5.188).

(ii) Outro exemplo é dado por $C_2 = -\epsilon/2$, $C_1 = -M$, $A = \Lambda$ e $B = C = 0$ para o qual temos $V_\phi = A$, que é equivalente a $V(\phi) = \Lambda\phi$. A solução para este caso é dada por Eqs. (5.193)-(5.194). Para $\eta = 1$ e $A = -\Lambda/2$ podemos expressar a solução da forma encontrada em [148].

5.5.3 Solução do tipo Schwarzschild

Neste caso, considera-se $C_2 = 1/2$, $B = -2M$, $\eta = 1$ e $A = C = C_1 = 0$. Assim

$$V_\phi(x) = -\frac{2M}{x^3}. \quad (5.198)$$

Isto nos dá as seguintes soluções para $N(x)$ e $\phi(x)$

$$N(x)^2 = 1 - \frac{2M}{x}, \quad (5.199)$$

$$\phi(x) = \ln \sqrt{1 - \frac{2M}{x}}. \quad (5.200)$$

Invertendo (5.198) e integrando em ϕ obtemos o potencial

$$V(\phi) = \frac{B}{8M^3}\phi - \frac{3B}{16M^3}e^{2\phi} + \frac{3B}{32M^3}e^{4\phi} - \frac{B}{48M^3}e^{6\phi}. \quad (5.201)$$

5.5.4 Solução do tipo Reissner-Nordström

Podemos notar que o último termo em $V_\phi(x)$ na Eq. (5.195) está associado ao efeito de uma carga Q .

Isto fica evidente através das soluções (5.196)-(5.197) e fazendo a escolha $C_2 = 1/2, B = -2M, C = 3Q^2, \eta = 1$ e $A = C_1 = 0$. Assim

$$V_\phi(x) = -\frac{2M}{x^3} + \frac{3Q^2}{x^4}. \quad (5.202)$$

Como nos casos anteriores, isto nos dá as seguintes soluções para $N(x)$ e $\phi(x)$

$$N(x)^2 = 1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2}, \quad (5.203)$$

$$\phi(x) = \ln \sqrt{1 - \frac{2M}{x} + \frac{Q^2}{x^2}}. \quad (5.204)$$

Diferente dos casos anteriores, não podemos facilmente inverter (5.198) para podermos integrar em ϕ e obter o potencial.

5.5.5 Uma nova solução para buracos negros

Os dois casos apresentados anteriormente são soluções bem conhecidas na gravitação em quatro dimensões juntamente com várias consequências relacionadas como, por exemplo, o

número de horizontes, a temperatura Hawking, entropia e assim por diante. Os outros casos com $B = C = 0$ são também conhecidos na gravitação em 1+1 dimensões. Assim, não precisamos dizer mais nada sobre eles. No entanto, vamos analisar um novo tipo de solução e analisar a sua temperatura Hawking [29].

Apenas para manter a notação usual, vamos denotar a solução geral (5.196) como $f(x) \equiv N(x)^2$, ou seja

$$f(x) = 2C_2 + \frac{A}{\eta}x^2 - 2C_1x + \frac{B}{\eta x} + \frac{C}{3\eta x^2}. \quad (5.205)$$

Para $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $B \neq 0$ e $A = C = 0$ temos

$$f(x) = 2C_2 - 2C_1x + \frac{B}{\eta x}. \quad (5.206)$$

Esta solução admite os seguintes horizontes

$$x_h^\pm = \frac{C_2}{C_1} \pm \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{C_2^2}{C_1^2} + \frac{2B}{\eta C_1}. \quad (5.207)$$

Para $\Delta = 0$ eles se degeneram, ou seja, $x_h^+ = x_h^-$.

A temperatura Hawking é dada em termos do horizonte exterior (x_h^+) como

$$T_H = \frac{f'(x)}{4\pi} \Big|_{x=x_h^+}. \quad (5.208)$$

Para o caso especial $C_2 = 0$, $C_1 = -M$ and $B = -2M$ os horizontes são independentes da massa M

$$x_h^\pm = \pm \frac{2}{\sqrt{\eta}} \quad (\eta > 0) \quad (5.209)$$

A temperatura é então dada por

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \left(-2C_1 - \frac{B}{\left(\frac{2}{\sqrt{\eta}}\right)^2} \right), \quad (5.210)$$

ou simplesmente

$$T_H = \frac{1}{8\pi} (4 + \eta) M. \quad (5.211)$$

Esta é uma relação típica entre a temperatura Hawking e a massa de buracos negros em 1+1 dimensões [148].

5.5.6 Colapso gravitacional

Nesta seção, vamos abordar o problema do colapso gravitacional de uma massa de poeira com pressão insignificante confinada em uma região do espaço unidimensional $[-r, r]$ cuja métrica em um referencial comóvel é dada por [58]

$$ds^2 = -N(\tau)^2 d\tau^2 + a(\tau)^2 d\rho^2 \quad (5.212)$$

A ação é dada por Eq. (5.174). Neste modelo o setor de matéria não se restringe apenas aos campos escalares.

Agora, temos a seguinte ação

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^2x N \sqrt{g_{11}} [(1 - \lambda)K^2 + \eta g^{11} \phi'^2] + S_m, \quad (5.213)$$

que são explicitamente dadas em termos da métrica (5.212) como

$$S = \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^2x \left[\frac{(1 - \lambda)a^3 \dot{a}^2}{N} \right] + \frac{M_{Pl}^2}{2} \int d^2x \left[\frac{N\eta\phi'^2}{a} \right] + \int d^2x N \sqrt{g_{11}} L_m. \quad (5.214)$$

O tensor de energia-momento é dado em termos da lagrangeana dos campos de matéria através de sua definição usual

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L_m)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (5.215)$$

Variando a ação com respeito à N , temos

$$\frac{\delta S}{\delta N} = 0, \quad (5.216)$$

obtém-se a equação que relacionam a dinâmica do espaço-tempo (5.212) com a densidade de energia

$$\frac{(\lambda - 1)M_{Pl}^2 a^3 \dot{a}^2}{2N^2} + \frac{M_{Pl}^2 \eta \phi'^2}{2a} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\delta S_m}{\delta N} = \sigma. \quad (5.217)$$

Fazendo $N = 1$, e lembrando que $N = e^\phi$, temos $\phi = 0$, e

$$(\lambda - 1)M_{Pl}^2 a^3 \dot{a}^2 = 2\sigma. \quad (5.218)$$

5.5.7 Solução interior para o colapso gravitacional

Como estamos trabalhando com um fluido sem pressão, temos $T^{\mu\nu} = \sigma U^\mu U^\nu$, com $U^1 = 0$ e $U^t = 1$. Assim, a equação para a conservação da energia e momento fica sendo

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \sqrt{a^2}) = 0, \quad (5.219)$$

que significa que $\sigma\sqrt{a^2}$ é constante. Assim, em termos das constantes a_0 e ρ_0 , definidas no momento inicial do colapso, temos

$$\sigma = \frac{\rho_0 a_0}{a}. \quad (5.220)$$

Agora, substituindo esta equação em Eq. (5.218) encontramos a seguinte equação diferencial

$$a^4 \dot{a}^2 = \frac{2\sigma_0 a_0}{M_{Pl}^2(\lambda - 1)}, \quad (5.221)$$

que ainda pode ser colocada sob a forma

$$a^2 \dot{a} = \pm \sqrt{\frac{2\sigma_0 a_0}{M_{Pl}^2(\lambda - 1)}} = \pm \beta, \quad (5.222)$$

cuja solução é

$$a = (\pm 3\beta\tau + C)^{1/3}. \quad (5.223)$$

Escolhendo $C = 1$, $N = 1$, e levando em conta a solução com sinal negativo, temos a métrica interior do colapso gravitacional

$$ds^2 = -d\tau^2 + (1 - 3\beta\tau)^{2/3} d\rho^2. \quad (5.224)$$

(veja Ref. [58] para uma solução similar).

A densidade da poeira dada por σ tende a infinito (singularidade) quando o fator de escala se aproxima de zero. Isto ocorre em um tempo finito $\tau_c = 1/(3\beta)$, dado por

$$\tau_c = \sqrt{\frac{(\lambda - 1)M_{Pl}^2}{18\sigma_0 a_0}}. \quad (5.225)$$

A dependência com a raiz quadrada de $\lambda - 1$ seria um problema na teoria projetável de HL [24] onde este parâmetro deve ser $\lambda \leq 1$. Felizmente não é esse o caso na teoria não projetável *sadia* de HL desenvolvida em Ref. [178] onde $\lambda > 1$. Perceba que, dada uma densidade inicial σ_0 , o colapso pode ocorrer mais lentamente ou mais rapidamente, dependendo do parâmetro λ . Por exemplo, para $\lambda \rightarrow 1$ o tempo $\tau_c \rightarrow 0$, o que significa que uma distribuição de poeira que cai muito rapidamente, caso contrário pode durar um tempo mais longo $\tau_c \neq 0$ antes de colapsar, para $\lambda > 1$.

5.5.8 Solução exterior para o colapso gravitacional

Inspirado no teorema de Birkhoff, que afirma que é sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em relação ao qual a solução exterior de uma solução esférica em 3+1 dimensões é independente de tempo [28, 182], vamos proceder em uma forma semelhante em 1+1 dimensões para conectar a nossa *solução interior dependente do tempo* a uma *solução exterior independente do tempo* [55].

Assim, devemos relacionar a coordenada x , que descreve um buraco negro (solução exterior estática), com uma coordenada co-móvel ρ que descreve o movimento da poeira no colapso gravitacional (a solução interior), através de

$$x(\tau, \rho) = \rho a(\tau) = \rho(1 - 3\beta\tau)^{2/3}. \quad (5.226)$$

Assim, a partir da métrica interior

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau, \rho)d\rho^2, \quad (5.227)$$

é possível encontrar [18] a métrica exterior

$$ds^2 = -A(x)^2 dt^2 + A(x)^{-2} dx^2. \quad (5.228)$$

O resultado obtido é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\beta^2 r^6}{x^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{\beta^2 r^6}{x^4}\right)^{-1} dx^2. \quad (5.229)$$

Esta é a mesma solução encontrada em [58].

O escalar de curvatura é dado por

$$R = \frac{20\beta^2 r^6}{x^6} \quad (5.230)$$

Assim $x = 0$ é uma singularidade pura, ou seja, uma singularidade de curvatura. Além disso, o raio de Schwarzschild tridimensional é dado por

$$x_H = r^{3/2} \beta^{1/2} = r^{3/2} \left[\frac{2\sigma_0 a_0}{M_{Pl}^2 (\lambda - 1)} \right]^{1/4}. \quad (5.231)$$

5.6 Estrutura de Branas com Campos Escalares na Gravitação de Horava

Nesta seção, consideramos a versão não projetável da gravitação proposta por Horava e Melby-Thompson [130] em um cenário de mundo-brana. Um campo escalar relativístico é considerado no setor da matéria e obtemos equações de primeira para encontrarmos soluções das equações de movimento. Em particular, estudamos soluções para branas espessas do tipo dilatônica e de Randall-Sundrum.

5.6.1 Cenário para uma solução de brana

Para estudarmos as soluções de brana na teoria de HMT sem a condição de projetabilidade, vamos considerar o Ansatz usual

$$ds^2 = e^{2A(w)} g_{\mu\nu}(t, x^I) dx^\mu dx^\nu - dw^2 \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3). \quad (5.232)$$

Estamos interessados em estudar um cenário de mundo-brana em que a 3-brana é gerada por um campo escalar que depende apenas da dimensão extra w . Isto é, na ausência do campo esta métrica se reduz a um espaço-tempo de Minkowski em cinco dimensões.

Usando a decomposição ADM, na Eq.(5.232), identificamos $g_{00} = N^2 = e^{2A(w)}$ e $g_{IJ}(t, x^I) = \text{diag}(-1, -1, -1)$ (onde $N_i = 0$). Neste cenário podemos escrever o campo vetorial $a_i = \partial_i N/N$ como sendo

$$a_i = (0, 0, 0, A'(w)), \quad (5.233)$$

onde a linha denota derivada em relação a w . Além disso, a métrica adotada implica em um termo cinético nulo, $L_K = 0$. Sem perda de generalidade, pode-se escolher o gauge $\varphi = 0$ e $A = 0$. Isso está de acordo com as equações de movimento da lagrangeana original. Observe que as equações de movimento para φ admite a solução $\varphi = 0$ como pode ser facilmente verificado — veja [184]. A equação de movimento para A nos dá

$$R - 2\Lambda_g = 8\pi G J_A, \quad J_A = 2 \frac{\delta(N L_m)}{\delta A} \quad (5.234)$$

que necessita de uma corrente não nula J_A , a fim de evitar que as soluções sejam apenas de espaço plano. Isto pode ser evitado através da adição de um certo termo de corrente no setor da matéria do tipo

$$L_m \rightarrow L_m + \zeta^2 \frac{A}{N} 8\pi G J_A \quad (5.235)$$

considerando, por simplicidade $\Lambda_g = 0$. Assim, a solução $A = 0$ também satisfaz a equação de movimento da lagrangeana original. Então, após estas considerações, a ação da teoria toma a seguinte forma

$$S = \zeta^2 \int dt dx^3 dw \bar{N} \sqrt{g} \left(-L_V^R + \frac{1}{\zeta^2} L_m \right). \quad (5.236)$$

No que se segue, apresentaremos as equações de movimento no cenário descrito anteriormente. Os detalhes técnicos são encontrados no nosso trabalho que consta na referência [19]

A variação da ação com respeito à N nos dá a seguinte equação, no regime de baixas energias

$$R + \beta_0 A'^2 = \frac{1}{\zeta^2} \rho_m, \quad (5.237)$$

onde a presença do termo A' reflete a condição de não projetabilidade.

Agora, a variação da ação S com respeito à g_{ij} obtemos a seguinte equação

$$R_{44} - \frac{1}{2} R g_{44} + \beta_0 \frac{A'^2}{2} = \frac{1}{2\zeta^2} \tau_{44}. \quad (5.238)$$

A seguir, vamos encontrar soluções desta teoria em um cenário de branas com a presença de um campo escalar real.

5.6.2 Equações de campo e o formalismo de primeira ordem

Vamos considerar a seguinte lagrangeana para um campo escalar $\phi = \phi(y)$

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \epsilon g_{ab} \partial^a \phi \partial^b \phi - V(\phi), \quad (5.239)$$

onde $\epsilon = 1$ para uma dinâmica padrão e $\epsilon = -1$ para uma dinâmica de fantasmas.

As componentes não nulas do tensor energia-momento, que serão importantes no nosso estudo, são $T_{00} = e^{2A} \left(\frac{1}{2} \epsilon \phi'^2 + V(\phi) \right)$ e $T_{44} = \frac{1}{2} \epsilon \phi'^2 + V(\phi)$ com $\rho_m = \rho_\phi = T_0^0$.

Assim, as equações de movimento ficam sendo

$$-(12 + \beta_0)A'^2 - 6A'' = \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{1}{2}\epsilon\phi'^2 + V(\phi) \right), \quad (5.240)$$

$$(6 + \beta_0)A'^2 = \frac{1}{\zeta^2} \left(\frac{1}{2}\epsilon\phi'^2 - V(\phi) \right), \quad (5.241)$$

$$6A'' + 6A'^2 = -\frac{1}{\zeta^2}\epsilon\phi'^2. \quad (5.242)$$

O potencial escalar pode ser dado de forma geral por

$$V = -\zeta^2(9 + \beta_0)A'^2 - 3\zeta^2A''. \quad (5.243)$$

Fazendo $\beta_0 = -6$ encontramos a partir de (5.241) a seguinte equação

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\epsilon\phi'^2. \quad (5.244)$$

Neste sentido, temos as seguintes equações diferenciais de primeira ordem em termos de um 'superpotencial' W

$$\phi' = \frac{1}{8}W_\phi, \quad (5.245)$$

$$A' = -\frac{1}{3}W, \quad (5.246)$$

que resolve as Eqs. (5.240)-(5.242).

Como exemplo, vamos considerar o seguinte potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda(a^2 - \phi^2)^2. \quad (5.247)$$

Partindo das equações (5.244) e (5.247), e fazendo $\epsilon = 1$, encontramos

$$\phi = a \tanh(a\lambda w). \quad (5.248)$$

Agora, usando (5.244) e (5.245) temos

$$W_\phi = 8a^2\lambda - 8\lambda\phi^2, \quad (5.249)$$

o que nos permite encontrar o superpotencial

$$W(\phi) = 8a^2\lambda\phi - \frac{8\lambda}{3}\phi^3. \quad (5.250)$$

Considerando-se as equações (5.246), (5.248) e (5.250), obtemos a solução

$$A(w) = \frac{8a^2}{9} \ln[\tanh^2(a\lambda w) - 1] - \frac{4a^2}{9} \tanh^2(a\lambda w). \quad (5.251)$$

Na Fig. 5.1 é mostrado o comportamento da função de onda do gráviton indicando a localização da gravidade na 3-brana.

No entanto, podemos observar a partir de Eqs. (5.242)-(5.244) que, para a solução do tipo kink (5.248), o potencial (5.243) é assintoticamente *plano*. Este comportamento é completamente diferente em relação à gravidade de Einstein, em que se espera um potencial assintoticamente *AdS* como no modelo de Randall-Sundrum, a fim de ter a localização do gráviton de modo zero.

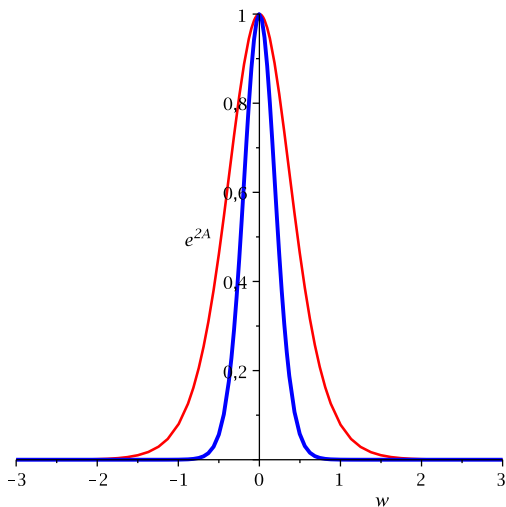


Figura 5.1: O fator de empenimento $e^{2A(w)}$ (com $\lambda = 1$) para $a = 3\sqrt{2}/4$ (linha vermelha) and $a = 3/2$ (linha azul espessa).

5.6.3 Branas dilatônicas

Vamos agora encontrar uma solução para a equação (5.242) usando o Ansatz proposto em [183] — veja também [185–187] para discussões recentes — no contexto de parede de

domínio dilatônica

$$A(w) = B \ln(1 + cw), \quad w > 0, \quad (5.252)$$

$$A(w) = B \ln(1 - cw), \quad w < 0. \quad (5.253)$$

com $c > 0$.

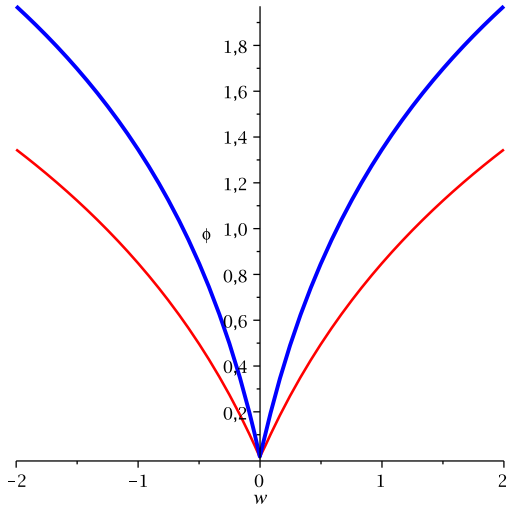


Figura 5.2: A solução $\phi(w)$ (com $B = 1/2$, $\zeta = 1$) para $c = 1$ (linha vermelha fina) and 2 (linha azul espessa).

O perfil do ‘kink’ (com $0 < B < 1$) é dado por

$$\phi(w) = \sqrt{6B(1 - B)}\zeta \ln(1 + cw), \quad w > 0 \quad (5.254)$$

e

$$\phi(w) = \sqrt{6B(1 - B)}\zeta \ln(1 - cw). \quad w < 0 \quad (5.255)$$

Estas soluções estão representadas na Fig. 5.2 para $c = 1$ e $c = 2$.

O potencial escalar pode ser identificado como sendo do tipo dilatônico habitual

$$V(\phi) = V_0 e^{-\frac{2\phi}{\zeta\sqrt{6B(1-B)}}}, \quad (5.256)$$

onde

$$V_0 = \zeta^2 c^2 B [3 - B(9 + \beta_0)]. \quad (5.257)$$

A Fig. 5.3 mostra o comportamento do potencial para $\beta_0 = -6$ e $\beta_0 = -1$. É fácil ver que este potencial é assintoticamente plano e o fator de empenamento diverge para grandes

distâncias da brana. Assim, a localização de gravidade pode ser conseguida neste caso apenas através de grávitons metastáveis [185].

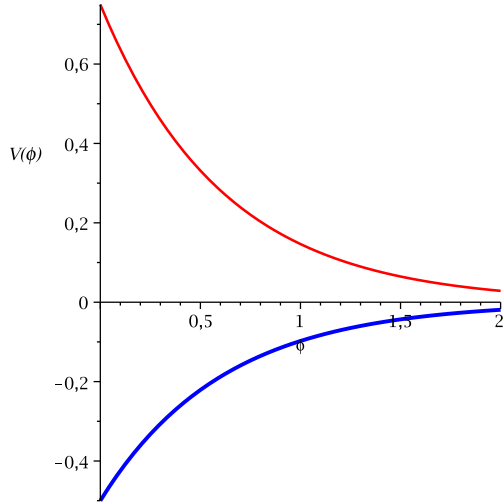


Figura 5.3: O potencial dilatônico $V(\phi)$ (com $B = 1/2, \zeta = c = 1$) para $\beta_0 = -6$ (linha vermelha fina) and $\beta_0 = -1$ linha azul espessa).

5.6.4 Cenário tipo Randall-Sundrum

Neste modelo podemos escrever $A(w) = kw$ and $A'^2 = k^2 (w \neq 0)$. Integrando, encontramos a solução bem conhecida

$$A(w) = k|w|. \quad (5.258)$$

Para $w \neq 0$ we find $A''(w) = 0$. O potencial (5.243) será dado de forma bem simples como

$$V = -\zeta^2(9 + \beta_0)k^2. \quad (5.259)$$

Fazendo $\beta_0 > -9$, V é negativo e desempenha o papel de uma constante cosmológica em cinco dimensões no bulk, o que implica um espaço-tempo AdS .

Uma solução para o campo escalar é possível de ser obtida via Eq. (5.242) se $\epsilon = -1$ (a ghost dynamics), tal que

$$\phi(w) = \sqrt{6}k\zeta w. \quad (5.260)$$

5.7 Considerações Finais

Nesta tese exploramos algumas teorias de gravidade modificada e, para cada uma delas, demos uma contribuição original a respeito de cada tema. No contexto das teorias de DGP, fomos os primeiros a estudar este cenário em dimensões inferiores a 5 e, com isso, pudemos obter novas soluções de buracos negros em 2+1 dimensões sem a necessidade de uma constante cosmológica *a priori*. Além disso, o estudo da gravidade induzida neste cenário se mostrou promissor, com o surgimento de uma teoria consistente que propaga graus de liberdade que não violam a condição de unitariedade. Uma perspectiva futura seria, por exemplo, um estudo mais detalhado da estrutura causal destas teorias ou a exploração de aspectos cosmológicos baseados nestes modelos. Também abordamos a gravitação de Horava-Lifshitz em duas novas perspectivas: cenários de mundo-brana com campos escalares e buracos negros em 1+1 dimensões, ambos na versão não projetável da teoria. Neste ponto, em relação à estrutura de branas, uma futura abordagem a respeito da localização de campos fermiônicos parece particularmente interessante bem como uma investigação neste cenário para gerar branas com *estrutura interna* [80]. Também estudamos a formação de branas a partir de um campo escalar que faz a conexão entre duas métricas em uma teoria de *bimétrica*. Aqui, mais uma vez, parece natural a possibilidade de estender este cenário com a inclusão de campos de gauge e/ou fermiônicos a fim de analisar sua estabilidade ou gerar branas com estruturas mais complexas, uma vez que, no caso analisado, a estabilidade das soluções foi demonstrada e a gravidade se mostrou localizada. Por fim, estudamos um cenário cosmológico na presença de uma teoria de gravidade com campos não dinâmicos, onde obtemos um interessante mecanismo de ajuste da constante cosmológica para que seus efeitos gravitacionais fossem anulados, porém apenas em um estágio específico da evolução do Universo. Uma investigação importante que, da nossa parte já se encontra em andamento, é a inclusão de termos de ordem superior nas equações de Einstein o que pode nos levar a obter um interessante modelo para matéria escura, bem como gerar cenários cuja expansão do Universo é governada por *potenciais negativos*. Um desafio maior talvez seja a obtenção de soluções de vácuo nesta teoria, uma vez que o tensor S_{ab} responsável pela modificação das equações de movimento se anula quando o tensor energia-momento for nulo.

Bibliografia

- [1] A. Einstein, “Os fundamentos da teoria da relatividade geral” (Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie), p. 517-71, publicado originalmente em AdP 49, p. 769ss, 1916. (A teoria havia recebido os retoques finais um pouco antes, nas comunicações dirigidas à Academia Prussiana de Ciências em 4, 11, 18 e 25 de novembro de 1915—publicadas em Sitzungsberichte, Preussische Akademie der Wissenschaften, p. 778-86, p. 799-801, p. 831-9, p. 844-7, 1915.)
- [2] Adam Mantz, Steve W. Allen, David Rapetti, Harald Ebeling, A. Drlica-Wagner “Constraints on Cosmology and Gravity from the Growth of X-ray Luminous Galaxy Clusters”, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, October 6, 2009.
- [3] Stanley Deser and P. van Nieuwenhuizen, “One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields”, Phys.Rev. D**10**, 401 (1974).
- [4] Gerard't Hooft and M.J.G. Veltman, “One loop divergencies in the theory of gravitation”, Annales Poincare Phys.Theor. A**20**, 69-94 (1974).
- [5] S. Perlmutter et al. Astrophys. J. **517**, 565 (1998).
- [6] A. G. Riess et al, Astron. J.**116**, 1009 (1998). (1999).
- [7] I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, “Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant,” Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999)
- [8] P.J.E. Peebles e Bharat Ratra. Rev.Mod.Phys.**75**, 559 (2003).
- [9] K. S. Stelle, “Renormalization Of Higher Derivative Quantum Gravity”, Phys. Rev. D **16** (1977) 953.

- [10] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B* **429**, 263 (1998).
- [11] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370 (1999).
- [12] S. Deser, R. Jackiw & G. 'tHooft, *Ann. Phys.***52**, 220(1984); S. Deser and R. Jackiw, *Ann. Phy.* **153** (1984).
- [13] P. Binetruy, C. Deffayet, and D. Langlois, *Nucl. Phys. B* **565**, 269 (2000).
- [14] Eric A. Bergshoeff, Olaf Hohm, Paul K. Townsend, “Massive Gravity in Three Dimensions”, *Phys.Rev.Lett.* **102** (2009) 201301.
- [15] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “3D black holes on a 2-brane in 4D Minkowski space,” *Phys. Lett. B***704**. 631 (2011).
- [16] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Braneworld solutions from scalar field in bimetric theory,” *Phys. Rev. D* **87**, 065007 (2013).
- [17] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Cosmological scenarios in modified gravity with nondynamical fields,” *Phys. Rev. D* **90**, 043523 (2014).
- [18] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Two Dimensional Horava-Lifshitz Black Hole Solutions,” arXiv:1409.0490 [hep-th] (aceito para publicação no PRD).
- [19] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Brane structure from a scalar field in general covariant Horava-Lifshitz gravity,” *Phys. Rev. D* **91**, 046001 (2015).
- [20] D. Bazeia, F. A. Brito and F. G. Costa, “Induced higher-derivative massive gravity on a 2-brane in 4D Minkowski space,” arXiv:1412.6866 [hep-th] (aceito para publicação no PLB).
- [21] M. Banados, C. Teitelboim and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [22] P. Pani and T. P. Sotiriou, “Surface singularities in Eddington-inspired Born-Infeld gravity,” *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 251102.
- [23] P. Pani, T. P. Sotiriou and D. Vernieri, “Gravity with Auxiliary Fields,” *Phys. Rev. D* **88**, 121502 (2013).

- [24] Petr Horava, "Quantum Gravity at a Lifshitz Point", *Phys.Rev.* **D79**, 084008 (2009).
- [25] *Particle Data Group* (2014): <http://pdg.lbl.gov/>.
- [26] J.C. Price, in proc. Int. Symp. on Experimental Gravitational Physics.
- [27] H. A. Lorentz, A. Einstein and H. Minkowski, "O Princípio da Relatividade", Ed. Calouste Gulbenkian
- [28] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley, 1972.
- [29] R. M. Wald, *General Relativity*, Univ. Chicago Press, Chicago (1984).
- [30] Michell, J. (1784). *Philosophical Transactions of the Royal Society* 74 (0): 35-57.
- [31] Gillispie, C. C. (2000). *Pierre-Simon Laplace, 1749-1827: a life in exact science*. Princeton paperbacks. Princeton University Press. p. 175. ISBN 0-691-05027-9.
- [32] Israel, W. (1989). "Dark stars: the evolution of an idea". In Hawking, S. W.; Israel, W. *300 Years of Gravitation*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-37976-2.
- [33] Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 7: 189-196. and Schwarzschild, K. (1916). "Über das Gravitationsfeld eines Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie". *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* 18: 424-434.
- [34] Droste, J. (1917). "On the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation, and the motion of a particle in that field". *Proceedings Royal Academy Amsterdam* 19 (1): 197-215.
- [35] Kox, A. J. (1992). "General Relativity in the Netherlands: 1915-1920". In Eisenstaedt, J.; Kox, A. J. *Studies in the history of general relativity*. Birkhäuser. p. 41. ISBN 978-0-8176-3479-7.[dead link]
- [36] 't Hooft, G. (2009). "Introduction to the Theory of Black Holes". *Institute for Theoretical Physics / Spinoza Institute*. pp. 47-48.

- [37] Carroll, Sean M. (2004). Spacetime and Geometry. Addison Wesley. ISBN 0-8053-8732-3., the lecture notes on which the book was based are available for free from Sean
- [38] Hawking, S. W.; Ellis, G. F. R. (1973). Large Scale Structure of space time. Cambridge University Press. ISBN 0-521-09906-4.
- [39] Ronaldo E. de Souza, *Introdução à Cosmologia*, Editora da Universidade de São Paulo(2004).
- [40] WMAP and Dark Matter / Dark energy - map.gsfc.nasa.gov
- [41] Rachel Bean "Lectures on Cosmic Acceleration", arXiv:1003.4468v2 [astro-ph.CO].
- [42] Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1990).
- [43] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. 15, 168 (1929), reimpresso em Kolb, E. W. e Turner, M. S., *The Early Universe: Reprints*, Addison-Wesley Pub. Co., Redwood City (1988).
- [44] C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, A. Strominger, Evanescent Black Holes, Phys. Rev. D **45** (1992) R 1005.
- [45] see for example, A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects*, (Cambridge University Press, 1995).
- [46] Wang, H.; Sun, K.; Tao, F.; Stacchiola, D. J.; Hu, Y. H. (2013). "3D Honeycomb-Like Structured Graphene and Its High Efficiency as a Counter-Electrode Catalyst for Dye-Sensitized Solar Cells". *Angewandte Chemie* 125 (35): 9380.
- [47] Wang, Hui; Sun, Kai; Tao, Franklin; Stacchiola, Dario J.; Hu, Yun Hang. "3D graphene could replace expensive platinum in solar cells". *Angewandte Chemie (KurzweilAI)* 125
- [48] A.M. Polyakov, Phys. Lett **B103** (1981) 207.
- [49] P. Collas, Am. J. Phys. **45** (1977) 833
- [50] R.B. Mann, Gen. Rel. Grav. **24** (1992) 433.

- [51] J. Harvey and A. Strominger, Quantum Aspects of Black Holes, hep-th-9209055 (EFI-92-41).
- [52] N. Cornish and Frenkel, Phys. Rev. **D43** (1991) 2555; Phys. Rev. **D47** (1993) 714.
- [53] R.B. Mann & S.F. Ross, *Phys. Rev. D* **47**, 3319 (1993).
- [54] R.B. Mann and S.F. Ross, *Class. Quant. Grav.* **10** (1993) 1405.
- [55] R.B. Mann, A. Shiekh, and L. Tarasov, *Nucl. Phys.* **B341** (1990) 134.
- [56] R.B. Mann, *Found. Phys. Lett.* **4** (1991) 425.
- [57] R. Jackiw, *Nucl. Phys.* **B252** (1985) 343; C. Teitelboim, *Phys. Lett.* **B126** (1983) 41, 46.
- [58] A.E. Sikkema and R.B. Mann, *Class. Quantum Grav.* **8** (1991) 219.
- [59] R.B. Mann, S.M. Morsink, A.E. Sikkema and T.G. Steele, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 3948; S.M. Morsink and R.B. Mann, *Class. Quant. Grav.* **8** (1991) 2257; J.D. Christensen and R.B. Mann, *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 1769; K.C.K. Chan and R.B. Mann, *Class. Quantum Grav.* **10** (1993) 913.
- [60] C. Teitelboim, in *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Hilger, Bristol, 1984), p. 327; R. Jackiw, *ibid.*, p. 403; *Nucl. Phys.* B252, 343 (1985).
- [61] C. Teitelboim, *Phys. Lett.* 126B, 41 (1983); 126B, 46 (1983); M. Henneaux, *Phys. Rev. Lett.* 54, 959 (1985); T. Fukuyama and K. Kimimura, *Phys. Lett.* 160B, 259 (1985).
- [62] C. Teitelboim, in *Quantum Theory of Gravity*, edited by S. Christensen (Hilger, Bristol, 1984), p. 327; R. Jackiw, *ibid.*, p. 403; *Nucl. Phys.* B252, 343 (1985).
- [63] J. Gegenberg, P. F. Kelly, R. B. Mann, and D. E. Vincent, *Phys. Rev. D* 37, 3463 (1988).
- [64] C. G. Torre, *Phys. Rev. D* 40, 2588 (1989); R. Marnelius, *Nucl. Phys.* B211, 14 (1983).
- [65] Robert B. Mann. Lower dimensional black holes. *Gen. Rel. Grav.*, 24:433-449, 1992.

- [66] T. Kaluza, *On The Unification Problem In Physics*. Tradução para o inglês do artigo de Kaluza publicado em *Sitzungsberichte of the Prussian Acad. of Sci.*, p.966, 1921.
- [67] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, *Z.Phys.* **37**:895-906, 1926.
- [68] Graham D. Kribs, Lectures on the Phenomenology of Extra Dimensions, arXiv:hep-ph/0605325v1.
- [69] L. Randall and R. Sundrum, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690(1999).
- [70] I. Antoniadis, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Nucl. Phys. B*516 (1998) 70, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. Dvali, *Phys. Lett. B*429 (1998) 263, S. Dimopoulos and G. Giudice, *Phys. Lett. B*379 (1996) 105, T.R. Taylor and G. Veneziano, *Phys. Lett. B*213 (1988) 450, G.C. Long, H.W. Chang and J.C. Price, *Nucl. Phys. B*539 (1999) 23. ed. P.F. Michelson, Guangzhou, China (World Scientific, Singapore 1988); J.C.Price et. al., NSF proposal 1996; A.Kapitulnik and T. Kenny, NSF proposal, 1997.
- [71] P. D. Mannheim, *Brane-localized gravity*, Full length monograph, World Scientific Publishing Company, Singapore (2005).
- [72] R. Maartens, “Braneworld Gravity, *Living Rev. Rel.* **7**,7 (2004).
- [73] Csaba Csaki, Joshua Erlich, Timothy J. Hollowood, Yuri Shirman, “Universal aspects of gravity localized on thick branes”, *Nucl.Phys. B***581** (2000) 309-338.
- [74] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
- [75] P. Binétruy, C. Deffayet, U. Ellwanger and D. Langlois, *Brane cosmological evolution in a bulk with cosmological constant*, *Phys. Lett.* 285. B477 (2000)
- [76] V.I. Zakharov, “Linearized gravitation theory and the graviton mass”, *JETP Lett.* **12**, 312 (1970).
- [77] H. van Dam and M.J.G. Veltman, “Massive and massless Yang-Mills and gravitational fields”, *Nucl.Phys. B* **22**, 397-411 (1970).

- [78] K. Skenderis and P.K. Townsend, Phys. Lett. B **468**, 46 (1999).
- [79] O. DeWolfe, D.Z. Freedman, S.S. Gubser, and A. Karch, Phys. Rev. D **62**, 046008 (2000).
- [80] D. Bazeia, C. Furtado, and A.R. Gomes, JCAP **0402**, 002 (2004).
- [81] D.Z. Freedman, C. Núñez, M. Schnabl, and K. Skenderis, Phys. Rev. D **69**, 104027 (2004).
- [82] A. Celi, A. Ceresole, G. Dall’Agata, A. Van Proeyen, M. Zagermann, Phys. Rev. D **71**, 045009 (2005).
- [83] D. Bazeia, C.B. Gomes, L. Losano, and R. Menezes, Phys. Lett. B **633**, 415 (2006).
- [84] V.I. Afonso, D. Bazeia and L. Losano, Phys. Lett. B **634**, 526 (2006).
- [85] M. Gremm, Phys. Lett. B **478**, 434 (2000).
- [86] M. Gremm, Phys. Rev. D **62**, 044017 (2000).
- [87] A. Karch, L. Randall, JHEP **0105**, 008 (2001).
- [88] C. Csáki, J. Erlich, T.J. Hollowood, and Y. Shriman, Nucl. Phys. B **581**, 309 (2000).
- [89] C. Csáki, J. Erlich, C. Grojean, and T.J. Hollowood, Nucl. Phys. B **584**, 359 (2000).
- [90] D. Bazeia, A.R. Gomes, JHEP **0405**, 012 (2004).
- [91] C. J. Isham, A. Salam and J. A. Strathdee. “f-dominance of gravity.” Phys. Rev. D3, 867-873 (1971).
- [92] T. Damour and I. I. Kogan. “Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity.” Phys. Rev. D66, 104024 (2002).
- [93] A. Padilla. “Ghost-free braneworld bigravity.” Class. Quant. Grav. 21, 2899-2918 (2004).
- [94] M. A. Clayton, J. W. Moffat, Phys. Lett. B **506**, 177 (2001).
- [95] J. Magueijo, Phys. Rev. D **79**, 043525 (2009).

- [96] I. Drummond, Phys. Rev. D **63**, 043503 (2001).
- [97] Masashi Nakasone, Ichiro Oda, “On Unitarity of Massive Gravity in Three Dimensions”, Prog.Theor.Phys. **121** (2009) 1389-1397.
- [98] S. Deser, “Ghost-free, finite, fourth order D=3 (alas) gravity”, Phys.Rev.Lett. **103** (2009) 101302.
- [99] S. Deser and Z. Yang, “Is Topologically Massive Gravity Renormalizable?”, Class. Quant. Grav. **7** (1990) 1603.
- [100] K.S. Stelle, “Classical Gravity with Higher Derivatives”, Gen.Rel.Grav. **9**, 353-371 (1978).
- [101] Steven Weinberg, “Ultraviolet Divergences In Quantum Theories Of Gravitation”,
- [102] E. M. Lifshitz, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **11**, 255-269 (1941).
- [103] Petr Horava, “Membranes at Quantum Criticality”, JHEP **0903**, 020 (2009).
- [104] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, “The Dynamics of general relativity”, (1962).
- [105] Thomas P. Sotiriou, Matt Visser, and Silke Weinfurtner, "Quantum gravity without Lorentz invariance", JHEP **0910**, 033 (2009).
- [106] A. Wang and R. Maartens, Phys. Rev. D **81**, 024009 (2010).
- [107] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “Consistent Extension of Horava Gravity”, Phys.Rev.Lett. **104**, 181302 (2010).
- [108] Diego Blas, Oriol Pujolas, and Sergey Sibiryakov, "Models of non-relativistic quantum gravity: The Good, the bad and the healthy", JHEP **1104**, 018 (2011).
- [109] Ian Kimpton and Antonio Padilla, “Lessons from the decoupling limit of Horava gravity”, JHEP 1007, **014** (2010).

- [110] Tao Zhu, Fu-Wen Shu, Qiang Wu, and Anzhong Wang, “General covariant Horava-Lifshitz gravity without projectability condition and its applications to cosmology”, *Phys.Rev. D* **85**, 044053 (2012).
- [111] J. Cardy, *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* (Cambridge University Press, 1996).
- [112] Domenico Orlando and Susanne Reffert, "On the Renormalizability of Horava-Lifshitztype Gravities", *Class.Quant.Grav.* **26**, 155021 (2009).
- [113] Miao Li and Yi Pang, “A Trouble with Horava-Lifshitz Gravity”, *JHEP* **0908**, 015 (2009).
- [114] D. Blas, O. Pujolas, and S. Sibiryakov, “On the Extra Mode and Inconsistency of Horava Gravity”, *JHEP* **0910**, 029 (2009).
- [115] Kazuya Koyama and Frederico Arroja, “Pathological behaviour of the scalar graviton in Horava-Lifshitz gravity”, *JHEP* **1003**, 061 (2010).
- [116] Horatiu Nastase, “On IR solutions in Horava gravity theories”, (2009).
- [117] Gianluca Calcagni, “Detailed balance in Horava-Lifshitz gravity”, *Phys.Rev. D* **81**, 044006 (2010).
- [118] Kazuya Koyama and Frederico Arroja, “Pathological behaviour of the scalar graviton in Horava-Lifshitz gravity”, *JHEP* **1003**, 061 (2010).
- [119] Christos Charmousis, Gustavo Niz, Antonio Padilla, and Paul M. Saffin, “Strong coupling in Horava gravity”, *JHEP* **0908**, 070 (2009).
- [120] Shinji Mukohyama, “Horava-Lifshitz Cosmology: A Review”, *Class.Quant.Grav.* **27**, 223101 (2010).
- [121] M. Fierz and W. Pauli, “On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field, *Proc.Roy.Soc.Lond.* **A173**, 211-232 (1939).
- [122] H. Lü, J. Mei, and C.N. Pope, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 091301 (2009).

- [123] G. Calcagni, *J. High Energy Phys.*, **09**, 112 (2009).
- [124] R. G. Cai, L. M. Cao, and N. Ohta, *Phys. Rev. D***80**, 024003 (2009); A. Kehagias and K. Sfetsos, *Phys. Lett. B***678**, 123 (2009); M.-i. Park, *J. High Energy Phys.* **09**, 123 (2009); A. Ghodsi and E. Hatefi, *Phys. Rev. D***81**, 044016 (2010); K. Izumi and S. Mukohyama, *ibid.*, **D81**, 044008 (2010); E. Kiritsis, *ibid.*, **D81**, 044009 (2010); G. Koutsoumbas, E. Papantonopoulos, P. Pasipoularides, and M. Tsoukalas, *ibid.*, **D81**, 124014 (2010); and references therein.
- [125] A. Borzou, K. Lin, and A. Wang, *J. Cosmol. Astropart. Phys.*, **05**, 006 (2011).
- [126] E. Kiritsis and G. Kofinas, *Nucl. Phys. B***821**, 467 (2009).
- [127] C. Bogdanos, and E. N. Saridakis, *Class. Quant. Grav.* **27**, 075005 (2010).
- [128] Y.-Q. Huang, A. Wang, and Q. Wu, *Mod. Phys. Lett.* **25**, 2267 (2010).
- [129] A. Wang and Q. Wu, *Phys. Rev. D***83**, 044025 (2011).
- [130] P. Horava and C.M. Melby-Thompson, *Phys. Rev. D***82**, 064027 (2010).
- [131] A. Wang and Y. Wu, *Phys. Rev. D***83**, 044031 (2011).
- [132] A.M. da Silva, *Class. Quantum Grav.* **28**, 055011 (2011).
- [133] Y.-Q. Huang and A. Wang, *Phys. Rev. D***83**, 104012 (2011).
- [134] J. Kluson, *Phys. Rev. D***83**, 044049 (2011).
- [135] T. Zhu, Q. Wu, A. Wang, and F.-W. Shu, *Phys. Rev. D***84**, 101502 (R) (2011).
- [136] Tao Zhu, Fu-Wen Shu, Qiang Wu, Anzhong Wang, *Phys. Rev. D***85** (2012) 044053
- [137] D. Lovelock, “The Einstein tensor and its generalizations”, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498–501.
- [138] D. Lovelock, “The four-dimensionality of space and the einstein tensor”, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 874–876.

- [139] C. M. Will, “The Confrontation between general relativity and experiment”, *Living Rev. Rel.* **9** (2005) 3. An update of the Living Review article originally published in 2001.
- [140] R. P. Woodard, “Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity”, *Lect. Notes Phys.* **720** (2007) 403–433.
- [141] H. A. Buchdahl, “Non-linear Lagrangians and cosmological theory”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **150** (1970) 1.
- [142] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “ $f(R)$ Theories Of Gravity”, *Rev. Mod. Phys.* **82** (2010) 451–497,
- [143] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$ theories,” *Living Rev. Rel.* **13** (2010) 3.
- [144] M. Banados and P. G. Ferreira, “Eddington’s theory of gravity and its progeny”, *Phys.Rev.Lett.* **105** (2010) 011101.
- [145] M. Banados and P. G. Ferreira, “Eddington’s theory of gravity and its progeny,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 011101 (2010)
- [146] K. Skenderis and P.K. Townsend, *Phys. Lett. B* **468**, 46 (1999).
- [147] E.A. Bergshoeff, O. Hohm, P.K. Townsend, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [148] R. B. Mann, A. Shiekh and L. Tarasov, *Nucl. Phys.* **B341**, 134 (1990).
- [149] D. Christensen and R. B. Mann, “The Causal structure of two-dimensional space-times,” *Class. Quant. Grav.* **9**, 1769 (1992)
- [150] G. R. Dvali, G. Gabadadze and M. Porrati, “4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space,” *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000)
- [151] H. Peng, and D. Stojkovic, *Phys. Rev. D* **90**, 024002 (2014).
- [152] M.A. Luty, M. Porrati, R. Rattazzi, *JHEP* **0309**, 029 (2003).

- [153] K. Hinterbichler, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 671 (2012).
- [154] R.L. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner, *Phys. Rev.* **117**, 1595 (1960); E. Poisson, *A Relativist's Toolkit* (Cambridge University Press, Cambridge, England), 2004; E. Dyer, and K. Hinterbichler, *Phys. Rev. D* **79**, 024028 (2009).
- [155] M. Fierz, and W. Pauli, *Proc. R. Soc. A* **173**, 211 (1939).
- [156] E.C.G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* **30**, 209 (1957).
- [157] G. R. Dvali, G. Gabadadze, M. Kolanovic, and F. Nitti, *Phys. Rev. D* **64**, 084004 (2001); G. Gabadadze, M. Shifman (ed.) et al.: *From fields to strings*, vol. 2 1061-1130 (2004); G. Gabadadze and M. Shifman *Phys. Rev. D* **69**, 124032 (2004); G. Dvali, *New J. Phys.* **8**, 326 (2006); G. Dvali, S. Hofmann, and J. Khoury, *Phys. Rev. D* **76**, 084006 (2007); D. Lopez Nacir, and F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **75**, 024003 (2007); G. Gabadadze, and A. Iglesias, *Class. Quan. Grav.* **25**, 154008.
- [158] P. Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys. B* **60**, 478 (1973); I. Antoniadis and E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **33** 2756 (1986).
- [159] G. Gabadadze, and M. Shifman, *Phys. Rev. D* **69**, 124032 (2004).
- [160] G. Dvali, *New J. Phys.* **8**, 326 (2006).
- [161] G. Dvali, S. Hofmann, and J. Khoury, *Phys. Rev. D* **76**, 084006 (2007).
- [162] N. Masashi, and I. Oda, *Phys. Rev. D* **79**, 104012 (2009).
- [163] N. Masashi, and I. Oda, *Prog. Theor. Phys.* **121**, 1389-1397 (2009).
- [164] D. Bazeia, A.R. Gomes, L. Losano, R. Menezes, *Phys. Lett. B* **671**, 402 (2009).
- [165] N. Afshordi, D. Chung and G. Geshnizjani, *Phys. Rev. D* **75**, 083513 (2007).
- [166] N. Afshordi et al, *Phys. Rev. D* **75**, 123509 (2007).
- [167] J. Magueijo, *Phys. Rev. D* **79**, 043525 (2009).
- [168] D. Bazeia, F.A. Brito, L. Losano, *JHEP* **0611**, 064 (2006).

- [169] J.F. Vazquez-Poritz, JHEP 12, 030 (2001); *ibid.* 09, 001 (2002).
- [170] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010)
- [171] A. De Felice and S. Tsujikawa, “f(R) theories,” *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010)
- [172] M. Banados and P. G. Ferreira, “Eddington’s theory of gravity and its progeny,” *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010)
- [173] M. S. Carroll and L. Mersini, *Phys. Rev. D* **64** (2001), 124008.
- [174] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [175] Y. -F. Cai and E. N. Saridakis, “Cyclic cosmology from Lagrange-multiplier modified gravity,” *Class. Quant. Grav.* **28**, 035010 (2011)
- [176] Y. -F. Cai and E. N. Saridakis, “Non-singular Cyclic Cosmology without Phantom Menace,” *J. Cosmol.* **17**, 7238 (2011)
- [177] T. P. Sotiriou, M. Visser and S. Weinfurtner, “Lower-dimensional Horava-Lifshitz gravity,” *Phys. Rev. D* **83**, 124021 (2011)
- [178] D. Blas, O. Pujolas and S. Sibiryakov, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 181302 (2010); *JHEP* **1104**, (2011) 018.
- [179] B. F. Li, A. Wang, Y. Wu and Z. C. Wu, “Quantization of (1+1)-dimensional Hořava-Lifshitz theory of gravity,” J. Ambjorn, L. Glaser, Y. Sato, and Y. Watabiki, *Phys. Lett. B* **722**, 172 (2013); C. Anderson, S. Carlip, J.H. Cooperman, P. Horava, R. Kommu, and P.R. Zulkowski, *Phys. Rev. D* **85**, 044027 (2012).
- [180] K. Becker, M. Becker, and J.H. Schwarz, “String theory and M-theory - A modern Introduction”, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [181] N. Ohta, and T. Torii, *Prog. Theor. Phys.*, 121, 959 (2009).
- [182] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,”

BIBLIOGRAFIA

- [183] M. Cvetič and H. H. Soleng, *Phys. Rev. D* **51**, 5768 (1995);
- [184] T. Zhu, F.-W. Shu, Q. Wu and A. Wang, *Phys. Rev. D* **85**, 044053 (2012).
- [185] R. C. Fonseca, F. A. Brito and L. Losano, *JCAP* **1201**, 032 (2012).
- [186] R. C. Fonseca, F. A. Brito and L. Losano, *Phys. Lett. B* **728**, 443 (2014).
- [187] A. Ahmed, B. Grzadkowski and J. Wudka, *JHEP* **1404**, 061 (2014).