Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Homologia de André-Quillen para Álgebras Comutativas

Ricardo Bruno Alves da Silva

João Pessoa – PB
Abril de 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Homologia de André-Quillen para Álgebras Comutativas

por

Ricardo Bruno Alves da Silva

Sob orientação do

Roberto Callejas Bedregal

e Sob co-orientação do

Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Abril de 2017

Catalogação na publicação
Universidade Federal da Paraíba
Biblioteca Setorial do CCEN

S586h Silva, Ricardo Bruno Alves da.
Homologia de André-Quillen para álgebras comutativas/ Ricardo Bruno Alves da Silva.- João Pessoa, 2017.
74 f.

Orientador: Roberto Callejas Bedregal.
Coorientador: Napoleón Caro Tuesta.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Álgebra Homológica. 2. Homologia de André-Quillen. 3. Álgebra e Módulos Simpliciais. 4. Diferenciais de Kähler. l. Título.

UFPB/BC CDU: 512.66(043)

Homologia de André-Quillen para Álgebras Comutativas

por

Ricardo Bruno Alves da Silva [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra Comutativa

Aprovada em 27 de Abril de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr.Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Orientador)

Luis A. Alba S.

Dr. Luis Alberto Alba Sarria – UFPB
(Examinador Externo)

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta – UFPB
(Examinador Interno)

Prof. Dr(a). Jacqueline Rojas – UFPB
(Suplente)

[1] O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

A minha Mãe, Josefa...

Agradecimentos

Aos meus pais, Josefa Guteneide e Ricardo Rogério, pelo esforço na minha educação e de meus irmãos. Agradeço também, aos meus irmãos, por serem sempre uma fonte de alegria e afeto. A minha sobrinha, Laura Sofia, pelas enumeras tardes de muitas brincadeiras com o tio.

Agradeço, a minha amiga da graduação Mayra Albuquerque. Agradeço, a meus estimados amigos da Pós-Graduação: Tony Lopes, Zé Goncalves, Pedro Pantoja, Clemerson Menezes, Esaú, Dayanne, Fábio Leite, Renato, Alan, Fernando, Adailton. Aos Amigos do Pensonato: Dona Graça, Antônio José, Apolônio Marques. Agradeço, aos professores da graduação, André Flores, José Arnaldo,José Barros, Moreno Bonutti, Rinaldo Vieira. Agradeço também, a Professora Jacqueline Rojas, uma Pessoa e Profissional Exemplar. Agradeço aos professores, Uberlandio Severo, Lizandro Sanchez e Napoleón Caro Tuesta. Agradeço, Roseli Agapito, pela compreensão. Eu Agradeço, ao colega Luis Alba, pelas muitas madrugadas regradas com muita matemática. E finalmente, sou muito grato a meu orientador Roberto Callejas Bedregal, pela paciência, e pelas criticas construtivas.

Resumo

No final da década de 60, André e Quillen introduziram uma teoria de cohomologia para álgebras comutativas, que hoje recebe o nome de cohomologia de André-Quillen. Neste trabalho, estudaremos o funtor de diferenciais de Kähler, que aqui é visto como funtor derivado (em um contexto não abeliano), que conecta as categorias: R-álgebras simpliciais e R-módulos simpliciais. Na primeira, através das resoluções simpliciais, notaremos que estas caracterizam certos objetos e diagramas desta categoria modelo, que por sua vez, são preservados pelo funtor de diferenciais de Kähler. Além disso, abordaremos o complexo cotangente de uma R-álgebra, e através dele, definir a homologia e cohomologia de André-Quillen, e naturalmente, expor algumas propriedades destas.

Palavras-chave: Diferenciais de Kähler, álgebras e módulos simpliciais, homologia de André-Quillen.

Abstract

At the end of the 60s, André and Quillen introduced a cohomology theory for commutative algebras, which today is called André-Quillen's cohomology. In this work, we will study Kähler differential functor, which is here seen as a derived functor (in a non-abelian context), which connects the categories: simplified R-algebras and simplified R-modules. In the first, through simplicial resolutions, we will notice that they characterize certain objects and diagrams of this model category, which in turn, are preserved by Kähler differential functor. In addition, we will approach the complex cotangent of a R-algebra, and through it, define the homology and cohomology of André-Quilen, and of course, expose some properties of these.

Keywords: Differentials of Kähler, Simplified algebras and modules, Homology of André-Quillen.

Sumário

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- Mod_S denota a categoria dos S-módulos ;
- Alg_R denota a categoria das R-álgebras ;
- $sMod_A$ denota a categoria dos A-módulos simpiciais ;
- $sAlg_R$ denota a categoria das R-álgebras simpliciais;
- $Comp(Mod_S)$ denota a categoria dos complexos de S-módulos;

Introdução

A Álgebra homológica é uma maneira de usar técnicas de topologia para estudar álgebra. No entanto, este caso é limitado apenas quando as categorias (como a nossa categoria de base) são abelianas. Na situação não-abeliana surgem alguns obstáculos, até mesmo para conceitos algébricos básicos. Por exemplo, a categoria de anéis é uma categoria não abeliana. Na Topologia algébrica, pensamos na teoria da homotopia como uma espécie de teoria da homologia não-abeliana. Por isso é natural perguntar-se se as técnicas homotópicas podem ser aplicadas em contextos não abelianos.

Esta pergunta foi primeiramente respondida por Quillen, que deu um tratamento axiomático para a teoria da homotopia[11]. Usando a intuição a partir do caso dos espaços topológicos, pode-se demonstrar que muitas categorias possuem propriedades semelhantes. Uma categoria dotada dessa estrutura é conhecida como uma categoria modelo. Uma das primeiras aplicações desta teoria, foi a construção do complexo cotangente de um morfismo de anéis. Se $R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de anéis, então o módulo de diferenciais de Kähler $\Omega_{S|R}$,é um S-módulo que representa o funtor de S-módulos

$$N \longmapsto Der_R(S, N)$$

onde $Der_R(S, N)$ é o conjunto das derivações R-lineares de S com coeficientes em N. Dada uma sequência de homomorfismos de anéis $Q \longrightarrow R \longrightarrow S$, pode-se mostrar que existe uma sequência exata de S-módulos

$$\Omega_{R|Q} \otimes_R S \longrightarrow \Omega_{S|Q} \longrightarrow \Omega_{S|R} \longrightarrow 0, \tag{1}$$

chamada de sequência de Jacobi-Zariski. Uma pergunta natural é se existe uma continuação de (1), para uma sequência exata longa de S-módulos . É claro que na situação abeliana, se obtém isso tomando-se os funtores derivados à esquerda, mas sendo a categoria das R-álgebras não abeliana, é necessária uma nova construção. Acontece que nas categorias de modelo existe uma boa noção de um funtor derivado à esquerda, isto permite a construção do complexo cotangente $L_{S|R}$ de um morfismo de anéis, que de fato prolongam a sequência (1).

A categoria modelo em que trabalharemos será a categoria das álgebras simpliciais sobre um anel. Esta categoria tem uma estrutura simplicial compatível com a estrutura de categoria do modelo, que permite a computação de funtores derivados à esquerda, através de resoluções simplicial. Resoluções simplicias são uma generalização direta de resoluções projetivas, no caso abeliano, e dão uma poderosa ferramenta para provar propriedades do complexo cotangente. Para nossos objetivos, seguiremos o seguinte roteiro:

No *Capítulo* 1, vamos definir e mostrar a existência (1.1) do módulo de diferenciais de Kähler como objeto universal, demonstraremos também algumas consequências da existência, com destaque, exatidão da sequência de Jacobi-Zariski (1.6) que será de grande importância no decorrer deste trabalho.

No *Capítulo* 2, vamos estudar inicialmente as categorias: álgebras e módulos simpliciais. Descriminando: a normalização de um módulo simplicial, o produto tensorial de dois módulos simpliciais e a extensão simplicial de uma álgebra simplicial. A seguir, veremos que a categoria das álgebras simpliais sobre um anel fixo R, é uma categoria modelo, e naturalmente, mostrar algumas propriedades que estão expostas no teorema 2.2 e no seu corolário. E por fim, vamos entender o que é uma resolução simplicial $A \longrightarrow B$ de uma morfismo de R-álgebras simpliciais, dando logo depois, uma demostração para existência (do caso particular) de uma R-álgebra S.

No *Capítulo* 3, vamos introduzir o conceito crucial deste trabalho: O Complexo Cotangente de um homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow S$. Logo a seguir, vamos mostrar que o complexo cotangente não depende da escolha da resolução simplicial (Lema 3.3). Para mais tarde, já de posse do maquinário construindo da seção 3.1.1, definir para os S-módulos: $Tor_n^S(L_\varphi, N)$ e $Ext_n^S(L_\varphi, N)$, que são n-ésima homologia e a n-ésima cohomologia de André-Quillen, respectivamente. E finalizando com algumas propriedades básicas acerca destas últimas, sendo a mais relevante, a proposição 3.22, que mostra a existência da sequência longa de homologia, através da sequência de Jacobi-Zariski (1.6).

E finalmente, o *Apêndices* $A.2$, $A.3$ são dedicados aos seguintes tópicos complementares: Noções de Álgebra Homológica, Categorias Modelo, respetivamente.

Capítulo 1

O Módulo de Diferenciais de Kähler

Neste capítulo, vamos definir e mostrar a existência (1.1) do módulo de diferenciais de Kähler como objeto universal, demonstraremos também alguns consequências da existência, com destaque, exatidão da sequência de Jacobi-Zariski (1.6) que será de grande importância no decorrer deste trabalho. Vale notar, que certos resultados usados em uma ou outra demonstração pode ser encontrados em nosso apêndice. A maior parte dos conceitos e resultados aqui expostos tem grande proximidade com [2].

1.1 Derivações

Sejam R um anel, S uma R-álgebra e N um S-módulo. Observe que S pode ser visto como R-módulo via estrutura do homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow S$, e consequentemente, N é também um R-módulo com a ação $rn = \varphi(r)s$ para quaisquer $r \in R$ e $n \in N$. Uma derivação R-linear de S com coeficientes em N é um homomorfismo $\delta : S \longrightarrow N$ de R-módulos que satisfaz a regra de Leibniz

$$\delta(st) = s\delta(t) + t\delta(s)$$

para quaisquer $s, t \in S$.

Observação 1.1. Os homomorfismos φ e δ satisfazem a seguinte igualdade: $\delta\varphi = 0$. Observe primeiro que $\delta(1) = 0$, para qualquer derivação δ. Com efeito,

$$\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = \delta(1) + \delta(1)$$

Agora, se δ é uma derivação R-linear, então

$$\delta(\varphi(r)) = \varphi(r)\delta(1) = 0,$$

para todo $r \in R$. O conjunto das derivações R-lineares de S com coeficientes em N é denotado por $Der_R(S;N)$. Este é um subconjunto de $Hom_R(S;N)$, que é um S-submódulo, com ação induzida

$$(s\delta)(t) = s\delta(t)$$

para todos $s, t \in S$ e $\delta \in Der_R(S;N)$.

Fato.1: Sejam M um S-módulo, as correspondências abaixo são homomorfismos de S-módulos

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Hom_s(M,N) \otimes_S Hom_R(S;M) & \longrightarrow & Hom_R(S;N) \\ \alpha \otimes \beta & \longrightarrow & \alpha\beta \end{array}}$$

A restrição

$$Hom_S(M;N) \otimes_S Der_R(S;M) \longrightarrow Der_R(S;N)$$

Em particular, para cada derivação $\delta : S \longrightarrow M$, a composta induz um homomorfismo de S-módulos $Hom_S(M;N) \longrightarrow Der_R(S;N)$.

Demonstração. Veja que tanto $Hom_R(S;M)$ como $Hom_R(S;N)$ são S-módulos, na verdade são bi-módulos, por conta de φ. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} Hom_S(M;N) \times Hom_R(S;M) \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f"'] & Hom_S(M,N) \otimes_S Hom_R(S;M) \arrow[dl, dotted] \\ Hom_R(S;N) & \end{tikzcd}$$

onde $f(\alpha, \beta)$=$\alpha\beta$. É façil ver que f é bilinear. Pela propriedade universal, segue-se que o primeiro deles é homomorfismo. Agora, é suficiente mostrar que para cada $(\alpha, \beta) \in Hom_S(M;N) \otimes_S Der_R(S;M)$,tem-se $\alpha\beta \in Der_R(S;N)$. Com efeito, dados $s, t \in S$,

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)(st) &= \alpha(\beta(st)) = \alpha(t\beta(s)) + s\beta(t) \\ &= t(\alpha\beta)(s) + s(\alpha\beta)(t) \end{aligned}$$

□

1.2 Módulo de Derivações de Kähler

Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Um *módulo de diferenciais de Kähler* de S com respeito a R é um S-módulo $\Omega_{S|R}$ equipado com uma derivação R-linear $\delta^{\varphi} : S \to \Omega_{S|R}$ tal que o par $(\Omega_{S|R}, \delta^{\varphi})$ é universal: para cada S-módulo N, o homomorfismo induzido

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Hom_s(\Omega_{S|R}, N) & \longrightarrow & Der_R(S; N) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha\delta^{\varphi} \end{array}}$$

é bijetivo.

Considere o homomorfismo de aneis

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \mu_R^S : & S \otimes_R S & \longrightarrow & S \\ & s \otimes t & \longmapsto & st \end{array}}$$

Seja $Ker(\mu_R^S) = I$. Via μ_R^S, o $S \otimes_R S$-módulo $\frac{I}{I^2}$, adquire uma estrutura de S-módulo. Pondo $\Omega_{S|R} = \frac{I}{I^2}$, considere $\delta^{\varphi} : S \longrightarrow \Omega_{S|R}$, com $\delta^{\varphi}(s) = \overline{1 \otimes s - s \otimes 1}$

O.B.S: Note que I é gerado pelos elementos $1 \otimes s - s \otimes 1$ com $s \in S$. De fato, veja que

$$\begin{aligned} \mu_R^S(1 \otimes s - s \otimes 1) &= \mu_R^S(s \otimes 1) - \mu_R^S(1 \otimes s) \\ &= s - s = 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $s \otimes t \in S \otimes_R S$, a igualdade

$$s \otimes t - st \otimes 1 = (s \otimes 1)(1 \otimes t - t \otimes 1)$$

é satisfeita. Agora, se $\sum_{i=1}^{n}(s_i \otimes t_i) \in I$, então $\sum_{i=1}^{n}(s_i t_i) = 0$. Sendo assim,

$$\sum_{i=1}^{n}(s_i \otimes t_i) = \sum_{i=1}^{n}(s_i \otimes 1)(1 \otimes t_i - t_i \otimes 1)$$

.

O anel $S \otimes_R S$ possui duas estruturas de S-módulo dadas pelos homomorfismos de anéis

$$f, g : S \longrightarrow S \otimes_R S$$

onde $f(s) = s \otimes 1$ e $g(s) = 1 \otimes s$. Estes induzem duas estruturas de S-módulos em I. Daí obtemos estruturas de S-módulos em $\frac{I}{I^2}$, que coincidem. De fato, para $t \in S$,

$\overline{s \otimes 1 - 1 \otimes s} \in \frac{I}{I^2}$ quaisquer, temos:

$$(t \otimes 1)(\overline{s \otimes 1 - 1 \otimes s}) = (1 \otimes t)(\overline{s \otimes 1 - 1 \otimes s}),$$

pois $(t \otimes 1 - 1 \otimes t)(s \otimes 1 - 1 \otimes s) \in I^2$.

Fato.2: O mapa δ^{φ} é uma derivação R-linear.

Demonstração. Provemos inicialmente que δ^{φ} é R-linear. Com efeito, sejam $s, t \in S$ e $r \in R$ quaisquer. Note que

$$\begin{aligned}
\delta^{\varphi}(s + rt) &= \overline{1 \otimes (s + rt) - (s + rt) \otimes 1} \\
&= \overline{1 \otimes s + r(1 \otimes t) - s \otimes 1 - r(t \otimes 1)} \\
&= \overline{1 \otimes s - s \otimes 1} + r(\overline{1 \otimes t - t \otimes 1}) \\
&= \delta^{\varphi}(s) + r\delta^{\varphi}(t)
\end{aligned}$$

E finalmente,

$$\begin{aligned}
s\delta^{\varphi}(t) + t\delta^{\varphi}(s) &= s(\overline{1 \otimes t - t \otimes 1}) + t(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) \\
&= (1 \otimes s)(\overline{1 \otimes t - t \otimes 1}) + (1 \otimes t)(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) \\
&= (1 \otimes s)(\overline{1 \otimes t - t \otimes 1}) + (t \otimes 1)(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) \\
&= \delta^{\varphi}(st)
\end{aligned}$$

□

Fato.3: Sejam M um S-módulo, $\delta : S \longrightarrow M$ uma R-derivação e

$$Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} S$$

homomorfismos de anéis Então, $\delta\varphi \in Der_Q(R; M)$.

Demonstração. De fato, para $r, t \in R$ quaisquer, temos

$$(\delta\varphi)(rt) \;=\; \delta(\varphi(rt)) = \delta(\varphi(r)\varphi(t)) = r\delta(\varphi(t)) + t\delta(\varphi(r))$$

Além disso, para $q \in Q$,

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)(t+qr) &= \delta(\varphi(t))+\delta(\varphi(qr)) = \delta(\varphi(t))+\delta(\varphi(\psi(q)r)) \\ &= \delta(\varphi(t))+\delta(\psi(q)\varphi(r) = \delta(\varphi(t))+\psi(q)\delta(\varphi(r)) \\ &= \delta(\varphi(t))+q\delta(\varphi(r))\end{aligned}$$

Isso prova o que se deseja. □

Teorema 1.1. *Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis Então, existe uma derivação universal ($\Omega_{S|R}$, δ^{φ}). Mais ainda, ela é única no sentido seguinte: se ($\hat{\Omega}_{S|R}$,$\delta^{\hat{\varphi}}$) é outra derivação universal com respeito a φ, então existe um único isomorfismo $\zeta : \Omega_{S|R} \longrightarrow \hat{\Omega}_{S|R}$, tal que $\delta^{\hat{\varphi}} = \zeta\delta^{\varphi}$.*

Demonstração. Para tanto, vamos construir um S-módulo $\Omega_{S|R}$ e uma derivação R-linear $\delta^{\varphi} : S \longrightarrow \Omega_{S|R}$, tais que o homomorfismo induzido descrito acima, é bijetivo para cada S-módulo N. Seja $\delta : S \longrightarrow N$ uma derivação R-linear. Como δ é um homomorfismo de R-módulos, a extensão de escalares produz um homomorfismo de S-módulos

$$\hat{\delta} : S \otimes_S S \longrightarrow N$$

onde $\hat{\delta}(s \otimes t) = s\delta(t)$. Note que $S \otimes_R S$ é um S-módulo, atráves da ação $s(x \otimes y) = (sx \otimes y)$. Obtemos assim, por restrição, um homomorfismo de S-módulos $I \longrightarrow N$, também denotado por $\hat{\delta}$. Veja que $\hat{\delta}(I^2) = 0$, pois dados $x = 1 \otimes t - t \otimes 1, y = 1 \otimes s - s \otimes 1 \in I$, $t, s \in S$, temos:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(xy) &= \hat{\delta}(1 \otimes st - s \otimes t - t \otimes s + ts \otimes 1) \\ &= \hat{\delta}(1 \otimes st) - \hat{\delta}(s \otimes t) - \hat{\delta}(t \otimes s) + \hat{\delta}(st \otimes 1) \\ &= \delta(st) - s\delta(t) - t\delta(s) + st\delta(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

uma vez que δ é uma R-derivação. Pelo teorema de fatoração, o diagrama

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\hat{\delta}"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ \frac{I}{I^2} \arrow[ur, dotted, "\bar{\delta}"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Desta forma,

$$\bar{\delta}(\overline{1 \otimes t - t \otimes 1}) = \hat{\delta}(1 \otimes t - t \otimes 1) = \delta(t) - t\delta(1) = \delta(t)$$

Afirmação: O par $(\Omega_{S|R}, \delta^{\varphi})$ é uma derivação universal, onde $\Omega_{S|R} = \frac{I}{I^2}$ e δ^{φ} é o mesmo mapa do Fato.2. De fato, pelo Fato.2 δ^{φ} é uma R-derivação. Agora, considere os homomorfismos de S-módulos:

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f: & Hom_s(\Omega_{S|R}; N) & \longrightarrow & Der_R(S; N) \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha\delta^{\varphi} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{rccc} g: & Der_R(S; N) & \longrightarrow & Hom_R(\Omega_{S|R}; N) \\ & \delta & \longmapsto & \bar{\delta} \end{array}}$$

Afirmamos que o homomorfismo g é inverso de f. De fato, veja que

$$\begin{aligned} (fg)(\delta) &= f(\bar{\delta}) = \bar{\delta}\delta^{\varphi} \\ (gf)(\alpha) &= g(\alpha\delta^{\varphi}) = \overline{\alpha\delta^{\varphi}} \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que $\bar{\delta}\delta^{\varphi} = \delta$ e $\overline{\alpha\delta^{\varphi}} = \alpha$. Note que

$$\begin{aligned} (\bar{\delta}\delta^{\varphi})(s) &= \bar{\delta}(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) = \delta(s) \\ (\overline{\alpha\delta}^{\varphi})(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) &= (\alpha\delta^{\varphi})(s) = \alpha(\overline{1 \otimes s - s \otimes 1}) \end{aligned}$$

Provamos assim a existência da derivada universal. Agora, provemos a unicidade. Considere as derivadas universais $(\Omega_{S|R},\ \delta^{\varphi})$ e $(\hat{\Omega}_{S|R}, \delta^{\hat{\varphi}})$ de $\varphi : R \longrightarrow S$. Pela propriedade universal, existem homomorfismos S-lineares $\zeta : \Omega_{S|R} \longrightarrow \hat{\Omega}_{S|R}$ e $\hat{\zeta} : \hat{\Omega}_{S|R} \longrightarrow \Omega_{S|R}$ tais que $\delta^{\hat{\varphi}} = \zeta\delta^{\varphi}$ e $\delta^{\varphi} = \hat{\zeta}\delta^{\hat{\varphi}}$. Daí resulta que

$$\begin{aligned} \delta^{\varphi} &= \hat{\zeta}\delta^{\hat{\varphi}} = \hat{\zeta}(\zeta\delta^{\varphi}) = (\hat{\zeta}\zeta)\delta^{\varphi} \\ \delta^{\hat{\varphi}} &= \zeta\delta^{\varphi} = \zeta(\hat{\zeta}\delta^{\hat{\varphi}}) = (\zeta\hat{\zeta})\delta^{\hat{\varphi}} \end{aligned}$$

Usando novamente a Propriedade universal, conclui-se que

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}\zeta &= 1_{\Omega_{S|R}} \\ \zeta\hat{\zeta} &= 1_{\hat{\Omega}_{S|R}}\end{aligned}$$

Daí conclui-se que $\Omega_{S|R} \cong \hat{\Omega}_{S|R}$

□

Observação 1.2. O S-módulo $\Omega_{S|R}$ é chamado de módulo de diferenciais de Kähler. Pela observação.1.1, $\Omega_{S|R} = 0$ se φ for sobrejetiva.

Corolário 1.2. Seja $S = R[Y]$ uma álgebra de polinômios sobre R, onde Y é um conjunto de variáveis, e $\varphi : R \longrightarrow S$ é o mapa inclusão. Então

$$\Omega_{S|R} = \oplus_{y \in Y} S dy \qquad e \qquad \delta^{\varphi}(r) = \textstyle\sum_{y \in Y} \frac{\partial r}{\partial y} dy$$

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que

$$\Omega_{S|R} = \oplus_{y \in Y} S_y$$

com $S_y = S$ para todo $y \in Y$. Considere o mapa

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \gamma : & S & \longrightarrow & \oplus_{y \in Y} S_y \\ & f & \longmapsto & (\frac{\partial f}{\partial y})_y \end{array}}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial y}$ é a derivada usual em relação a y. Note que γ está bem definida, uma vez que cada $f \in S$ é uma soma finita de parcelas do tipo

$$r_1 \cdot ... \cdot r_n y_1^{m_1} \cdot ... \cdot y_n^{m_n},$$

com $r_i \in R$, $y_j \in Y$, $m_k \in \mathbb{N}$. Por construção, é fácil ver que δ^{φ} é um R-derivação. Pelo teorema anterior, existe um único mapa S-linear $\phi : \Omega_{S|R} \longrightarrow \oplus_{y \in Y} S_y$, no qual o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\delta^{\varphi}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \Omega_{S|R} \arrow[dl, dotted, "\phi"] \\ \oplus_{y \in Y} S_y & \end{tikzcd}$$

Pondo $\delta^{\varphi}(y) = dy$, temos

$$\gamma(y) = \phi(dy) = (\frac{\partial f}{\partial y})_y = e_y,$$

onde este último é 1 em $y \in Y$ e zero nas demais componentes. Assim, ϕ é claramente sobrejetiva. Como $\oplus_{y\in Y} S_y$ é um S-módulo livre, existe uma única aplicação S-linear $\psi : \oplus_{y\in Y} S_y \longrightarrow \Omega_{S|R}$ tal que $\psi(e_y) = dy$, para cada $y \in Y$. Afirmamos que ψ é inversa de ϕ. De fato,

$$\begin{aligned}(\phi\psi)(\sum s_i e_{y_i}) &= \phi(\sum s_i dy_i) \\ &= \sum s_i \phi(dy_i) \\ &= \sum s_i e_{y_i}\end{aligned}$$

para $\sum s_i e_{y_i} \in \oplus_{y\in Y} S_y$ .Agora, temos que mostrar que $(\psi\phi)(\delta^{\varphi}(f)) = \delta^{\varphi}(f)$. Mostrar esta igualdade é equivalente a mostrar que $\delta^{\varphi}(f) = \sum_{y\in Y} \frac{\partial f}{\partial y} dy$. Para ver esta última, note que em ambos os lados desta igualdade coincidem para cada $y \in Y$, uma vez que $\delta^{\varphi}(y) = dy$ e S é um R-módulo livre. Segue-se daí que

$$\Omega_{S|R} = \oplus_{y\in Y} S_y$$

Para finalizar, veja que $\psi(e_y) = dy$, sendo $B = \{e_y\}_{y\in Y}$ uma base de $\oplus_{y\in Y} S_y$ e ψ é um isomorfismo. Então, $\overline{B} = \{dy\}_{y\in Y}$ é uma base em $\Omega_{S|R}$, portanto $\Omega_{S|R} = \oplus_{y\in Y} S dy$. □

Corolário 1.3. Seja $\psi : R[Y] \longrightarrow R[Z]$ um homomorfismo de álgebras, onde Y e Z são conjuntos de variáveis. Então,

$$\Omega_{\psi|R} : \Omega_{R[Y]|R} \longrightarrow \Omega_{R[Z]|R}, \quad y \longmapsto \sum_{z\in Z} \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

O teorema 1.1, nos diz que existe uma correspodencia $\Omega_{\triangle|R}$, que associa cada R-álgebra S a um único S-módulo $\Omega_{S|R}$.

Corolário 1.4. A correspondência $\Omega_{-|R}$, é um funtor na categoria das R-álgebras.

Demonstração. Seja um morfismo $f : S \longrightarrow \hat{S}$ na categoria das R-álgebras. O diagrama seguinte $A.3$

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R S \arrow[r, "\mu_S"] \arrow[d, "f\otimes f"] & S \arrow[d, "f"] \\ \hat{S} \otimes \hat{S} \arrow[r, "\mu_{\hat{S}}"] & \hat{S} \end{tikzcd}$$

é comutativo. De fato, pois:

$$s \otimes t \xmapsto{\mu_S} st \xmapsto{\quad f \quad} f(st)$$

$$s \otimes t \xmapsto{f\otimes f} f(s) \otimes f(t) \xmapsto{\hat{\mu}_S} f(s)f(t)$$

Assim, $(f \otimes f)|I_S \subset I_{\hat{S}} = Ker(\hat{\mu}_S)$. Isto induz o morfismo de S-módulos $\gamma : I_S \longrightarrow I_{\hat{S}}$, onde $\gamma = (f \otimes f)|I_S$. Um cálculo simples verifica-se que $\gamma(I_S^2) \subset I_{\hat{S}}^2$. Pelo teorema $A.3$, obtemos o morfismo de S-módulos

$$\Omega_{S|R} = \frac{I_S}{I_S^2} \xrightarrow{\overline{f\otimes f}} \frac{I_{\hat{S}}}{I_{\hat{S}}^2} = \Omega_{\hat{S}|R} \ ,$$

no qual $(\overline{f \otimes f})(\overline{s \otimes s}) = (\overline{\overline{f(s) \otimes f(t)}})$. Isto significa que aplicando $\Omega_{\triangle|R}$ em f, obtemos $\overline{f \otimes f} := \Omega_{f|R}$. Assim, considerando a sequência

$$S \xrightarrow{f} \hat{S} \xrightarrow{g} \bar{S}$$

de morfismos na categoria das R-álgebras, obtemos

$$\Omega_{S|R} \xrightarrow{\Omega_{f|R}} \Omega_{\hat{S}|R} \xrightarrow{\Omega_{g|R}} \Omega_{\bar{S}|R}$$

Para mostrar que $\Omega_{gf|R} = \Omega_{g|R}\Omega_{f|R}$, observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \Omega_{f|R}(\overline{s \otimes t}) &= (\overline{f \otimes f})(\overline{s \otimes t}) \\ &= \overline{\overline{f(s) \otimes f(t)}} \end{aligned}$$

Deste forma,

$$\begin{aligned} \Omega_{gf|R}(\overline{s \otimes t}) &= \overline{(gf \otimes gf)}(\overline{s \otimes t}) = \overline{\overline{((gf)(s) \otimes (gf)(t))}} \\ &= (\overline{\overline{g(f(s)) \otimes g(f(t))}}) = \Omega_{g|R}(\overline{(f(s) \otimes f(t))}) \\ &= \Omega_{g|R}\Omega_{f|R}(\overline{s \otimes t}) \end{aligned}$$

Para finalizar, considere o morfismo identidade $1_S : S \longrightarrow S$. Então,

$$\begin{aligned} \Omega_{1_S}|R(\overline{s \otimes t}) &= (\overline{1_S \otimes 1_S})(\overline{s \otimes t}) \\ &= \overline{1_S(s) \otimes 1_S(t)} \\ &= \overline{s \otimes t} \end{aligned}$$

Logo, $\Omega_{\triangle|R}$ é funtor.

□

Observação 1.3. Sejam

$$Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} S$$

homomorfismos de anéis. Considere a seguinte sequência de S-módulos

$$(*) \qquad \Omega_{R|Q} \otimes_R S \xrightarrow{\alpha} \Omega_{S|Q} \xrightarrow{\beta} \Omega_{S|R} \longrightarrow 0$$

Estes mapas são definidos da seguinte maneira: por restrição, a derivação R-linear $\delta^{\varphi} : S \longrightarrow \Omega_{S|R}$ é também uma derivação Q-linear. Consequentemente isto induz um homomorfismo $\beta : \Omega_{S|Q} \longrightarrow \Omega_{S|R}$ tal que $\beta\delta^{\varphi\psi} = \delta^{\varphi}$. Analogamente, $\delta^{\varphi\psi}\varphi : R \longrightarrow \Omega_{S|Q}$ é uma derivação Q-linear, que induz um homomorfismo R-linear $\hat{\alpha} : \Omega_{R|Q} \longrightarrow \Omega_{S|Q}$. Para ver como estes últimos dois mapas são encontrados, veja os diagramas abaixo:

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\delta^{\varphi\psi}"] \arrow[d, "\delta"'] & \Omega_{S|Q} \arrow[dl, dotted, "\beta"] \\
\Omega_{S|R} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\delta^{\psi}"'] & S \arrow[r, "\delta^{\varphi\psi}"] & \Omega_{S|Q} \\
\Omega_{R|Q} \arrow[urr, dotted, "\hat{\alpha}"'] & &
\end{tikzcd}$$

que são obtidos pelas propriedades universais de $\Omega_{S|Q}$ e $\Omega_{R|Q}$, respectivamente, uma vez que $\delta^{\varphi\psi}\varphi$ é uma R-derivação. O mapa α é obtido por extensão de escalares, pois $\Omega_{S|Q}$ é um S-módulo. Então

$$\boxed{\begin{array}{rccc} \alpha : & \Omega_{R|Q} \otimes_R S & \longrightarrow & \Omega_{S|Q} \\ & y \otimes s & \longmapsto & s\hat{\alpha}(y) \end{array}}$$

Proposição 1.5. Sejam M um S-módulo, $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo e a sequência

$$0 \longrightarrow Der_R(S; M) \xrightarrow{\chi} Der_Q(S; M) \xrightarrow{\Upsilon} Der_Q(R; M) \qquad (**)$$

onde $\Upsilon(\delta) = \delta\varphi$ e χ é a restrição de escalares. Então, a sequência de S-módulos (**) é exata.

Demonstração. Pela observação 1.3, pelo Fato.3, conclui-se que (**) é uma sequência de homomorfismos de S-módulos. É claro que χ é injetiva. Afirmamos que $IM(\chi) =$

$Ker(\Upsilon)$. De fato, dado $\delta \in IM(\chi) = Der_R(S;M)$, temos:

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)(r) &= \delta(\varphi(r)) = \delta(\varphi(r)1) := \delta(r)\\ &= 0\end{aligned}$$

Assim, $\delta \in Ker(\Upsilon)$. Por outro lado, se $\delta \in Ker(\Upsilon)$,então, $\delta\varphi = 0$. Consequentemente, para $r \in R$ e $s \in S$ quaisquer, temos:

$$\begin{aligned}\delta(rs) &:= \delta(\varphi(r)s) = \varphi(r)\delta(s) + s\delta(\varphi(r))\\ &:= r\delta(s)\end{aligned}$$

Assim, $\delta \in IM(\chi)$, e portanto, $IM(\chi) = Ker(\Upsilon)$. Logo, a sequência dada é exata. $\square$

Teorema 1.6. *Sejam M um S-módulo, $Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\varphi} S$ uma sequência de homomorfismos. A sequência*

$$\Omega_{R|Q} \otimes_R S \xrightarrow{\alpha} \Omega_{S|Q} \xrightarrow{\beta} \Omega_{S|R} \longrightarrow 0$$

de S-módulos é exata. Além disso, o mapa α é injetivo quando toda Q-derivação $R \longrightarrow M$, pode ser estendida para uma derivação $S \longrightarrow M$.

Demonstração. Usando o morfismo f, descrito no Teorema 1.1, podemos identificar a sequência exata (**) da seguinte maneira

$$0 \longrightarrow Hom_S(\Omega_{S|R};M) \xrightarrow{\beta_*} Hom_S(\Omega_{S|Q};M) \xrightarrow{\Phi} Hom_R(\Omega_{R|Q};\varphi_*(M)) \qquad (1)$$

onde $\varphi_*(M)$ é M, visto como R-módulo via φ, $\beta_* = Hom_S(\beta, M)$ e Φ é definida da seguinte maneira

$$\begin{tikzcd} Der_Q(S;M) \arrow[r, "\Upsilon"] & Der_Q(R;M) \\ Hom_S(\Omega_{S|Q},M) \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\Phi"] & Hom_R(\Omega_{R|Q};\varphi_*(M)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

com $\Phi(\sigma) = \sigma\hat{\alpha}$. É facil verificar que este diagrama comuta. Como a aplicação

$$\boxed{\begin{array}{rccc}\Gamma: & Hom_R(\Omega_{R|Q};\varphi_*(M)) & \longrightarrow & Hom_S(\Omega_{R|Q}\otimes_R S;M)\\ & \lambda & \longmapsto & \lambda^*\end{array}}$$

com $\lambda^*(\sum y_i \otimes s_i) \longmapsto \sum s_i\lambda(y_i)$, é um isomorfismo de S-módulos. Assim, podemos rescrever a sequência (1) da seguinte forma,

$$0 \longrightarrow Hom_S(\Omega_{S|R};M) \xrightarrow{\beta_*} Hom_S(\Omega_{S|Q};M) \xrightarrow{\alpha_*} Hom_R(\Omega_{R|Q}\otimes_R S;M)\ ()$$

Pelo teorema $A.5$, a sequência (*) é exata. Agora, observe que um homomorfismo de S-módulos $N' \longrightarrow N$ possui inversa à esquerda se o mapa induzido $Hom_S(N, M) \longrightarrow Hom_S(N', M)$ é sobrejetivo, para um S-módulo M. Assim, α possui uma inversa à esquerda se o mapa $Der_Q(S, M) \longrightarrow Der_Q(S, M)$ é sobrejetivo para todo S-módulo N. $\square$

Observação 1.4. Se R é uma álgebra livre sobre Q e S é uma álgebra livre sobre R, então, α é injetiva. Bem, segundo o teorema 1.5, precisamos encontrar um derivação $S \xrightarrow{\partial} M$ para uma Q-derivação $R \xrightarrow{\delta} M$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\delta"'] & S \arrow[dl, "\partial"] \\
M &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Pela hipótese, existem conjuntos $X \subset R$ e $Y \subset S$ tais que

$$R = Q[X] \quad e \quad S = R[Y],$$

consequentemente, S é uma álgebra livre sobre Q. Assim, o S-módulo $\Omega_{S|Q}$ é livre(corolário 1.2); levando em conta a derivação universal $\delta^{\varphi\psi}$ de $\Omega_{S|Q}$, podemos obter um homomorfismo S-linear $\Omega_{S|Q} \xrightarrow{\varphi_S} M$ definindo $\varphi_S(\delta^{\varphi\psi}(y)) = \delta(1)$, $y \in Y$ uma vez que $\Omega_{S|Q}$ é um S-módulo livre. Sendo assim, deve existir uma Q-derivação $\delta : S \longrightarrow M$(veja o mapa f do teorema 1.1). Seja a derivação universal δ^ψ do módulo $\Omega_{R|Q}$, então, deve existir um único mapa R-linear $\varphi_R : \Omega_{R|Q} \longrightarrow M$ tal que $\delta = \varphi_R \delta^\psi$. Do mapa inclusão ι obtemos $\Omega_\iota : \Omega_{R|Q} \longrightarrow \Omega_{S|Q}$ dado por $\sum a_i \delta^\psi(x_i) \longmapsto \sum a_i \delta^\psi(x_i)$. Veja o diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{R|Q} \arrow[dr, "\Omega_\iota"] & \\
R \arrow[ur, "\delta^\psi"] \arrow[dr, "\iota"] \arrow[ddr, "\delta"'] & & \Omega_{S|Q} \arrow[ddl, "\varphi_S"] \\
 & S \arrow[ur, "\delta^{\varphi\psi}"] \arrow[d, "\partial"] & \\
 & M &
\end{tikzcd}$$

Deste diagrama obtemos,

$$\begin{aligned} \delta^{\varphi\psi}\iota &= \Omega_\iota\delta^\psi \quad (1.1) \\ \delta &= \varphi_R\delta_\psi \\ \partial &= \varphi_S\delta^{\varphi\psi} \\ \varphi_R &= \varphi_S\Omega_\iota \end{aligned}$$

Este último decorre da propriedade universal de $\Omega_{R|Q}$ e do fato de φ_S ser também R-linear. Para finalizar, veja que

$$\begin{aligned} \partial\iota &= \varphi_S(\delta^{\varphi\psi}\iota) = \varphi_S(\Omega_\iota\delta^\psi) \quad (1.2) \\ &= (\varphi_S\Omega_\iota)\delta^\psi = \varphi_R\delta^\psi = \delta. \end{aligned}$$

Corolário 1.7. Se A e B são R-álgebras livres então,

$$(\Omega_{A|R} \otimes_R B) \oplus (\Omega_{B|R} \otimes_R A) \cong \Omega_{(A\otimes_R B)|R}$$

como $(A \otimes_R B)$-módulos.

Demonstração. Considere a sequência de R-álgebras

$$R \longrightarrow A \longrightarrow A \otimes_R B.$$

Note que esta sequência satisfaz as condições da observação anterior, assim obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_R (A \otimes_R B) \longrightarrow \Omega_{A\otimes_R B|R} \longrightarrow \Omega_{(A\otimes_R B)|A} \longrightarrow 0$$

de $(A \otimes_R B)$-módulos. Podemos identificar esta sequência da seguinte maneira

$$0 \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_R B \longrightarrow \Omega_{A\otimes_R B|R} \longrightarrow \Omega_{B|R} \otimes_R A \longrightarrow 0$$

Pelo corolário 1.2, é fácil concluir que o R-módulo $\Omega_{B|R}\otimes_R A$ é livre (portanto, projetivo) consequentemente a sequencia logo acima é cindida, o que implica que

$$(\Omega_{A|R} \otimes_R B) \oplus (\Omega_{B|R} \otimes_R A) \cong \Omega_{(A\otimes_R B)|R}.$$

□

Capítulo 2

Álgebras Simpliciais

Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Considerando o funtor

$$\boxed{\begin{array}{ccc} Mod_S & \longrightarrow & Mod_S \\ M & \longmapsto & S \otimes_R M, \end{array}}$$

e a sequência exata de S-módulos

$$0 \longrightarrow M^{'} \longrightarrow M \longrightarrow M^{''} \longrightarrow 0,$$

obtém-se uma sequência exata de S-módulos

$$(*) \quad S \otimes_R M^{'} \longrightarrow S \otimes_R M \longrightarrow S \otimes_R M^{''} \longrightarrow 0,$$

Onde o homorfismo da esquerda é em geral não injetivo, a menos que S seja plano como R-módulo. Por meio desta última sequência, obtemos a sequência longa exata

$$... \longrightarrow Tor_n^R(S, M') \longrightarrow Tor_n^R(S, M) \longrightarrow Tor_n^R(S, M'') \longrightarrow ...$$

Sendo $Tor_n^R(S, M) = H_n(P_S \otimes_R N)$, onde P_S é uma resolução projetiva de S. Daí podemos observar que:

(1) Cada R-módulo S possui uma resolução projetiva P_S,

(2) Cada P_S é única a menos de homotopia de complexos de R-módulos,

(3) Defina $T_\varphi = P_S \otimes_R S$, para cada S-módulo M,

$$H_n(T_\varphi \otimes_S M) \cong Tor_n^R(S, M).$$

(4) Existe o isomorfismo de S- módulos $Tor_0^R(S, M) \cong S \otimes_R M$.

Nosso objetivo é estender a sequência exata do Teorema 1.6 a uma sequência longa de S-módulos, assim como a sequência $(*)$, só que desta vez queremos que a estrutura de R-álgebra de S seja respeitada. Para isso, vamos usar um complexo de S-módulos projetivos L_φ (veja 3.1) tal que

$$H_0(L_\varphi \otimes_S N) = \Omega_\varphi \otimes_S N$$

Levando isso em conta, devemos escolher uma categoria de R-álgebras que possua uma noção adequada para homotopia de morfismos, de forma que as resoluções possuam as seguintes propriedades:
$(1)'$ A estrutura de R-álgebra de S é respeitada,
$(2)'$ Devem ser únicas a menos de homotopia,
$(3)'$ O funtor de diferenciais de Kähler Ω_- preserva homotopias em um sentido adequado.
A categoria das R-álgebras simpliciais nos dá um contexto certo para obter tais resoluções.

2.1 Módulos e Álgebras Simplicias

A categoria dos números ordinais Δ tem como objetos os conjuntos $[n] = \{0, 1, ...n\}$ e os morfismos são mapas $\phi : [n] \longrightarrow [m]$ que preservam ordem. Em particular, os mapas

$$\begin{array}{rcl} d_n^i : [n-1] & \longrightarrow & [n] \\ \{0, 1, ...i-1, i, i+1, ...n-1\} & \longmapsto & \{0, 1, ...i-1, i+1, ...n\} \end{array}$$

com $0 \leq i \leq n$. E os mapas

$$\begin{array}{rcl} s_n^j : [n+1] & \longrightarrow & [n] \\ \{0, 1, ...n+1\} & \longmapsto & \{0, 1, ...j, j, ...n\} \end{array}$$

com $0 \leq j \leq n$. Estes mapas são chamados de co-faces e co-degenerações, respectivamente, e satisfazem as igualdades:

$$d_n^j d_{n-1}^i = d_n^i d_{n-1}^{j-1}, \quad se \quad 0 \leq i < j \leq n \tag{2.1}$$

$$s_n^j s_{n+1}^i = s_n^i s_{n+1}^{j+1}, \quad se \quad 0 \leq i \leq j \leq n \tag{2.2}$$

$$s_n^j d_{n+1}^i = d_n^i s_{n-1}^{j-1}, \quad se \quad 0 \leq i < j \leq n \tag{2.3}$$

$$s_n^j d_{n+1}^i = Id, \quad se \quad i = j, j+1 \tag{2.4}$$

$$s_n^j d_{n+1}^i = d_n^{i-1} s_{n-1}^j, \quad se \quad 0 \leq j < i-1 \leq n \tag{2.5}$$

Observação 2.1. (i) Por construção, as aplicações d_n^i e s_n^j são injetivas e sobrejetivas, respectivamente.
(ii) Para denotar o conjunto das aplicações sobrejetivas monótonas de $[m]$ em $[n]$, usaremos $\{m, n\}$.

Um objeto simplicial em uma categoria $\mathcal{C}$ é um funtor contra-variante $X : \Delta^{op} \longrightarrow \mathcal{C}$. Um morfismo $\tau : X \longrightarrow Y$ de objetos simpliciais é uma transformação natural, isto é, uma coleção $\tau_n : X_n \longrightarrow Y_n$ de morfismos em $\mathcal{C}$, para cada $n \geq 0$ (que denotamos $X([n]) = X_n$) no qual o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{\tau_n} & Y_n \\ \downarrow{\scriptstyle \phi^*} & & \downarrow{\scriptstyle \phi^{**}} \\ X_m & \xrightarrow{\tau_m} & Y_m \end{array}$$

para cada mapa $\phi : [m] \longrightarrow [n]$ em Δ, sendo $\phi^* = X(\phi)$ e $\phi^{**} = Y(\phi)$. Sejam os morfismos induzidos

$$X(d_n^i) : X_n \longrightarrow X_{n-1} \quad e \quad X(s_n^j) : X_n \longrightarrow X_{n+1}$$

Que são chamados de faces e degenerações, respectivamente. Escreveremos $\mathbf{d}_n^i$, $\mathbf{s}_n^j$ em vez de, $X(d_n^i)$, $X(s_n^j)$, respectivamente. Estes mapas devem satisfazem as igualdades:

$$\mathbf{d}_{n-1}^i \mathbf{d}_n^j = \mathbf{d}_{n-1}^{j-1} \mathbf{d}_n^i, \quad se \quad 0 \leq i < j \leq n \tag{2.6}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^i \mathbf{s}_n^j = \mathbf{s}_{n+1}^{j+1} \mathbf{s}_n^i, \quad se \quad 0 \leq i \leq j \leq n \tag{2.7}$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^i \mathbf{s}_n^j = \mathbf{s}_{n-1}^{j-1} \mathbf{d}_n^i, \quad se \quad 0 \leq i < j \leq n \tag{2.8}$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^i \mathbf{s}_n^j = Id, \quad se \quad i = j, j+1 \tag{2.9}$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^i \mathbf{s}_n^j = \mathbf{s}_{n-1}^j \mathbf{d}_n^{i-1}, \quad se \quad 0 \leq j < i-1 \leq n \tag{2.10}$$

Lema 2.1. Todo morfismo $\phi : [n] \longrightarrow [m]$ em Δ, é composição de co-faces ou co-degenerações.

Observação 2.2. Por conta deste lema, podemos rescrever a definição de morfismo $\tau : X \longrightarrow Y$ de objetos simpliciais como sendo uma coleção $\tau_n : X_n \longrightarrow Y_n$ de morfismos em $\mathcal{C}$ que comutam com as faces e as degenerações.

Exemplo 2.1. Seja um anel R. Uma R-módulo simplicial V é um objeto simplicial na categoria dos R-módulos tal que V_n possui estrutura de R-módulo e as faces e degenerações são homomorfismos de R-módulos. Analogamente, um R-álgebra simplicial V, é um objeto simplicial na categoria dos R-álgebras tal que A_n possui estrutura de R-álgebra e as faces e degenerações são homomorfismos de R-álgebras. Um módulo simplicial sobre uma R-álgebra simplicial A é R-módulo simplicial V tal que V_n é um A_n-módulo e os mapas face e degeneração são compatíveis com aqueles de A, isto é, para cada $n \geq 0$, a aplicação $\alpha_n : A_n \times V_n \longrightarrow A_{n-1} \times V_{n-1}$, com $\alpha(a, v) = (\mathbf{d}_n^i(a), \mathbf{D}_n^j(v))$, faz o diagrama seguinte comutar

$$\begin{tikzcd}
A_n \times V_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"] & V_n \arrow[d, "D_n^j"] \\
A_{n-1} \times V_{n-1} \arrow[r, "p_{n-1}"] & V_{n-1}
\end{tikzcd}$$

onde $\mathbf{d}_n^i$, $\mathbf{D}_n^j$ são faces de A e V, respectivamente, e p_m é o mapa produto. De forma semelhante, obtém-se um diagrama que é comutativo com as degenerações.

Exemplo 2.2. Seja um R-módulo N. Definindo $s(N)$, com

$$s(N)_n \quad = \quad N \quad e \quad \mathbf{d}_n^i = 1_N = \mathbf{s}_n^j \quad , quando \quad 0 \leq i, j \leq n,$$

é fácil ver que $s(N)$ é um R-módulo simplicial. Para uma R-álgebra S, é evidente que $s(S)$ é um R-álgebra simplicial.

2.1.1. Normalização. Dado um R-módulo simplicial V, podemos associá-lo ao um complexo de R-módulos definido da seguinte maneira

$$(\mathbf{V}, \partial) = ... \longrightarrow V_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} V_n \xrightarrow{\partial_n} V_{n-1} \longrightarrow ...$$

com $\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \mathbf{d}_n^i : V_n \longrightarrow V_{n-1}$. Quando a estrutura deste complexo estiver clara, denotaremos simplesmente por $\mathbf{V}$. A n-enésima homologia de $\mathbf{V}$ é o R-módulo:

$$H_n(\mathbf{V}) = \frac{Ker(\partial_n)}{IM(\partial_{n+1})}$$

Agora, dada uma R-álgebra (R-módulo) simplicial A, o complexo de Moore (NA, ∂) é um complexo definido por

$$(NA)_n = \cap_{i=0}^{n-1} Ker(\mathbf{d}_n^i)$$

com $\partial_n : NA_n \longrightarrow NA_{n-1}$ induzido pela restrição de d_n^n.

O n-ésimo módulo de homotopia $\pi_n(A)$ de A é a n-ésima homologia do complexo de Moore, isto é:

$$\begin{aligned}\pi_n(A) &\cong H_n(NA,\partial)\\ &= \frac{\cap_{i=0}^{n} Ker(\mathbf{d}_n^i)}{\mathbf{d}_{n+1}^{n+1}(\cap_{i=0}^{n} Ker(\mathbf{d}_{n+1}^i))}\end{aligned}$$

Observação 2.3. Na verdade, pode-se demonstrar que os complexos $(\mathbf{V},\partial)$ e (NV,∂) são equivalentes na homologia, isto é, $H_*(\mathbf{V},\partial)\cong H_*(NV,\partial)$. Além disso, como sugerido acima, a correspondência $N : sMod \longrightarrow Comp(Mod_R)$ é um funtor, mais que isso, é uma equivalência de categorias. Para mais informações, veja 1.

Exemplo 2.3. O complexo correspondente ao R-módulo simplicial $s(N)$ do exemplo.2.2 é

$$... \longrightarrow N \xrightarrow{1_N} N \xrightarrow{0} N \xrightarrow{0} 0...$$

Observe que módulo de homologia é nulo, exceto em $n=0$.

Exemplo 2.4. Seja uma R-álgebra simplicial A e $\pi_0(A)$-módulo N. Então, $s(N)$ é A-módulo simplicial e a estrutura de A_n-módulo de $s(N)_n$ é induzida via composta dos homomorfismos de anéis

$$A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} ... \qquad \xrightarrow{d_1} A_0 \xrightarrow{\pi} \frac{A_0}{\mathbf{d}_1^1(Ker(\mathbf{d}_1^0))} = \pi_0(A)\ .$$

2.1.3. Produto Tensorial. O produto tensorial de A-módulos simpliciais V e W é o A-módulo simplicial denotado por $V\otimes_A W$ com

$$(V\otimes_A W)_n \;=\; V_n\otimes_{A_n} W_n, \quad para\,cada \quad n\geq 0, \tag{2.11}$$

e os mapas de face e degeneração são induzidos de V e W. Para ver a última afirmação, considere as faces $d_n^i : V_n \longrightarrow V_{n-1}$, $\hat{d}_n^i : W_n \longrightarrow W_{n-1}$, com $0\leq i,j\leq n$, e veja o diagrama

$$\begin{tikzcd} V_n\times W_n \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\hat{\otimes}\circ\alpha"] & V_n\otimes_{A_n} W_n \arrow[d, dotted, "D_n^i"] \\ V_{n-1}\times W_{n-1} \arrow[r, "\hat{\otimes}"] & V\otimes_{A_{n-1}} W_{n-1} \end{tikzcd} ,$$

onde $\alpha(v,w)=(d_n^i(v),\hat{d}_n^i(w))$. Note que α é A-bilinear, então, pela Propriedade Universal do produto tensorial, obtemos D_n^i e

$$D_n^i(v\otimes w) \;=\; (\hat{\otimes}\circ\alpha)(v\times w)=d_n^i(v)\otimes\hat{d}_n^i(w)$$

Agora é fácil mostrar que D_n^i satisfaz as igualdades (2.1)-(2.5). Analogamente para as degeneraçãoes.

2.2 Resoluções Simpliciais

Nesta seção discutiremos as resoluções simpliciais. O primeiro passo é introduzir extensões livres, que são álgebras simpliciais, cujo complexo associado é formado de módulos livres conce trados em níveis não-negativos. Mais precisamente,

2.2.1. Extensões Simpliciais livres. Seja A uma R-álgebra simplicial. Chamamos de extensão simplicial livre de A em um conjunto graduado $X = \{X_n\}_{n\geq 0}$ de indeterminadas, uma R-álgebra simplicial, denotada por $A[X]$, que satisfaz as seguintes condições:
(i) $A[X]_n = A_n[X_n]$ é um anel de polinômios sobre A_n com o conjunto de variáveis X_n;
(ii) $s_j(X_n) \subset X_{n+1}$, para cada j, n;
(iii) A inclusão $A \hookrightarrow A[X]$ é um morfismo de R-álgebras simpliciais;

Exemplo 2.5. Se $S = R[Y]$ é um anel de polinômios sobre R, então a álgebra simplicial $s(S)$ é uma extensão livre de $s(R)$, com $X_n = Y$ para cada n. De fato, tendo em mente o exemplo 2.2, é fácil mostrar isso.

Exemplo 2.6. Se $A[X]$ é uma extensão livre de A e $\Phi : A \longrightarrow B$ é um morfismo de R-álgebras simpliciais então, $B \otimes_A A[X]$ é uma extensão livre de $B[X]$. De fato,

$$\begin{aligned} (B \otimes_A A[X])_n &\overset{2.1.3.}{=} B_n \otimes_{A_n} (A[X])_n \\ &\overset{2.2.1.}{=} B_n \otimes_{A_n} A_n[X_n] \\ &\overset{A.8}{=} B_n[X_n] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por 2.1, $B \otimes_A A[X]$ é R-álgebra simplicial. Além disso, tendo em vista as degenerações $s_n^j : A_n[X_n] \longrightarrow A_{n+1}[X_{n+1}]$ e $\hat{s}_n^j : B_n \longrightarrow B_{n+1}$,com $0 \leq j \leq n$, obtemos por2.1, a degeneração

$$\begin{array}{rccc} S_n^j : & B_n \otimes_{A_n} A_n[X_n] & \longrightarrow & B_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_{n+1}[X_{n+1}] \\ & b \otimes a & \longmapsto & \hat{s}_n^j(b) \otimes s_n^j(a) \end{array}$$

Tendo em mente a aplicação da proposição $A.8$, cada variável de X em $B[X]$ pode ser identificada por $1 \otimes X_n$ então,

$$S_n^j(1 \otimes X_n) = 1 \otimes \hat{s}_n^j(X_n) \in X_{n+1}$$

uma vez que $A[X]$ é extensão livre de A. Usando novamente a identificação mencionada acima, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
B_n \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, "\hat{s}_n^j"] & B_n \otimes_{A_n} A_n[X_n] \arrow[d, "S_n^j"] \\
B_{n+1} \arrow[r, "\iota_{n+1}"] & B_{n+1} \otimes_{A_{n+1}} A_{n+1}[X_{n+1}]
\end{tikzcd}$$

Veja que

$$\begin{aligned}
(S_n^j \iota_n)(b) &= S_n^j(b \otimes 1) = \hat{s}_n^j(b) \otimes 1 \\
(\iota_{n+1} \hat{s}_n^j)(b) &= \iota_{n+1}(\hat{s}_n^j(b)) = \hat{s}_n^j(b) \otimes 1
\end{aligned}$$

Pela observação2.2, ι é um morfismo de B-álgebras simpliciais.

2.2.1 A categoria $sAlg_R$ como uma categoria modelo.

A partir de agora, vamos considerar a categoria $sAlg_R$ como uma categoria modelo. Como toda boa categoria modelo(veja a definição $A.19$) ela possui três classes distintas de mapas: equivalências fracas, fibrados e cofibrados; além de satisfazer alguns axiomas. Nosso objetivo é caracterizar cada uma destas classes de mapas e mostrar algumas consequências destas caraterizações. Vamos começar com a seguinte teorema

Teorema 2.2. *Seja R um anel comutativo e a categoria $sAlg_R$ das álgebras simpliciais sobre R. Então $sAlg_R$ possui estrutura de categoria módelo, onde $f : A \longrightarrow B$ é*

1. *Uma equivalência fraca se $\pi_* A \longrightarrow \pi_* B$ é um isomorfismo,*

2. *Um um fibrado se o mapa induzido $A \longrightarrow \pi_0 A \times_{\pi_0 Y} B$ é uma sobrejeção e*

3. *Um cofibrado se é retrato de um morfismo livre.*

Demonstração. Veja 4.3. da referência 1. □

Definição 2.1. (D. Quillen): Um morfismo $f : A \longrightarrow B$ na categoria $sAlg_R$ é livre quando existem subconjuntos $C_q \subset B_q$ para cada q tal que:
(i) $\eta C_p \subset C_q$ sempre que $\eta : [q] \longrightarrow [p]$ é um mapa sobrejetivo e monótono em Δ,
(ii) $f_q + g_q : A_q \coprod FC_q \longrightarrow Z_q$ é um isomorfismo para todo q, onde FC_q é uma álgebra livre gerada por C_q e $g_q : FC_q \longrightarrow Z_q$ é único mapa de álgebras que é identidade em C_q.

Lema 2.3. Seja $t : [n+k] \longrightarrow [n]$ uma aplicação sobrejetiva e monótona. Então, existem k números inteiros, que não são únicos,

$$0 \leq i_1 \leq n, \qquad 0 \leq i_2 \leq n+1, ..., 0 \leq i_{k-1} \leq n+k-2, \qquad 0 \leq i_k \leq n+k-1$$

tais que

$$t = s_n^{i_1} \circ s_{n+1}^{i_2} \circ ... \circ s_{n+k-2}^{i_{k-1}} \circ s_{n+k-1}^{i_k}.$$

Demonstração. Veja IX em 6. □

Corolário 2.4. 1. Todo objeto C em $sAlg_R$ é fibrante,

2. Toda extensão simplicial livre $A[X]$ de um objeto A em $sAlg_R$ é um cofibrante,

3. O morfismo inclusão $A \longrightarrow A[X]$ em $sAlg_R$ é cofibrado,

4. Dado um diagrama comutativo de álgebras simpliciais

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\Phi"] \\ A[X] \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\kappa"] & C \end{tikzcd}$$

onde Φ é uma equivalência fraca sobrejetiva, existe um morfismo κ que preserva a comutatividade do diagrama, mais que isso, κ é única no seguinte sentido: se $\hat{\kappa} : A[X] \longrightarrow B$ é morfismo de R-álgebras simpliciais que preserva a comutatividade do diagrama então, κ e $\hat{\kappa}$ são homotópicos.

Demonstração. Para ver (1), consulte 1, 4.3. A existência vem do subitem (i) do item MC4 da definição $A.19$. A respeito da unicidade, considere a aplicação bijetiva

$$\Phi_* : \pi^l(A[X], B) \longrightarrow \pi^l(A[X], C), \quad com \quad [\lambda] \longmapsto [\Phi\lambda]$$

fornecida a partir proposição $A.14$. Sejam $k, \hat{k} : A[X] \longrightarrow B$ morfismos em $sAlg_R$ que preservam a comutatividade do quadrado comutativo acima. Sendo assim, $h = \Phi k$ e $h = \Phi\hat{k}$. Por Φ_*, $[\Phi k] = [\Phi\hat{k}]$. Pela injetividade de Φ_*, vem $[k] = [\hat{k}]$ que implica $k \overset{l}{\sim} \hat{k}$. Por (i) e (ii) da proposição $A.19$ e pela Observação $A.13$, $k \sim \hat{k}$. Para verificar (3), provemos que o mapa inclusão $\iota : A \longrightarrow A[X]$ é livre. Para cada $q \geq 0$, considere o conjunto $X_q \subset A_q[X_q]$. É claro que dado um mapa $\eta : [q] \longrightarrow [p]$ sobrejetivo e monótono em Δ, temos o conjunto $X_p \in A_p[X_p]$. Pelo lema 2.3 e o item (ii) da definição 2.2, $\eta^*(X_p) \subset X_q$. Na categoria das R-álgebras, o mapa descrito em (ii) da definição 2.1, é dado pelo diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & A_q \arrow[dl, "i_{n_o}"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\
A_q \otimes_{A_q} A_q[X_q] \arrow[rr, dotted, "f_q+1_{A_q[X_q]}"] & & A_q[X_q] \\
 & A_q[X_q] \arrow[ul, "i_{n_1}"] \arrow[ur, "1_{A_q[X_q]}"'] &
\end{tikzcd}$$

uma vez que $F(X_q) = A_q[X_q]$. Deste diagrama obtemos $(f_q + 1_{A_q[X_q]})(a \otimes a') = aa'$. Considere o morfismo de R-álgebras $\theta : A_q \longrightarrow A_q \otimes_{A_q} A_q[X_q]$ dado por $\theta(\sum a_i x^i) = \sum a_i \otimes x^i$. É fácil verificar que um é inverso do outro. Isso mostra que ι é livre. Para finalizar, observe o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "\iota"'] & A \arrow[r, "1_A"] \arrow[d, "\iota"'] & A \arrow[d, "\iota"'] \\
A[X] \arrow[r, "1_{A[X]}"] & A[X] \arrow[r, "1_{A[X]}"] & A[X]
\end{tikzcd}$$

Esse diagrama nos diz que ι é retrato dela mesma, que por sua vez é livre, logo ι é um cofibrante. $\square$

Exemplo 2.7. A categoria $sMod_R$ dos R-módulos simpliciais, possui estrutura de categoria modelo.(4.2,1)

Exemplo 2.8. Seja uma R-álgebra A. Usando o exemplo 2.4, não difícil verificar que o homomorfismo $\phi : \pi_0(A) \longrightarrow S$ de R-álgebras, induz um morfismo de R-álgebras simpliciais $\Phi : A \longrightarrow s(S)$. Pelo exemplo 2.2, temos

$$\pi_n(\Phi) = \begin{cases} \phi & \text{se} \quad n = 0, \\ 0 & \text{se} \quad n > 0 \end{cases}$$

Assim, Φ é uma equivalência fraca se, e só se, ϕ é bijetiva e $\pi_n(A) = 0$ para $n \geq 1$.

Definição 2.2. Seja $\phi : A \longrightarrow B$ um morfismo de R-álgebras simpliciais. Uma resolução simplicial de B sobre A é uma fatoração de ϕ como um diagrama

$$A \longrightarrow A[X] \xrightarrow{\Phi} B$$

de morfismos de álgebras simpliciais, com $A \longrightarrow A[X]$ uma extensão livre e Φ uma equivalência fraca sobrejetiva. Usualmente, vamos nos referir com $A[X]$ para uma resolução simplicial de B sobre A.

Definição 2.3. Uma R-álgebra simplicial aumentada é um par (A, f), onde A é uma R-álgebra simplicial e f é um homomorfismo de R-álgebras sobrejetivo

$$A_0 \longrightarrow B \quad com \quad f\mathbf{d}_1^0 = f\mathbf{d}_1^1$$

Uma R-álgebra simplicial aumentada é acíclica se o complexo corresponde é acíclico, isto é, $H_n(\mathbf{A}) = 0 \quad se \quad n > 0$ e $H_0(\mathbf{A}) \cong B$, com o isomorfismo induzido por f.

Observação 2.4. Da última igualdade, conclui-se que $d_1^1(Ker(d_1^0)) \subset Ker(f)$. Então, o homomorfismo induzido $H_0(\mathbf{A}) \longrightarrow B$ é sobrejetivo. Uma resolução simplicial $R[X]$ de uma R-álgebra A pode ser vista como uma R-álgebra simplicial aumentada e acíclica que satisfaz as seguintes condições:

1. A R-álgebra $R_n[X_n]$ é livre como R-módulo para todo $n \geq 0$,
2. O módulo $H_n(R[X])$ é nulo para todo $n > 0$,
3. A R-álgebra $H_0(R[X])$ é isomorfo a R-álgebra A,

De fato, considerando o homomorfismo de $\varphi : R \longrightarrow A$ e supondo que exista a resolução simplicial desta álgebra, obtemos uma fatoração de φ

$$\begin{tikzcd} s(R) \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & R[X] \arrow[d, "\Phi"] \\ & s(A) \end{tikzcd}$$

Como Φ é uma equivalência fraca, $H_0(N(s(A))) = A$ e $H_n(N(s(A))) = 0$ para $n \geq 1$, temos

$$H_n(R[X]) = 0, \quad n > 0 \quad e \quad H_0(R[X]) \cong A$$

Além disso, como $R[X]$ é uma extensão livre, temos que $A_n[X_n]$ é livre como R-módulo. Sendo assim, a resolução simplicial $R[X]$ é resolução livre(portanto, projetiva) da R-álgebra A vista como R-módulo.

Exemplo 2.9. Seja S um R-álgebra, M um R-módulo e $R[X]$ uma resolução simplicial da R-álgebra S. Pela observação.2.4, vale

$$\pi_n(R[X] \otimes_R M) = Tor_n^R(S, M).$$

para cada inteiro n.

Seja uma extensão livre $A \longrightarrow A[X]$. Para cada inteiro n, existe um produto de morfismos

$$\mu_n : A_n[X_n] \otimes_{A_n} A_n[X_n] \longrightarrow A_n[X_n]$$

Daí obtemos um morfismo de A-álgebras simplicias

$$\mu : A[X] \otimes_A A[X] \longrightarrow A[X].$$

É conveniente escrever $A[X, X]$, em vez de $A[X] \otimes_A A[X]$.
Sejam os morfismos $\Phi, \Psi : A[X] \longrightarrow B$ de álgebras simpliciais. Existe um morfismo induzido de álgebras simpliciais

$$\Phi \odot \Psi : A[X, X] \longrightarrow B$$

com $(\Phi \odot \Psi)_n(x \otimes \hat{x}) = \Phi_n(x)\Psi_n(\hat{x})$. De fato, usando o diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_n[X_n] \times A_n[X_n] \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "\hat{\otimes} \circ \alpha"] & A_n[X_n] \otimes_{A_n} A_n[X_n] \arrow[d, dotted, "(\Phi \odot \Psi)_n"] \\
B_n \times B_n \arrow[r, "\hat{\otimes}"] & B_n \otimes_{B_n} B_n
\end{tikzcd}$$

com $\alpha(x, \hat{x}) = (\Phi_n(\hat{x}), \Psi_n(x))$. Pelo item (1) da proposição $A.7$, podemos identificar $(\Phi \odot \Psi)_n(x \otimes \hat{x}) = \Phi_n(x)\Psi_n(\hat{x})$. Agora, fica fácil verificar que este morfismo comuta com as faces e degenerações em cada nível $n \geq 0$.

Definição 2.4. Seja o morfismo $1_{A[X]} \odot 1_{A[X]} : A[X, X] \longrightarrow A[X]$. Um objeto cilidro de $A[X]$ é uma resolução simplicial de $A[X]$ sobre $A[X, X]$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd}
A[X, X] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "1_{A[X]} \odot 1_{A[X]}"'] & A[X, X, Y] \arrow[d, "\Phi"] \\
& A[X]
\end{tikzcd}$$

Os morfismos Φ e Ψ são homotópicos quando existe um diagrama de morfismos de A-álgebras simpliciais

$$\begin{tikzcd}
A[X, X] \arrow[r] \arrow[dr, "\Phi \odot \Psi"'] & A[X, X, Y] \arrow[d] \\
& B
\end{tikzcd}$$

2.2.5. Existência de uma resolução simplicial para uma álgebra. Seja um inteiro positivo fixo r. Nosso objetivo é construir um resolução simplicial para uma R-álgebra S, tendo em vista o Exemplo 2.2. Para ver a versão geral, isto é, dado um morfismo de R-álgebras simpliciais, existe um resolução simplicial (como na definição 2.2) veja [1,(3.5)]. Nosso ponto de partida é a seguinte definição.

Definição 2.5. Sejam um anel simplicial K, G um conjunto de índices e um conjunto X de elementos z_g de K_{k-1} que satisfaz as seguintes condições:

(a) $\mathbf{d}^i_{r-1}(z_g) = 0, \quad g \in G \quad e \quad 0 \leq i \leq r-1,$

(b) $\mathbf{d}^i_{r-1}(z_g) \neq 0$, se $r = 1$.

Para cada inteiro $n \geq 0$, denotaremos por $K_n[X_n]$, K_n-álgebra livre tendo o seguinte conjunto gerador

$$X_n = \{y_{g,t}, \quad g \in G \quad e \quad t \in \{\, n, r\}\}.$$

Definição 2.6. Considere os homomorfismos de anéis seguintes:

(1) Para cada inteiro $0 \leq i \leq n$, $\mathbf{s}^i_n : K_n[X_n] \longrightarrow K_{n+1}[X_{n+1}]$, obtido estendendo o homomorfismo $\mathbf{s}^i_n : K_n \longrightarrow K_{n+1}$ e

$$\mathbf{s}^i_n(y_{g,t}) = y_{g,t \circ s^i_n}$$

(2) Para cada inteiro $0 \leq i \leq n$, $\mathbf{d}^i_n : K_n[X_n] \longrightarrow K_{n-1}[X_{n-1}]$, obtido estendendo o homomorfismo $\mathbf{d}^i_n : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ e

$$\mathbf{d}^i_n(y_{g,t}) = \begin{cases} y_{g,t \circ d^i_n}, & \text{se} \quad t \circ d^i_n \text{ é sobrejetiva,} \\ 0, & \text{se} \quad t \circ d^i_n = d^{\hat{i}}_r \circ \hat{t} \quad \text{com } r \neq \hat{i} \\ z_{g,\hat{t}}, & \text{se} \quad t \circ d^i_n = d^r_r \circ \hat{t} \end{cases}$$

Lema 2.5. Sejam $t : [p] \longrightarrow [q]$ uma aplicação sobrejetiva e monótona, um inteiro $0 \leq i \leq p$, um R-módulo simplicial V e um elemento x de V_q com

$$\mathbf{d}^j_q(x) = 0, \quad 0 \leq j \leq q.$$

Então o elemento $\mathbf{d}^i_p(x_t)$ é igual à $x_{t \circ d^i_p}$ se a aplicação $t \circ d^i_p$ é sobrejetiva e à 0 se não é.

Demonstração. Veja 6. □

Proposição 2.6. Sejam um anel simplicial K e um conjunto X de elementos z_g em K_{r-1} tais que

$$\mathbf{d}^i_{r-1}(z_g) = 0, \quad g \in G \quad e \quad 0 \leq i \leq r-1.$$

Então, o anel $K_n[X_n]$ da definição 2.5, os homomorfismos $\mathbf{d}^i_n$ e $\mathbf{s}^i_n$ da definição 2.6, formam um anel simplicial $K[X]$.

Demonstração. Para tanto, é suficiente a verificação das igualdades (2.7) − (2.11). Como estas são satisfeitas pelos elementos do subanel K_n de $K_n[X_n]$ então, basta demonstrar para os geradores $y_{g,t}$. Começamos com a igualdade (2,8),

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}^i_{n+1} \circ \mathbf{s}^j_n)(z_{g,t}) &= \mathbf{s}^i_{n+1}(y_{g,t \circ s^j_n}) = y_{g,t \circ s^j_n \circ s^i_{n+1}} \overset{2.2}{=} y_{g,t \circ s^i_n \circ s^{j+1}_{n+1}} \\ &= \mathbf{s}^{j+1}_{n+1}(y_{g,t \circ s^i_n}) = (\mathbf{s}^{j+1}_{n+1} \circ \mathbf{s}^i_n)(y_{g,t}) \end{aligned}$$

Para verificar a igualdade (2.9), vamos dividi-lo em três casos. Se a função $t \circ d^i_n$ é sobrejetiva, então a função $t \circ s^j_n \circ d^i_{n+1} \overset{2.3}{=} t \circ d^i_n \circ s^{j-1}_{n-1}$ também é sobrejetiva. Desta forma,

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}^i_{n+1} \circ \mathbf{s}^j_n)(y_{g,t}) &= \mathbf{d}^i_{n+1}(y_{g,t\circ s^j_n}) = y_{g,t\circ s^j_n \circ d^i_{n+1}} = y_{g,t\circ d^i_n \circ s^{j-1}_{n-1}} \\ &= \mathbf{s}^{j-1}_{n-1}(y_{g,t\circ d^i_n}) = (\mathbf{s}^{j-1}_{n-1} \circ \mathbf{d}^i_n)(y_{g,t})\end{aligned}$$

se a função $t \circ d^i_n$ é igual a $d^{\hat{i}}_r \circ \hat{t}$ com $\hat{i} \neq r$. Usando a igualdade

$$t \circ s^j_n \circ d^i_{n+1} \overset{2.3}{=} t \circ d^i_n \circ s^{j-1}_{n-1} = d^{\hat{i}}_k \circ \hat{t} \circ s^{j-1}_{n-1}$$

Temos,

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}^i_{n+1} \circ \mathbf{s}^j_n)(y_{g,t}) &= \mathbf{d}^i_{n+1}(y_{g,t\circ s^j_n}) = 0 \\ &= (\mathbf{s}^{j-1}_{n-1} \circ \mathbf{d}^i_n)(y_{g,t}) = \mathbf{s}^{j-1}_{n-1}(0) = 0.\end{aligned}$$

Se a função $t \circ d^i_n = d^r_r \circ \hat{t}$ então, pela igualdade

$$t \circ s^j_n \circ d^i_{n+1} \overset{2.3}{=} t \circ d^i_n \circ s^{j-1}_n = d^r_r \circ \hat{t} \circ s^{j-1}_{n-1}$$

Temos

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}^i_{n+1} \circ \mathbf{s}^j_n)(y_{g,t}) &= \mathbf{d}^i_{n+1}(y_{g,t\circ s^j_n}) = z_{g,\hat{t}\circ s^{j-1}_{n-1}} \\ &= \mathbf{s}^{j-1}_{n-1}(z_{g,\hat{t}}) = (\mathbf{s}^{j-1}_{n-1} \circ \mathbf{d}^i_n)(y_{g,t}).\end{aligned}$$

De maneira análoga, verifica-se a igualdade (2.11). Para verificar a igualdade (2.10), observe que a função $t = t \circ s^j_n \circ d^i_{n+1}$ é sobrejetiva. Assim,

$$(\mathbf{d}^i_{n+1} \circ \mathbf{s}^j_n)(y_{g,t}) = \mathbf{d}^i_{n+1}(y_{g,t\circ s^j_n}) = y_{g,t\circ s^j_n \circ d^i_{n+1}} = y_{g,t}.$$

E finalmente, a igualdade (2.7) é satisfeita se provamos que o elemento $(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t})$ é determinado pela aplicação $d^j_n \circ d^i_{n-1}$. O lema seguinte prova isto. □

Lema 2.7. O elemento $(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t})$ é igual a $y_{g,t\circ d^j_n \circ d^i_{n-1}}$ se a função $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é sobrejetiva, ao elemento $z_{g,\hat{t}}$ se $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é da forma $d^r_r \circ \hat{t}$ e ao elemento 0 se $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é de outra forma.

Demonstração. Se função $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é sobrejetiva então, $t \circ d^j_n$ é também sobrejetiva. Daí seguem as igualdades

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = \mathbf{d}^i_{n-1}(y_{g,t \circ d^j_n}) = y_{g,t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}}.$$

Se a função $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é da forma $d^r_r \circ \hat{t}$, podemos dividi-lo em dois casos. No primeiro, $t \circ d^j_n$ é sobrejetiva, e portanto,

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = \mathbf{d}^i_{n-1}(y_{g,t \circ d^j_n}) = z_{g,\hat{t}}.$$

No último, a função $t \circ d^j_n$ é da forma $d^r_r \circ \hat{\hat{t}}$, a função $\hat{\hat{t}} \circ d^i_{n-1}$ é então igual a $\hat{t}$. De acordo com a lema 2.5,

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = \mathbf{d}^i_{n-1}(z_{g,\hat{\hat{t}}}) = z_{g,\hat{\hat{t}} \circ d^i_{n-1}} = z_{g,\hat{t}}.$$

Se a função $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é de outra forma, podemos dividi-la em três casos. No primeiro, a função $t \circ d^j_n$ é sobrejetiva, a função $t \circ d^j_n \circ d^i_{n-1}$ é então igual a $d^{\hat{i}}_r \circ \hat{t}$ com $\hat{i} \neq r$, e portanto

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = d^i_{n-1}(y_{g,t \circ d^j_n}) = 0$$

No segundo, a função $t \circ d^j_n$ é da forma $d^{\hat{i}}_r \circ \hat{t}$ com $\hat{i} \neq r$, e portanto,

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = d^i_{n-1}(0) = 0.$$

No terceiro, a função $t \circ d^j_n$ é da forma $d^r_r \circ \hat{t}$ e a função $\hat{t} \circ d^i_{n-1}$ não é sobrejetiva, então pela lema 2.5,

$$(\mathbf{d}^i_{n-1} \circ \mathbf{d}^j_n)(y_{g,t}) = d^i_{n-1}(z_{g,\hat{t}}) = 0$$

□

Observação 2.5. O conjunto $\{r, r\}$ possui um único elemento que é a identidade i_d, consequentemente a K_r-álgebra livre $K_r[X_r]$ é gerada por elementos y_g iguais aos elementos z_{g,i_d}. Assim, o homomorfismo $\mathbf{d}^i_r : K_r[X_r] \longrightarrow K_{r-1}[X_{r-1}]$ é descrito da seguinte maneira

$$\mathbf{d}^i_r(y_{g,i_r}) = \begin{cases} z_g, & \text{se} \quad i = r, \\ 0, & \text{se} \quad i \neq r \end{cases}$$

Proposição 2.8. Sejam um anel simplicial K e um conjunto X de elementos z_g de K_{r-1} que satisfazem a condição seguinte

$$\mathbf{d}^i_{r-1}(z_g) = 0, \quad g \in G, \quad 0 \leq i \leq r-1.$$

Então, o anel simplicial $K[X]$ possui as propriedades seguintes

1. O anel simplicial K é um subanel simplicial de $K[X]$,
2. Para todo inteiro n, a K_n-álgebra $K_n[X_n]$ é livre,
3. Para todo inteiro $n < r$, os anéis K_n e $K_n[X_n]$ são iguais,
4. Para todo inteiro n, os anéis K_n e $K_n[X_n]$ são iguais se conjunto de índices G é vazio,
5. Para todo inteiro n, os anéis K_n e $K_n[X_n]$ são de tipo finito se conjunto de índices G é finito,
6. Para todo inteiro $n < r-1$, o homomorfismo natural de $\pi_n(K)$ para $\pi_n(K[X])$ é um isomorfismo,
7. O homomorfismo natural de $\pi_{r-1}(K)$ para $\pi_{r-1}(K[X])$ é um epimorfismo. Seu núcleo é o submódulo do K_{r-1}-módulo $\pi_{r-1}(K)$ gerado por elementos $\overline{z_g}$ de $\pi_{r-1}(K)$ com z_g de K_{r-1}.

Demonstração. As cinco primeiras decorrem imediatamente da definição 2.5 e da observação seguinte. O conjunto $\{n, r\}$ é finito, vazio se $n < r$. A propriedade (3) implica na propriedade (6). Resta verificar a propriedade (7). Por definição,

$$\pi_{r-1}(K) = \frac{\cap_{i=0}^{r-1} Ker(\mathbf{d}_{r-1}^i)}{\mathbf{d}_r^r(\cap_{i=0}^{r-1} Ker(\mathbf{d}_r^i))}$$

.

Pondo $I_{r-1} = \cap_{i=0}^{r-1} Ker(\mathbf{d}_{r-1}^i)$ e $J_{r-1} = \mathbf{d}_r^r(\cap_{i=0}^{r-1} Ker(\mathbf{d}_r^i))$. Analogamente, sejam os ideais de $\hat{I}_{r-1}$ e $\hat{J}_{r-1}$ do anel $K_{r-1}[X]$, cujo quociente nos dá o módulo $\pi_{r-1}(K[X])$. Usando o morfismo inclusão $K \hookrightarrow K[X]$, obtemos o homomorfismo

$$\frac{I_{r-1}}{J_{r-1}} \longrightarrow \frac{\hat{I}_{r-1}}{\hat{J}_{r-1}}$$

A propriedade (3) nos dá

$$K_{r-1} = K_{r-1}[X], \quad I_{r-1} = \hat{I}_{r-1}, \quad J_{r-1} \subset \hat{J}_{r-1}$$

O homomorfismo acima é um epimorfismo. Os elementos z_g pertencentes a I_{r-1} são representados pelos elementos $\overline{z}_g$ de $\frac{I_{r-1}}{J_{r-1}}$. O núcleo do epimorfismo acima é o K_{r-1}-módulo gerado pelos elementos $\overline{z}_g$ se, e só se, o ideal $\hat{J}_{r-1}$ de K_{r-1} é gerado pelos elementos do ideal J_{r-1} e por elementos z_g. Pela observação 2.5, é claro que não somente os elementos de J_{r-1} mas também os elementos z_g pertencem a $\hat{J}_{r-1}$. Reciprocamente, considere um elemento $x \in \hat{J}_{r-1}$. Existe portanto um elemento $y \in K_d[X]$

tal que

$$\mathbf{d}_r^i(y) = 0 \quad se \quad 0 \leq i \leq d \quad e \quad \mathbf{d}_r^r(y) = x$$

Podemos escrever y da seguinte forma

$$y = \alpha + \sum \alpha_g y_g, \quad \alpha \in K_r \quad e \quad y_g \in K_r[X]$$

Da observação 2.5, para $i \neq r$ o elemento $\mathbf{d}_r^i(y_g)$ é nulo, por conseguinte, $\mathbf{d}_r^i(\alpha)$ é nulo. Ou seja, $\mathbf{d}_r^r(\alpha)$ é um elemento de J_{r-1}. O elemento

$$x = \mathbf{d}_r^r(y) = \mathbf{d}_r^r(\alpha) + \sum \mathbf{d}_r^r(\alpha_g)\mathbf{d}_r^r(y_g) = \mathbf{d}_r^r(\alpha) + \sum \mathbf{d}_r^r(\alpha_g) z_g$$

pertence portanto não somente ao ideal $\hat{J}_{r-1}$, mas também ao ideal gerado por elementos de J_{r-1} e elementos z_g, como queríamos demonstrar. □

Definição 2.7. Uma resolução passo-a-passo (K, X^*) de uma A-álgebra B é formada A-álgebra simplicial aumentada K, e de um conjunto X^m para todo $m \geq 0$. O homomorfismo aumentado é um homomorfismo da A-álgebra K_0 para a A-álgebra B. O conjunto X^m é formado de elementos do anel

$$K_m[X^0, X^1, ..., X^{m-2}, X^{m-1}]$$

que satisfazem a condição seguinte para todo inteiro positivo m

$$\mathbf{d}_m^i(z) = 0, \quad 0 \leq i \leq m$$

Além disso, as condições seguintes devem ser satisfeitas: (A.3.1) Para todo $n \geq 0$, a A-álgebra K_n é livre.
(A.3.2) O núcleo da sobrejeção do anel $\pi_0(K)$ para o anel B, como ideal, é gerado por representantes do conjunto $X^0 \subset K_0$.
(A.3.3) Para todo $m \geq 1$, o módulo $\pi_m(K_m[X^0, X^1, ..., X^{m-2}, X^{m-1}])$ é gerado por todos os representantes do conjunto X^m.

Observação 2.6. Considere uma resolução passo-a-passo (K, X^*) de uma A-álgebra B. Utilizando a seguinte notação,

$$K^m = K[X^0, X^1, .., X^m],$$

temos a cadeia crescente de A-álgebras simpliciais

$$K \subset K^0 \subset .... \subset K^m \subset K^{m+1} \subset ...$$

Da terceira propriedade da proposição 2.8, temos

$$K_n^{m-1} = K_n^m, \quad n \leq m$$

Passando o limite, podemos definir um A-álgebra simplicial $K[X^*]$ para cada nível n, da seguinte maneira

$$K_n^m = K_n[X^*], \quad n-1 \leq m$$

Proposição 2.9. Seja uma resolução passo-a-passo (K, X^*) de uma A-álgebra B. Então, a A-álgebra simplicial $K[X^*]$ é uma resolução simplicial da A-álgebra B. Esta resolução simplicial possui as propriedades seguintes:

1. A álgebra simplicial K é um subálgebra simplicial da álgebra simplicial $K[X^*]$,
2. Para todo inteiro $n \geq 0$, a K_n-álgebra $K_n[X^*]$ é livre,
3. As álgebras K_0 e $K_0[X^*]$ são iguais,
4. As álgebras K_n e $K_n[X^*]$ são iguais se os conjuntos $X^0, X^1, ..., X^{n-1}$ são vazios,
5. A K_n-álgebra $K_n[X^*]$ é de tipo finito se os conjuntos $X^0, X^1, ..., X^{n-1}$ são finitos.

Demonstração. A primeira propriedade decorre da definição, a terceira propriedade é caso particular da quarta. Considere as seguintes álgebras:
$K_n \longrightarrow K_n^0 = K_n[X^0], \quad K_n^0 \longrightarrow K_n^1 = K_n^0[X^1], ..., K_n^{n-2} \longrightarrow K_n^{n-1} = K_n^{n-2}[X^{n-1}]$
Pela proposição 2.8, eles são livres em geral, triviais se os conjuntos $X^0, X^1, ..., X^{n-1}$ são vazios, tipo finito se os conjuntos $X^0, X^1, ..., X^{n-1}$ são de tipo finito. Por composição, obtemos um K_n-álgebra $K_n[X^*]$ que é livre em geral, trivial, no primeiro caso particular, e tipo finito no segundo caso particular. As cinco propriedades são assim demonstradas. Em particular a A-álgebra $K_n[X^*]$ livre. Agora, resta provar que $K[X^*]$ é uma álgebra simplicial aumentada acíclica. Suponha que o inteiro n é diferente de zero e considere as igualdades

$$K_i[X^*] = K_i^n = K_i^{n-1}[X^*], \quad i = n-1, n, n+1$$

Daí decorre a seguinte igualdade $\pi_n(K[X^*]) \cong \pi_n(K^{n-1}[X^n])$. Tendo em mente a sétima propriedade da proposição 2.8, seja o módulo $\frac{\pi_n(K^{n-1})}{I}$, onde I é núcleo do epimorfismo descrito na proposição 2.8. Como I é gerado pelos elementos representados pelos elementos do conjunto X^n, então pela condição A.3.3 da definição 2.7, $\frac{\pi_n(K^{n-1})}{I} = 0$. Assim, o módulo $\pi_n(K[X^*])$ é nulo, uma vez que $\frac{\pi_n(K^{n-1})}{I} \cong \pi_n(K[X^*])$.Observe que $\pi_0(K[X^*]) \cong \pi_0(K[X^0])$. Usando novamente a Proposição 2.8, considere o quociente do anel $\pi_0(K)$ pelo ideal J(que é o núcleo da sobrejeção da Proposição 2.8), que é gerado por X^0. Pela condição A.3.2 da definição 2.7, J é igual ao núcleo da sobrejeção $\pi_0(K) \longrightarrow B$(dada pela álgebra simplicial aumentada K). Ou seja, $\pi_0(K[X^*]) \cong B$.. As condições da observação 2.4, são assim satisfeitas. □

Teorema 2.10. *Uma A-álgebra B possui uma resolução simplicial* B_*.

Demonstração. Pela proposição 2.8, é suficiente encontrar uma resolução passo-a-passo (K, X^*) da A-álgebra B e considerar a resolução simplicial B_* igual a $K[X^*]$ da A-álgebra B. Seja uma A-álgebra livre F e um ideal I, de modo que exista um isomorfismo da A-álgebra $\frac{F}{I}$ para a A-álgebra B. Considere a A-álgebras simplicial K igual à A-álgebra simplicial $\overline{F}$ aumentada com a sobrejeção de F para B. Por conta disto, temos

$$\pi_0(K) \cong \pi_0(\overline{F}) \cong F$$

O núcleo da sobrejeção de $\pi_0(K)$ para B é igual a I. Escolhemos um sistema de geradores X^0 do ideal I e, portanto, a condição (A.3.2) da definição 2.7 está satisfeita. Por exemplo, $X = I$. A escolha dos outros conjuntos X^n é feita por indução. Suponha que os $X^0, X^1, ...X^{n-1}$ satisfaçam as condições (A.3.2) e (A.3.3) da definição 2.7. O anel simplicial $K^{n-1} = K[X^0, X^1, .., X^{n-1}]$ está bem definido. Escolhendo os elementos de X^n tais que:

$$z \in K^{n-1} = K[X^0, X^1, .., X^{n-1}], \quad \mathbf{d}_n^i(z) = 0, \quad 0 \leq i \leq n$$

Agora basta mostrar que a condição (A.3.3) da definição 2.7 é satisfeita também no nível n. As imagens dos elementos z do seguinte módulo são definidas no seguinte anel

$$\overline{z} \in \pi_n(K[X^0, X^1, .., X^{n-1}]) \quad em \quad K[X^0, X^1, .., X^{n-1}]$$

e devem formar um sistema de geradores. Por exemplo, o conjunto X^n é formado pelos elementos z do anel em questão, nos quais $\mathbf{d}_n^i(z)$ é zero. Temos, assim, uma construção passo-a-passo da A-álgebra B. □

Corolário 2.11. Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Se $R[X]$ e $R[Y]$ são duas resoluções simpliciais de φ, então, elas são únicas a menos de homotopia, isto é, os complexos de R-módulos $R[X]$ e $R[Y]$ são homotópicos.

Demonstração. Pela hipótese, obtemos os diagramas em $sAlg_R$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[X] \arrow[d, "\sim"] \\ R[Y] \arrow[r, "\sim"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[Y] \arrow[d, "\sim"] \\ R[X] \arrow[r, "\sim"] & S \end{tikzcd}$$

que são comutativos, pois cada um deles fatora o mesmo mapa φ. Por (4) de 2.4, existem as R-álgebras simpliciais $k : R[Y] \longrightarrow R[X]$ e $\hat{k} : R[X] \longrightarrow R[Y]$ que são os levantamentos dos diagramas da esquerda e da direita, respectivamente. Destes diagramas, obtemos

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[X] \arrow[d, "\sim"] \\ R[X] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, "k\hat{k}"] & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[Y] \arrow[d, "\sim"] \\ R[Y] \arrow[r, "\sim"] \arrow[ur, "\hat{k}k"] & S \end{tikzcd}$$

que também são diagramas comutativos. Note que as identidades $1_{R[X]} : R[X] \longrightarrow R[X]$ e $1_{R[Y]} : R[Y] \longrightarrow R[Y]$ também fazem esses diagramas comutarem. Pela unicidade do levantamento((4) de 2.4), $k\hat{k} \sim 1_{R[X]}$ e $\hat{k}k \sim 1_{R[Y]}$. □

Capítulo 3

A Homologia de André-Quillen

Neste capítulo, vamos introduzir o conceito crucial deste trabalho: O complexo cotangente de um homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow S$. A seguir, vamos mostrar que o complexo cotangente não depende da escolha da resolução simplicial (Lema 3.3). Para mais tarde, já de posse do maquinário construindo da seção 3.1.1, definir os S-módulos: $Tor_n^S(L_\varphi, N)$ e $Ext_n^S(L_\varphi, N)$ que são n-ésima homologia e a n-ésima cohomologia de André-Quillen, respectivamente. E finalizando com algumas propriedades básicas acerca destas últimas, sendo a mais relevante, a proposição 3.22, que mostra a existência da sequência longa de homologia, através da sequencia de Jacobi-Zariski (1.6).

3.1 O Complexo Cotagente

O funtor $\Omega_{-|R}$ (veja o Corolário 1.4) pode ser estendido a um funtor de $sAlg_R$ para $sMod_A$, denotado também por $\Omega_{-|R}$, da seguinte forma: dada uma R-álgebra simplicial, obtemos um A-módulo simplicial $\Omega_{A|R}$ com

$$(\Omega_{A|R})_n = \Omega_{A_n|R}$$

para cada n, sendo os mapas de face e degeneração induzido por aqueles de A, isto é, dado uma R-álgebra simplicial A, para cada $n \geq 0$, temos uma R-álgebra A_n. Passando o funtor o $\Omega_{-|R}$, obtemos o R-módulo de diferenciais de Kähler $\Omega_{A_n|R}$. Além disso,

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "\mathbf{d}_n^j"] \arrow[d, "\mathbf{d}_n^i"] & A_{n-1} \arrow[d, "\mathbf{d}_{n-1}^i"] \\ A_{n-1} \arrow[r, "\mathbf{d}_{n-1}^i"] & A_{n-2} \end{tikzcd}$$

com $0 \leq i < j \leq n$. Passando o funtor, obtemos

$$\begin{tikzcd} \Omega_{A_n|R} \arrow[r, "\Omega_{\mathbf{d}_n^j|R}"] \arrow[d, "\Omega_{\mathbf{d}_n^i|R}"'] & \Omega_{A_{n-1}|R} \arrow[d, "\Omega_{\mathbf{d}_{n-1}^i|R}"] \\ \Omega_{A_{n-1}|R} \arrow[r, "\Omega_{\mathbf{d}_{n-1}^i|R}"] & \Omega_{A_{n-2}|R} \end{tikzcd}$$

Analogamente, se verifica as igualdades (2.8)-(2.12). Assim, $\Omega_{A|R}$ é um A-módulo simplicial. De forma semelhante, verifica-se que um morfismo $\phi : A \longrightarrow B$ de R-álgebras simpliciais induz um morfismo de R-módulos simpliciais $\Omega_{\Phi|R} : \Omega_{A|R} \longrightarrow \Omega_{B|R}$, assim como uma sequência de R-álgebras simpliciais $A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C$ induz a composição $\Omega_{\psi|R}\Omega_{\phi|R} = \Omega_{\psi\phi|R}$ e dado $A \in sAlg_R$ e o morfismo identidade $A \xrightarrow{1_A} A$ também vamos ter identidade $\Omega_{1_A}|R = 1_{\Omega_{A|R}}$, obtendo, assim, o funtor desejado.

Teorema 3.1. *Se um morfismo de R-álgebras simpliciais livres $\Phi : R[X] \longrightarrow R[Y]$ é uma equivalência fraca então, o morfismo induzido de R-módulos simpliciais $\Omega_{\Phi|R} : \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[Y]|R}$ é também uma equivalência fraca.*

Demonstração. Veja 8. □

Corolário 3.2. Se $\Phi, \Psi : R[X] \longrightarrow B$ são morfismos homotopicos de R-álgebras simpliciais então, os morfismos induzidos de R-módulos simpliciais $\Omega_{\Phi|R}, \Omega_{\Psi|R} : \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[Y]|R}$ são homotópicos.

Demonstração. Suponha que $R[X, X, Y]$ é um objeto cilindro para uma R-álgebra $R[X]$. Assim, existe um diagrama de R-álgebras simpliciais

$$R[X, X] \longrightarrow R[X, X, Y] \xrightarrow{\simeq} R[X]$$

onde a composta é o mapa $1_{R[X]} \odot 1_{R[X]} : R[X, X] \longrightarrow R[X]$. Aplicando $\Omega_{-|R}$, obtemos o diagrama de R-módulos simpliciais

$$\Omega_{R[X,X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X,X,Y]|R} \xrightarrow{\simeq} \Omega_{R[X]|R}$$

Note que na última flecha usamos o teorema anterior. Ligando este diagrama com o diagrama de R-módulos simpliciais,

$$(*) \qquad \Omega_{R[X]|R} \oplus \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow (\Omega_{R[X]|R} \otimes_R R[X]|R) \oplus (\Omega_{R[X]|R} \otimes_R R[X]) \xrightarrow{\cong} \Omega_{R[X,X]|R} \, ,$$

onde a última flecha é um isomorfismo de R-módulos simpliciais induzido pelo isomorfismo descrito no corolário 1.7. Compondo de forma conveniente, obtemos

$$\Omega_{R[X]|R} \oplus \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X,X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X]|R}.$$

considerando os morfismos identidades $1 : \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X]|R}$ e $1 : \Omega_{R[Y]|R} \longrightarrow \Omega_{R[Y]|R}$, obtemos o único o morfismo $1 \oplus 1 : \Omega_{R[X]|R} \oplus \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X]|R}$, por meio da propriedade universal do coproduto (veja a definição $A.19$, MC1). Rescrevendo o último diagrama, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} \Omega_{R[X]|R} \oplus \Omega_{R[X]|R} \arrow[r] \arrow[dr] & \Omega_{R[X,X,Y]|R} . \arrow[d, "\sim"] \\ & \Omega_{R[X]|R} \end{tikzcd}$$

Deste concluímos que $\Omega_{R[X,X,Y]|R}$ é um objeto cilindro para o R-módulo simplicial $\Omega_{R[X]|R}$. Agora, aplicando $\Omega_{-|R}$ no diagrama de homotopia entre Φ e Ψ, obtemos um diagrama comutativo de R-módulos simpliciais

$$\begin{tikzcd} \Omega_{R[X,X]} \arrow[r] \arrow[dr, "\mu"'] & \Omega_{R[X,X,Y]|R} \arrow[d] \\ & \Omega_{B|R} \end{tikzcd}$$

Considere o diagrama em $sMod_R$

$$\Omega_{R[X]|R} \oplus \Omega_{R[X]|R} \longrightarrow \Omega_{R[X,X]|R} \longrightarrow \Omega_{B|R}$$

sendo a primeira seta a composta do diagrama $(*)$ e a segunda o mapa μ. Usando novamente a propriedade universal do coproduto nos mapas $\Omega_{\Phi|R}$, $\Omega_{\Psi|R}$, obtemos

$$\begin{tikzcd} \Omega_{R[X]} \oplus \Omega_{R[X]} \arrow[r] \arrow[dr, "\Omega_{\Phi|R}+\Omega_{\Psi|R}"'] & \Omega_{R[X,X]|R} \arrow[d, "\mu"] \\ & \Omega_{B|R} \end{tikzcd}$$

Podemos rescrever esta última e obter

$$\begin{tikzcd} \Omega_{R[X]} \oplus \Omega_{R[X]} \arrow[r] \arrow[dr, "\Omega_{\Phi|R}+\Omega_{\Psi|R}"'] & \Omega_{R[X,X,Y]|R} , \arrow[d] \\ & \Omega_{B|R} \end{tikzcd}$$

uma vez que μ é a composta de dois mapas. Como $\Omega_{R[X,X,Y]|R}$ é um objeto cilindro do objeto $\Omega_{R[X]|R}$, o diagrama acima mostra que $\Omega_{\Phi|R}$ e $\Omega_{\Psi|R}$ são homotópicos. $\square$

Observação 3.1. Duas extensões simpliciais (resp, R-módulos) simpliciais $R[X]$ e $R[Y]$ serão homotópicas quando existirem morfismos $\kappa : R[X] \longrightarrow R[Y]$ e $\hat{\kappa} : R[Y] \longrightarrow$

$R[X]$ tais que

$$\kappa\hat{\kappa} \sim 1_{R[X]} \quad e \quad \hat{\kappa}\kappa \sim 1_{R[Y]}.$$

Neste caso $\Omega_{R[X]|R}$ e $\Omega_{R[Y]|R}$ são homotópicos como R-módulos simpliciais. Usando a correspondência N, mencionada na observação 2.1, a noção de homotopia (como definida acima) é mantida na categoria $Comp(Mod_R)$. Mais que isso, a noção usual de homotopia de mapas de complexos e a noção que definimos coincidem. Veja 10, pagina 169.

Definição 3.1. Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de aneis comutativos. Seja A uma resolução simplicial de S sobre R e defina

$$L_\varphi = \Omega_{A|R} \otimes_A S$$

Assim, L_φ é um S-módulo simplicial. O complexo associado de S-módulos $(\mathbf{L}_\varphi, \partial)$ é chamado complexo cotangente de S sobre R, mais precisamente, de φ. Este complexo é também denotado por L_φ.

Exemplo 3.1. Seja $A = R[X]$ uma resolução simplicial da R-álgebra S. Para cada inteiro n, obtemos $A_n = R[X_n]$. Pelo corolário 1.2,

$$\Omega_{A_n|R} = \Omega_{R[X_n]|R} = \oplus_{y \in X_n} A_n dy$$

é um A_n-mólulo livre consequentemente,

$$\begin{aligned} (L_\varphi)_n &= (\Omega_{A|R} \otimes_A S)_n = \Omega_{A_n|R} \otimes_{A_n} S \\ (\oplus_{y \in X_n} A_n dy) \otimes_{A_n} S &= \oplus_{y \in X_n} (A_n \otimes_{A_n} S) dy = \oplus_{y \in X_n} S dy \end{aligned}$$

é um S-módulo livre com base de cardinalidade $card(X_n)$.

Lema 3.3. O complexo cotangente não depende da escolha da resolução simplicial no seguinte sentido: se A e $A^{'}$ são resoluções simpliciais de um homomorfismo de anéis $\varphi : R \longrightarrow S$, então, os complexos cotangentes correspondentes L_φ e $L_\varphi^{'}$ são homotópicos.

Demonstração. Devido ao teorema 2.10 podemos supor que A e A' são resoluções simpliciais do homomorfismo φ. Pelo corolário 2.11, existem morfismos de R-módulos $k : A \longrightarrow A'$ e $k' : A' \longrightarrow A$ tais que $kk' \sim 1_{A'}$ e $k'k \sim 1_A$. Como A e $A^{'}$ são extensões simpliciais livres de R, então, podemos aplicar o teorema 3.1 juntamente com a observação 3.1 e concluir que os complexos de S-módulos $\Omega_{A|R}$ e $\Omega_{A'|R}$ são também homotópicos. Precisamos mostrar que existem homomorfismos de complexos de S-módulos $\Omega_{k'} \otimes_{A'} S : L'_\varphi \longrightarrow L_\varphi$ e $\Omega_k \otimes_A S : L_\varphi \longrightarrow L'_\varphi$ tais que

$$(\Omega_{k'} \otimes_{A'} S)(\Omega_k \otimes_A S) \sim 1_{L_\varphi} \quad e \quad (\Omega_k \otimes_A S)(\Omega_{k'} \otimes_{A'} S) \sim 1_{L'_\varphi}.$$

Ponha $A = R[Y]$ e $A' = R[Z]$. Pelos corolários 1.2 e 1.3, obtemos

$$\Omega_{\psi|R} : \Omega_{R[Y]|R} \longrightarrow \Omega_{R[Z]|R},$$

definida por $\Omega_{\psi|R}(\sum f_i dy_i) = \sum k(f_i)dk(y_i) = \sum k(f_i)(\dfrac{\partial k(y_i)}{\partial z_j})dz_j$. Observe que

$$k'(\sum k(f_i)(\frac{\partial k(y_i)}{\partial z_j})dz_j) = \sum k'k(f_i)k'(\frac{\partial k(y_i)}{\partial z_j})dk'(z_j) \sim \sum f_i dy_i,$$

a última equivalência decorre da discussão feita acima. Assim, deve existir h tal que

$$\sum k'k(f_i)k'(\frac{\partial k(y_i)}{\partial z_j})dk'(z_j) - \sum f_i dy_i = h\partial(\sum f_i dy_i) + \partial h(\sum f_i dy_i)$$

Aplicando $\otimes_A S$ em cada nível n, obtemos

$$(\sum_i \sum_j \frac{\partial k(y_i)}{\partial z_j} dk'(z_j) - \sum f_i dy_i) \otimes \sum s_i = (h\partial(\sum f_i dy_i) + \partial h(\sum f_i dy_i)) \otimes \sum s_i$$

□

3.1.1 Álgebra Homologica de Complexos de Módulos

Se M e N são complexos de R-módulos então, $Hom_R(M,N)$ denota o complexo de $\mathbb{Z}$-módulos com $Hom_R(M,N)_n = \prod_{i\in\mathbb{Z}}(M_i, N_{i+n})$, e

$$\partial((\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (\partial_{i+n}\alpha_i - (-1)^n \alpha_{i-1}\partial_i)_{i\in\mathbb{Z}},$$

para $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in Hom_R(M,N)_n$. Um homomorfismo de complexos $\alpha : M \longrightarrow N$ de grau n em $Hom_R(M,N)_n$ é uma família $(\alpha_i : M_i \longrightarrow N_{i+n})_{i\in\mathbb{Z}}$ de mapas R-lineares, tais que $\partial_{i+n}\alpha_i = (-1)^n\alpha_{i-1}\partial_i$. Dois homomorfismos α e β de grau n são chamados homotópicos quando existe uma família $(s_i : M_i \longrightarrow N_{i+n+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ de mapas R-lineares tais que $\alpha - \beta = s\partial + \partial s$; neste caso, escrevemos $\alpha \sim \beta$. A homotopia é uma relação de equivalência e $\alpha \sim \beta$ implica $H(\alpha) = H(\beta)$. Se o mapa identidade 1_M é homotópico ao mapa nulo então, M é chamado contrátil. Um morfismo $\alpha : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de complexos de grau 0. Um quase-isomorfismo é um morfismo α tal que $H(\alpha)$ é um isomorfismo. Um quase-isomorfismo é designado pelo simbolo $\approx$ encima da seta. A relação de equivalência gerada pelos isomorfismos homológicos é denotada também por $\approx$. Assim, $M \approx N$ significa que existe uma sequência $\alpha^0, ..., \alpha^{m-1}$ de isomorfismos homológicos $\alpha^i : M^i \xrightarrow{\approx} M^{i+1}$ ou $\alpha^i : M^{i+1} \xrightarrow{\approx} M^i$ com $M = M^0$ e $N = M^m$.

Definição 3.2. Um complexo de R-módulos P é chamado:
(3.2.1) DG-projetivo se $Hom_R(P, -)$ transforma isomorfismos homológicos sobrejetivos em isomorfismos homológicos sobrejetivos;
(3.2.2) π-projetivo se $Hom_R(P, -)$ preserva isomorfismos homológicos;
(3.2.3) #-projetivo se P_i é um R-módulo projetivo para cada $i \in \mathbb{Z}$

Observação 3.2. As seguintes afirmações são válidas:

1. Se P é limitado inferiormente e é #-projetivo então, é DG-projetivo.

2. Um complexo contrátil é π-projetivo.

3. Um complexo P é π-projetivo se, e só se, $Hom_R(P, -)$ preserva homologias triviais.

Proposição 3.4. Um complexo é DG-projetivo se, e só se, é π-projetivo e #-projetivo.

Proposição 3.5. Se $\alpha : P \longrightarrow \hat{P}$ é um quase-isomorfismo de complexos π-projetivos então, $Hom_R(\alpha, N)$ é um quase-isomorfismo para cada R-módulo N.

Proposição 3.6. Se P é um complexo π-projetivo e $P \approx M$ então, existe um quase-isomorfismo $P \longrightarrow M$.

Definição 3.3. Um complexo de R-módulos I é chamado:
(3.3.1) DG-injetivo se $Hom_R(-, I)$ transforma isomorfismos homológicos injetivos em isomorfismos homológicos sobrejetivos;
(3.3.2) π-injetivo se $Hom_R(-, I)$ preserva isomorfismos homológicos;
(3.3.3) #-injetivo se I_i é um R-módulo injetivo para cada $i \in \mathbb{Z}$

Observação 3.3. As seguintes afirmações são válidas:

1. Se I é limitado superiormente e é #-injetivo então, é DG-injetivo.

2. Um complexo contrátil é π-injetivo.

3. Um complexo I é π-injetivo se, e só se, $Hom_R(-, I)$ preserva homologias triviais.

Proposição 3.7. Um complexo é DG-injetivo se, e só se, é π-injetivo e #-injetivo.

Proposição 3.8. Se $\beta : \hat{I} \longrightarrow I$ é um quase-isomorfismo de complexos π-injetivos então, $Hom_R(M, \beta)$ é um quase-isomorfismo para cada R-módulo M.

Proposição 3.9. Se I é um complexo π-injetivo e $N \approx I$ então, existe um quase-isomorfismo $N \longrightarrow I$.

Definição 3.4. Seja M um complexo de R-módulos. Um quase-isomorfismo $P \longrightarrow M$ com P DG-projetivo (resp. π-projetivo) é chamamo de uma resolução DG-projetiva (resp. π-projetivo) de M sobre R. Um quase-isomorfismo $M \longrightarrow I$ com I DG-injetivo (resp. π-injetivo) é chamado de uma resolução DG-injetiva (resp. π-injetivo) de M sobre R.

Proposição 3.10. Cada complexo possui uma resolução DG-projetiva e uma resolução DG-injetiva.

Demonstração. Para ver a existência das resoluções π-projetiva e π-injetiva, veja 10. □

Lembre que produto tensorial de complexos de R-módulos M e um complexo de R-módulos N é um complexo de R-módulos com $(M \otimes_R N)_n = \oplus_{i \in \mathbb{Z}}(M \otimes_R N_{n-1})$ e $\partial(m \otimes n) = \partial(m) \otimes n + (-1)^i m \otimes \partial(n)$ para $m \in M_i$, $n \in N_{n-1}$.

Definição 3.5. Um complexo de R-módulos F é chamado:
(3.5.1) DG-plano se $- \otimes_R F$ transforma isomorfismos homológicos injetivos em isomorfismos homológicos injetivos;
(3.5.2) π-plano se $- \otimes_R F$ preserva isomorfismos homológicos;
(3.5.3) #-projetivo se F_i é um R-módulo plano para cada $i \in \mathbb{Z}$

Proposição 3.11. Um complexo é DG-plano se, e só se, é π-plano e #-plano.

Proposição 3.12. Se $\alpha : F \longrightarrow \hat{F}$ é um quase-isomorfismo de complexos π-planos então, $M \otimes_R \alpha$ é um quase-isomorfismo para cada R-módulo M.

Proposição 3.13. Um complexo DG-projetivo (resp. π-projetivo, #-projetivo) é DG-plano (resp. π-plano, #-plano)

Construção.1: Sejam M e N complexos arbitrários, $P \xrightarrow{\approx} M \xleftarrow{\approx} \hat{P}$ e $I \xleftarrow{\approx} N \xrightarrow{\approx} \hat{I}$, resoluções DG-projetivas e DG-injetivas, respectivamente. Pelas definições, juntamente com proposições 3.4, 3.5, 3.7 e 3.8 existem isomorfismos homológicos $Hom_R(P, N) \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} Hom_R(\hat{P}, N)$ e $Hom_R(M, I) \overset{\longleftarrow}{\longrightarrow} Hom_R(M, \hat{I})$ que são inversos a menos de homotopia. Segue-se que as classes de homotopias (em particular, as classes de equivalência) dos complexos de R-módulos $Hom_R(P, I)$ não depende da escolha das resoluções. Então, definimos $Ext^i_R(M,N) = H_{-i}(Hom_R(P,\hat{P}))$. Note que os isomorfismos homológicos induzem isomorfismos nos Ext. Além disso, devido as proposições 3.4, 3.5, 3.6 e 3.8, e as respectivas definições, existem os isomorfismos

$$H(Hom_R(P,N)) \cong Ext_R(M,N) \cong H(Hom_R(M,I))$$

para um π-projetivo P com $P \approx M$ e um π-injetivo I com $N \approx I$. De forma semelhante, se $P \xrightarrow{\approx} M$ é uma resolução DG-projetiva de complexo de R-módulos M e $Q \xrightarrow{\approx} N$ é uma resolução DG-projetiva do complexo de R-módulos N, as classes de homotopias (em particular, as classes de equivalência) de complexos de R-módulos $P \otimes_R Q$ não dependem da escolha feita. Sendo assim, definimos

$$Tor_i^R(M,N) = H_i(P \otimes_R Q).$$

Além disso, devido às proposições 3.10, 3.11, 3.13, este módulo pode ser calculado a partir de complexo DG-plano ou π-plano F tal que $F \approx N$ e $Tor^R(M,N) \cong H(M \otimes_R F)$.

Observação 3.4. Caso M e N sejam R-módulos então, podemos recuperar a definição usual de Tor e Ext escolhendo resoluções P_M, I_N e P_N, que são pelos itens 1 das observações 3.2 e 3.3 , resoluções DG-projetivas e DG-Injetivas.

Definição 3.6. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Dizemos que um complexo de R-módulos M, possui dimensão projetiva no máximo n (denotamos $pd_R M \leq n$) se existe uma equivalência $P \approx M$, com P um complexo de R-módulos DG-projetivo tal $P_i = 0$ para $i > n$. Se $pd_R M \leq n$ mas não ocorre $pd_R M \leq n-1$, escrevemos $pd_R M = n$. Isto também pode ser expresso pela igualdade

$$pd_R M \neq 0$$

quando P varia pelos complexos de R-módulos DG-projetivos tais que $P \approx M$.

Observação 3.5.

1. Substituindo na definição acima “DG-projetivo” por “π-projetivo” (resp. por #-projetivo), obtemos uma definição com a noção de dimensão π-projetiva (resp. dimensão #-projetiva) de M que é denotada por $\pi - pd_R M$ (resp. $\# - pd_R M$).

2. Se $M \approx M'$ então, $pd_R M = pd_R M'$ e similarmente para $\pi - pd_R$ e $\# - pd_R$.

3. A desigualdade

$$\sharp - pd_R M \leq pd_R M$$

para qualquer complexos de R-módulos M, devido à proposição 3.4

4. A igualdade $pd_RM = -\infty$ (resp. $\pi - pd_RM = -\infty$, $\sharp - pd_RM = -\infty$) é equivalente a $H(M) = 0$.

5. Existe uma desigualdade $pd_RM \geq supM$. e similarmente para $\pi - pd_RM$ e $\# - pd_RM$.

Teorema 3.14. *Para um complexo de R-módulos M, as condições seguintes são equivalentes:*
(i) $pd_RM \leq n$.
(ii)' M *possui uma resolução DG-projetiva* P *com* $P_i = 0$ *para* $i > n$.
(ii) $\pi - pd_RM \leq n$.
(iii) $Ext^i_R(M, N) = 0$ *para* $i > n - infN$ *e um complexo de R-módulos* N.
(iv) $Ext^{n+1}_R(M, N) = 0$ *para um R-módulo* N *e* $H_i(M) = 0$ *para* $i > n + 1$.
(v) $H_i(M) = 0$ *para* $i > n$ *e para qualquer complexo de R-módulos* P *DG-projetivo, tal que* $P \approx M$ *o R-módulo Coker(*$\partial_{n+1} : P_{n+1} \longrightarrow P_n$*) é projetivo.*

Definição 3.7. As noções de dimensão plana, dimensão π-plana e dimensão $\#$-plana, são obtidas trocando "projetiva" por "plana"na definição 3.6 e (1) da observação 3.3; eles são denotados por fd_R, $\pi - fd_R$, e $\# - fd_R$ respectivamente.

Observação 3.6. Na observação 3.3,os itens (2)-(5), permanecem válidos com as substituições feitas acima.

Proposição 3.15. Para um complexo de R-módulos N, existe uma desigualdade $fd_RN \leq pd_RN$

Teorema 3.16. *Para um complexo de R-módulos N, as condições seguintes são equivalentes:*
(i) $fd_RN \leq n$.
(ii) (i) $\pi - fd_RN \leq n$.
(iii) $Tor^R_i(M', N) = 0$ *para* $i > n + supM'$ *e um complexo de R-módulos à direita* M'
(iv) $Tor^R_{n+1}(\frac{R}{J'}, N) = 0$ *para um ideal à direita* J' *de R,* $H_i(N) = 0$ *para* $i > n + 1$.
(v) $H_i(N) = 0$ *para* $i > n$ *e para um (resp. ou algum) complexo de R-módulos* F *DG-projetivo tal que* $F \approx N$*, o R-módulo Coker(*$\partial_{n+1} : F_{n+1} \longrightarrow F_n$*) é plano.*

3.1.2 Homologia e Cohomologia de André-Quillen

Seja $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis. Pelo lema 3.3, para quaisquer resoluções simpliciais A e A' de φ, os complexos de S-módulos correspondentes L_φ e L'_φ

são homotópicos. Observe que estes últimos são complexos positivos e DG-projetivos (e necessariamente π-planos), pois são formados de S-módulos livres (e portanto planos), consequentemente, para cada S-módulo N e um inteiro n,

$$H_n(L_\varphi \otimes_S N) \cong H_n(L'_\varphi \otimes_S N) \quad e \quad H_{-n}(Hom_S(L_\varphi, N)) \cong H_{-n}(Hom_S(L'_\varphi, N))$$

Segue-se que os S-módulos estão bem definidos:

$$D_n(S|R; N) = H_n(L_\varphi \otimes_S N) \quad e \quad D^n(S|R; N) = H_{-n}(Hom_S(L_\varphi, N))$$

Estas são as n-ésimas homologia e cohomologia de André-Quillen de S sobre R com coeficientes em N respectivamente. Além disso, considerando o morfismo identidade de complexos de S-módulos $L_\varphi \xrightarrow{1_{L_\varphi}} L_\varphi$ e uma resolução injetiva $I \xleftarrow{f} N$ para o S-módulo N, é claro 1_{L_φ} é um quase-isomorfismo. Além disso, o exemplo 3.1 garante que L_φ é um complexo de S-módulos livres (e portanto projetivos) concentrados em níveis não-negativos. Pela construção 3.1.1, podemos definir

$$Ext^n_S(L_\varphi, N) = H_{-n}(Hom_S(L_\varphi, N)) = D^n(S|R; N)$$

$$e$$

$$Tor^S_n(L_{\varphi,N}) = H_n(L_\varphi \otimes_S N) = D_n(S|R; N).$$

Proposição 3.17. Seja n um inteiro não-negativo.
(a) Temos $D_i(S|R; -) = 0$ para $i \geq n+1$ se, e só se, $fd_S(L_\varphi) \leq n$.
(b) Temos $D^i(S|R, -) = 0$ para $i \geq n+1$ se, e só se, $pd_S(L_\varphi) \leq n$.

Demonstração. Seja A uma resolução simplicial para o homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow S$. Pela hipótese,

$$0 = D^i(S|R, N) = Ext^i_S(L_\varphi, N),$$

com $i \geq n+1$ e para um S-módulo N qualquer. Pela equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ do teorema 3.14, $pd_S(L_\varphi) \leq n$, uma vez que $inf N = 0$. O item (b) está provado. Para mostrar o item (a), vamos usar seguinte identidade:

$$D_i(S|R; N) = H_i(L_\varphi \otimes_S N) = H_i(N \otimes_S L_\varphi) = Tor^S_i(N; L_\varphi),$$

onde N é um S-módulo. Pela hipótese,

$$0 = D_i(S|R; N) = Tor^S_i(N; L_\varphi),$$

com $i \geq n+1$ e para um S-módulo N qualquer. Pela equivalência $(i) \Leftrightarrow (iii)$ do teorema 3.16, $fd_S(L_\varphi) \leq n$, uma vez que $Sup(N) = 0$. O item (a) está provado.

□

Proposição 3.18. Se $S = R[Y]$ é o anel de polinômios sobre R com variáveis em Y então, o S-módulo $\Omega_{S|R}$ é livre e

$$L_\varphi \cong \Omega_{S|R}$$

como complexo de S-módulos. Assim,

$$D_n(S|R,N) = 0 = D^n(S|R,N) \quad n \geq 1$$

Demonstração. Pelo corolário 1.2, $\Omega_{S|R}$ é um S-módulo livre. Agora, veja que o seguinte diagrama de R-álgebras simpliciais é comutativo

$$\begin{tikzcd} s(R) \arrow[r] \arrow[dr] & s(S) \arrow[d, "1_{s(S)}"] \\ & s(S) \end{tikzcd}$$

Pelo exemplo 2.5, S é uma extensão livre simplicial sobre R; como o mapa $1_{s(S)}$ é uma equivalência fraca, segue-se que o diagrama acima é uma resolução simplicial de S sobre R. Assim,

$$(3.17) \quad (L_\varphi)_n = \Omega_{s(S)_n|R} \otimes_{s(S)_n} S \cong \Omega_{s(S)_n|R} \quad n \geq 0$$

O complexo cotangente de S sobre R é o complexo de S-módulos

$$\partial_n : (L_\varphi)_n \longrightarrow (L_\varphi)_{n-1} \quad com \quad \partial_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i : (L_\varphi)_n \longrightarrow (L_\varphi)_{n-1}$$

Por (3.17) é fácil concluir que o complexo cotangente L_φ, é isomorfo ao complexo associado ao S-módulo $\Omega_{S|R}$ (veja o exemplo 2.3)

$$\ldots \longrightarrow \Omega_{S|R} \xrightarrow{0} \Omega_{S|R} \xrightarrow{1_{\Omega_{S|R}}} \Omega_{S|R} \xrightarrow{0} \Omega_{S|R} \longrightarrow 0.$$

Assim, deve existir um morfismo de complexos de S-módulos $\Phi : \Omega_{S|R} \longrightarrow L_\varphi$ que é um quase-isomorfismo, isto é, Φ induz o isomorfismo $H_n(\Omega_{S|R}) \cong H_n(L_\varphi)$ para $n \geq 0$. Isso significa que Φ é uma resolução DG-projetiva pois $s(\Omega_{S|R})_n = 0 \quad se \quad n \geq 1$ e $s(\Omega_{S|R})_0 = \Omega_{S|R}$. Pela implicação $(ii)' \Rightarrow (iii)$ do teorema 3.14, $D^n(S|R,N) = 0$ quando $n \geq 1$. Como toda resolução DG-projetiva é também DG-plana então,

$fd_S(L_\varphi) \leq 0$. Pela implicação $(i) \Rightarrow (iii)$ do teorema 3.16

$$0 = Tor_n^S(N, L_\varphi) = Tor_n^S(L_\varphi, N) \quad , n \geq 1$$

como queríamos demonstrar. □

3.2 Propriedades Básicas

Esta seção é um resumo das propriedades básicas do complexo cotangente que serão acompanhadas de resultados relativos à homologia de André-Quillen.

Proposição 3.19. Existem isomorfismos de funtores:

$$D_0(S|R, -) \cong \Omega_{S|R} \otimes_S - \quad e \quad D_n(S|R, -) = 0 \quad n < 0.$$

Proposição 3.20. Seja um diagrama comutativo de homomorfismo de anéis

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\varphi'} & S' \\ \rho\downarrow & & \downarrow \\ R & \xrightarrow{\varphi' \otimes_{R'} R = \varphi} & (S' \otimes_{R'} R) \cong S, \end{array}$$

Então, este diagrama induz o morfismo de S-módulos:

$$L_{\varphi'} \otimes_{R'} R \longrightarrow L_\varphi$$

que está bem definido a menos de homotopia. Este morfismo será uma equivalência homotópica se $Tor_n^{R'}(S', R) = 0$ para $n \geq 1$.

Demonstração. Seja um morfismo de $A' \xrightarrow{\phi} S'$ de R'-álgebras simpliciais onde A' é uma resolução simplicial de S' sobre R'. Isto induz um morfismo de R-álgebras simpliciais $A' \otimes_{R'} R \xrightarrow{\mu} S' \otimes_{R'} R = S$. Note que $A' \otimes_{R'} R$ é uma extensão livre simplicial de R (Exemplo 2.6). Usando a identificação $R' \otimes_{R'} R \cong R$ e a fatoração de φ' pelos mapas inclusão e ϕ, é fácil concluir que o seguinte diagrama em $sAlg_R$ é comutativo

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \sim \\ A' \otimes_{R'} R & \xrightarrow[\varphi]{} & (S' \otimes_{R'} R) \cong S \end{array}$$

onde A é uma resolução simplicial de $\varphi' \otimes_{R'} R = \varphi$. Pelo item (4) do corolário 2.4, temos o levantamento $A' \otimes_{R'} R \longrightarrow A$. Usando o funtor $\Omega_{-|R}$, obtemos o complexo de

S-módulos

$$\Omega_{(A'\otimes_{R'}R)|R}\otimes_{A'\otimes_{R'}R}S \longrightarrow \Omega_{A|R}\otimes_A S = L_\varphi.$$

Note que

$$\begin{aligned}\Omega_{(A'\otimes_{R'}R)|R}\otimes_{A'\otimes_{R'}R}S &\cong (\Omega_{A'|R}\otimes_{R'}R)\otimes_{(A'\otimes_{R'}R)}(S^{'}\otimes_{R'}R)\\ &\cong (\Omega_{A'|R}\otimes_{A'}S^{'})\otimes_{R'}R\\ &= L_{\varphi'}\otimes_{R'}R\end{aligned}$$

Supondo que $Tor_n^{R^{'}}(S^{'},R)=0$ para $n\geq 1$, pelo exemplo 2.9, existe um isomorfismo

$$\pi_n(A^{'}\otimes_{R'}R)\cong Tor_n^{R^{'}}(S^{'},R),\quad \textit{para cada } n,$$

Em particular, $Tor_0^{R^{'}}(S^{'},R)\cong S$. Sendo assim, μ é uma equivalência fraca e consequentemente $A^{'}\otimes_{R'}R$ é uma resolução simplicial de S sobre R. Assim, $A^{'}\otimes_{R'}R\longrightarrow A$ é uma equivalência homotópica (no sentido da Proposição A.20), e consequentemente morfismo induzido $L_{\varphi'}\otimes_{R'}R\longrightarrow L_\varphi$ também é.

□

Proposição 3.21. Sejam U um subconjunto multiplicativo de R, $S=U^{-1}R$ e $\varphi: R\longrightarrow S$ o mapa localização. Então, $L_\varphi\cong 0$.

Demonstração. O complexo L_φ consiste de S-módulos livres e o funtor $-\otimes_R S$ é identidade na categoria dos S-módulos. Desta forma obtemos o primeiro dos seguintes isomorfismos:

$$L_\varphi\cong L_\varphi\otimes_R S\cong L_{\varphi\otimes_R S}\cong L_{1_S}\cong 0$$

O segundo vem do fato de φ ser plano, isto é, S é plano como R-modulo. Consequentemente o funtor $-\otimes_R S$ é isomorfo ao funtor $-U^{-1}$, que é exato, e portanto $Tor_n^R(S,R)=0$,se $n>0$. Pela preposição 3.20, segue-se o isomorfismo. O terceiro é por conta que o mapa $R\otimes_R S\overset{\varphi\otimes_R S}{\longrightarrow} S$ é a identidade. O último decorre da observação 1.2. □

Proposição 3.22. Os homomorfismos de anéis

$$Q\overset{\psi}{\longrightarrow}R\overset{\varphi}{\longrightarrow}S,$$

induzem a seguinte sequência exata de funtores de S-módulos

$$...D_{n+1}(S|R;-) \longrightarrow D_n(R|Q;-) \longrightarrow D_n(S|Q;-) \longrightarrow D_n(S|R;-) \longrightarrow ...$$

Demonstração. Seja $A^{'}$ uma resolução simplicial de ψ, A uma resolução simplicial de $A^{'} \longrightarrow S$. Então, existe um diagrama

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, "\iota^{'}"] \arrow[d, "1_Q"'] & A^{'} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\rho^{'}"'] & A \arrow[d, "\rho"'] \\ Q \arrow[r] & R \arrow[r] & S \end{tikzcd},$$

onde ρ e $\rho^{'}$ são equivalências fracas sobrejetivas, ι e $\iota^{'}$ são extensões livres. Assim, A é uma extensão livre de Q e obtemos para cada n (teorema 1.6), uma sequência exata de A_n-módulos

$$0 \longrightarrow \Omega_{A_n^{'}|Q} \otimes_{A_n^{'}} A_n \longrightarrow \Omega_{A_n|Q} \longrightarrow \Omega_{A_n|A_n^{'}} \longrightarrow 0.$$

A exatidão à esquerda vem da observação 1.3. Tensorando com o A_n-módulo S, obtemos

$$0 \longrightarrow \Omega_{A_n^{'}|Q} \otimes_{A_n^{'}} S \longrightarrow \Omega_{A_n|Q} \otimes_{A_n} S \longrightarrow \Omega_{A_n|A_n^{'}} \otimes_{A_n} S \longrightarrow 0.$$

Existem mapas $R \longrightarrow R \otimes_{A^{'}} A$ e $R \otimes_{A^{'}} A \longrightarrow S$ que são uma extensão livre e uma equivalência fraca sobrejetiva, respectivamente, onde o diagrama resultante

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[dr] & R \otimes_{A^{'}} A \arrow[d, "\sim"] \\ & S \end{tikzcd}$$

é comutativo. Para ver isso, considere o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A^{'} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\rho^{'}"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, "\rho"] & \\ R \arrow[r, "\beta"] \arrow[drr, "\varphi"'] & R \otimes_{A^{'}} A \arrow[dr, dashed, "\phi"] & \\ & & S \end{tikzcd}$$

onde α e β são as aplicações naturais. Note que α e obtido de $\rho^{'}$ tensorando por $A^{'}$-álgebra simplicial A. Além disso, $R \otimes_{A^{'}} A$ é uma extensão livre de R pois A é um extensão livre de $A^{'}$ (Exemplo2.6); obtendo assim a extensão livre $R \longrightarrow R \otimes_{A^{'}} A$.

Agora, como $\rho\iota = \varphi\rho^{'}$, pela propriedade universal dos pushouts, deve existir um único mapa $R \otimes_{A'} A \xrightarrow{\phi} S$, obtendo assim o triângulo comutativo desejado. Pode-se mostrar que α é uma equivalência fraca (veja 7, paginas 65-87) . Como $\rho = \phi\alpha$, segue que ϕ é uma equivalência fraca e sobrejetiva Sendo assim, $R \otimes_{A'} A$ é uma resolução simplicial de S sobre R. Agora, observe que

$$\begin{aligned} \Omega_{A'|Q} \otimes_{A'} S \cong (\Omega_{A'|Q} \otimes_{A'} R) \otimes_R S &= L_\psi \otimes_R S, \\ \Omega_{A|Q} \otimes_A S &= L_{\varphi\psi}, \\ \Omega_{A|A'} \otimes_A S \cong \Omega_{(R\otimes_{A'} A)|R} \otimes_{(R\otimes_{A'} A)} S &= L_\varphi \end{aligned}$$

Assim, obtemos a sequência exata de complexos de S-modulos

$$0 \longrightarrow L_\psi \otimes_R S \longrightarrow L_{\varphi\psi} \longrightarrow L_\varphi \longrightarrow 0$$

Aplicando o funtor $- \otimes_S N$, obtemos a sequência exata curta de complexos de S-módulos

$$0 \longrightarrow L_\psi \otimes_R N \longrightarrow L_{\varphi\psi} \otimes_S N \longrightarrow L_\varphi \otimes_S N \longrightarrow 0$$

Aplicando o teorema da sequência longa de homologia,

$$... \to Tor_n^R(L_\psi, N) \to Tor_n^S(L_{\varphi\psi}, N)$$

$$\to Tor_n^S(L_\varphi, N) \xrightarrow{\partial_n} Tor_{n-1}^R(L_\psi, N) \to ...$$

que é justamente a sequência desejada. $\square$

Apêndice A

Resultados Básicos

Para tornar a leitura mais acessível, listamos abaixo algumas definições e resultados úteis. Os resultados não demostrados nos apêndices $A.1$, $A.2$, $A.3$; podem ser encontrados nas referências 12, 5 e 3, respectivamente.

A.1 Algumas Noções de Álgebra Comutativa

Neste seção, fica implícito que cada módulo M é um A-módulo, sendo A um anel comutativo com unidade.

A.1.1 Os Teoremas dos Isomorfismos

Teorema A.1. *(Teorema da Fatoração). Sejam $\varphi : M \longrightarrow M^{‘}$ uma aplicação linear e N um submódulo de M tal que $N \subset Ker\varphi$. Então, existe uma única aplicação linear $\hat{\varphi} : \frac{M}{N} \longrightarrow M^{‘}$ tal que o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & M^{‘} \\
\frac{M}{N} \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso,

$$\hat{\varphi} \text{ é injetivo} \Leftrightarrow N = Ker\varphi$$

$$\hat{\varphi} \text{ é sobrejetivo} \Leftrightarrow \varphi \text{ é sobrejetivo.}$$

Corolário A.2. (Primeiro Teorema Fundamental dos Isomorfismos). Seja $\varphi : M \longrightarrow M^{‘}$ uma aplicação linear sobrejetiva. Então, φ induz um único isomorfismo linear

$\hat{\varphi} : \frac{M}{ker\varphi} \longrightarrow M^{‘}$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\hat{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & M^{‘} \\ \frac{M}{ker\varphi} \arrow[ur, dotted, "\hat{\varphi}"] & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Teorema A.3. *Sejam $\varphi : M \longrightarrow M^{‘}$ uma aplicação linear, N um submódulo de M e $N^{‘}$ um submódulo de $M^{‘}$ tal que $\varphi(M) \subset N^{‘}$. Então, existe uma única aplicação linear $\hat{\varphi} : \frac{M}{N} \longrightarrow \frac{M^{‘}}{N^{‘}}$ que faz o seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & M^{‘} \arrow[d, "\pi^{‘}"] \\ \dfrac{M}{N} \arrow[r, dashed, "\hat{\varphi}"] & \dfrac{M^{‘}}{N^{‘}} \end{tikzcd}$$

comutativo.

Corolário A.4. (Segundo Teorema Fundamental dos Isomorfismos). Seja M um módulo e considere dois submódulos $N \subset P$ de M. Denote π_N e π_P como as respectivas projeções canônicas de M sobre $\dfrac{M}{N}$ e $\dfrac{N}{P}$. Então, existe uma única aplicação linear $\theta : \dfrac{M}{N} \longrightarrow \dfrac{M}{P}$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi_N"'] \arrow[dr, "\pi_P"] & \\ \frac{M}{N} \arrow[rr, dotted, "\theta"] & & \frac{M}{P} \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, θ é sobrejetiva e $Ker\theta = \frac{M}{P}$. Mais ainda, θ induz um isomorfismo canônico $\hat{\theta} : (\frac{M}{N})(\frac{P}{N}) \longrightarrow \dfrac{M}{P}$.

A.1.2 Sequências Exatas

Uma sequência de módulos e aplicações lineares

$$... \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \longrightarrow ...., \qquad (0)$$

é chamada exata em M_i se $Im(f_i) = Ker(f_{i+1})$. A sequência é exata quando é exata em cada M_i. Em particular,
$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M$ é exata $\Leftrightarrow f$ é injetiva,

$M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow$ g é sobrejetiva,
$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} M' \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ é exata $\Leftrightarrow$ f é injetiva, g é sobrejetiva e g induz um isomorfismo de $Coker(f) = \dfrac{M}{f(M')}$ para M''. Esta última, é chamada de sequência exata curta.

Proposição A.5. Seja

$$M \xrightarrow{u} M' \xrightarrow{v} M'' \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

uma sequência de módulos e aplicações lineares. Então, a sequência (1) é exata se, e só se, para cada módulo N, a sequência

$$0 \longrightarrow Hom(M'', N) \xrightarrow{\hat{v}} Hom(M, N) \xrightarrow{\hat{u}} Hom(M', N)$$

é exata.

A.1.3 Produto Tensorial

Se X, Y e Z são conjuntos e $f : X \times Y \longrightarrow Z$ é uma função, então, para cada $(x, y) \in X \times Y$ ficam definidas as funções $f(x, \bullet) : Y \longrightarrow Z$, por $y' \longmapsto f(x, y')$ e $f(\bullet, y) : X \longrightarrow Z$, por $x' \longmapsto f(x', y)$.

Definição A.1. Sejam M, N e P módulos. Uma aplicação $\gamma : M \times N \longrightarrow P$ é bilinear se, para cada $m \in M$ e para cada $n \in N$, as aplicações $\gamma(\bullet, n) : M \longrightarrow P$ e $\gamma(m, \bullet) : N \longrightarrow P$ são lineares.

Definição A.2. (Produto Tensorial). Sejam M e N dois módulos. Um produto tensorial de M e N é um par (T, γ) composto por um módulo T e uma aplicação bilinear $\gamma : M \times N \longrightarrow T$ com a seguinte propriedade universal: dados um módulo P e uma aplicação bilinear $\alpha : M \times N \longrightarrow P$, existe uma única aplicação linear $\varphi : T \longrightarrow P$ tal que $\varphi\gamma = \alpha$. Isto é, o diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\alpha"'] & T \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\ P & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Teorema A.6. *(Existência e unicidade do Produto Tensorial): Dados dois módulos M e N, existe um produto tensorial (T, γ) dos módulos M e N. Além disso, um produto tensorial é único a menos de isomorfismo no seguinte sentido: Se (T', γ') é outro* *produto tensorial de M e N, então, existe um único isomorfismo linear $\varphi : T \longrightarrow T'$ tal que o diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma'"'] & T \arrow[dl, dotted, "\varphi"] \\ T' & \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Observação A.1. Pelo teorema $A.6$, existe um único produto tensorial (T, γ) de M e N e tal produto tensorial será denotado por $M \otimes_A N$. Também, denotaremos o elemento $\gamma(m, n)$ por $m \otimes n$. O elemento $m \otimes n \in M \otimes_A N$ é chamado de *produto tensorial de* m e n.

Proposição A.7. Sejam M, N e P três módulos, I um conjunto de índices $\{M_i\}_{i \in I}$ uma coleção de módulos. Então, existem isomorfismos naturais

1. $M \otimes_A A \cong M$.

2. $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$.

3. $(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (M \otimes_A P)$.

4. $(\bigoplus_{i \in I} M_i) \otimes_A P \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i \otimes_A P)$.

Proposição A.8. Para um módulo M, seja $M[x]$ o conjunto de todos os polinômios em x com coeficientes em M, isto é, expressões da forma

$$m_0 + m_1 x + ... + m_r x^r \qquad (m_i \in M)$$

Então, com a ação

$$(a_0 + a_1 x + ... + a_r x^r) \cdot (m_0 + m_1 x + ... + m_r x^r) := a_0 m_0 + (a_1 m_1)x + ... + (a_r m_r)x^r$$

$M[x]$ é um $A[x]$-módulo e

$$M[x] \cong A[x] \otimes_A M.$$

A.2 Algumas Noções de Álgebra Homologica

Definição A.3. Uma categoria $\mathbf{C}$ consiste de três ingredientes: uma classe $obj(C)$ de objetos, um conjunto de morfismos $Hom(A, B)$ para cada par ordenado (A,B) de objetos, e uma operação de composição $Hom(A, B) \times Hom(B, C) \longrightarrow Hom(A, B)$

denotada por

$$(f, g) \longmapsto gf$$

Para cada tripla ordenada A, B, C de objetos, escreveremos $f : A \longrightarrow B$, em vez de $f \in Hom(A, B)$. Estes ingredientes estão sujeitos aos seguintes axiomas:
(i) Para cada $f \in Hom(A, B)$, existe um único domínio A e um único contradomínio B.
(ii) Para cada objeto A, existe um morfismo identidade $1_A \in Hom(A, A)$ tal que $f1_A = f$ e $1_B f = f$ para todo $f : A \longrightarrow B$;
(iii) A composição é associativa: dados morfismos $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$, temos que

$$h(gf) = (hg)f.$$

Exemplo A.1. (Conjuntos) Os objetos desta categoria são conjuntos, os morfismos são funções e a composição é a composição usual de funções.
(Anéis) Os objetos são anéis, os morfismos são homomorfismos de anéis e a composição é a composição usual. Aqui consideramos que os anéis possuem elemento identidade (não necessariamente $1 \neq 0$)
(Módulos) Seja um anel R. Na categoria dos R-módulos, os objetos são R-módulos, os morfismos são R-homomorfismos, a composição é a composição usual de funções. Denotaremos esta categoria por Mod_R e o conjunto $Hom(A, B)$ em Mod_R por $Hom_R(A, B)$.
(Álgebras) Seja um anel R. Na categoria das R-álgebras, os objetos são R-álgebras, os morfismos são homomorfismos de R-álgebras, a composição é a composição de destas funções. Denotaremos esta categoria por Alg_R e o conjunto $Hom(A, B)$ em Alg_R por $Hom_R(A, B)$.

Observação A.2. A partir de agora escreveremos $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$, em vez de Hom(A,B) onde A e B são objetos da categoria $\mathbf{C}$.

Definição A.4. Se $\mathbf{C}$ é uma categoria, definimos a categoria oposta $\mathbf{C}^{op}$ como a categoria com $Obj(\mathbf{C}^{op}) = Obj(\mathbf{C})$, $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$ e a composição

$$g^{op} f^{op} = (fg)^{op}$$

com $A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{f} C$ em $\mathbf{C}$, sendo o diagrama correspondente em $\mathbf{C}^{op}$ dado por

$$C \xrightarrow{f^{op}} B \xrightarrow{g^{op}} A.$$

Definição A.5. Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias então, um funtor $T : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{D}$ é uma correspondência tal que:

(i) Se $A \in Obj(\mathbf{C})$ então, $T(A) \in Obj(\mathbf{D})$,
(ii) Se $f : A \longrightarrow A^{'}$ em $\mathbf{C}$ então, $T(f) : T(A) \longrightarrow T(A^{'})$ em $\mathbf{D}$,
(iii) Se $A \xrightarrow{f} A^{'} \xrightarrow{g} A^{''}$ então, $T(A) \xrightarrow{T(f)} T(A^{'}) \xrightarrow{T(g)} T(A^{''})$ em $\mathbf{D}$ e

$$T(gf) = T(g)T(f),$$

(iv) $T(1_A) = 1_{T(A)}$ para cada $A \in obj(\mathbf{C})$.
O funtor T é contravariante quando satisfaz (i), (iv) e cumpre as condições seguintes:
$(ii)^{'}$ Se $f : C \longrightarrow C^{'}$ em $\mathbf{C}$ então, $T(f) : T(C^{'}) \longrightarrow C$ em $\mathbf{D}$,
$(iii)^{'}$ Se $C \xrightarrow{f} C^{'} \xrightarrow{g} C^{''}$ em $\mathbf{C}$ então, $T(C^{''}) \xrightarrow{T(g)} T(C^{'}) \xrightarrow{T(f)} T(C)$ em $\mathbf{D}$ e

$$T(gf) = T(f)T(g).$$

Exemplo A.2. (i) Se $\mathbf{C}$ é uma categoria então, o funtor identidade $1_{\mathbf{C}}$ é definido por $1_{\mathbf{C}}(A) = A$ para todo objeto A e $1_{\mathbf{C}}(f) = f$ para todo morfismo f.
(ii) Se $\mathbf{C}$ é uma categoria e $A \in Obj(\mathbf{C})$ então, o funtor Hom $T_A : \mathbf{C} \longrightarrow$ *conjuntos* é denotado por $Hom(A, -)$ e é definido por

$$T_A(B) = Hom(A, B) \quad para\ todo \quad B \in Obj(\mathbf{C}),$$

e se $f : B \longrightarrow B^{'}$ em $\mathbf{C}$ então, $T_A(f) : Hom(A, B) \longrightarrow Hom(A, B^{'})$ é dado por

$$T_A(f) : h \longmapsto fh.$$

Chamamos $T_A(f) = Hom(A, f)$ de mapa induzido, denotamos este por f_*. Assim,

$$f_* : h \longmapsto fh.$$

Definição A.6. Sejam $S, T : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ um funtores covariantes. Uma transformação natural $\tau : S \longrightarrow T$ é uma família

$$\tau = (\tau_A : SA \longrightarrow TA)_{A \in Obj(A)},$$

que faz o diagrama seguinte comutar para todo $f : A \longrightarrow A^{'}$ em $\mathbf{A}$:

$$\begin{tikzcd} SA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Sf"'] & TA \arrow[d, "Tf"] \\ SA^{'} \arrow[r, "\tau_{A^{'}}"'] & TA^{'} \end{tikzcd} .$$

Observação A.3. Uma Transformação natural entre funtores contravariantes é definida similarmente.

Definição A.7. Dizemos que um morfismo $f : A \longrightarrow B$ é retrato de um morfismo $g : X \longrightarrow Y$, quando existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"'] \\ B \arrow[r] & Y \arrow[r] & B \end{tikzcd},$$

e a composição dos mapas horizontais é a identidade.

Definição A.8. Se X_0 e X_1 são objetos em uma categoria $\mathbf{C}$, então um coproduto é uma tripla $(X_0 \sqcup X_1, i_{n_0}, i_{n_1})$, onde $X_0 \sqcup X_1$ é um objeto em $\mathbf{C}$ e $i_{n_0} : X_0 \longrightarrow X_0 \sqcup X_1$ e $i_{n_1} : X_1 \longrightarrow X_0 \sqcup X_1$ são morfismos, chamados injeções, tais que: para cada objeto Y em $\mathbf{C}$ e cada par de morfismos $f_0 : X_0 \longrightarrow Y$ e $f_1 : X_1 \longrightarrow Y$, existe um único morfismo $f : X_0 \sqcup X_1 \longrightarrow Y$ tal que $fi_{n_i} = f_i$ $(i = 0, 1)$. O mapa f é denotado por $f_0 + f_1$.

Exemplo A.3. (1). Se X_0 e X_1 são R-módulos, o coproduto na categoria Mod_R existe e é a soma direta $X_0 \oplus X_1$.
(2). Se K é um anel comutativo e X_0 e X_1 são K-álgebras comutativas, então $X_0 \otimes_K X_1$ é o coproduto na categoria das K-álgebras.

Definição A.9. Se X_0 e X_1 são objetos em uma categoria $\mathbf{C}$, então um produto é uma tripla $(X_0 \sqcap X_1, j_{n_0}, j_{n_1})$, onde $X_0 \sqcap X_1$ é um objeto em $\mathbf{C}$ e $j_{n_0} : X_0 \sqcap X_1 \longrightarrow X_0$ e $j_{n_1} : X_0 \sqcap X_1 \longrightarrow X_1$ são morfismos, chamados projeções, tais que: para cada objeto X em $\mathbf{C}$ e cada par de morfismos $f_0 : X \longrightarrow X_0$ e $f_1 : X \longrightarrow X_1$, existe um único morfismo $f : X \longrightarrow X_0 \sqcap X_1$ tal que $i_{n_i} f = f_i$ $(i = 0, 1)$.

Definição A.10. (1).Um objeto $\emptyset$ em uma categoria $\mathbf{C}$ é chamado de objeto inicial quando, para cada objeto X em C, existe um único morfismo $\emptyset \longrightarrow X$.
(2). Um objeto $*$ em uma categoria $\mathbf{C}$ é chamado de uma objeto terminal quando, para cada X em $\mathbf{C}$, existe um único morfismo $X \longrightarrow *$.

Definição A.11. Dados dois morfismos $f_0 : X_0 \longrightarrow X$ e $f_1 : X_1 \longrightarrow X$ em uma categoria $\mathbf{C}$, um pullback é uma tripla (D, j_0, j_1) com $f_1 j_0 = f_0 j_1$, que possui a seguinte propriedade: para cada $(X, j_0^{'}, j_1^{'})$ com $f_1 j_0^{'} = f_0 j_1^{'}$, existe um único morfismo $f : X \longrightarrow D$ no qual $j_0^{'} = j_0 f$ e $j_1^{'} = j_1 f$.

Observação A.4. O mapa j_0 é chamado de mudança de base de f_0 (ao longo de f_1) e mapa j_1 é chamado de mudança de base de f_1 (ao longo de f_0).

Definição A.12. Dados dois morfismos $f_0 : X \longrightarrow X_0$ e $f_1 : X \longrightarrow X_1$ em uma categoria $\mathbf{C}$, um pushout é uma tripla (D, j_0, j_1) com $j_1 f_1 = j_0 f_0$, que possui a seguinte propriedade: para cada $(Y, j_0^{'}, j_1^{'})$ com $j_1^{'}f_1 = j_0^{'}f_0$, existe um único morfismo $f : D \longrightarrow Y$ no qual $j_1^{'} = fj_1$ e $j_0^{'} = fj_0$.

Observação A.5. O mapa j_1 é chamado de mudança de cobase de f_0 (ao longo de j_0) e mapa j_0 é chamado de mudança de cobase de f_1 (ao longo de j_1).

A.2.1 Complexos

A partir de agora, vamos supor que a categoria $\mathbf{C}$ é Mod_R ou Alg_R.

Definição A.13. Um complexo na categoria $\mathbf{C}$ é uma sequência de objetos e morfismos em $\mathbf{C}$ (chamados diferenciais),

$$(C_\bullet, d_\bullet) = \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow,$$

tais que

$$d_n d_{n+1} = 0 \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Para simplificar a notação, escrevemos C em vez de $(C_\bullet, d_\bullet)$.

Definição A.14. Se $(C_\bullet, d_\bullet)$ e $(C_\bullet^{'}, d_\bullet^{'})$ são complexos, então um mapa cadeia

$$f = f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet^{'}, d_\bullet^{'})$$

é uma sequencia de morfismos $f_n : C_n \longrightarrow C_n^{'}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{tikzcd}
.... \arrow[r] & C_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"'] & {} \\
... \arrow[r] & C_{n+1}^{'} \arrow[r, "d_{n+1}^{'}"] & C_n^{'} \arrow[r, "d_n^{'}"] & C_{n-1}^{'} \arrow[r] & ...
\end{tikzcd}$$

É fácil checar que a composição gf de dois mapas de cadeia

$$f_\bullet : (C_\bullet, d_\bullet) \longrightarrow (C_\bullet^{'}, d_\bullet^{'}) \quad e \quad g_\bullet : (C_\bullet^{'}, d_\bullet^{'}) \longrightarrow (C_\bullet^{''}, d_\bullet^{''})$$

É também um mapa de cadeia (gf) se $(gf)_n = g_n f_n$. O mapa cadeia identidade $1_{\mathbf{C}_\bullet}$ em $(C_\bullet, d_\bullet)$ é uma sequência de morfismos identidades $1_{C_n} : C_n \longrightarrow C_n$.

Observação A.6. A categoria de todos os complexos de $\mathbf{C}$ é denotada por $Comp(\mathbf{C})$. Apartir de agora, vamos chamar de morfismo $f : C_\bullet \longrightarrow C_\bullet^{'}$ em $\mathbf{C}$, em vez de mapa de cadeia.

Definição A.15. Um isomorfismo em $Comp(\mathbf{C})$ é um morfismo $f : C_\bullet \longrightarrow C'_\bullet$ no qual $f_n : C_n \longrightarrow C'_n$ é um isomorfismo em $\mathbf{C}$. Uma sequência de complexos e morfismos em $Comp(\mathbf{C})$

$$... \longrightarrow C_\bullet^{m+1} \xrightarrow{f^{m+1}} C_\bullet^{m} \xrightarrow{f^m} C_\bullet^{m-1} \longrightarrow ...$$

é *exata* se $Imf^{m+1} = Kerf^m$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definição A.16. Seja um complexo

$$(C_\bullet, d_\bullet) = ... \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \longrightarrow ....,$$

em $Comp(\mathbf{C})$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, a n-enésima homologia é o R-módulo

$$H_n(C) = \frac{Ker(d_n)}{IM(d_{n+1})}.$$

Proposição A.9. A n-enésima homologia induz um funtor, isto é, $H_n : Comp(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ é um funtor, para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Observação A.7. Se $f : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ é um morfismo $Comp(\mathbf{C})$, então define-se $H_n(f) : H_n(C, d) \longrightarrow H_n(C', d')$, por

$$H_n(f) : \overline{z_n} \longmapsto \overline{\overline{f_n z_n}}.$$

Definição A.17. Um complexo C em $Comp(\mathbf{C})$ é chamado projetivo quando C_n é projetivo para todo $n \geq 0$.

A.3 Categorias Modelo

Definição A.18. Dado um quadrado comutativo em um categoria $\mathbf{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Um levantamento neste diagrama é um mapa $h : B \longrightarrow X$ tal que o diagrama resultante com cinco setas comuta, i.e., tal que $hi = f$ e $ph = g$

Definição A.19. Uma categoria modelo é uma categoria $\mathbf{C}$ com três classes distintas de mapas:
(i) equivalências fracas ($\xrightarrow{e}$),
(ii) fibrados ($\longrightarrow$),

(iii) cofibrados ($\hookrightarrow$)
cada uma destas classes é fechada para a composição e contém o mapa identidade. Uma mapa que é um fibrado (resp, cofibrado) e um equivalência fraca é chamado de fibrado acíclico(resp, cofibrado acíclico). Além disso, os seguintes axiomas são requeridos:
MC1: limites finitos e colimites existem em $\mathbf{C}$.
MC2: Se f e g são mapas em $\mathbf{C}$ tais que gf está bem definida, e se dois dos três mapas f, g, gf são equivalências fracas, então o terceiro também é.
MC3: Se f é um retrato de g e g é um fibrado, cofibrado, ou uma equivalência fraca, então f também é.
MC4: Dado um quadrado comutativo como na Definição A.18, então existe um levantamento h, nas seguintes situações:
(i) i é um cofibrado e p é um fibrado acíclico ,
(ii) i é um cofibrado acíclico e p é fibrado.
MC5: Um mapa f pode ser fatorado de duas maneiras: (i) $f = pi$, onde i é um cofibrado e p é um fibrado acíclico, (ii) $f = pi$, onde i é um cofibrado acíclico e p é um fibrado.

Definição A.20. Um objeto cilindro de A é um objeto $A \wedge I$ em $\mathbf{C}$ juntamente com o diagrama

$$A \sqcup A \xrightarrow{i} A \wedge I \xrightarrow{e} A$$

que fatora o mapa $1_A + 1_A : A \sqcup A \longrightarrow A$. Um objeto cilindro $A \wedge I$ é chamado:
(i) Um objeto cilindro bom, se $A \sqcup A \xrightarrow{i} A \wedge I$ é um cofibrado,
(ii) Um objeto cilindro é muito bom, se o mapa $A \wedge I \xrightarrow{e} A$ for também um fibrado.

Observação A.8. 1. Se $A \wedge I$ é um objeto cilindro de A, nos denotamos as duas estruturas de mapas $A \longrightarrow A \wedge I$ por $i_0 = ii_{n_0}$ e $i_1 = ii_{n_1}$.

2. Por MC5, existe um objeto cilindro bom para um objeto A.

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A \sqcup A \arrow[rr] & & A \end{tikzcd}$$

3. O objeto cilindro é apenas um objeto em $\mathbf{C}$, que possui a propriedade formal acima.

4. Por MC1, uma categoria modelo $\mathbf{C}$ possui tanto objeto inicial $\emptyset$ como objeto final $*$.

Definição A.21. Seja uma categoria modelo $\mathbf{C}$. Um objeto $A \in \mathbf{C}$ é chamado cofibrante (resp. fibrante) se $\emptyset \longrightarrow A$ é um cofibrado (resp. fibrado).

Proposição A.10. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria modelo.

1. A classe dos cofibrados em $\mathbf{C}$ é estável sob mudança de cobase ($A.5$).

2. A classe dos cofibrados acíclicos em $\mathbf{C}$ é estável sob mudança de cobase.

3. A classe dos fibrados em $\mathbf{C}$ é estável sob mudança de base ($A.4$).

4. A classe dos fibrados acíclicos em $\mathbf{C}$ é estável sob mudança de base.

Proposição A.11. Se A é um cofibrante e $A \wedge I$ é um objeto cilindro bom de A então, os mapas $i_0, i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$ são cofibrantes acíclicos.

Demonstração. É suficiente checar para i_0. Como a identidade pode ser fatorada como $A \xrightarrow{i_0} A \wedge I \xrightarrow{e} A$, segue-se de MC2 que i_0 é uma equivalência fraca. Como $A \sqcup A$ é definido pelo seguinte diagrama diagrama pushout

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, "cofibrado"'] & A \arrow[d, "i_{n_0}"] \\ A \arrow[r, "i_{n_1}"] & A \sqcup A \end{tikzcd}$$

Pelo item (1) da proposição $A.10$, o mapa i_{n_0} é um cofibrante. Como i_0 é composta

$$A \xrightarrow{i_{n_0}} A \sqcup A \longrightarrow A \wedge I$$

de dois cofibrados, então ele próprio é um cofibrado. $\square$

Definição A.22. Dois mapas $f, g : A \longrightarrow X$ em $\mathbf{C}$ são chamados homotópicos à esquerda (escreve-se $f \overset{l}{\sim} g$) se existe um objeto cilindro $A \wedge I$ de A tal que o mapa soma $f + g : A \sqcup A \longrightarrow X$ estende-se para o mapa $H : A \wedge I \longrightarrow X$ tal que o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "i_0+i_1"] \arrow[dr, "f+g"'] & A \wedge I \arrow[d, "H"] \\ & X \end{tikzcd}$$

é comutativo. O mapa H é chamado de homotopia à esquerda de f para g (via o objeto cilindro $A \wedge I$). A homotopia à esquerda é chamada de boa (resp. muito boa) se $A \wedge I$ é um objeto cilindro bom (resp. muito bom) de A.

Observação A.9. Se $f \overset{l}{\sim} g$ via a homotopia H então, por MC2 o mapa f é uma equivalência fraca se, e só se, g também é. Para ver isto, note que pela prova da proposição $A.11$, os mapas i_0 e i_1 são equivalências fracas então, $f = Hi_0$ é uma equivalência fraca, consequentemente H também é, e portanto o mesmo ocorre com $g = Hi_1$.

Proposição A.12. Se $f \overset{l}{\sim} g : A \longrightarrow X$ então, existe uma homotopia à esquerda boa de f para g. Se além disso, X é fibrante então, existe uma homotopia à esquerda muito boa de f para g.

Proposição A.13. Se A é cofibrante então, $\overset{l}{\sim}$ é um relação de equivalência em $Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Demonstração. Como A é ele próprio um objeto cilindro do objeto A, podemos tomar a próprio f como uma homotopia de f para f. Seja o mapa $s : A \sqcup A \longrightarrow A \sqcup A$ tal que $(s = i_{n_1} + i_{n_0})$. A igualdade $(g + f) = (f + g)s$ mostra que se $f \overset{l}{\sim} g$ então, $g \overset{l}{\sim} f$. Suponha que $f \overset{l}{\sim} g$ e $g \overset{l}{\sim} h$. Escolha uma homotopia à esquerda boa $H : A \wedge I \longrightarrow X$ de f para g $(i.e. f = Hi_0, g = Hi_1)$ e uma homotopia à esquerda boa $H : A \wedge I^{'} \longrightarrow X$ de g para h $(i.e. g = H^{'}i_0^{'}, h = H^{'}i_1^{'})$. Seja $A \wedge \hat{I}^{''}$ o pushout do diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0^{'}"] \arrow[d, "i_1"] & A \wedge I^{'} \\ A \wedge I & \end{tikzcd}$$

Como os mapas $i_1 : A \longrightarrow A \wedge I$ e $i_0^{'} : A \longrightarrow A \wedge I^{'}$ são cofibrados acíclicos então, pela proposição $A.10$ e pela propriedade universal do pushout, $A \wedge I^{''}$ é um objeto cilindro de A. A outra outra aplicação para os mapas H e $H^{'}$ nos dá a homotopia $H^{''} : A \wedge I^{''} \longrightarrow X$ desejada de f para h.

□

Observação A.10. O simbolo $\pi^l(A, X)$ denotará o conjunto das classes de equivalência de homotopias à esquerda em $Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Proposição A.14. Se A é cofibrado e $p : Y \longrightarrow X$ é um fibrado acíclico então, a composição com p induz a bijeção:

$$p_* : \pi^l(A, Y) \longrightarrow \pi^l(A, X), \quad [f] \longmapsto [pf]$$

Demonstração. O mapa p_* está bem definido. De fato, sejam $f, g : A \longrightarrow Y$ dois mapas e H é uma homotopia à esquerda de f para g, então pH é uma homotopia à esquerda de pf para pg. Para mostrar que p_* é sobrejetiva, escolha $[f] \in \pi^l(A, X)$.

Pelo item (i) de MC4, existe um levantamento $g : A \longrightarrow Y$ no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\sim"', "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Daí, $p_*[g] = [pg] = [f]$. Para mostrar que p_* é injetiva, sejam $f, g : A \longrightarrow Y$ e suponha que $pf \sim pg : A \longrightarrow X$. Escolha uma homotopia à esquerda boa $H : A \wedge I \longrightarrow X$ de pf para pg. Pelo item (i) de MC4, existe um levantamento no diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd} A \sqcup A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\sim"', "p"] \\ A \wedge I \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

que nos dá a desejada homotopia à esquerda de f para g. □

A.3.1 Objeto Caminho

Por dualidade, o que demonstramos até agora, nos dá resultados correspondentes logo a seguir.

Definição A.23. Um objeto caminho para X é um objeto X^I da categoria modelo $\mathbf{C}$ juntamente com um diagrama $(A.9)$

$$X \xrightarrow{\sim} X^I \xrightarrow{p} X \sqcap X$$

que fatora o mapa diagonal $(i_{dx}, i_{dx}) : X \longrightarrow X$. Um objeto caminho X^I é chamado:
(i) Um objeto caminho bom quando $X^I \longrightarrow X \sqcap X$ é um fibrado, e
(ii) Um objeto caminho muito bom quando o mapa $X \longrightarrow X^I$ é também cofibrado.

Observação A.11. Por MC5, existe pelo menos um objeto caminho muito bom para um objeto X. Denotaremos os dois mapas de $X^I \longrightarrow X$ por $p_0 = p_{r_0}p$ e $p_1 = p_{r_1}p$ $(A.9)$.

Proposição A.15. Se X é fibrante e X^I é um objeto caminho para X então, os mapas $p_0, p_1 : X^I \longrightarrow X$ são fibrados acíclicos.

Definição A.24. Dois mapas $f, g : A \longrightarrow X$ são chamados homotópicos à direita ($f \overset{r}{\sim} g$) se existe um objeto caminho X^I para X tal que o mapa produto $(f, g) : A \longrightarrow X \sqcap X$ é levantado pelo mapa $H : A \longrightarrow X^I$, isto é, existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & X^I \arrow[d] \\ A \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "(f,g)"'] & X \sqcap X \end{tikzcd}$$

O mapa H é chamado homotopia à direita de f para g (via objeto caminho X^I). Uma homotopia à direita é chamada boa (resp. muito boa) se X^I é objeto caminho bom (resp. muito bom) de X.

Proposição A.16. Se $f \overset{r}{\sim} g : A \longrightarrow X$ então, existe uma homotopia à direita boa de f para g. Se A for também cofibrante então, existe uma homotopia à direita muito boa de f para g.

Proposição A.17. Se X é fibrante então, $\overset{r}{\sim}$ é uma relação de equivalência em $Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Observação A.12. Denotaremos por $\pi^r(A, X)$ o conjunto das classes de homotopia à direita em $Hom_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Proposição A.18. Suponha que A é cofibrante e $i : A \longrightarrow B$ é um cofibrante acíclico então, a composição com i induz uma bijeção:

$$i^* : \pi^r(B, X) \longrightarrow \pi^r(A, X).$$

Proposição A.19. Sejam $f, g : A \longrightarrow X$ mapas.
(i) Se A é cofibrante e $f \overset{l}{\sim} g$ então, $f \overset{r}{\sim} g$.
(ii) Se X é fibrante e $f \overset{r}{\sim} g$ então, $f \overset{l}{\sim} g$.

Observação A.13. Se A é cofibrante e X é fibrante, denotaremos da mesma forma: as relações de equivalência de homotopias à direita e à esquerda, simplesmente com o símbolo "$\sim$", e dois mapas que estão relacionas com esta relação, chamaremos de homotópicos. O conjunto das classes de equivalência com respeito a esta relação é denotado por $\pi(A, X)$.

Proposição A.20. Suponha que $f : A \longrightarrow X$ é uma mapa em $\mathbf{C}$ entre objetos A e X que são tanto fibrante e cofibrante. Então, f é uma equivalência fraca se, e só se, existe um mapa $g : X \longrightarrow A$ tal que as composições gf e fg são homotópicas as respectivas identidades.

Referências Bibliográficas

[1] P.Goerss, K.Schemmerhorn,*Model Categories and Simplicial Methods*,American Mathematical Society,2000.

[2] S.Iyengar, *André-Quillen homology of commutative algebras*, American Mathematical Society, 2006.

[3] W.G.Dwyer, J.Spalinski, *Homotopy theories and model categories*, Elsevier Science B.V, 1995.

[4] L.L.Avramov, *Homological dimensions of unbounded complexes*,Elsevier Science B.V, 1991.

[5] J.J.Rotman, *An Introduction to Homological Algebra* ; Academic Press, New York, 2009 Springer-verlag.

[6] M.André, *Homologie des algèbres commutatives, Grundlehren Math*; Springer, berlin, 1974.

[7] D.Quillen, *On the (co)-homology of commutative rings, em:Applications of categorical algebra*; New York, 1968, Proc. Symp. Pure Math. 17, Amer. Math.

[8] L.Illusie, *Complexe Cotangent et déformations*; I, Lecture Notes in Mathematics, Vol.239, Springer, Berlin, 1971.

[9] P.G.Goerss, J.F.Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*; Progress in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[10] N.Spaltenstein, *Resolutions of unbounded complexes*; Compositio Math.65, 1988.

[11] D.G.Quillen, *Homotopical Algebra*; Lecture Notes in Math.43, Springer, Berlin-New York,1967.

[12] A.Altman, S.Kleiman, *A Tern of Commutative Algebra*; Worldwide Center of Mathematics, 2012.