

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma Generalização do Teorema de Serre-Swan

Adailton de Souza Pereira

JOÃO PESSOA – PB
JULHO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Uma Generalização do Teorema de Serre-Swan

por

Adailton de Souza Pereira

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

e coorientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Julho de 2017

Catálogo na publicação
Setor de Catalogação e Classificação

P436g Pereira, Adailton de Souza.
Uma generalização do teorema de Serre-Swan / Adailton de Souza Pereira. –
João Pessoa, 2017.
71 f.

Orientador: Roberto Callejas Bedregal
Co-orientador: Napoleón Caro Tuesta
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN/PPGM

1. Matemática. 2. Teorema de Serre-Swan. 3. Espaços anelados. 4. Módulos
projetivos. I. Título.

UFPB/BC

CDU - 51(043)

Uma Generalização do Teorema de Serre-Swan

por

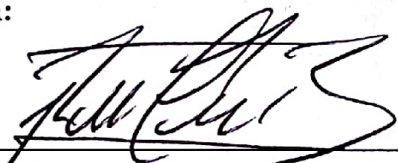
Adailton de Souza Pereira ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada em 27 de Julho de 2017.

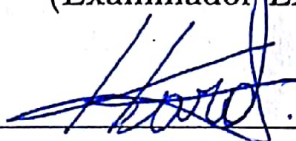
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Orientador)

Luis A. Alba S.

Prof. Dr. Luis Alberto Alba Sarria
(Examinador Externo)



Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) durante a elaboração desta dissertação.

A minha vó Letícia.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida e por permitir que eu chegasse até aqui, sempre me dando forças e coragem para persistir na busca pela realização de meus sonhos.

Aos meus pais, Maria Bezerra e Francisco Lopes por toda a educação e ensinamentos que me ofereceram, pelos os incentivos e por estarem sempre próximos a mim, por mais que eu estivesse longe.

Aos meus irmãos, Welliton, Ângela, Angélica e Franciélio por sempre me apoiarem em todas as minhas escolhas e por fazerem parte dessa linda família.

Aos meus avós, em especial, a minha querida vó Letícia que sempre foi muito presente em minha vida, e nunca mediu esforços para me ajudar nos meus estudos, sempre com muito amor e bondade.

Ao meu tio Hermes, por todo o apoio e por sempre ter acreditado em mim.

A todos os meus familiares, por sempre estarem presente em minha vida e me apoiarem em minhas escolhas.

A minha namorada Leila Jéssica, por ser a minha melhor amiga e companheira, e por sempre está ao meu lado em todos os momentos, compartilhando todas as minhas alegrias e tristezas.

Aos meus grandes amigos, Daniel e Leandro, por todos os momentos e brincadeiras vivenciadas, amigos para vida toda.

A minha grande amiga Crísia, que mesmo estando longe sempre torceu pelo meu sucesso, e me apoiou muito nos tempos de intercâmbio em Coimbra.

Aos amigos que conheci durante o mestrado, Lucas, Ricardo Bruno, Ricardo Dias, Breno, Sylvia, Djair, Esaú, Mauri, Diego, Marcius, Marcos Aurélio, Tony, Clemerson, Zeh, Pedro Pantoja entre outros, pelos ótimos momentos vivenciados.

Ao meu amigo Salatiel, por toda a convivência, conselhos, e ótimos momentos compartilhados.

Ao professor Roberto Bedregal, por sua orientação, paciência e boa vontade, permitindo um grande aprendizado durante a elaboração deste trabalho.

Ao professor Napoleón Caro, por todo o ensinamento e orientação, pelos conselhos e momentos compartilhados.

Ao meu amigo Luis Alba, pela grande ajuda disponibilizada ao longo deste trabalho, por sua boa vontade e gentileza oferecida em todos os momentos que necessitei de sua

ajuda.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho estudaremos uma generalização dos teoremas clássicos de Serre e de Swan. Determinaremos a classe dos espaços anelados (X, \mathcal{O}_X) , de modo que a categoria dos feixes localmente livres de posto limitado sobre um espaço topológico X seja equivalente à categoria dos $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -módulos projetivos finitamente gerados.

Palavras-chave: Teorema de Serre-Swan, Espaços anelados, Módulos projetivos.

Abstract

In the present work we will study a generalization of the classical theorems of Serre and Swan. We will determine the class of ringed spaces (X, \mathcal{O}_X) , so that the category of locally free sheaves of bounded rank over a topological space X is equivalent to the category of $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -modules finitely generated projective.

Keywords: Serre-Swan Theorem, Ringed spaces, Projectives modules.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Introdução | 1 |
| 1 Um pouco da teoria dos feixes | 3 |
| 1.1 Feixes de Módulos | 3 |
| 1.2 O funtor das seções globais e seu adjunto | 4 |
| 1.3 Feixes finos | 10 |
| 1.4 O feixe dos morfismos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ | 12 |
| 1.5 Feixes de tipo finito | 17 |
| 1.6 Feixes quase-coerentes e apresentação finita | 22 |
| 1.7 Feixes coerentes | 24 |
| 1.8 Feixes localmente livres | 29 |
| 2 O Teorema de Serre-Swan | 32 |
| 2.1 Resultados preliminares | 32 |
| 2.2 O Teorema Principal | 38 |
| 3 Algumas aplicações | 43 |
| 3.1 Teorema de Serre | 43 |
| 3.2 Teorema de Swan | 46 |
| 3.3 Espaços \mathcal{C}^∞ -diferenciáveis | 47 |
| A Alguns resultados de módulos | 50 |
| B Categorias Abelianas | 52 |
| C Resultados Básicos | 55 |
| Referências Bibliográficas | 59 |

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- X denota um espaço Topológico;
- \mathcal{O}_X denota um feixe de anéis no espaço topológico X ;
- (X, \mathcal{O}_X) denota um espaço anelado ou localmente anelado;
- Id denota o morfismo identidade;
- $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{M}, \mathcal{I}$ denotam feixes, e $\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x, \mathcal{H}_x, \mathcal{M}_x, \mathcal{I}_x$ seus respectivos talos;
- $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ denota o feixe dos morfismos entre \mathcal{F} e \mathcal{G} ;
- $\text{Supp}(\mathcal{F})$ denota o suporte do feixe \mathcal{F} ;
- $\text{Supp}(\xi)$ denota o suporte do morfismo de feixes $\xi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$;
- $\text{rank}(\mathcal{F})$ denota o posto do feixe \mathcal{F} e $\text{rank}_x(\mathcal{F})$ denota o posto do talo \mathcal{F}_x , para todo $x \in X$;
- $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ denota a categoria dos \mathcal{O}_X -módulos;
- $A\text{-Mod}$ denota a categoria dos A -módulos, para qualquer anel A ;
- $\text{Lfb}(X)$ denota a subcategoria plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, consistindo dos \mathcal{O}_X -módulos localmente livres de posto limitado;
- $\text{Fgp}(A)$ denota a subcategoria plena da categoria $A\text{-Mod}$, consistindo dos A -módulos projetivos finitamente gerados;
- $\text{Coh}(X)$ denota a subcategoria plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, consistindo dos \mathcal{O}_X -módulos coerentes;
- $\text{Qcoh}(X)$ denota a subcategoria plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, consistindo dos \mathcal{O}_X -módulos quase-coerentes.

Introdução

Neste trabalho, com base no artigo [15], estudamos o clássico Teorema de Serre-Swan. Em 1955, Jean-Pierre Serre formulou a primeira versão do *Teorema de Serre* [19, Section 50, Corollaire to Proposition 4, p. 242], que na versão estudada neste trabalho garante, para um esquema afim (X, \mathcal{O}_X) , a existência de uma equivalência categórica entre a categoria dos \mathcal{O}_X -módulos de posto finito e a categoria dos $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ -módulos projetivos finitamente gerados. Posteriormente, em 1962 Richard G. Swan apresentou uma nova versão para esse teorema, que foi chamado o *Teorema de Swan* [20, Theorem 2 and p. 277], que na versão estudada neste trabalho, garante a existência da mesma equivalência categórica observada por Serre, mas com X sendo um espaço topológico paracompacto com cobertura de dimensão finita e \mathcal{O}_X o feixe das funções contínuas de valores reais em X .

O objetivo deste trabalho é generalizar esse resultado para a classe dos espaços localmente anelados, que é uma classe maior. Nesse intuito, o trabalho foi dividido em três partes além do apêndice, que foi colocado com a finalidade de deixar a leitura mais agradável, apresentando alguns resultados que não foram provados no decorrer do trabalho.

O primeiro capítulo foi dedicado à abordagem de um pouco da teoria de feixes, voltada principalmente para os resultados que serão usados ao longo da dissertação. Esse capítulo será dividido em oito seções. Nas duas primeiras, serão definidos feixes de módulos, e o funtor das seções globais $\Gamma(X, \bullet)$ junto com o seu adjunto à esquerda, o funtor \mathcal{S} . Nas seções seguintes serão discutidos feixes finos, feixe de morfismos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, feixes de tipo finito, feixes quase-coerentes e apresentação finita, feixes coerentes e feixes localmente livres.

No segundo capítulo, será apresentada a demonstração do teorema de Serre-Swan. Essa demonstração foi dividida em vários resultados. Por exemplo, será mostrado que se (X, \mathcal{O}_X) é um espaço anelado e \mathcal{C} é uma subcategoria abeliana plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ tal que \mathcal{O}_X pertence a \mathcal{C} , e todos os feixes em \mathcal{C} são finitamente gerados por seções globais, então, existe um isomorfismo entre $\mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{F}))$ e \mathcal{F} , para todo feixe \mathcal{F} em \mathcal{C} . A partir desse resultado, pode-se extrair um corolário, onde será assumido

que $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ contém uma subcategoria admissível \mathcal{C} . E assim, será provado que todo módulo projetivo P finitamente gerado é isomorfo a $\Gamma(X, \mathcal{S}(P))$. Esses dois resultados constituirão um papel bem relevante na conclusão da demonstração do teorema.

O terceiro capítulo foi destinado a algumas aplicações do Teorema de Serre-Swan. Naturalmente, será observado que tanto o Teorema de Serre quanto o de Swan serão corolários do teorema anterior. Além disso, ainda será mostrado que o Teorema de Serre-Swan também é válido para espaços \mathcal{C}^∞ -diferenciáveis.

Capítulo 1

Um pouco da teoria dos feixes

Neste capítulo será estudada a teoria de feixes, abordando algumas propriedades e definições. A parte inicial, será dedicada a definir os feixes de módulos em espaços anelados e os funtores $\Gamma(X, \bullet)$ e \mathcal{S} . O restante do capítulo é destinado ao estudo de algumas classes de feixes primordiais no desenvolvimento dos capítulos seguintes.

1.1 Feixes de Módulos

Definição 1.1. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Um *feixe de \mathcal{O}_X -módulos* (ou simplesmente, um \mathcal{O}_X -módulo) é um feixe \mathcal{F} em X tal que para cada conjunto aberto $U \subseteq X$, dois morfismos $u : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ e $v : \mathcal{O}_X \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ de feixes sobre X , definidos por $u(s, s') = s + s'$ e $v(a, s) = as$, definem uma estrutura de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo em $\mathcal{F}(U)$. Além disso, se V é um subconjunto de U , então $(as)|_V = a|_V s|_V$ para todo $a \in \mathcal{O}_X(U)$ e $s \in \mathcal{F}(U)$. Denotaremos a categoria dos \mathcal{O}_X -módulos por $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ e para qualquer anel A , $A\text{-Mod}$ denotará a categoria dos A -módulos.

Se \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo, então, para cada $x \in X$, podemos definir uma estrutura de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo da seguinte forma:

$$\langle U, s \rangle \langle V, s' \rangle = \langle U \cap V, s|_{U \cap V} s'|_{U \cap V} \rangle.$$

Um *morfismo de \mathcal{O}_X -módulos* é um morfismo de feixes $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre \mathcal{O}_X -módulos, onde para cada aberto $U \subseteq X$, o morfismo $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos, isto é,

$$\phi(U)(s + s') = \phi(U)(s) + \phi(U)(s') \text{ e } \phi(U)(as) = a\phi(U)(s)$$

para cada $s \in \mathcal{F}(U)$, $s' \in \mathcal{G}(U)$ e $a \in \mathcal{O}_X(U)$.

Observação 1.1. Para cada $x \in X$, o morfismo $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de \mathcal{O}_X -módulos induz um homomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos $\phi_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$, definido por $\phi_x(\langle U, s \rangle) = \langle U, \phi(U)(s) \rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \phi_x(\langle V, s \rangle \langle U, s' \rangle) &= \phi_x(\langle V \cap U, s|_{V \cap U} s'|_{V \cap U} \rangle) \\ &= \langle V \cap U, \phi(V \cap U)(s|_{V \cap U} s'|_{V \cap U}) \rangle \\ &= \langle V \cap U, s|_{V \cap U} \phi(V \cap U)(s'|_{V \cap U}) \rangle \\ &= \langle V, s \rangle \langle U, \phi(U)(s') \rangle \\ &= \langle V, s \rangle \phi_x(\langle U, s' \rangle). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \phi_x(\langle V, s \rangle + \langle U, s' \rangle) &= \phi_x(\langle V \cap U, s|_{V \cap U} + s'|_{V \cap U} \rangle) \\ &= \langle V \cap U, \phi(V \cap U)(s|_{V \cap U} + s'|_{V \cap U}) \rangle \\ &= \langle V \cap U, \phi(V \cap U)(s|_{V \cap U}) + \phi(V \cap U)(s'|_{V \cap U}) \rangle \\ &= \langle V, \phi(V \cap U)(s|_{V \cap U}) \rangle + \langle U, \phi(V \cap U)(s'|_{V \cap U}) \rangle \\ &= \langle V, \phi(V)(s) \rangle + \langle U, \phi(U)(s') \rangle \\ &= \phi_x(\langle V, s \rangle) + \phi_x(\langle U, s' \rangle) \end{aligned}$$

Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são dois \mathcal{O}_X -módulos, denotaremos por $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, o conjunto de todos os morfismos de \mathcal{F} para \mathcal{G} . Dessa forma, para cada subconjunto aberto $U \subseteq X$, podemos definir uma estrutura de $\mathcal{O}_X(X)$ -módulo dada por $\varphi + \psi = (\varphi(U) + \psi(U))_{U \subseteq X}$ e $a\varphi = (a|_U \varphi(U))_{U \subseteq X}$, com $a \in \mathcal{O}_X(X)$ e $(\varphi, \psi) \in (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \times \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$. Com isso, obtemos que a categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ é $\mathcal{O}_X(X)$ -linear¹.

Observação 1.2. A categoria dos feixes de módulos sobre um espaço anelado é uma *categoria abeliana*. Com isso, podemos aplicar resultados clássicos da álgebra homológica de grupos abelianos como o *Lema dos Cinco*, o *Lema da Serpente*, a *Sequência Longa de Homologia*, *Teorema Fundamental do Isomorfismo*, entre outros.

1.2 O funtor das seções globais e seu adjunto

O anel das seções globais de \mathcal{O}_X , será denotado por $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e usaremos A para denotar esse anel. Desse modo, podemos definir um funtor $\Gamma(X, \bullet)$ que a cada objeto da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ corresponde a um objeto na categoria $A\text{-Mod}$, isto é,

¹Seja R um anel. Uma categoria R -linear \mathcal{A} é uma categoria onde cada conjunto de morfismos tem a estrutura de um R -módulo, e a lei de composição é R -bilinear, isto é, a composição é \mathbb{Z} -bilinear e $\varphi \circ (r\psi) = r(\varphi \circ \psi)$ e $(r\varphi) \circ \psi = r(\varphi \circ \psi)$, para $r \in R$ e $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$.

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}$$

definido por, $\Gamma(X, \bullet)(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ e para $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, temos $\Gamma(X, \bullet)(\varphi) = \varphi_X : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G})$. Este funtor será chamado *o funtor das seções globais*.

Proposição 1.1. *Sejam U um subconjunto aberto de X e $\Gamma(X, \bullet)$ o funtor das seções globais. Se a seqüência de \mathcal{O}_X -módulos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

é exata, então a seqüência de $\mathcal{O}_X(U)$ -módulos

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}') \xrightarrow{\varphi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}'') , \quad (1.2)$$

é exata à esquerda, isto é, o funtor $\Gamma(U, \bullet)$ é exato à esquerda.

Demonstração. Como φ é injetiva, o morfismo induzido $\varphi(U)$ também é injetivo para todo subconjunto aberto U de X , assim para mostrar que a seqüência 1.2 é exata, precisamos mostrar que $\text{Ker}(\varphi(U)) = \text{Im}(\psi(U))$. Seja $s \in \mathcal{F}'(U)$. Consideremos a seqüência induzida nos talos

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{F}''_x . \quad (1.3)$$

que é uma seqüência exata de grupos abelianos para todo $x \in X$, pois a seqüência 1.1 é exata. Assim, $\psi_x(\varphi_x(s_x)) = 0$ para todo $x \in U$. Consequentemente, $\psi(\varphi(s))_x = 0$ para todo $x \in U$. Por definição existe um subconjunto aberto V de U tal que o par $\langle V, s|_V \rangle$ representa o elemento $s_x \in \mathcal{F}'_x$, o par $\langle V, \varphi(s)|_V \rangle$ representa $\varphi(s)_x \in \mathcal{F}_x$ e $\langle V, \psi(\varphi(s))|_V \rangle$ representa $\psi(\varphi(s))_x \in \mathcal{F}''_x$. Além disso, temos que $\psi(\varphi(\rho'_{V,U}(s))) = \psi(\rho_{V,U}(\varphi(s))) = \rho''_{V,U}(\psi(\varphi(s)))$, por definição de morfismo de feixes, onde ρ', ρ e ρ'' são os mapas de restrições de $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ e \mathcal{F}'' , respectivamente. Para todo $x \in U$ existe uma vizinhança aberta V de x tal que $\psi(\varphi(s))|_V = 0$, assim pela condição de unicidade em feixes, $\psi(\varphi(s)) = 0$, isto é, $\text{Im}(\varphi(U)) \subseteq \text{Ker}(\psi(U))$. Reciprocamente, seja $t \in \text{Ker}(\psi)$. Para todo $x \in U$, existe $s_x \in \mathcal{F}'_x$ tal que $\varphi_x(s_x) = t_x$, pois a seqüência 1.3 é exata. Assim, existe uma cobertura aberta $\{V_i\}_{i \in I}$ de U e elementos $s_i \in \mathcal{F}'$ tal que $\varphi(s_i) = t|_{V_i}$. Como $\varphi(s_i|_{V_i \cap V_j}) = \varphi(s_j|_{V_i \cap V_j}) = t|_{V_i \cap V_j}$ para todo $i, j \in I$, então pela injetividade de φ , temos que $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$. Pela definição de feixe, existe $s \in \mathcal{F}'(U)$ tal que $s|_{V_i} = s_i$ para todo $i \in I$. Assim, pela condição de unicidade, segue que $\varphi(s) = t$. Logo, $\text{Ker}(\psi(U)) \subseteq \text{Im}(\varphi(U))$. Portanto, a seqüência 1.2 é exata à esquerda, e consequentemente o funtor $\Gamma(X, \bullet)$ é exato à esquerda. \square

Definição 1.2. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos. Então, podemos construir o *produto tensorial* entre esses \mathcal{O}_X -módulos, considerando para cada aberto $U \subseteq X$, o $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$, de modo que a associação

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$$

define um pré-feixe cujas restrições são os produtos tensoriais das respectivas restrições de \mathcal{F} e \mathcal{G} . Entretanto, esse pré-feixe, em geral, não é um feixe. Dessa forma, denotaremos por $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ a feixificação deste pré-feixe. Portanto, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ é um \mathcal{O}_X -módulo e $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ para cada $x \in X$. Note que essa última igualdade pode ser verificada observando a existência de um isomorfismo canônico entre os $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$ e $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$. De fato, considere os morfismos $\gamma : (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x \rightarrow \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x$ e $\theta : \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{G}_x \rightarrow (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})_x$ definidos por $\gamma(\langle U, f \otimes g \rangle) = f_x \otimes g_x$ e $\theta(f_x \otimes g_x) = \langle U \cap V, f|_{U \cap V} \otimes g|_{U \cap V} \rangle$ respectivamente. É fácil ver que γ e θ são inversos.

Seja M um A -módulo. Defina um pré-feixe $\mathcal{P}(M)$ em X dado por $\mathcal{P}(M)(U) = M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$ para todo subconjunto aberto U de X com a restrição $\rho_{V,U} : \mathcal{P}(M)(U) \rightarrow \mathcal{P}(M)(V)$ dada por $\rho_{V,U}(m \otimes s) = m \otimes s|_V$ para qualquer subconjunto aberto $V \subseteq U$, e elementos $m \in M$ e $s \in \mathcal{O}_X(U)$. Observemos que $\mathcal{O}_X(U)$ é canonicamente um A -módulo. De fato, basta notar que se $f \in A$ e $s \in \mathcal{O}_X(U)$, temos que $f \cdot s = f|_U \cdot s \in \mathcal{O}_X(U)$. Portanto, podemos afirmar que $\mathcal{P}(M)(U)$ é um $\mathcal{O}_X(U)$ -módulo. Denotaremos por $\mathcal{S}(M)$ o feixe associado a $\mathcal{P}(M)$. Da mesma forma, se temos um homomorfismo de A -módulos $v : M \rightarrow N$, definimos para todo aberto $U \subseteq X$ o morfismo de pré-feixes

$$(\mathcal{P}(M)(v))_U = v \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X} : M \otimes_A \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X} \rightarrow N \otimes_A \mathbf{1}_{\mathcal{O}_X}.$$

Logo, esse morfismo de pré-feixe induz um morfismo de feixes $\mathcal{S}(v) : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{S}(N)$. Assim, temos um funtor

$$\mathcal{S} : A\text{-Mod} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}. \quad (1.4)$$

Observação 1.3. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Para todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} , definiremos o homomorfismo de A -módulos

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) &\rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \\ u &\mapsto u_X(1) \end{aligned}$$

Observemos que σ é um isomorfismo, com inverso

$$\gamma : \Gamma(X, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}),$$

1. Um pouco da teoria dos feixes

dado por $\gamma(s)_U(h) = h \cdot (s|_U)$, para $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, $U \subseteq X$ aberto e $h \in \mathcal{O}_X(U)$. De fato, para todo $u \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F})$ e $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ temos

$$\sigma \circ \gamma(s) = \sigma(\gamma(s)) = \sigma(u) = u_X(1) = 1 \cdot (s|_X) = s,$$

por um lado, e por outro,

$$\gamma \circ \sigma(u) = \gamma(\sigma(u)) = \gamma(u_X(1)) = \gamma(1 \cdot s|_X) = \gamma(s) = u.$$

Portanto, temos que σ e γ são aplicações inversas entre si. Dizemos assim que o morfismo de \mathcal{O}_X -módulos $u = \gamma(s) : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{F}$ é *definido pela seção s de \mathcal{F} em X* . Deste modo, temos um isomorfismo de funtores

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \bullet) \rightarrow \Gamma(X, \bullet).$$

A observação anterior pode ser estendida para um caso mais geral. Para isso, precisaremos de um conjunto arbitrário de índices I e consideraremos a soma direta $\mathcal{O}_X^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X$ e para cada $i \in I$, seja $f_i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^{(I)}$ a injeção canônica do i -ésimo somando direto \mathcal{O}_X para $\mathcal{O}_X^{(I)}$. Assim, de modo análogo a observação 1.3, iremos definir para todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} , o homomorfismo de A -módulos

$$\begin{aligned} \sigma : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F}) &\rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})^I = \sum_{i \in I} \Gamma(X, \mathcal{F}) \\ u &\mapsto ((u \circ f_i)_X(1))_{i \in I} \end{aligned}$$

onde σ é um isomorfismo e seu inverso

$$\gamma : \Gamma(X, \mathcal{F})^I \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \mathcal{F})$$

é dado por $\gamma(s)_U(g) = \sum_{i \in I} g_i(s_i|_U)$ para $s = (s_i)_{i \in I} \in \Gamma(X, \mathcal{F})^I$, $U \subseteq X$ aberto e $g = (g_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}_X^{(I)}(U)$. Como $g \in \mathcal{O}_X(U)^{(I)}$ a soma acima é uma soma finita e portanto segue que γ está bem definida. Assim como na observação 1.3, temos o isomorfismo de funtores

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^{(I)}, \bullet) \rightarrow \Gamma(X, \bullet)^I \tag{1.5}$$

Desse modo, dizemos que o morfismo de \mathcal{O}_X -módulos $u = \gamma(s) : \mathcal{O}_X^{(I)} \rightarrow \mathcal{F}$ é *definido pela família de seções $s = (s_i)_{i \in I}$ de \mathcal{F} em X* .

Agora, faremos a demonstração de uma importante proposição que relaciona o funtor das seções globais $\Gamma(X, \bullet)$ com o funtor \mathcal{S} .

Proposição 1.2. *Para cada espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) , o funtor \mathcal{S} é um adjunto à esquerda de $\Gamma(X, \bullet)$.*

Demonstração. Defina $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A$. Sejam \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo e M um A -módulo. Agora, considere o homomorfismo $\theta : M \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{F})$ de A -módulos. Além disso, seja $\theta' : \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{F}$ o morfismo de pré-feixes tal que para todo subconjunto aberto U de X

$$\lambda_\theta : M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

é dado por $\lambda_\theta(m \otimes_A f) = f \cdot \theta(m)|_U$, para $m \in M$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Note que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) & \xrightarrow{\lambda_\theta} & \mathcal{F}(U) \\ \rho_{V,U} \downarrow & & \downarrow \rho'_{V,U} \\ M \otimes_A \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{\lambda_\theta} & \mathcal{F}(V) \end{array} \quad (1.6)$$

é comutativo para toda inclusão $V \subseteq U$ de abertos de X . De fato, seja $m \otimes f \in M \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$ então $\rho_{V,U}(m \otimes f) = m \otimes f|_V \in M \otimes_A \mathcal{O}_X(V)$ por sua vez, $\lambda_\theta(m \otimes f|_V) = f|_V \cdot \theta(m)|_V \in \mathcal{F}(V)$. Por outro lado, $\lambda_\theta(m \otimes f) = f \cdot \theta(m)|_U \in \mathcal{F}(U)$ e $\rho'_{V,U}(f \cdot \theta(m)|_U) = (f \cdot \theta(m)|_U)|_V = f|_V \cdot \theta(m)|_V \in \mathcal{F}(V)$. Portanto, o diagrama 1.6 é comutativo e λ_θ é um morfismo de pré-feixes. Podemos assim considerar o morfismo de feixes $\lambda^+(\theta)$ associado a λ_θ . Sejam $\alpha_\theta : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathcal{F}$ o morfismo de feixes associado a θ , $\sigma : M' \rightarrow M$ e $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$. Defina

$$\begin{aligned} \lambda^+ : \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M), \mathcal{F}) \\ \theta &\longmapsto \alpha_\theta \end{aligned} \quad (1.7)$$

Agora, provaremos que λ^+ é funtorial, isto é, se existe

$$\lambda^+ : \text{Hom}_A(M', \Gamma(X, \mathcal{F}')) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M'), \mathcal{F}')$$

então o diagrama abaixo é comutativo para todo σ e γ .

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) & \xrightarrow{\lambda^+} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M), \mathcal{F}) \\ \text{Hom}(\sigma, \Gamma(X, \gamma)) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\mathcal{S}(\sigma), \gamma) \\ \text{Hom}_A(M', \Gamma(X, \mathcal{F}')) & \xrightarrow{\lambda^+} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M'), \mathcal{F}') \end{array} \quad (1.8)$$

Seja $\theta \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ então temos que

$$\text{Hom}(\mathcal{S}(\sigma), \gamma) \circ \lambda^+(\theta) = \gamma \circ \lambda^+(\theta) \circ \mathcal{S}(\sigma) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M'), \mathcal{F}') \quad \text{e} \quad (1.9)$$

$$\lambda^+ \circ \text{Hom}(\sigma, \Gamma(X, \gamma))(\theta) = \lambda^+(\Gamma(X, \gamma) \circ \theta \circ \sigma) \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M'), \mathcal{F}') \quad (1.10)$$

Agora, para verificar que o diagrama 1.8 é comutativo basta mostrar que os morfismos

1.9 e 1.10 coincidem no pré-feixe $\mathcal{P}(M')$. Com efeito, seja U um subconjunto aberto de X e $m' \otimes s \in M' \otimes \mathcal{O}_X(U)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \gamma_U \circ \lambda^+(\theta) \circ \mathcal{S}(\sigma)(m' \otimes s) &= \gamma_U \circ \lambda^+(\theta) \circ (\sigma(m') \otimes s) = \gamma_U \circ \theta'_U(\sigma(m') \otimes s) \\
 &= \gamma_U(\theta'_U(\sigma(m') \otimes s)) \\
 &= \gamma_U(s \cdot \theta(\sigma(m'))|_U) \\
 &= s \cdot \gamma_U(\theta(\sigma(m'))|_U) \\
 &= s \cdot (\Gamma(X, \gamma)(\theta \circ \sigma(m')))|_U \\
 &= \lambda_{\Gamma(X, \gamma) \circ \theta \circ \sigma}(m' \otimes s) \\
 &= \lambda^+(\Gamma(X, \gamma) \circ \theta \circ \sigma)(m' \otimes s)
 \end{aligned}$$

sempre que γ seja um morfismo de feixes. Daí temos $\gamma_U \circ \lambda^+(\theta) \circ \mathcal{S}(\sigma)(m' \otimes s) = \lambda^+(\Gamma(X, \gamma) \circ \theta \circ \sigma)(m' \otimes s)$. Portanto, o diagrama 1.8 é comutativo e consequentemente γ é funtorial em \mathcal{F} e M . Por fim, resta mostrar que λ^+ é uma bijeção. De fato, defina

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M), \mathcal{F}) \longrightarrow \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \quad (1.11)$$

dado por $\varphi(u)(m) = u_X(m \otimes 1)$ para $u : \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathcal{F}$ e $m \in M$. Mostremos que o morfismo φ é inverso de λ^+ . Seja $\theta \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ e $\lambda(\theta) : M \otimes_A \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F}$ o morfismo de pré-feixes associado a $\lambda^+(\theta)$. Assim, para todo aberto U de X , temos

$$\begin{aligned}
 \lambda(\theta)_U : M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\
 m \otimes f &\longmapsto f \cdot \theta(m)|_U.
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
 \varphi(u) : M &\longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \\
 m &\longmapsto \varphi(u)(m) = \hat{u}_X(m \otimes 1)
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $\varphi(u)$ é a feixificação de \hat{u}_X . Agora, podemos observar que

$$\varphi(\lambda^+(\theta))(m) = \lambda(\theta)_X(m \otimes 1) = 1 \cdot \theta(m)|_X = \theta(m).$$

Assim, $\varphi \circ \lambda^+ = \mathbf{1}_{\text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))}$. Reciprocamente, tomemos π definido como o morfismo de pré-feixes associado a $\lambda^+(\varphi(u))$, para $u \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M), \mathcal{F})$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}\pi_U : M \otimes_A \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ m \otimes f &\longmapsto f \cdot (\varphi(u)(m))|_U\end{aligned}$$

para todo aberto U de X , $m \in M$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Observe que pela equação 1.12 temos

$$\begin{aligned}f \cdot \varphi(u)(m)|_U &= f \cdot \hat{u}_X(m \otimes 1)|_U \\ &= f \cdot \hat{u}_U((m \otimes 1)|_U) \\ &= f \cdot \hat{u}_U(m \otimes 1) \\ &= \hat{u}_U(f(m \otimes 1)) \\ &= \hat{u}_U(m \otimes f).\end{aligned}$$

E assim, provamos que $\lambda^+(\varphi(u)) = u$ e conseqüentemente $\lambda^+ \circ \varphi = \mathbf{1}_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{S}(M), \mathcal{F})}$. Portanto, λ^+ é uma bijeção. \square

1.3 Feixes finos

Nesta seção definiremos os feixes finos, que são uma importante classe de feixes definidos sobre espaços topológicos paracompactos. Esses feixes desempenham um papel muito relevante em alguns resultados ao longo do trabalho.

Um morfismo de feixes $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ sobre um espaço topológico X induz em cada ponto $x \in X$ um homomorfismo de grupos $\varphi_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ nos talos. O *suporte* do morfismo de feixes φ é definido como

$$\text{Supp}(\varphi) = \{x \in X \mid \varphi_x \neq 0\}.$$

Definição 1.3. Sejam \mathcal{F} um feixe grupos abelianos sobre um espaço topológico X e $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura localmente finita sobre X . Uma *partição da unidade* de \mathcal{F} subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma coleção $\{\xi_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}\}$ de morfismos de feixes tais que

- (i) $\text{Supp}(\xi_i) \subset U_i$;
- (ii) Para cada ponto $x \in X$, a soma $\sum_{i \in I} \xi_{i,x} = \text{Id}_{\mathcal{F}_x}$, onde $\text{Id}_{\mathcal{F}_x}$ é o morfismo identidade no talo \mathcal{F}_x .

Definição 1.4. Seja \mathcal{F} um feixe sobre um espaço topológico X . Dizemos que \mathcal{F} é *suave* se para qualquer subconjunto fechado $U \subset X$, o mapa

$$\begin{aligned}\rho_X^U : \Gamma(X, \mathcal{F}) &\longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{F}|_U) \\ s &\longmapsto ((s)_x)_{x \in U}\end{aligned}$$

é sobrejetivo. Em outras palavras, qualquer seção de \mathcal{F} sobre U pode ser estendida a uma seção de \mathcal{F} sobre X .

Definição 1.5. Um feixe \mathcal{F} sobre um espaço topológico paracompacto X é dito *fino* se para toda cobertura localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , o feixe \mathcal{F} admite uma partição da unidade subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$.

Proposição 1.3. *Seja X um espaço topológico paracompacto. Então, todo feixe fino sobre X é suave.*

Demonstração. Seja $Y \subset X$ um conjunto aberto e \mathcal{F} um feixe fino sobre X . Se $s \in \Gamma(Y, \mathcal{F})$, então para cada $x \in Y$, o germe de s em x é representado por uma seção definida em uma vizinhança de x , que coincide com s quando restringido a uma vizinhança inteseitada com Y . Assim, podemos escolher uma cobertura aberta \mathcal{V} de X e elementos $s_V \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ tal que $s|_{V \cap Y} = s_V|_{V \cap Y}$ para cada $V \in \mathcal{V}$. Observe que um desses conjuntos abertos será o complementar de Y e terá a seção nula e os outros conjuntos serão vizinhanças de pontos de Y . Uma vez que X é paracompacto, podemos assumir que \mathcal{V} é localmente finita. Agora, como \mathcal{F} é fino, existe uma família de morfismos $\{\xi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}$ tal que o suporte $\text{Supp}(\xi_i) \subset V_i$, com $V_i \in \mathcal{V}$ e $\sum_i \xi_i = \text{Id}_{\mathcal{F}_x}$. Para cada i , tomemos $\xi_i s_{V_i}$ para ser uma seção em todo ponto de X para estende-lo a 0 no complementar de V_i . Agora, defina $s' = \sum \xi_i s_{V_i} \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. Essa soma faz sentido, pois a cobertura é localmente finita, isto é, em uma vizinhança de qualquer ponto somamos somente uma quantidade finita de termos não nulos. Temos também que $s'_x = s_x$ em cada ponto $x \in Y$, assim s' é uma extensão de s para todo ponto de X . Daí segue que \mathcal{F} é suave. □

Exemplo 1.1. O feixe das funções contínuas de valores reais \mathcal{C}_X em um espaço topológico paracompacto X é um feixe fino. De fato, como todo espaço topológico paracompacto é normal, isso implica que o *Lema de Urysohn* [17, Theorem 33.1, p. 207] é válido. Assim, por [21, Lemma 1.3.2, p. 5] podemos usar esse lema para construir partições contínuas da unidade subordinada a alguma cobertura aberta localmente finita. Considere $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta localmente finita de X , isto é, $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. Assim, existe uma função contínua $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_\alpha(x) = 0$, para todo $x \in X \setminus U_\alpha$ e $\sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in U_\alpha$. Defina $\eta_\alpha : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_X$, onde para todo aberto U de X temos

$$\begin{aligned} \eta_\alpha(U) : \mathcal{C}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{C}_X(U) \\ s &\longmapsto s \cdot f_\alpha|_U : U \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

com $s \cdot f_\alpha|_U(x) = s(x)f_\alpha(x)$. Se $x \in X \setminus U_\alpha$, então $x \in X \setminus \text{Supp } f_\alpha$, conseqüentemente, existe uma vizinhança aberta V de x tal que $V \subset X \setminus \text{Supp } f_\alpha$. Logo, $f_\alpha(y) = 0$ para todo $y \in V$. Portanto, $\langle X, f_\alpha \rangle = \langle X, 0 \rangle$. Sendo X um espaço topológico paracompacto, admite uma cobertura localmente finita $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$. Logo, existe $f_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f_\alpha(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus U_\alpha$, e para cada $x \in X$ tem-se $\sum_\alpha f_\alpha(x) = \text{Id}$. Seja $y \in U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \cap U$, com $\alpha \neq \alpha_i$ para todo i . Podemos demonstrar que $f_\alpha(y) = 0$. De fato, se $f_\alpha(y) \neq 0$, então, $y \in U_\alpha$ e assim $U_\alpha \cap U \neq \emptyset$. Se α é tal que $f_\alpha(y) = 0$, então existe i tal que $\alpha = \alpha_i$. Seja U uma vizinhança aberta de x tal que $U \cap U_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para todo i , assim para $x \in X$ existem únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que $x \in U_{\alpha_i}$. Logo, se $\alpha \neq \alpha_i$ para todo i , então $f_\alpha(x) = 0$. Portanto, se $\alpha \neq \alpha_i$ tem-se, $(\eta_\alpha)_x = 0$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \sum_\alpha (\eta_\alpha)_x &= (\eta_{\alpha_1})_x + \dots + (\eta_{\alpha_n})_x : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathcal{C}_X \\ \langle U, s \rangle &\mapsto \langle U, s \rangle \langle X, f_{\alpha_1} \rangle + \dots + \langle U, s \rangle \langle X, f_{\alpha_n} \rangle \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \langle U, s \rangle (\langle X, f_{\alpha_1} \rangle + \dots + \langle X, f_{\alpha_n} \rangle) &= \langle U, s \rangle \langle X, f_{\alpha_1} + \dots + f_{\alpha_n} \rangle \\ &= \langle U, s \rangle \langle U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \cap U, 1 \rangle \\ &= \langle U, s \rangle. \end{aligned}$$

Assim, uma função contínua com suporte em um conjunto aberto define, por multiplicação, um endomorfismo de \mathcal{C}_X com suporte em um conjunto aberto. Logo, uma partição da unidade na álgebra das funções contínuas em X define uma partição da unidade para o feixe \mathcal{C}_X , nas condições da definição 1.5. Portanto, \mathcal{C}_X é um feixe fino.

1.4 O feixe dos morfismos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$

Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado, e \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos. Para todo subconjunto aberto U de X , defina

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U), \quad (1.13)$$

Como será visto na proposição 1.4 abaixo, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ define um feixe, chamado *o feixe dos \mathcal{O}_X -morfismos de \mathcal{F} para \mathcal{G}* .

Proposição 1.4. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos. Então, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é um feixe.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X|U}}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ dois morfismos e U um subconjunto aberto de X . Assim, definimos o morfismo $f + g : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ de modo que para todo

aberto $V \subseteq U$ tem-se

$$(f + g)_V(s) = f_V(s) + g_V(s).$$

Para qualquer inclusão de conjuntos abertos $W \subseteq V$ temos a igualdade

$$(f_W + g_W) \circ \rho_{W,V} = \rho_{W,V} \circ (f_V + g_V),$$

onde ρ é o morfismo de restrição, pois a composição de homomorfismos é distributiva com respeito a adição de grupos abelianos. Assim, $f + g$ é um morfismo de feixes. O elemento identidade é o morfismo 0 tal que $0_V(s)$ é o mapa zero para todo aberto V , e inverso de f é o morfismo que leva um conjunto aberto V no mapa $-f_V(s)$. A comutatividade segue da comutatividade da adição de grupos abelianos. Assim, nota-se que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ possui uma estrutura natural de grupos abelianos induzida pela estrutura de grupos abelianos de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}(V), \mathcal{G}(V))$, para todo $V \subseteq U$. Note que, dado $W \subset V \subset U$, temos $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$. De fato, suponha $f \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(W)$ então $\rho_{V,U}(f) \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$ assim para todo aberto $V_0 \subset V$, $\rho_{V,U}(f(V_0)) = f(V_0)$. Dessa forma, para todo aberto $W_0 \subset W$ temos $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}(f(W_0)) = \rho_{W,U}(f(W_0)) = f(W_0)$. Logo

$$\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}.$$

Portanto, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é um pré-feixe de grupos abelianos. Agora, provaremos os axiomas de feixes:

Axioma 1: Seja $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de um aberto $U \subseteq X$. Seja $\sigma \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ uma seção tal que $\sigma_i := \sigma|_{U_i} = 0$, para todo $i \in I$. Seja $s \in \mathcal{F}(U)$ uma seção fixada. Consideremos os seguintes morfismos de grupos abelianos

$$\sigma_i(U_i) : \mathcal{F}(U_i) \longrightarrow \mathcal{G}(U_i)$$

definido por $\sigma(s_i) = 0$. Agora, como as seções $\{s_i\}_{i \in I}$ coincidem em $U_{ij} := U_i \cap U_j$ para todo $i \neq j$, e \mathcal{F} é um feixe, temos que a seção s satisfaz $\sigma(U)(s) = 0$. Como s foi tomada como uma seção qualquer de $\mathcal{F}(U)$, temos que $\sigma(U) = 0$ e daí segue que $\sigma = 0$.

Axioma 2: Seja novamente $\{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de um aberto $U \subseteq X$ e seja $u_i : \mathcal{F}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_i}$ uma família de seções tais que $u_i = u_j$ em U_{ij} . Precisamos provar que existe uma seção $u \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ tal que $u|_{U_i} = u_i$. Seja $V \subseteq U$ então $A_i := U_i \cap V$, donde $\{A_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de V . Seja $s \in \mathcal{F}(V)$ uma seção fixada e seja o conjunto $s_i := s|_{A_i}$. Consideremos

$$u_i(A_i) : \mathcal{F}(A_i) \longrightarrow \mathcal{G}(A_i)$$

definido por $u_i(s_i) = t_i$. Daí, como \mathcal{G} é um feixe, existe uma seção $t \in \mathcal{G}(V)$ tal que $t|_{A_i} = t_i$ para todo $i \in I$. Assim, podemos definir

$$u(V) : \mathcal{F}(V) \longrightarrow \mathcal{G}(V)$$

dado por $u(s) = t$, para todo $V \subseteq U$. Portanto, $u|_{U_i} = u_i$.

□

Observação 1.4. (i) O feixe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ possui uma estrutura canônica de \mathcal{O}_X -módulo. De fato, seja U um subconjunto aberto de X , e seja $u : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ um morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos. Para $\lambda \in \mathcal{O}_X(U)$, defina $(\lambda u)_V(s) = \lambda|_V \cdot u_V(s)$, para todo $V \subseteq U$ e $s \in \mathcal{F}(V)$.

(ii) Para todo ponto $x \in X$ existe um homomorfismo canônico de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos

$$\psi_x : (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \quad (1.14)$$

definido da seguinte forma: seja $\alpha \in (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x$, tomemos uma vizinhança U de x e um morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos $\sigma : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ tal que α é igual ao germe de σ em x . Para cada ponto $y \in U$, seja $\sigma_y : \mathcal{F}_y \rightarrow \mathcal{G}_y$ denotando o homomorfismo de $\mathcal{O}_{X,y}$ -módulo induzido por σ e defina

$$\psi_x(\alpha) = \sigma_x.$$

Segue da definição que $\psi_x(\alpha)$ está bem definida, pois independe da escolha de U e σ .

Observação 1.5. O homomorfismo canônico ψ_x é funtorial. De fato, o diagrama a seguir é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x & \xrightarrow{\psi_x} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \\ \text{Hom}(\sigma, \gamma) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(\sigma_x, \gamma_x) \\ (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}', \mathcal{G}'))_x & \xrightarrow{\psi_x} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}'_x, \mathcal{G}'_x) \end{array}$$

Lema 1.5. *Seja \mathcal{F} um pré-feixe, e \mathcal{G} um feixe em um espaço topológico X . Para cada ponto $x \in X$, seja $\alpha^x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ uma morfismo nos talos. Supondo que para todo $x \in X$ e toda vizinhança aberta U de x , e para toda seção $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, existe uma vizinhança aberta V de x em U , e uma seção $r \in \Gamma(V, \mathcal{G})$, tal que $\alpha^z((s)_z) = (r)_z$ para todo $z \in V$. Então, existe um único morfismo de pré-feixes $\sigma : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que $(\sigma)_x = \alpha^x$.*

Demonstração. Seja

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x.$$

Considere $\alpha^y(s_y) = t_y$, $\forall y \in V$ e defina

$$\begin{aligned} \sigma(V_x)(s|_{V_x}) &: \mathcal{F}(V_x) \rightarrow \mathcal{G}(V_x) \\ s|_{V_x} &\mapsto \sigma(V_x)(s|_{V_x}) = t^x = (t_z^x)_{z \in V_x} \end{aligned}$$

1. Um pouco da teoria dos feixes

Observe que

$$\begin{aligned}\sigma(V_x)(s|_{V_x})|_{V_x \cap V_y} &= ((t_z^x)_{z \in V_x})|_{V_x \cap V_y} \\ &= (t_z^x)_{z \in V_x \cap V_y}\end{aligned}$$

Assim, para todo $x, y \in U$ temos

$$\begin{aligned}t^x|_{V_x \cap V_y} &= \sigma(V_x)(s|_{V_x})|_{V_x \cap V_y} \\ &= \sigma(V_x \cap V_y)(s|_{V_x \cap V_y}) \\ t^y|_{V_x \cap V_y} &= \sigma(V_y)(s|_{V_y})|_{V_x \cap V_y} \\ &= \sigma(V_x \cap V_y)(s|_{V_x \cap V_y})\end{aligned}$$

Note ainda que para $W \subset V_x$ tem-se

$$\begin{aligned}\sigma(W) : \mathcal{F}(W) &\longrightarrow \mathcal{G}(W) \\ s|_W &\longmapsto \sigma(W)(s|_W) = \sigma(V_x)(s|_{V_x})|_W,\end{aligned}$$

com o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V_x) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V_x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(W) & \longrightarrow & \mathcal{G}(W)\end{array}$$

Dessa forma, existe $t \in \mathcal{G}(U)$ tal que $t|_{V_x} = t^x$ para todo $x \in U$. Portanto, temos $\sigma(U)(s) = t$. Daí,

$$\begin{aligned}\sigma_x(s_x) &= \sigma_x(\langle U, s \rangle) \\ &= \sigma_x(\langle V_x, s|_{V_x} \rangle) \\ &= \langle V_x, \sigma(V_x)(s|_{V_x}) \rangle \\ &= \langle V_x, t^x \rangle \\ &= \alpha_x(\langle U, s \rangle) \\ &= \alpha^x(s_x).\end{aligned}$$

□

Proposição 1.6. *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Para todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{M} , o funtor*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{M}) : \mathcal{O}_X\text{-Mod}^{op} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)\text{-Mod}$$

é exato à esquerda.

Demonstração. Sejam \mathcal{F}, \mathcal{G} e \mathcal{H} três \mathcal{O}_X -módulos tais que a sequência

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

é exata. Então, precisamos mostrar que a sequência

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M})} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{M})$$

também é exata. Seja $\sigma \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{H}, \mathcal{M})$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M})(\sigma) = 0$, isto é, para todo $x \in X$ e $\theta \in \mathcal{G}_x$, $\sigma_x \circ \beta_x(\theta) = 0$. Seja $\theta' \in \mathcal{H}_x$. Então existe $\theta \in \mathcal{G}_x$ tal que $\beta_x(\theta) = \theta'$ pois β é epimorfismo. Portanto, $\sigma_x(\theta') = \sigma_x(\beta_x(\theta)) = 0$. Isso implica que $\sigma_x = 0$ para todo $x \in X$, ou seja, $\sigma = 0$. Deste modo, provamos que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})$ é injetiva. Considerando que funtores preservam composições e $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{M})$ é um funtor, temos

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M}) \circ \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta \circ \alpha, \mathcal{M}) = 0.$$

Daí,

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M})).$$

Agora, precisamos provar a inclusão reversa. Seja $\kappa \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M}))$. Para todo $\theta' \in \mathcal{H}_x$, existe $\theta \in \mathcal{G}_x$ tal que $\beta_x(\theta) = \theta'$ pois β é epimorfismo. Definamos,

$$f^x : \mathcal{H}_x \longrightarrow \mathcal{M}_x,$$

dado por $f^x(\theta') = \kappa_x(\theta)$. Uma vez que $\kappa \in \mathrm{ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M}))$, segue que f^x está bem definida. Para concluir a prova, iremos aplicar o lema 1.5 ao morfismo $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{M}$. Para todo $x \in X$, e $\theta \in \mathcal{G}_x$,

$$(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})(f))_x(\theta) = f_x \circ \beta_x(\theta) = f^x \circ \beta_x(\theta) = \kappa_x(\theta).$$

Assim, segue que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})(f) = \kappa$. Isto mostra que

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M})) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M})),$$

e conseqüentemente,

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{M})) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{M}))$$

Portanto, o funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{M})$ é exato à esquerda. A segunda parte segue imediatamente da primeira, basta trocar X por um subconjunto aberto arbitrário de X . \square

Observação 1.6. Lembremos o isomorfismo 1.5 dado por $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{O}_X^I, \mathcal{M}) \cong \Gamma(U, \mathcal{M})^I$, visto na seção 1.2. A partir desse isomorfismo, poderemos obter outro, que poderá nos auxiliar nas próximas seções. Portanto, se o conjunto de índices I é finito, então

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{O}_X^I, \mathcal{M}) \cong \Gamma(U, \mathcal{M})^I. \quad (1.15)$$

Seja U um subconjunto aberto de X . Então, o isomorfismo anterior de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X|U)$ -módulos resulta em um isomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^I, \mathcal{M})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{O}_X^I|U, \mathcal{M}|U) \cong \Gamma(U, \mathcal{M})^I = \mathcal{M}(U)^I. \quad (1.16)$$

Assim, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^I, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}^I$ para todo conjunto finito I .

1.5 Feixes de tipo finito

Definição 1.6. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo. Dizemos que \mathcal{F} é *localmente gerado por seções* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mathcal{F}|_U$ é globalmente gerado como um $\mathcal{O}_X|U$ -módulo. Em outras palavras, existem um conjunto finito de índices I e para cada $i \in I$ uma seção $s_i \in \mathcal{F}(U)$ tal que o mapa associado

$$u : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X|U \longrightarrow \mathcal{F}|U$$

seja sobrejetivo.

Definição 1.7. Um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} é dito de *tipo finito* se para todo ponto $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mathcal{F}|_U$ é gerado por uma família de seções $(s_i)_{i \in I}$ de \mathcal{F} em U . Em particular, existe uma vizinhança aberta U para qualquer $x \in X$ fixado, tal que existe um mapa sobrejetivo de feixes $\varphi : \mathcal{O}_X^n|U \longrightarrow \mathcal{F}|U$, para $n \in \mathbb{N}$.

A seguir, apresentaremos uma proposição com algumas propriedades de feixes de tipo finito.

Proposição 1.7. *Seja (X, \mathcal{O}) um espaço anelado. Então as seguintes propriedades são verdadeiras:*

- (i) *Se $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ é um morfismo sobrejetivo de \mathcal{O}_X -módulos e se \mathcal{F} é de tipo finito, então \mathcal{G} também será de tipo finito. Assim, todo feixe quociente de um feixe de tipo finito também será de tipo finito;*
- (ii) *A soma direta e o produto tensorial (sobre \mathcal{O}_X) de uma família de \mathcal{O}_X -módulos de tipo finito também é de tipo finito;*

1. Um pouco da teoria dos feixes

Demonstração. (i) Como $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ é sobrejetivo, segue que $u_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ também é sobrejetivo. Além disso, \mathcal{F} é de tipo finito por hipótese. Daí, para todo x existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mathcal{F}|_U$ é gerado por uma família finita de seções $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F}|_U)$. Assim, para $w \in \mathcal{F}_x$ temos,

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x, \text{ para } a_i \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ e } s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F}|_U), i = 1, \dots, n.$$

Pela sobrejetividade de u_x , para todo $t \in \mathcal{G}_x$ existe $w \in \mathcal{F}_x$ tal que $u_x(w) = t$. Conseqüentemente,

$$u_x(w) = t \Rightarrow u_x\left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x\right) = t \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_x((s_i)_x) = t.$$

Logo, $\mathcal{G}|_U$ é gerado pela família $u_x(s_1), \dots, u_x(s_n) \in \Gamma(X, \mathcal{G}|_U)$. Portanto, \mathcal{G} é de tipo finito. Para a segunda parte, consideremos \mathcal{F} e \mathcal{H} dois \mathcal{O}_X -módulos, com \mathcal{F} de tipo finito e $\mathcal{H}(U)$ é um subgrupo abeliano de $\mathcal{F}(U)$, para todo aberto U de X . Assim, podemos falar do feixe quociente \mathcal{F}/\mathcal{H} e da projeção canônica

$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{H},$$

que é naturalmente sobrejetiva. Logo, pela primeira parte segue que o quociente \mathcal{F}/\mathcal{H} é de tipo finito.

(ii) Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos de tipo finito, isto é, para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x tais que $\mathcal{F}|_U$ e $\mathcal{G}|_U$ são gerados por $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{F}|_U)$ e $t_1, \dots, t_m \in \Gamma(X, \mathcal{G}|_U)$, respectivamente. Assim, para $(s, t) \in (\mathcal{F}_x \times \mathcal{G}_x)$ temos

$$s \otimes t = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x \otimes \sum_{j=1}^m b_j \cdot (t_j)_x = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j \cdot (s_i)_x \otimes (t_j)_x = \sum_{i,j=1}^{n,m} a_i b_j \cdot (s_i \otimes t_j)_x,$$

para $a_i, b_j \in \mathcal{O}_{X,x}$. Assim, $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G})|_U$ é gerado por $s_i \otimes t_j$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Portanto, o produto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ é de tipo finito. Conseqüentemente, se $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ é uma família de \mathcal{O}_X -módulos de tipo finito, então, procedendo por indução sobre n , temos que o produto tensorial $\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \dots \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}_n$ é de tipo finito. A prova da soma direta segue de forma análoga. □

Proposição 1.8. *Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Sejam $x \in X$ e s_1, \dots, s_n seções de \mathcal{F} em uma vizinhança aberta U de x , tal que a família $((s_i)_x)_{i=1}^n$ gera o talo \mathcal{F}_x . Então, existe uma vizinhança aberta V de x em U tal que a família $((s_y)_{j=1}^n)$ gera \mathcal{F}_y para todo $y \in V$.*

1. Um pouco da teoria dos feixes

Demonstração. Como \mathcal{F} é de tipo finito, temos pela definição que existe uma vizinhança aberta U_1 de x em U e seções $h_1, \dots, h_m \in \Gamma(U_1, \mathcal{F})$ tais que a família $((h_i)_y)_{i=1}^m$ gera \mathcal{F}_y para todo $y \in U_1$. Como a família $((s_j)_x)_{j=1}^n$ gera \mathcal{F}_x , temos que essa família também gera $(h_i)_x$, para $i = 1, \dots, m$, isto é, existem $a_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$ tais que

$$(h_i)_x = \sum_{j=1}^n a_{ij}(s_j)_x, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Uma vez que a família $(a_{ij})_{i,j}$ é finita, existe uma vizinhança aberta U_2 de x em U_1 , e seções $f_{ij} \in \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$ tal que $a_{ij} = (f_{ij})_x$ para todo i, j . Assim, podemos escrever $(h_i)_x$ como

$$(h_i)_x = \sum_{j=1}^n (f_{ij})_x (s_j)_x, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Portanto, existe uma vizinhança aberta V de x em U tal que

$$(h_i)|_V = \sum_{j=1}^n (f_{ij})|_V (s_j)|_V, \text{ para } i = 1, \dots, m.$$

Logo, temos

$$(h_i)_y = \sum_{j=1}^n (f_{ij})_y (s_j)_y, \text{ para todo } y \in V \text{ e } i = 1, \dots, m.$$

Portanto, $((s_j)_y)_{j=1}^n$ gera \mathcal{F}_y para todo y em V . □

Definição 1.8. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo. O *suporte* de \mathcal{F} , denotado por $\text{Supp}(\mathcal{F})$, é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $\mathcal{F}_x \neq 0$, isto é,

$$\text{Supp}(\mathcal{F}) = \{x \in X : \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

Se $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ é uma seção global, então, o *suporte* de s é o conjunto dos pontos $x \in X$ tais que a imagem $s_x \in \mathcal{F}_x$ de s é diferente de zero.

Com a definição de suporte de um feixe, podemos enunciar e demonstrar uma série de importantes consequências da proposição 1.8.

Corolário 1.9. *Se \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito, então o conjunto $\text{Supp}(\mathcal{F})$ é um subconjunto fechado de X .*

Demonstração. Seja $x \in X \setminus \text{Supp}(\mathcal{F})$. Logo, $\mathcal{F}_x = 0$, assim o germe 0_x da seção nula $0 \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ gera \mathcal{F}_x . Assim, pela proposição 1.8, existe uma vizinhança aberta V de x em U , tal que 0_y gera \mathcal{F}_y , para todo $y \in V$, isto é, $\mathcal{F}_y = 0$, para todo $y \in V$. Portanto, V é uma vizinhança aberta de x em $X \setminus \text{Supp}(\mathcal{F})$, isto é, $X \setminus \text{Supp}(\mathcal{F})$ é aberto. Portanto, $\text{Supp}(\mathcal{F})$ é um conjunto fechado. □

Corolário 1.10. *Sejam \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito e $u : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de \mathcal{O}_X -módulos. Seja $x \in X$ e suponha que o homomorfismo nos talos $u_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ é igual a zero. Então, existe uma vizinhança U de x tal que $u_z = 0$ para todo $z \in U$.*

Demonstração. Tomemos $\mathcal{I} = \text{Im}(u)$, donde \mathcal{I} é um \mathcal{O}_X -submódulo do feixe \mathcal{G} e o morfismo u induz uma sequência exata de \mathcal{O}_X -módulos

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{u}} \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

isto é, \tilde{u} é sobrejetiva. Como o \mathcal{F} é de tipo finito, segue pelo item (i) da proposição 1.7 que \mathcal{I} também é de tipo finito. Como $\tilde{u}_y = u_y$ para todo $y \in X$, temos

$$\tilde{u}_y = u_y : \mathcal{F}_y \longrightarrow \mathcal{I}_y = \text{Im}(u_y).$$

Daí, obtemos que $\mathcal{I}_y = 0$ se, e somente se $\text{Im}(u_y) = 0$, isto é, $u_y = 0$. Assim, o suporte de \mathcal{I} é dado por

$$\text{Supp}(\mathcal{I}) = \{y \in X : u_y \neq 0\}$$

Para todo $x \in X \setminus \text{Supp}(\mathcal{I})$, existe uma vizinhança aberta U de x totalmente contida em $x \in X \setminus \text{Supp}(\mathcal{I})$, que é aberto pelo corolário 1.9. Portanto, $u_y = 0$ para todo y em $U \subset X \setminus \text{Supp}(\mathcal{I})$. \square

Corolário 1.11. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos de tipo finito. Seja $u : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de \mathcal{O}_X -módulos e $x \in X$. Se $u_x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ é sobrejetiva, então existe uma vizinhança aberta U de x tal que $u|_U : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Como \mathcal{G} é de tipo finito, então pelo item (i) da proposição 1.7, temos que o quociente $\text{Coker}(u) = \mathcal{G}/\text{Im}(u)$ é também de tipo finito. Agora, pelo corolário 1.9, temos que $S = \text{Supp}(\text{Coker}(u))$ é um subconjunto fechado de X . Se o morfismo u_x é sobrejetivo, então $(\text{Coker}(u))_x = \text{Coker}(u_x) = 0$, isso implica que $x \in X \setminus S$. Portanto, tomando $U = X \setminus S$, temos que U é uma vizinhança aberta de x tal que o morfismo $u|_U : \mathcal{F}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ é sobrejetivo. \square

O homomorfismo visto no item (ii) da observação 1.4, em geral, não é nem injetivo, nem sobrejetivo. Porém, sob algumas condições podemos obter a injetividade e a sobrejetividade. No próximo corolário, observaremos que se \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito, o homomorfismo 1.14 será injetivo.

Corolário 1.12. *Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Então, para todo \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{G} e para todo ponto $x \in X$, o homomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos,*

$$\psi_x : (\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

é injetivo.

1. Um pouco da teoria dos feixes

Demonstração. Seja $\sigma \in (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x$ e suponhamos que $\psi_x(\sigma) = 0$. Então, para mostrar a injetividade de ψ_x , temos que provar que $\sigma = 0$. Seja $u : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U$ tal que $\psi_x(\sigma) = u_x$. Então, $u_x = \psi_x(\sigma) = 0$ e pelo corolário 1.10, existe uma vizinhança aberta V de x em U , tal que $u_z = 0$ para todo $z \in V$. Portanto, precisamos verificar que o morfismo $u|_V : \mathcal{F}|_V \rightarrow \mathcal{G}|_V$ é igual a 0, o que resulta $\sigma = 0$. Para isso, seja $W \subseteq V$ um aberto de V e $(u|_V)_W = u_W : \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{G}(W)$ um homomorfismo. Seja s uma seção qualquer de $\mathcal{F}(W)$. Então,

$$(u_W(s))_y = u_y((s)_y) = 0 \text{ para todo } y \in W.$$

Como \mathcal{G} é um feixe, segue pelo axioma F1 da definição C.5 de feixe que $u_W(s) = 0$. Portanto, $u_W = 0$ para todo W em V , e assim temos $u|_V = 0$. Logo, $\sigma = 0$. \square

Corolário 1.13. *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado tal que, X é um espaço topológico quase-compacto. Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Então, \mathcal{F} é finitamente gerado por seções globais se é gerado por seções globais.*

Demonstração. Seja $(s_i)_{i \in I}$ uma família de seções globais de \mathcal{F} , tal que a família $((s_i)_x)_{i \in I}$ gere \mathcal{F}_x para todo $x \in X$. Visto que, \mathcal{F} é de tipo finito, existe uma família finita de seções $(\delta_j)_{j \in J_x}$ que geram \mathcal{F}_x para $x \in X$. Como $((s_i)_x)_{i \in I}$ também gera \mathcal{F}_x , temos que cada $(\delta_j)_{j \in J_x}$ é gerado por essa família, isto é, existe um subconjunto finito I_x de I e $a_{ij} \in \mathcal{O}_{X,x}$, com $i \in I_x$ e $j \in J_x$ tal que

$$\delta_j = \sum_{i \in I_x} a_{ij} (s_i)_x.$$

Dessa forma, a família $((s_i)_x)_{i \in I_x}$ gera \mathcal{F}_x . Pela proposição 1.8, existe uma vizinhança aberta U_x de x tal que a família $((s_i)_y)_{i \in I_x}$ gera \mathcal{F}_y para todo $y \in U_x$. Como X é um espaço topológico quase-compacto, admite uma subcobertura finita, isto é, existem x_1, \dots, x_n tais que

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Assim, a família

$$((s_i)_{i \in I_{x_\sigma}})_{1 \leq \sigma \leq n}$$

de seções globais de \mathcal{F} , geram o talo \mathcal{F}_x , para todo $x \in X$. Portanto, \mathcal{F} é finitamente gerado por seções globais. \square

Proposição 1.14. *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado quase-compacto e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Supondo que para um conjunto totalmente ordenado T , existem subfeixes $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ tal que $\bigcup_{t \in T} \mathcal{F}_t = \mathcal{F}$ ². Então existe $t \in T$ tal que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$.*

²Isso pode ser pensado como sendo o feixe associado ao pré-feixe $U \mapsto \bigcup_t \mathcal{F}_t(U)$.

Demonstração. Para demonstrar esse resultado, precisamos provar que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que existe t tal que $\mathcal{F}_t|_U = \mathcal{F}|_U$. Assim, o resultado seguirá, pois o conjunto das vizinhanças abertas de x (para todo $x \in X$) forma uma cobertura aberta de X , e X é um espaço topológico quase-compacto.

Agora, observemos que o módulo \mathcal{F}_x é finitamente gerado e possui submódulos $(\mathcal{F}_t)_x \subset \mathcal{F}_x$ que cobrem todo o \mathcal{F}_x . Assim, existe $t \in T$ tal que $(\mathcal{F}_t)_x = \mathcal{F}_x$. Consideremos s_1, \dots, s_k geradores de \mathcal{F} em alguma vizinhança aberta de x . Os germes desses geradores estão em \mathcal{F}_t , então existe uma vizinhança menor (o suficiente) U de x tal que $s_i|_U \in \mathcal{F}_t(U)$. Então, necessariamente os s_i 's são geradores, e portanto, $\mathcal{F}_t|_U = \mathcal{F}|_U$. \square

1.6 Feixes quase-coerentes e apresentação finita

Definição 1.9. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Dizemos que um \mathcal{O}_X é *quase-coerente* se para todo $x \in X$ existe uma vizinhança aberta U de x e conjuntos de índices arbitrários I e J tais que $\mathcal{F}|_U$ é o conúcleo de um morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos

$$\alpha : \mathcal{O}_X^{(I)}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{(J)}|_U.$$

Em outras palavras, existe uma sequência exata de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos

$$\mathcal{O}_X^{(I)}|_U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^{(J)}|_U \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

para alguma vizinhança U de x , para qualquer $x \in X$. Em particular, se fixarmos $m, n \in \mathbb{N}$, temos a sequência exata,

$$\mathcal{O}_X^m|_U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^n|_U \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0,$$

e \mathcal{F} é dito de *apresentação finita*.

Os feixes quase-coerentes compõem uma subcategoria plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ e essa subcategoria será denotada por $\mathbf{Qcoh}(X)$.

No corolário 1.12, foi provado que se tivermos um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} de tipo finito, então o homomorfismo 1.14 será injetivo. Agora, garantiremos que esse homomorfismo será um isomorfismo quando o \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} for de apresentação finita.

Proposição 1.15. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos com \mathcal{F} de apresentação finita. Então, o homomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos*

$$\psi_x : (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x),$$

é um isomorfismo para qualquer $x \in X$.

1. Um pouco da teoria dos feixes

Demonstração. Como \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo de apresentação finita, temos pela definição 1.9 que para todo $x \in X$, existe uma vizinhança aberta U de x tal que a seqüência de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos

$$\mathcal{O}_X^m|_U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^n|_U \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0, \quad (1.17)$$

é exata. Uma vez que a proposição é local com respeito a x , podemos tomar $X = U$. Provamos que o funtor $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{G})$ é exata à esquerda na proposição 1.6. Daí, temos a seqüência exata de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\beta, \mathcal{G})} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \xrightarrow{\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\alpha, \mathcal{G})} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{G}).$$

Essa seqüência induz uma seqüência exata nos talos, isto é, uma seqüência de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos

$$0 \longrightarrow (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \longrightarrow (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}))_x \longrightarrow (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{G}))_x.$$

Note que a seqüência 1.17 também induz uma seqüência exata de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos

$$\mathcal{O}_{X,x}^m \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{O}_{X,x}^n \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{F}_x \longrightarrow 0. \quad (1.18)$$

Além disso, segue da exatidão à esquerda do funtor $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\bullet, \mathcal{G}_x)$ que a seqüência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^n, \mathcal{G}_x) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^m, \mathcal{G}_x).$$

é exata. Pela observação 1.5, sabemos que ψ_x é funtorial. Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x & \longrightarrow & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}))_x & \longrightarrow & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{G}))_x & (1.19) \\ & & \downarrow \psi_x & & \downarrow \psi_x & & \downarrow \psi_x & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^n, \mathcal{G}_x) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^m, \mathcal{G}_x) & \end{array}$$

Por 1.6, existe um isomorfismo canônico

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}^n.$$

Consequentemente,

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}^n, \mathcal{G}_x) \cong \mathcal{G}_x^n \text{ e } \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G})_x \cong \mathcal{G}_x^n.$$

O que mostra o isomorfismo na segunda coluna do diagrama 1.19. De modo inteira-

mente análogo, segue o isomorfismo da terceira coluna. Portanto, segue pelo lema dos cinco que o morfismo da primeira coluna é um isomorfismo, isto é,

$$\psi_x : (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_x \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$$

é isomorfismo. □

Corolário 1.16. *Seja \mathcal{F} e \mathcal{G} \mathcal{O}_X -módulos de apresentação finita, e seja $x \in X$. Supondo que $f : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ é um isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos. Então, existe uma vizinhança aberta V de x e um isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_V$ -módulos $\sigma_V : \mathcal{F}|_V \longrightarrow \mathcal{G}|_V$ tal que $\sigma_x = f$.*

Demonstração. Consideremos $h : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ o morfismo inverso de f . Pela proposição 1.15, existe uma vizinhança aberta U de x e seções $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$ e $\theta \in \Gamma(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{F}))$ tal que $\sigma_x = f$ e $\theta_x = h$. Visto que,

$$(\sigma \circ \theta)_x = \sigma_x \circ \theta_x = f \circ h = \mathbf{1}_{\mathcal{G}_x} \text{ e } (\theta \circ \sigma)_x = \theta_x \circ \sigma_x = h \circ f = \mathbf{1}_{\mathcal{F}_x},$$

a proposição 1.15 novamente nos assegura que os germes, em x , das composições $\sigma \circ \theta$ e $\theta \circ \sigma$ são iguais ao correspondente morfismo identidade nos talos. Assim, existe uma vizinhança aberta V de x em U tal que

$$(\sigma \circ \theta)|_V = \mathbf{1}_{\mathcal{G}|_V} \text{ e } (\theta \circ \sigma)|_V = \mathbf{1}_{\mathcal{F}|_V}.$$

Logo,

$$\sigma|_V : \mathcal{F}|_V \longrightarrow \mathcal{G}|_V$$

é um isomorfismo. □

1.7 Feixes coerentes

Definição 1.10. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Dizemos que um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} é *coerente* se satisfaz as seguintes condições:

1. \mathcal{F} é de tipo finito;
2. Para todo subconjunto aberto U de X , todo inteiro $n \in \mathbb{N}$ e para todo morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos

$$\theta : \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U,$$

o $\mathcal{O}_X|_U$ -submódulo $\ker(\theta)$ de $\mathcal{O}_X^n|_U$ é de tipo finito.

Denotaremos por $\mathbf{Coh}(X)$ a subcategoria plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ consistindo dos \mathcal{O}_X -módulos coerentes.

Proposição 1.17. *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado, e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo coerente. Então, todo \mathcal{O}_X -submódulo \mathcal{F}' de tipo finito em \mathcal{F} é também coerente.*

Demonstração. Como \mathcal{F} é de tipo finito pela definição 1.10 e $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, então \mathcal{F}' é também de tipo finito. Como isso, temos apenas que verificar a condição (2) da definição de feixe coerente. Seja U uma vizinhança aberta de x em X e seja

$$\sigma : \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{F}'|_U,$$

um morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos. Agora, seja $\iota : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ o morfismo inclusão. Então, o núcleo da composição

$$w = \iota|_U \circ \sigma : \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U,$$

é igual ao núcleo de σ , isto é, $\text{Ker}(\sigma) = \text{Ker}(w)$. Uma vez que, \mathcal{F} é coerente, segue que $\text{Ker}(\sigma)$ é de tipo finito. Portanto, temos que \mathcal{F}' é coerente. \square

O próximo resultado irá fazer uma relação entre os feixes coerentes e os feixes de apresentação finita que foram objeto de estudo da seção 1.6 deste capítulo.

Proposição 1.18. *Seja (X, \mathcal{O}) um espaço anelado. Então, todo \mathcal{O}_X -módulo coerente \mathcal{F} é de apresentação finita.*

Demonstração. Seja $x \in X$. Como \mathcal{F} é de tipo finito pela primeira condição da definição 1.10, então, existe uma vizinhança aberta U de x e uma sequência exata de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos

$$\mathcal{O}_X^n|_U \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

para $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que, \mathcal{F} é coerente, o núcleo de θ , $\mathcal{K} = \text{Ker}(\theta)$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo de tipo finito, portanto, existe uma vizinhança aberta V de x em U e uma sequência exata

$$\mathcal{O}_X^m|_V \xrightarrow{v} \mathcal{K}|_V \longrightarrow 0, \quad \text{com } m \in \mathbb{N}.$$

Seja $\iota : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_X^n|_V$ o morfismo inclusão, e $u = \iota|_V \circ v : \mathcal{O}_X^m|_V \longrightarrow \mathcal{O}_X^n|_V$. Então, a sequência

$$\mathcal{O}_X^m|_V \xrightarrow{u} \mathcal{O}_X^n|_V \xrightarrow{\theta|_V} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0$$

é exata. Onde, $\text{Im}(u) = \text{Ker}(\theta|_V) = \mathcal{K}|_V$. \square

Apresentaremos agora a versão do *Lema dos Três* para feixes coerentes. Esse teorema será uma ferramenta de grande importância na demonstração algumas propriedades relacionadas a esse tipo de feixe.

Teorema 1.19 (Lema dos Três). *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

uma seqüência exata de \mathcal{O}_X -módulos. Se dois dos \mathcal{O}_X -módulos $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ são coerentes, então o terceiro também será.

Demonstração. A demonstração desse teorema se dividirá, essencialmente, em três partes. Primeiramente, suponhamos que \mathcal{G} e \mathcal{H} são coerentes. Assim, existe um morfismo sobrejetivo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos $\sigma : \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$. Dessa forma, obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker}(\beta_U \circ \sigma) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^n|_U & \xrightarrow{\beta_U \circ \sigma} & \mathcal{H}|_U & \longrightarrow & 0, \\ & & \downarrow u & & \downarrow \sigma & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}|_U & \xrightarrow{\beta_U} & \mathcal{H}|_U & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde u é induzido por σ . Seja $\mathcal{K} = \text{Ker}(\beta_U \circ \sigma)$. Como \mathcal{H} é coerente, segue que \mathcal{K} é de tipo finito pela condição (2) da definição 1.10. Assim, $\sigma(\mathcal{K})$ é um feixe de tipo finito pelo item (i) da proposição 1.7, conseqüentemente, é coerente pela proposição 1.17. Assim, pelo Lema dos Cinco, o morfismo $u : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{F}$ é um monomorfismo, implicando que \mathcal{F} é de tipo finito. Portanto, \mathcal{F} é coerente.

Suponhamos agora, que \mathcal{F} e \mathcal{G} são coerentes. Como \mathcal{G} é de tipo finito, o quociente $\mathcal{G}/\text{Ker}(\beta)$ também será de tipo finito pela proposição 1.7 e conseqüentemente, pelo primeiro Teorema Fundamental do Isomorfismo temos que $\mathcal{G}/\text{Ker}(\beta) \cong \mathcal{H}$. Portanto, \mathcal{H} também será de tipo finito. Deste modo, resta apenas verificar a condição (2) da definição 1.10. Sejam $w : \mathcal{O}_X^n|_{U'} \longrightarrow \mathcal{H}$ um homomorfismo de $\mathcal{O}_X|_{U'}$ -módulos e t_1, \dots, t_n em $\mathcal{H}(U')$ seções que definem w . Como \mathcal{F} é de tipo finito, podemos encontrar uma vizinhança aberta V de x em U' e um homomorfismo sobrejetivo $r : \mathcal{O}_X^m|_V \longrightarrow \mathcal{F}$. Uma vez que β é sobrejetivo, segue que o morfismo induzido nos talos $\beta_x : \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x$ também é sobrejetivo. Conseqüentemente, podemos encontrar para cada $x \in X$ uma vizinhança aberta W de x contida em V e seções s_1, \dots, s_n em $\mathcal{G}(W)$ tal que $\beta_x((s_i)_x) = (t_i)_x$ para $i = 1, \dots, n$. Logo, os pares $(W, \beta_W(s_i))$ e $(W, (\rho_{\mathcal{H}})_{W,U'}(t_i))$ definem a mesma classe em \mathcal{H}_x . Agora, podemos encontrar uma vizinhança aberta U de x contida em W tal que $\beta_U((\rho_{\mathcal{G}})_{U,W}(s_i)) = (\rho_{\mathcal{H}})_{U,U'}(t_i)$ para $i = 1, \dots, n$. As seções s_1, \dots, s_n definem um homomorfismo $s : \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ tal que $w_U = (\beta_U) \circ (s_U)$. Podemos assim, definir um homomorfismo

$$q = ((\alpha_U) \circ (r_U) + s) : \mathcal{O}_X^m|_U \oplus \mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U, \quad (1.20)$$

dado por $q(f \oplus g) = \alpha_U \circ r_U(f) + s(g)$, tal que obtemos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{K} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X^m|_U & \xrightarrow{h} & \mathcal{O}_X^m|_U \oplus \mathcal{O}_X^n|_U & \xrightarrow{p} & \mathcal{O}_X^n|_U & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow r_U & & \downarrow q & & \downarrow w_U & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}|_U & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}|_U & \xrightarrow{\beta_U} & \mathcal{H}|_U & \longrightarrow & 0
 \end{array} \tag{1.21}$$

onde h e p são homomorfismos canônicos, e \mathcal{K}_1 e \mathcal{K} são os núcleos de q e w_U respectivamente. Note que κ é sobrejetivo. De fato, como o morfismo β_U é sobrejetivo, segue diretamente do Lema da Serpente a sobrejetividade de κ . Uma vez que, \mathcal{K}_1 é de tipo finito, pois \mathcal{G} é coerente, segue que \mathcal{K} também de tipo finito pela definição 1.7. Portanto, o feixe \mathcal{H} é coerente.

Finalmente, suponhamos que \mathcal{F} e \mathcal{H} são coerentes. Da mesma forma que foi feito no caso onde \mathcal{F} e \mathcal{G} eram coerentes, podemos construir novamente o diagrama comutativo 1.21. Como \mathcal{H} é coerente, temos que também será de tipo finito, podemos assim escolher o morfismo w no diagrama 1.21 de modo que seja sobrejetivo. De modo análogo, podemos tomar o morfismo r sobrejetivo, pois \mathcal{F} é também coerente. Assim, pelo Lema dos Cinco segue que o morfismo q é sobrejetivo e conseqüentemente, \mathcal{G} é de tipo finito.

Agora, resta mostrar a segunda condição da definição 1.10. Como q está nas mesmas condições do morfismo 1.20, notamos que se r_U e w_U são epimorfismos, implica que q é epimorfismo. Além disso, os núcleos dos mapas verticais do diagrama 1.21 formam uma seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(r_U) \longrightarrow \text{Ker}(q) \longrightarrow \text{Ker}(w_U) \longrightarrow 0$$

em que o $\text{Ker}(r_U)$ e $\text{Ker}(w_U)$ são de tipo finito. Conseqüentemente, $\text{Ker}(q)$ é de tipo finito. E segue que \mathcal{G} é coerente, concluindo a prova do teorema. □

Corolário 1.20. *Seja $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ uma família de \mathcal{O}_X -módulos coerentes, então a soma direta $\bigoplus_{i=1, \dots, n} \mathcal{F}_i$ é também coerente.*

Demonstração. Se \mathcal{F} e \mathcal{H} são \mathcal{O}_X -módulos coerentes, existe uma seqüência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

Daí, pelo teorema 1.19, tem-se que $\mathcal{F} \oplus \mathcal{H}$ é coerente. Procedendo por indução, segue o resultado. \square

Corolário 1.21. *Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de \mathcal{O}_X -módulos coerentes. Então, $\text{Im}(\varphi)$, $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Coker}(\varphi)$ são coerentes.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Como \mathcal{F} é coerente e o morfismo $\varphi' : \mathcal{F} \rightarrow \text{Im}(\varphi)$ é sobrejetivo, pelo item (i) proposição 1.7, tem-se que $\text{Im}(\varphi)$ é de tipo finito. E ainda, pela proposição 1.17, segue que $\text{Im}(\varphi)$ é coerente, visto que \mathcal{G} é coerente. Note que existem as seguintes sequências exatas

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi'} \text{Im}(\varphi) \longrightarrow 0 \quad (1.22)$$

e

$$0 \longrightarrow \text{Im}(\varphi) \xrightarrow{\iota} \mathcal{G} \longrightarrow \text{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0, \quad (1.23)$$

onde ι denota o morfismo inclusão. Aplicando o teorema 1.19 nas sequências exatas 1.22 e 1.23, resulta a coerência de $\text{Ker}(\varphi)$ e $\text{Coker}(\varphi)$ respectivamente. \square

Corolário 1.22. *Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são dois \mathcal{O}_X -módulos coerentes, então o feixe morfismos $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é também coerente.*

Demonstração. Como estamos trabalhando localmente, podemos assumir que existe uma sequência exata de \mathcal{O}_X -módulos

$$\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\beta} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

Como o funtor $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{G}) : \mathcal{O}_X\text{-Mod}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ é exata à esquerda pela proposição 1.6, temos a seguinte sequência exata de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^m, \mathcal{G}).$$

Agora, pela observação 1.6, temos que

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^p, \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}^p, \text{ para todo } p \in \mathbb{N}$$

Assim, pelo corolário 1.20, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X^p, \mathcal{G})$ é coerente para todo $p \in \mathbb{N}$. Dessa forma, o feixe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é o núcleo de um morfismo entre feixes coerentes. Consequentemente ele será coerente. \square

Para finalizar essa seção, provaremos que o produto tensorial também preserva a coerência.

Corolário 1.23. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos coerentes, então o produto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ é coerente.*

Demonstração. Localmente, podemos assumir que \mathcal{F} pode ser escrito como o conúcleo de alguma sequência exata pois, \mathcal{F} é coerente, em especial de tipo finito. Assim, temos

$$\mathcal{O}_X^m \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

como $m, n \in \mathbb{N}$. Como o produto tensorial é um funtor exato à direita, podemos aplicar o tensor na sequência 1.7, obtendo

$$\mathcal{O}_X^m \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\mathcal{G}^m \longrightarrow \mathcal{G}^n \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

Como os feixes \mathcal{G}^m e \mathcal{G}^n são coerentes, pelo corolário 1.20, então o conúcleo do morfismo entre eles também será coerente. Portanto, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ é coerente. \square

1.8 Feixes localmente livres

Definição 1.11. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado. Um \mathcal{O}_X -módulo é dito *livre* se é isomorfo a uma soma direta de cópias de \mathcal{O}_X , isto é, existe um conjunto de índices I tal que $\mathcal{F} \cong \bigoplus_{\epsilon \in I} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{(I)}$. Dizemos também que o \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} é *localmente livre* se para todo $x \in X$, pode-se obter uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x e um conjunto de índices I , tal que $\mathcal{F}|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo livre, isto é,

$$\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X^{(I)}|_U$$

como um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo.

Em vista à definição anterior, podemos falar da cardinalidade do conjunto de índices I . Dessa forma, dizemos que um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} é *localmente livre de posto finito* quando a cardinalidade do conjunto I é finita. Se o conjunto I tem cardinalidade r , dizemos que r é o *posto* de \mathcal{F} e escreveremos $\text{rank}(\mathcal{F})$. Quando $\text{rank}(\mathcal{F}) = 1$, também chamamos \mathcal{F} um *feixe invertível*.

Observação 1.7. Seja X um espaço anelado tal que $\text{Supp}(\mathcal{O}_X) = X$. Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre e $x \in X$. Então, \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre. Como o suporte de \mathcal{O}_X é o próprio X , segue que $\mathcal{O}_{X,x} \neq 0$, para todo $x \in X$. Por [2, corolário da proposição 3, p. 204], temos que se A é um anel comutativo não nulo e M é um

A -módulo livre, então quaisquer duas bases têm o mesmo posto. Assim, o posto de \mathcal{F}_x é bem definido. Assim, por definição, existe uma vizinhança aberta U de x tal que

$$\text{rank}_y(\mathcal{F}) = \text{rank}_x(\mathcal{F}), \text{ para todo } y \in U.$$

Proposição 1.24. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado, \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de apresentação finita e $x \in X$. Suponha que \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre de posto n . Então, n é finito e existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mathcal{F}|_U$ é um $\mathcal{O}_X|_U$ -módulo localmente livre de posto n .*

Demonstração. Como \mathcal{F}_x é um módulo livre de apresentação finita, segue que o posto n de \mathcal{F}_x é finito. Seja $\theta: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}^n$ um isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos. Uma vez que \mathcal{F} e \mathcal{O}_X^n são de apresentação finita, pelo corolário 1.16 temos que existe uma vizinhança aberta U de x e um isomorfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos $\varphi: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{O}_X^n|_U$ tal que $\varphi_x = \theta$. \square

Definição 1.12. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado e $x \in X$. Se \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo qualquer, definimos

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_{X,x} \mathcal{F}_x,$$

onde $\mathfrak{m}_{X,x}$ é o ideal maximal em $\mathcal{O}_{X,x}$ e $k(x)$ é o corpo residual de X em x . Dizemos que $\mathcal{F}(x)$ é a *fibra* de \mathcal{F} em x . O *posto* de \mathcal{F} em x é definido por

$$\text{rank}_x(\mathcal{F}) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}(x).$$

Quando $\text{rank}_x(\mathcal{F}) = n$ é independente de x , dizemos que \mathcal{F} é de *posto n* . Se $\text{rank}_x(\mathcal{F})$ é finito para todo $x \in X$, \mathcal{F} é dito de *posto finito*. E ainda, se $\sup_{x \in X} \text{rank}_x(\mathcal{F}) < \infty$, então dizemos que \mathcal{F} é de *posto limitado*.

Observação 1.8. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado, e seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre. Então, para todo $x \in X$, existe um conjunto de índices I tal que $\mathcal{F}_x \cong \mathcal{O}_{X,x}^{(I)}$. Dessa forma, temos

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) \cong \mathcal{O}_{X,x}^{(I)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x) = k(x)^{(I)}.$$

Isso mostra que $\dim_{k(x)} \mathcal{F}(x)$ é igual ao posto do $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre \mathcal{F}_x . Assim, podemos observar que a definição de posto de \mathcal{F} definida na observação 1.7 é a mesma definição de posto de \mathcal{F} como um \mathcal{O}_X -módulo sobre um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) .

Denotaremos por $\mathbf{Lfb}(X)$ a subcategoria completa da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ consistindo dos \mathcal{O}_X -módulos localmente livres de posto limitado.

Proposição 1.25. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de tipo finito. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. \mathcal{F} é localmente livre;
2. \mathcal{F} é de apresentação finita e para todo ponto $x \in X$, \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre.
3. Para todo ponto $x \in X$, \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre e a função $f : X \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $x \mapsto \text{rank}_x(\mathcal{F})$ é localmente constante.

Demonstração. Para qualquer espaço anelado temos que (1) implica (2) é clara. Pela proposição 1.24, segue que (2) implica (1). As observações 1.7 e 1.8 nos garante que (1) implica (3). Agora, resta mostrar apenas que (3) implica (1). Seja $y \in X$ com $\text{rank}_y(\mathcal{F}) = n$. Supondo (3), temos que existe uma vizinhança aberta U de y , tal que $\text{rank}_x(\mathcal{F}) = n$, para todo $x \in U$. Seja $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ geradores do $\mathcal{O}_{X,y}$ -módulo \mathcal{F}_y . Substituindo U por um conjunto menor (se necessário), podemos assumir que existem seções $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ tais que $(s_i)_y = \sigma_i$, $i = 1, \dots, n$. Seja $\theta : \mathcal{O}_X^n|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ um morfismo de $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos definido pela família $(s_i)_{i=1}^n$. Então, $\theta_y : \mathcal{O}_{X,y}^n \rightarrow \mathcal{F}_y$ é um isomorfismo. Pelo corolário 1.11, existe uma vizinhança aberta V de y em U tal que $\theta|_V : \mathcal{O}_X^n|_V \rightarrow \mathcal{F}|_V$ é um morfismo sobrejetivo. Portanto, para todo $z \in V$, o morfismo $\theta_z : \mathcal{O}_{X,z}^n \rightarrow \mathcal{F}_z$ é sobrejetivo. Como \mathcal{F}_z é livre de posto n , existe um isomorfismo $\alpha^z : \mathcal{F}_z \rightarrow \mathcal{O}_{X,z}^n$. Assim, a composição

$$\alpha^z \circ \theta_z : \mathcal{O}_{X,z}^n \rightarrow \mathcal{O}_{X,z}^n$$

é um endomorfismo sobrejetivo. Por [5, Corolário 4.4 (a), p. 120], segue que $\alpha^z \circ \theta_z$ é um isomorfismo. Portanto, θ_z é um isomorfismo para todo $z \in V$, conseqüentemente, $\theta|_V : \mathcal{O}_X^n|_V \rightarrow \mathcal{F}|_V$ é um isomorfismo, isto é, \mathcal{F} é localmente livre. \square

Capítulo 2

O Teorema de Serre-Swan

Esse capítulo será dedicado à demonstração do Teorema de Serre-Swan. Na seção 2.1 será apresentada uma série de lemas e proposições que constituirá a demonstração do teorema principal deste capítulo. Já na seção 2.2, será exibida a definição de subcategorias admissíveis e alguns resultados envolvendo essa definição. E assim, finalmente, será dada a demonstração do teorema.

2.1 Resultados preliminares

Proposição 2.1. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e \mathcal{C} uma subcategoria abeliana plena de $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ tal que \mathcal{O}_X pertence a \mathcal{C} . Suponha que todo feixe em \mathcal{C} é gerado por seções globais. Então, o funtor*

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathcal{C} \longrightarrow A\text{-Mod}$$

é completamente fiel.

Demonstração. Sejam $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Para mostrar que $\Gamma(X, \bullet)$ é completamente fiel, temos que mostrar que o homomorfismo

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) &\longrightarrow \text{Hom}_A(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G})) & (2.1) \\ u &\longmapsto u_X \end{aligned}$$

é uma bijeção. Para provar que ψ é injetiva consideremos $u \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ tal que $\psi(u) = u_X = 0$. Então para garantir a injetividade de ψ precisamos obter $u = 0$. Portanto, é suficiente mostrar que $u_x(w) = 0$, para todo $x \in X$ e $w \in \mathcal{F}_x$. Como \mathcal{F} é gerado por seções globais, existem $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$ e $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, $i = 1, \dots, n$, tais que $w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x$. Assim,

$$u_x(w) = u_x \left(\sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot u_x((s_i)_x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (u_X(s_i))_x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 0 = 0.$$

Daí, segue que $u = 0$ e conseqüentemente ψ é injetiva, como queríamos.

Agora, nos resta provar que ψ é sobrejetiva. De fato, seja $\alpha : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G})$ um homomorfismo de A -módulos. Para cada $x \in X$ definiremos $\alpha^x : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$. Seja $w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x \in \mathcal{F}_x$, como visto acima. Dessa forma, podemos definir $\alpha^x(w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (\alpha(s_i))_x$. Para verificarmos que α^x está bem definida, precisamos mostrar que se $w = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x = 0$ então, $\alpha^x(w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (\alpha(s_i))_x = 0$. Consideremos o homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\mu : \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{F}$ definido pela família $(s_i)_{i=1}^n$. Então, $\mathcal{K} = \text{Ker } \varphi \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, e portanto \mathcal{K} é também gerado por seções globais. Como $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{K}_x$, existem $g_1, \dots, g_p \in \Gamma(X, \mathcal{K}) \subseteq \mathcal{O}_X^n(X) = (\Gamma(X, \mathcal{O}_X))^n = A^n$, e $b_1, \dots, b_p \in \mathcal{O}_{X,x}$ tais que $(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^p b_j \cdot (g_j)_x$. Como cada $g_j \in A^n$, temos que $g_j = (g_{j1}, \dots, g_{jn})$, para $g_{ji} \in A$, $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, p$. Então $a_i = \sum_{j=1}^p b_j \cdot (g_{ji})_x$, para $i = 1, \dots, n$, e $\sum_{i=1}^n g_{ji} s_i = \sum_{i=1}^n g_{ji} \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n \mu(g_{ji} e_i) = 0$, para $j = 1, \dots, p$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i \cdot \alpha(s_i)_x &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p b_j \cdot (g_{ji})_x \cdot \alpha(s_i)_x = \sum_{j=1}^p b_j \cdot \left(\sum_{i=1}^n g_{ji} \alpha(s_i) \right)_x \\ &= \sum_{j=1}^p b_j \cdot \left(\alpha \left(\sum_{i=1}^n g_{ji} s_i \right) \right)_x = \sum_{j=1}^p b_j \cdot \alpha(0)_x = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Logo, α^x está bem definido para todo $x \in X$. Agora, para concluir a demonstração, precisamos verificar que α^x , com $x \in X$, dá origem a um homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, satisfazendo o lema 1.5. Consideremos uma vizinhança aberta U de x , e $s \in \mathcal{F}(U)$. Como anteriormente, tomemos $s_x = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x$ para algum $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, e algum $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, com $i = 1, \dots, n$. Assim, existe uma cobertura aberta V de x em U , e $h_i \in \mathcal{O}_X(V)$, tal que $a_i = (h_i)_x$, com $i = 1, \dots, n$, e $s|_V = \sum_{i=1}^n h_i \cdot s_i|_V$. Agora, defina $u_V(s) = t = \sum_{i=1}^n h_i \cdot \alpha(s_i)|_V \in \mathcal{G}(V)$. Daí,

$$\alpha^y(s_y) = \alpha^y \left(\sum_{i=1}^n (h_i)_y (s_i)_y \right) = \sum_{i=1}^n (h_i)_y (\alpha(s_i))_y = \sum_{i=1}^n (h_i \cdot \alpha(s_i))_y = t_y.$$

para todo $y \in V$. Como isso obtemos que existe um único homomorfismo $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ de \mathcal{O}_X -módulos tal que $u_x = \alpha^x$. E finalmente, temos $\sigma_X = \alpha$. Portanto, ψ é um isomorfismo e conseqüentemente, é completamente fiel. \square

Proposição 2.2. *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado, tal que X é um espaço topológico paracompacto e \mathcal{O}_X é um feixe fino. Considere um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} . Seja x um ponto de X , U uma vizinhança aberta de x e $s' \in \mathcal{F}(U)$. Então, existe uma vizinhança aberta V de x em U e uma seção global s de \mathcal{F} , tal que $s|_V = s'|_V$. Em particular,*

o homomorfismo canônico $\rho_x : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ é sobrejetivo e conseqüentemente \mathcal{F} é gerado por seções globais.

Demonstração. Como X é um espaço topológico paracompacto e Hausdorff, temos que X é normal¹. Portanto, existe uma vizinhança fechada N de x tal que $N \subset U$. Tomemos agora o interior de N como sendo V e $U_1 = U$, $U_2 = X \setminus N$. Assim U_1, U_2 forma uma cobertura aberta de X , ou seja, $X = U_1 \cup U_2$. Uma vez que \mathcal{O}_X é um feixe fino, temos pela definição 1.5 que existe uma partição da unidade $\{\xi_1, \xi_2\}$ para $\{U_1, U_2\}$ de \mathcal{O}_X . Consideremos $M = \text{Supp}(\xi_1)$. Definamos $s_1 = (\xi_1)_U(1)s' \in \mathcal{F}(U)$, e $s_2 = 0 \in \mathcal{F}(W)$, com $W = X \setminus M$. Para $t \in U \cap W$, temos $t \notin \text{Supp}(\xi_1)$, donde $(\xi_1)_t = 0$, conseqüentemente,

$$(s_1)_t = (\xi_1)_t(1)(s')_t = 0,$$

assim, $s_1|_{U \cap W} = s_2|_{U \cap W} = 0$. Agora, observemos que $X = U \cup W$. De fato, seja $t \in X$ e suponhamos que $t \notin U$, então $t \notin \text{Supp}(\xi_1)$, isto é, $t \in W$. Como \mathcal{F} é um feixe, existe uma seção global s de \mathcal{F} tal que $s|_U = s_1$ e $s|_W = s_2$. Uma vez que $V \subset X \setminus U_2 \subset X \setminus \text{Supp}(\xi_2)$, temos que $(\xi_2)_t = 0$ e daí segue que $(\xi_1)_t = \mathbf{1}_{\mathcal{O}_{X,t}}$ para todo $t \in V$. Assim, para todo $t \in V$,

$$(s|_V)_t = (\xi_1)_t(1)(s')_t = (s')_t.$$

Conseqüentemente, $s|_V = s'|_V$. Para finalizar a demonstração, seja $\lambda \in \mathcal{F}_x$. Então existe uma vizinhança aberta U de x , e $s' \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s'_x = \lambda$. Pela primeira parte, existe $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, e uma vizinhança V de x tal que $s|_V = s'|_V$. Portanto,

$$(s'|_V) = (s|_V) = (s')_x = \lambda.$$

Daí, ρ_x é sobrejetiva. □

Segue da proposição 2.1 que para um espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) satisfazendo as condições da proposição 2.2, o funtor das seções globais $\Gamma(X, \bullet) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}$ é completamente fiel.

Observação 2.1. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e seja A denotando do anel das seções globais $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Se \mathcal{C} é uma subcategoria da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$, defina $A\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$ como a subcategoria plena da categoria $A\text{-Mod}$ consistindo dos A -módulos M tal que $M \cong \Gamma(X, \mathcal{F})$ para todo \mathcal{F} em \mathcal{C} . Seja \mathcal{C} uma subcategoria de $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ como na proposição 2.1, então o funtor

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathcal{C} \longrightarrow A\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$$

¹Um espaço topológico X é um espaço *normal* se, dados quaisquer dois conjuntos fechados e disjuntos E e F , existem vizinhanças U de E e V de F que são também disjuntas. Em outras palavras, podemos dizer que E e F podem ser separados por vizinhanças.

é uma equivalência de categorias. De fato, pela proposição 2.1, o funtor $\Gamma(X, \bullet)$ é completamente fiel e pela definição de $A\text{-Mod}_{\mathcal{C}}$, é essencialmente sobrejetivo. Portanto, o funtor $\Gamma(X, \bullet)$ é uma equivalência de categorias.

Proposição 2.3. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado, A denotando o anel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ e \mathcal{C} uma subcategoria abeliana plena da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ tal que \mathcal{O}_X pertence a \mathcal{C} . Suponha que todo feixe em \mathcal{C} é gerado por seções globais. Então, o homomorfismo canônico $\mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{F})) \rightarrow \mathcal{F}$ é um isomorfismo para todo feixe \mathcal{F} em \mathcal{C} .*

Demonstração. Considere $\mathcal{M} = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Seja $\theta' : \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}$ o morfismo de pré-feixes tal que para todo conjunto aberto U de X tem-se

$$\begin{aligned} \theta'_U : \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{O}_X(U) &\rightarrow \mathcal{F}(U) \\ (m \otimes_A f) &\mapsto f \cdot m|_U \end{aligned}$$

onde $m \in \mathcal{M}$ e $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Agora, considere $\theta : \mathcal{S}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}$ o morfismo de feixes associado a θ' . Assim, podemos enxergar o morfismo θ nos talos de modo que $\theta_x : \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{F}_x$ é dado por

$$\theta_x \left(\sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x$$

para $x \in X$, $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, e $s_i \in \mathcal{M}$, com $i = 1, \dots, n$. Observe que pelo fato de θ ser um morfismo de feixes, para provar que θ é um isomorfismo, basta provar que é isomorfismo nos talos, ou seja, que θ_x é um isomorfismo para todo $x \in X$. Como \mathcal{F} é gerado por seções globais, qualquer germe $t \in \mathcal{F}_x$ pode ser escrito como

$$t = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x, \text{ para algum } a_i \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ e } s_i \in \mathcal{M}, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

Agora, com o intuito de provar que u_x é sobrejetivo, defina

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i \in \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{O}_{X,x}.$$

Então,

$$\theta_x(\epsilon) = \theta_x \left(\sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x = t.$$

Assim, fica provado a sobrejetividade de θ_x . Agora, resta verificar que θ_x é injetiva. De fato, considere

$$w = \sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i \in \mathcal{M} \otimes_A \mathcal{O}_{X,x}, \text{ para } s_i \in \mathcal{M}, \text{ e } a_i \in \mathcal{O}_{X,x}, \text{ com } i = 1, \dots, n.$$

Suponha que

$$\theta_x(w) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x = 0.$$

2. O Teorema de Serre-Swan

Agora, para mostrar a injetividade de θ_x é suficiente provar que $w = 0$. Neste sentido, considere o morfismo

$$\mu : \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{F}$$

de \mathcal{O}_X -módulos definido pela família $(s_i)_{i=1}^n$. Então, tomando o feixe $\mathcal{K} = \text{Ker } \mu \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ gerado por seções globais, por hipótese, e $(a_i, \dots, a_n) \in \mathcal{K}_x$. Assim, existem $k = (k_1, \dots, k_p) \in \Gamma(X, \mathcal{K}) \subseteq \mathcal{O}_X^n(X) = A^n$, e $b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathcal{O}_{X,x}$ tais que

$$k = \sum_{j=1}^p b_j \cdot (k_j)_x, \text{ para todo } x \in X.$$

Como cada $k_j \in A^n$, pode-se escrever $k_j = (k_{j1}, \dots, k_{jn})$, com $k_{ji} \in A$, $i = 1, \dots, n$, e $j = 1, \dots, p$. Dessa forma,

$$a_i = \sum_{j=1}^p b_j \cdot (k_{ji})_x \text{ para } i = 1, \dots, n,$$

com

$$\sum_{i=1}^n k_{ji} s_i = \sum_{i=1}^n k_{ji} \mu(e_i) = \sum_{i=1}^n \mu(k_{ji} e_i) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, p.$$

Assim,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i = \sum_{i=1}^n s_i \otimes_A \sum_{j=1}^p b_j \cdot (k_{ji})_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p s_i \otimes_A b_j \cdot (k_{ji})_x \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p k_{ji} s_i \right) \otimes_A b_j = 0. \end{aligned}$$

Portanto, θ_x é injetiva. Daí, segue o resultado. \square

Observação 2.2. Com a proposição acima, podemos apresentar uma nova demonstração para a proposição 2.1. De fato, iremos definir o morfismo inverso do morfismo ψ , definido como em 2.1. Se σ é o inverso de θ na proposição 2.3, então para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} \sigma_x : \mathcal{F}_x &\longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \\ t &\longmapsto \sum_{i=1}^n s_i \otimes_A a_i \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde, $t = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x$, $a_i \in \mathcal{O}_{X,x}$, e $s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, com $i = 1, \dots, n$. Agora, consideremos $\theta_{\mathcal{G}}$ o morfismo counidade de \mathcal{G} com respeito a adjunção λ , definida como em 1.7, isto é,

$$\theta_{\mathcal{G}} = \varphi(\mathbf{1}_{\Gamma(X, \mathcal{G})}), \text{ onde } \mathbf{1}_{\Gamma(X, \mathcal{G})} : \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}).$$

Então, o morfismo inverso de ψ é dado por

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hom}_A(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G})) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \\ \gamma &\longmapsto u_{\mathcal{G}} \circ \mathcal{S}(\gamma) \circ \sigma \end{aligned} \quad (2.4)$$

Agora, verificaremos que ϕ define de fato um inverso de ψ . Para isso consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{P}(\Gamma(X, \mathcal{F})) & \xrightarrow{\mathcal{P}(\gamma)} & \mathcal{P}(\Gamma(X, \mathcal{G})) & & \\ & \swarrow \theta' & \downarrow \iota^{\mathcal{F}} & & \downarrow \iota^{\mathcal{G}} & \searrow \mu & \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\sigma} & \mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{F})) & \xrightarrow{\mathcal{S}(\gamma)} & \mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{G})) & \xrightarrow{\theta_{\mathcal{G}}} & \mathcal{G} \end{array} \quad (2.5)$$

Note que $\sigma \circ \theta' = \iota^{\mathcal{F}}$, pois σ é o inverso de θ , e assim $\theta' = \theta \circ \iota^{\mathcal{F}}$. Observe que a última linha do diagrama acima 2.5 pode vista como

$$\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sigma_X} \mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{F}))(X) \xrightarrow{\mathcal{S}(\gamma)_X} \mathcal{S}(\Gamma(X, \mathcal{G}))(X) \xrightarrow{(\theta_{\mathcal{G}})_X} \mathcal{G}(X)$$

onde todo $s \in \mathcal{F}(X)$ pode ser escrito como $s = \theta'(s \otimes 1)$. Além disso, o morfismo $\mu : \mathcal{P}(\Gamma(X, \mathcal{G})) \longrightarrow \mathcal{G}$ é dado por $\mu(m \otimes s) = s \cdot m|_U$, para $m \in \Gamma(X, \mathcal{G})$, $s \in \mathcal{O}_X$ e U é um aberto de X . Assim para todo $m' \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ temos

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi(\gamma)(m') &= \psi(\theta_{\mathcal{G}} \circ \mathcal{S}(\gamma \circ \sigma))(m') \\ &= (\theta_{\mathcal{G}})_X \circ (\mathcal{S}(\gamma))_X \circ \sigma_X(m') \\ &= (\theta_{\mathcal{G}})_X \circ (\mathcal{S}(\gamma))_X \circ \sigma_X(\theta'(m' \otimes 1)) \\ &= (\theta_{\mathcal{G}})_X \circ (\mathcal{S}(\gamma))_X \circ \iota_X^{\mathcal{F}}(m' \otimes 1) \\ &= (\theta_{\mathcal{G}})_X \circ \iota_X^{\mathcal{G}} \circ (\mathcal{P}(\gamma))_X(m' \otimes 1) \\ &= (\theta_{\mathcal{G}})_X \circ \iota_X^{\mathcal{G}}(\gamma(m') \otimes 1) \\ &= \gamma(m'). \end{aligned}$$

Provamos assim que $\psi \circ \phi = \text{Id}_{\text{Hom}_A(\Gamma(X, \mathcal{F}), \Gamma(X, \mathcal{G}))}$. Reciprocamente, seja $f \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, então teremos que mostrar a igualdade $\phi \circ \psi(f) = f$. De fato, temos que

$$\phi \circ \psi(f) = \phi(\Gamma(X, f)) = \phi(f_X) = \theta_{\mathcal{G}} \circ \mathcal{S}(f_X) \circ \sigma.$$

Daí, como a composição $\theta_{\mathcal{G}} \circ \mathcal{S}(f_X) \circ \sigma$ é um morfismo de feixes, é suficiente provamos que a igualdade $(\theta_{\mathcal{G}})_x \circ (\mathcal{S}(f_X))_x \circ \sigma_x = f_x$ para todo $x \in X$. Como \mathcal{F} é gerado por seções globais, para todo $t \in \mathcal{F}_x$ temos

$$t = \sum_{i=1}^n a_i \cdot (s_i)_x, \text{ para } a_i \in \mathcal{O}_{X,x} \text{ e } s_i \in \Gamma(X, \mathcal{F}).$$

Assim, por 2.3 temos $\sigma_x(t) = \sum_{i=1}^n s_i \otimes a_i$. Dessa forma,

$$\mathcal{S}(f_X)_x(\sigma_x(t)) = \mathcal{S}(f_X)_x \left(\sum_{i=1}^n s_i \otimes a_i \right) = \sum_{i=1}^n f_X(s_i) \otimes a_i. \quad (2.6)$$

Olhando a igualdade acima 2.6 no pré-feixe $\mathcal{P}(f_X)_x$, temos

$$\mathcal{P}(f_X)_x : \Gamma(X, \mathcal{F}) \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \otimes_A \mathcal{O}_{X,x}$$

definido por $\mathcal{P}(f_X)_x(s \otimes a_x) = f_X(s) \otimes a_x$, para $s \in \Gamma(X, \mathcal{F})$, $a_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ e todo $x \in X$. Dessa forma, temos finalmente

$$\begin{aligned} (\theta_{\mathcal{G}})_x \left(\sum_{i=1}^n f_X(s_i) \otimes a_i \right) &= \sum_{i=1}^n a_i (f_X(s_i))_x \\ &= \sum_{i=1}^n a_i f_x((s_i)_x) \\ &= f_x \left(\sum_{i=1}^n a_i (s_i)_x \right) \\ &= f_x(t). \end{aligned}$$

Portanto, $\phi \circ \psi = \text{Id}_{\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$. Isto mostra que ϕ e ψ são inversos.

2.2 O Teorema Principal

Definição 2.1. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado. Então, uma subcategoria \mathcal{C} de $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ é dita uma *subcategoria admissível* se são satisfeitas as seguintes condições:

- A1.** \mathcal{C} é uma subcategoria abeliana plena² de $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ e $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pertence a \mathcal{C} para todo par de feixes \mathcal{F} e $\mathbf{Lfb}(X)$ e \mathcal{G} em \mathcal{C} ;
- A2.** Todo feixe em \mathcal{C} é acíclico e gerado por seções globais.
- A3.** $\mathbf{Lfb}(X)$ é uma subcategoria de \mathcal{C} .

Exemplo 2.1. A subcategoria plena dos feixes quase-coerentes \mathbf{Qcoh} é uma subcategoria admissível. Esse fato será mostrado no capítulo 3, na demonstração do teorema 3.4.

²Sejam \mathcal{B} uma categoria e \mathcal{A} uma subcategoria de \mathcal{B} . Dizemos que \mathcal{A} é uma *subcategoria plena* de \mathcal{B} se $\text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) = \text{Mor}_{\mathcal{B}}(A, B)$ para todos $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{A})$.

De posse da definição de subcategoria admissível, podemos apresentar um corolário da proposição 2.3, vista no final da seção anterior.

Corolário 2.4 (Corolário da proposição 2.3). *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado e A o anel das seções globais $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Suponha que $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ contém uma subcategoria admissível \mathcal{C} . Então, para todo módulo projetivo finitamente gerado P , tem-se o isomorfismo $\Gamma(X, \mathcal{S}(P)) \longrightarrow P$.*

Demonstração. Como todo módulo projetivo finitamente gerado é de apresentação finita, temos a seguinte sequência exata

$$A^m \xrightarrow{\gamma} A^n \longrightarrow P \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

para $m, n \in \mathbb{N}$. Agora, aplicando o funtor \mathcal{S} , temos

$$\mathcal{S}(A^m) \xrightarrow{\mathcal{S}(\gamma)} \mathcal{S}(A^n) \longrightarrow \mathcal{S}(P) \longrightarrow 0 .$$

Daí, usando a proposição 2.3, temos a seguinte sequência exata

$$\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{\phi(\gamma)} \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{S}(P) \longrightarrow 0 . \quad (2.8)$$

Note que ϕ é definido como em 2.4 da observação 2.2. Uma vez que \mathcal{C} é uma subcategoria admissível pela definição 2.1, pela condição **A3** temos que $\mathbf{Lfb}(X)$ é uma subcategoria de \mathcal{C} e assim segue que \mathcal{O}_X^p é um objeto de \mathcal{C} , para todo $p \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, usando a condição **A1** podemos observar que $\mathcal{S}(P)$ é um objeto de \mathcal{C} . Além disso, $\Gamma(X, \bullet)$ é um funtor exato quando restrito à categoria dos \mathcal{O}_X -módulos acíclicos. Assim, podemos aplicar o funtor $\Gamma(X, \bullet)$ a sequência 2.8, originando a sequência exata

$$\Gamma(X, \bullet)(\mathcal{O}_X^m) \xrightarrow{\Gamma(X, \bullet)(\phi(\gamma))} \Gamma(X, \bullet)(\mathcal{O}_X^n) \longrightarrow \Gamma(X, \bullet)(\mathcal{S}(P)) \longrightarrow 0 ,$$

que pode ser reescrita como

$$A^m \xrightarrow{\phi(\gamma)_X} A^n \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{S}(P)) \longrightarrow 0 . \quad (2.9)$$

Note que pela observação 2.2, temos $\phi(\gamma)_X = \gamma$. Portanto, comparando as sequências exatas 2.7 e 2.9, chegamos a

$$\Gamma(X, \mathcal{S}(P)) \cong P ,$$

pois ambos módulos são conúcleo de um mesmo mapa. □

Proposição 2.5. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e A o anel das seções globais $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Suponha que $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ contém uma subcategoria admissível \mathcal{C} . Se um feixe \mathcal{F} localmente livre de posto finito for finitamente gerado por seções globais, então $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um A -módulo projetivo finitamente gerado.*

Demonstração. Por hipótese, temos que existe um morfismo sobrejetivo

$$\alpha : \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{F},$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Consideremos a sequência exata de \mathcal{O}_X -módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \quad (2.10)$$

onde $\mathcal{K} = \text{Ker } \alpha$. Como \mathcal{F} é um feixe localmente livre de posto finito, por [9, Corolário da proposição 4.2.3, p. 189], temos

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{K}) \cong H^1(X, \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K})).$$

Uma vez que \mathcal{C} é uma subcategoria admissível de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K}) \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Consequentemente, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$ é acíclico. Portanto,

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{F}, \mathcal{K}) = 0.$$

Logo, por [18, Proposição 7.24, p. 421], a sequência 2.10 cinde. Isso implica que $\mathcal{O}_X^n \cong \mathcal{F} \oplus \mathcal{K}$. Dessa forma,

$$A^n \cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X^n) \cong \Gamma(X, \mathcal{F} \oplus \mathcal{K}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(X, \mathcal{K}).$$

Assim, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um A -módulo projetivo finitamente gerado, pois é somando direto de um A -módulo projetivo finitamente gerado. \square

Observação 2.3. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos de apresentação finita. Seja $x \in X$ e suponha que os $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos \mathcal{F}_x e \mathcal{G}_x são isomorfos. Então, pelo corolário 1.16 existe uma vizinhança aberta U de x tal que os $\mathcal{O}_X|_U$ -módulos $\mathcal{F}|_U$ e $\mathcal{G}|_U$ são isomorfos.

Lema 2.6. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado e \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo de apresentação finita. Considere $x \in X$ e suponha que \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre. Então existe uma vizinhança aberta U de x e $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}|_U$ é isomorfo a $\mathcal{O}_X^n|_U$.*

Demonstração. Como \mathcal{F}_x é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo livre finitamente gerado, temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que os $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulos $\mathcal{O}_{X,x}^n$ e \mathcal{F}_x são isomorfos. Além disso, todo feixe localmente livre de posto finito é de apresentação finita, assim podemos concluir que \mathcal{O}_X^n é de apresentação finita. Logo, pela observação 2.3, existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\mathcal{F}|_U \cong \mathcal{O}_X^n|_U$. \square

Lema 2.7. *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado e A o anel das seções globais $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Então para todo A -módulo projetivo finitamente gerado P , o feixe $\mathcal{S}(P)$ é um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre de posto limitado.*

Demonstração. O A -módulo projetivo P é finitamente gerado (por hipótese), consequentemente é de apresentação finita. Portanto, temos a seguinte sequência exata de A -módulos

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow P \longrightarrow 0 \quad (2.11)$$

para alguns $m, n \in \mathbb{N}$. Sendo \mathcal{S} um funtor exato à direita, e $\mathcal{S}(A^p) \cong \mathcal{O}_X^p$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Daí, aplicando o funtor \mathcal{S} a sequência 2.11 obtemos a seguinte sequência exata de A -módulos

$$\mathcal{O}_X^m \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{S}(P) \longrightarrow 0.$$

Com isso, mostramos que $\mathcal{S}(P)$ é de apresentação finita. Agora, resta apenas mostrar que $\mathcal{S}(P)$ é de posto limitado. Por hipótese, para todo $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local e P é um A -módulo projetivo finitamente gerado. Assim, o produto tensorial $P \otimes_A \mathcal{O}_{X,x}$ é um $\mathcal{O}_{X,x}$ -módulo de posto finito. O posto $\text{rank}_x(\mathcal{S}(P))$ do feixe $\mathcal{S}(P)$ será denotado por p_x , para todo $x \in X$. Dessa forma, temos que

$$P \otimes_A \mathcal{O}_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}^{p_x}.$$

Agora, pelo lema 2.6, segue que $\mathcal{S}(P)$ é um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre. Como a família de números inteiros $(p_x)_{x \in X}$ é limitada por n , temos que $\mathcal{S}(P)$ é de posto limitado. \square

O lema acima completa os resultados preliminares essenciais na demonstração do Teorema de Serre-Swan. Assim, podemos finalmente enunciar e apresentar a demonstração deste resultado.

Teorema 2.8 (Teorema de Serre-Swan). *Sejam (X, \mathcal{O}_X) um espaço localmente anelado e A o anel das seções globais $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Suponha que a categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ contém uma subcategoria admissível \mathcal{C} e que todo feixe em $\mathbf{Lfb}(X)$ é gerado por seções globais. Então, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um módulo projetivo finitamente gerado para todo feixe \mathcal{F} em $\mathbf{Lfb}(X)$ e*

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Lfb}(X) \longrightarrow \mathbf{Fgp}(A)$$

é uma equivalência de categorias.

Demonstração. Pela proposição 2.5 tem-se que se $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathbf{Lfb}(X))$, então $\Gamma(X, \mathcal{F}) \in \text{Ob}(\mathbf{Fgp}(A))$, consequentemente, a restrição do funtor $\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Lfb}(X) \longrightarrow \mathbf{Fgp}(A)$

está bem definida. Por outro lado, pelo lema 2.7, se $P \in \text{Ob}(\mathbf{Fgp}(A))$ então $\mathcal{S}(P) \in \text{Ob}(\mathbf{Lfb}(X))$. Pela proposição 2.3 e pelo corolário 2.4, segue que o funtor é um quase-inverso do funtor \mathcal{S} . Portanto, o funtor

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Lfb}(X) \longrightarrow \mathbf{Fgp}(A)$$

é uma equivalência de categorias. □

Capítulo 3

Algumas aplicações

Neste capítulo, discutiremos importantes exemplos de espaços localmente anelados onde o Teorema de Serre-Swan é válido. As duas primeiras seções 3.1 e 3.2, serão dedicadas a discutir exemplos de esquemas afins e espaços topológicos, respectivamente. Já na última 3.3, mostraremos que o Teorema de Serre-Swan também é válido para espaços \mathcal{C}^∞ -diferenciáveis.

3.1 Teorema de Serre

O enunciado original do Teorema de Serre [19, Section 50, Corollaire to Proposition 4, p. 242], proposto em 1955, é dado por:

Teorema 3.1. *Seja \mathcal{F} um feixe coerente sobre uma variedade afim V . As seguintes propriedades são equivalentes:*

- (i) $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um A -módulo projetivo;
- (ii) \mathcal{F} é localmente isomorfo a um feixe \mathcal{O}^p ;
- (iii) \mathcal{F} é isomorfo ao feixe dos germes das seções de um espaço fibrado de base V .

Agora, precisaremos fazer algumas considerações antes de apresentar uma outra versão do Teorema de Serre, que será um corolário do Teorema 2.8.

Seja A um anel e (X, \mathcal{O}_X) denotando o seu respectivo esquema afim $(\text{Spec}(A), \tilde{A})$. É pertinente observar que para todo A -módulo M , pode-se definir um \mathcal{O}_X -módulo \tilde{M} da seguinte maneira: considerando o conjunto

$$D(f) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \notin \mathfrak{p}\}$$

denominado *aberto principal* da topologia de $\text{Spec}(A)$, pode-se definir

$$\mathcal{F}_M(D(f)) = M_f, \text{ para } f \in A.$$

Se para $f, g \in A$ tem-se $D(f) \supset D(g)$, então $S'_g \subset S'_f$, onde S' é dado por

$$S' = \{s' \in A \mid as' \in S \text{ para algum } a \in A\}$$

para qualquer subconjunto multiplicativo S de A .

O conjunto S' é chamado a *saturação* de S e $S_f = \{f^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Identificando $S^{-1}M$ com $S'^{-1}M$, pode-se definir

$$\varphi_{f,g} : S'_f{}^{-1}M \longrightarrow S'_g{}^{-1}M$$

dado por $\varphi_{f,g}(\frac{m}{s}) = \frac{m}{s} \in S'^{-1}M$, para $m \in M$ e $s \in S'_f$. Observa-se que \mathcal{F}_M é um feixe na base $\mathcal{B} = \{D(f) \mid f \in A\}$ de X [13, Section 2.3.1, p. 42-45].

O feixe em X associado ao A -módulo M é denotado por \tilde{M} e é um \mathcal{O}_X -módulo. Se $\sigma : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de A -módulos, então para todo $f \in A$, existe um homomorfismo de A_f -módulos

$$\sigma_f : M_f \longrightarrow N_f,$$

dado por $\sigma_f(\frac{m}{s}) = \frac{\sigma(m)}{s}$, para $m \in M$ e $s \in S_f$. Assim, temos um homomorfismo induzido de \mathcal{O}_X -módulos

$$\tilde{\sigma} : \tilde{M} \longrightarrow \tilde{N}$$

tal que $\tilde{\sigma}_{D(f)} = \sigma$ para todo $f \in A$. Isso define o seguinte funtor exato pela proposição 1.1,

$$\tilde{\bullet} : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod},$$

que faz uma correspondência entre M e \tilde{M} .

Observação 3.1. Sejam (X, \mathcal{O}_X) um esquema afim, e $A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Consequentemente, $(X, \mathcal{O}_X) \cong (\text{Spec}(A), \tilde{A})$, assim identificamos (X, \mathcal{O}_X) com $(\text{Spec}(A), \tilde{A})$. Seja M um A -módulo. O funtor canônico 1.4, $\mathcal{S} : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathcal{O}_X\text{-Mod}$ é tal que $\mathcal{S}(M)_{\mathfrak{p}} = \mathcal{P}(M)_{\mathfrak{p}}$, para todo $\mathfrak{p} \in X$. Consequentemente,

$$\mathcal{S}(M)_{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{P}(M)_{\mathfrak{p}} = M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}} \cong \tilde{M}_{\mathfrak{p}}.$$

Além disso, os funtores $\tilde{\bullet}$ e \mathcal{S} são naturalmente isomorfos.

Proposição 3.2. *Seja A um anel e (X, \mathcal{O}_X) o esquema afim associado. Seja M um A -módulo. Então, \tilde{M} é um \mathcal{O}_X -módulo de apresentação finita se, e somente se M é um A -módulo de apresentação finita.*

Demonstração. Se M é um A -módulo de apresentação finita, então \tilde{M} é de apresentação finita, pois o funtor $\tilde{\bullet}$ é um funtor exato. Reciprocamente, suponhamos que \tilde{M} é um \mathcal{O}_X -módulo de apresentação finita. Como os subconjuntos abertos principais $\{D(f)\}_{f \in A}$ formam uma base para a topologia do espaço topológico quase-compacto X , podemos assumir que existe uma cobertura aberta finita formada pelos abertos principais, isto é, $X = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$, onde $M|_{D(f_i)}$ é de apresentação finita. Em outras palavras, existe uma sequência exata de $\mathcal{O}_X|_{D(f_i)}$ -módulos

$$(\mathcal{O}_X|_{D(f_i)})^{p_i} \longrightarrow (\mathcal{O}_X|_{D(f_i)})^{q_i} \longrightarrow M|_{D(f_i)} \longrightarrow 0$$

para alguns $p_i, q_i \in \mathbb{N}$ e todo $i \in I$. Como $X|_{D(f_i)} = \tilde{A}_{f_i}$ e $\tilde{M}|_{D(f_i)} = \tilde{M}_{f_i}$, temos a seguinte sequência exata de A_{f_i} -módulos,

$$A_{f_i}^{p_i} \longrightarrow A_{f_i}^{q_i} \longrightarrow M_{f_i} \longrightarrow 0$$

para alguns $p_i, q_i \in \mathbb{N}$, e todo $i \in I$ pois o funtor $\tilde{\bullet}$ é fielmente exato. Pela proposição A.1, segue que M é um A -módulo de apresentação finita. \square

Lema 3.3. *Seja A um anel e (X, \mathcal{O}_X) o esquema afim associado. Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} dois \mathcal{O}_X -módulos quase-coerentes. Se \mathcal{F} é de apresentação finita, então $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é também quase-coerente. Em particular se \mathcal{F} é um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre, então $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é quase-coerente.*

Demonstração. Uma vez que \mathcal{F} e \mathcal{G} são quase-coerentes, temos que $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$, e $\mathcal{G} \cong \tilde{N}$, para $\Gamma(X, \mathcal{F}) = M$ e $\Gamma(X, \mathcal{G}) = N$. Pela proposição 3.2, segue que M é um A -módulo de apresentação finita, visto que \mathcal{F} é de apresentação finita. Daí, pela proposição A.3 temos o isomorfismo

$$(\mathcal{H}om_A(M, N))^\sim \cong \mathcal{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N}).$$

Observe que $\tilde{A} = \mathcal{O}_X$. Logo, por $(\mathcal{H}om_A(M, N))^\sim$ ser quase-coerente, implica que $\mathcal{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N})$ é também quase-coerente. Como para qualquer espaço anelado, feixes localmente livres são de apresentação finita pela proposição 1.25, segue a segunda parte do lema. \square

Agora, podemos finalmente enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, uma versão alternativa do Teorema de Serre, enunciado no início desta seção.

Teorema 3.4 (Corolário do Teorema 2.8). *Seja (X, \mathcal{O}_X) um esquema afim e A o anel $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Então, um feixe \mathcal{F} quase-coerente é um \mathcal{O}_X -módulo localmente livre de posto finito se, e somente se, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ é um A -módulo projetivo finitamente gerado. O funtor*

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Lfb}(X) \longrightarrow \mathbf{Fgp}(A)$$

é uma equivalência de categorias com quase-inverso $\tilde{\bullet} : \mathbf{Fgp}(A) \longrightarrow \mathbf{Lfb}(X)$.

Demonstração. O funtor $\tilde{\bullet} : A\text{-Mod} \longrightarrow \mathbf{Qcoh}(X)$ é uma equivalência de categorias, com quase-inverso $\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Qcoh}(X) \longrightarrow A\text{-Mod}$ [8, Chap. I, Théorème (I.4.I), p. 90]. Visto que $A\text{-Mod}$ é uma categoria abeliana, tem-se que a subcategoria $\mathbf{Qcoh}(X)$ é também abeliana. Agora, pelo lema 3.3 a categoria $\mathbf{Qcoh}(X)$ satisfaz a condição **A1** da definição de subcategoria admissível 2.1. Por [13, Theorem 2.18, p. 186], segue que \mathcal{O}_X -módulos quase-coerentes sobre um esquema afim são acíclicos. Logo, $\mathbf{Qcoh}(X)$ também satisfaz a condição **A2** da definição 2.1. Por último, considere \mathcal{F} um feixe quase-coerente, e $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Então, $\mathcal{F} \cong \tilde{M}$, e claramente \tilde{M} é gerado por seções globais. Claramente, observa-se que $\mathbf{Lfb}(X)$ é uma subcategoria de $\mathbf{Qcoh}(X)$, consequentemente $\mathbf{Qcoh}(X)$ satisfaz a condição **A3** da definição 2.1. Portanto, $\mathbf{Qcoh}(X)$ é uma subcategoria admissível da categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$. Como X é um espaço topológico quase-compacto, segue pelo corolário 1.13 que feixes localmente livres de posto finito são gerados por seções globais. Portanto, o resultado segue pelo Teorema de Serre-Swan 2.8. \square

3.2 Teorema de Swan

A versão original do Teorema de Swan [20, Theorem 2 and p. 277], apresentada por Swan em 1962, tem o seguinte enunciado:

Teorema 3.5. *Seja X um espaço topológico compacto de Hausdorff. Então, um $C(X)$ -módulo¹ P é isomorfo ao módulo das formas $\Gamma(X, \xi)$ se, e somente P é finitamente gerado e projetivo.*

Observação 3.2. Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado nas mesmas condições da proposição 2.2. Além disso, suponha que X é de *dimensão topológica finita*². Deste modo, os feixes localmente livres de posto finito sobre X são finitamente gerados por seções globais.

Teorema 3.6 (Corolário do Teorema 2.8). *Seja (X, \mathcal{O}_X) um espaço anelado tal que X é um espaço topológico paracompacto de dimensão topológica finita, e \mathcal{O}_X é um feixe fino. Então, o teorema de Serre-Swan é válido para (X, \mathcal{O}_X) .*

¹ $C(X)$ denota o anel das funções contínuas de \mathbb{K} -valores sobre X , com \mathbb{K} um corpo.

²A *dimensão topológica* de um subconjunto U do espaço topológico X é o valor menor de $n \in \mathbb{N}$ para o qual toda cobertura aberta $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de U admite uma subcobertura aberta $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mais fina de *ordem* não superior a $n + 1$. Se não existir valor mínimo de n , então se diz que o subconjunto U é de *dimensão infinita*. Lembrando que uma cobertura V é dita de ordem $n + 1$ se algum ponto de X está em $n + 1$ elementos desta cobertura e nenhum ponto de X está em mais de $n + 1$ elementos de V .

Demonstração. A categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ claramente satisfaz as condições **A1** e **A2** da definição 2.1. Como X é um espaço topológico paracompacto, temos que os feixes finos são suaves pela proposição 1.3 e conseqüentemente são acíclicos pelo teorema C.3. Uma vez que \mathcal{O}_X é um feixe fino, todo \mathcal{O}_X -módulo também é fino [23, Cap. II, Exemplo 3.4 (e), p. 53]. Daí, \mathcal{O}_X é acíclico. Além disso, pela proposição 2.2, \mathcal{F} é gerado por seções globais. Portanto, a categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ satisfaz a condição **A2** da definição 2.1. Logo, $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ é uma subcategoria admissível. Daí, pela observação 3.2, todo feixe \mathcal{F} em $\mathbf{Lfb}(X)$ é finitamente gerado por seções globais. Finalmente, aplicando o Teorema de Serre-Swan 2.8, com $\mathcal{C} = \mathcal{O}_X\text{-Mod}$, segue o resultado. \square

Corolário 3.7. *Sejam X um espaço topológico paracompacto de dimensão finita e \mathcal{C}_X o feixe das funções contínuas de valores reais sobre X . Seja $C(X)$ a \mathbb{R} -álgebra $\Gamma(X, \mathcal{C}_X)$. Então o funtor*

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathbf{Lfb}(X) \longrightarrow \mathbf{Fgp}(C(X))$$

é uma equivalência de categorias.

Demonstração. Pelo exemplo 1.1, temos que o feixe das funções contínuas de valores reais sobre um espaço topológico paracompacto X é um feixe fino. Daí, pelo teorema 3.6 segue o resultado. \square

3.3 Espaços \mathcal{C}^∞ -diferenciáveis

Seja A uma \mathbb{R} -álgebra comutativa com identidade. Um ideal $\mathfrak{m} \subset A$ é dito *real* se o mapa natural $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow A/\mathfrak{m}$ é um isomorfismo (em particular, \mathfrak{m} é um ideal maximal de A). Note que núcleo de qualquer morfismo de \mathbb{R} -álgebras $A \longrightarrow \mathbb{R}$ é um ideal real de A , assim obtemos uma bijeção natural entre o conjunto de todos os ideais reais de A e o conjunto de todos os morfismos de \mathbb{R} -álgebras $A \longrightarrow \mathbb{R}$. Agora, veremos a definição de *espectro real* de uma \mathbb{R} -álgebra.

Definição 3.1. O *espectro real* de uma \mathbb{R} -álgebra A é o conjunto

$$\text{Spec}_r(A) := \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(A, \mathbb{R}) = \{\text{ideais de } A\}.$$

Se x é um ponto de $\text{Spec}_r(A)$, então \mathfrak{m}_x denota o correspondente ideal real de A e $\delta_x : A \longrightarrow \mathbb{R}$ denota o correspondente morfismo de \mathbb{R} -álgebras. Se $f \in A$, o *valor* $f(x)$ de f em x é definido por

$$f(x) := \delta_x(f) = \text{classe residual de } f \text{ em } A/\mathfrak{m}_x = \mathbb{R},$$

de modo que qualquer elemento $f \in A$ define uma função de valores reais em $\text{Spec}_r(A)$.

Se M é uma variedade diferenciável, então o conjunto

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função } \mathcal{C}^\infty\}$$

é uma *álgebra de Fréchet* por [6, Cap. II, p. 28]. Um ideal \mathfrak{a} é dito um *ideal fechado* se é fechado com respeito a topologia de Fréchet da convergência uniforme em conjuntos compactos de funções e suas derivadas, definida em [6, Cap. II, p.27].

Definição 3.2. Dizemos que uma \mathbb{R} -álgebra é uma *álgebra diferenciável* se é algebricamente isomorfa ao quociente

$$A \cong \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{a}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e algum ideal fechado \mathfrak{a} de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Uma mapa $A \longrightarrow B$ entre álgebras diferenciáveis é dito um *morfismo de álgebras diferenciáveis* e esse é um morfismo de \mathbb{R} -álgebras.

Observação 3.3. Para qualquer álgebra quociente $A = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)/\mathfrak{a}$, temos um homeomorfismo entre $\text{Spec}_\tau(A)$ e

$$(\mathfrak{a})_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0, \text{ para todo } f \in \mathfrak{a}\}.$$

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [6, Proposição 2.13, p. 30].

Como consequência da observação anterior 3.3, temos que $\text{Spec}_\tau(A)$ é fechado, pois é homeomorfo a um conjunto fechado. Em particular, é paracompacto, uma vez que é subconjunto fechado de \mathbb{R}^n , que é paracompacto. Sejam A uma álgebra diferenciável e $U \subset \text{Spec}_\tau(A)$ um aberto, então defina

$$S_U = \{s \in A \mid s(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in U\}.$$

Note que para $x \in \text{Spec}_\tau(A) = \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(A, \mathbb{R})$, então $s(x)$ é definido como $s(x) = x(s)$. Então, S_U é um subconjunto multiplicativo de A . De fato,

- $1 \in S_U$, pois $x(1) = 1 \neq 0, \forall x \in U$ e $1(x) = 1 \neq 0, \forall x \in U$;
- Se $s, s' \in S_U$, então $s(x) \neq 0$ e $s'(x) \neq 0 \forall x \in U$. Daí, $(ss')(x) = x(ss') = s(x)s'(x) \neq 0 \forall x \in U$.

Defina agora o pré-feixe \mathcal{F} por

$$\mathcal{F}(U) = S_U^{-1}A.$$

O feixe associado (feixificação) ao pré-feixe \mathcal{F} é chamado o *feixe estrutural* no $\text{Spec}_\tau(A)$. Assim definimos um espaço localmente anelado $(\text{Spec}_\tau(A), \tilde{A})$ sobre \mathbb{R} . Se N é um A -módulo e $U \subset \text{Spec}_\tau(A)$ é um aberto, então

$$\mathcal{H}(U) = S_U^{-1}N = N \otimes_A S_U^{-1}A$$

é um pré-feixe. Denotaremos por \tilde{N} o feixe associado ao pré-feixe $\mathcal{H}(U)$. Assim, podemos definir um funtor

$$\tilde{\bullet} : A\text{-Mod} \longrightarrow \tilde{A}\text{-Mod}.$$

Note que o funtor \mathcal{S} definido na seção 1.2 do capítulo 1 é isomorfo ao funtor $\tilde{\bullet}$.

Definição 3.3. O *espectro real* de uma álgebra diferenciável é definido como um espaço localmente anelado sobre \mathbb{R} , denotado por $(\text{Spec}_\tau(A), \tilde{A})$.

Definição 3.4. Um espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) sobre \mathbb{R} é chamado um *espaço diferenciável afim de tipo finito* se é isomorfo ao espectro real de alguma álgebra diferenciável. Um espaço localmente anelado sobre \mathbb{R} é dito um *espaço diferenciável localmente de tipo finito* se para qualquer ponto $x \in X$ tem uma vizinhança aberta U em X tal que $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ espaço diferenciável afim.

Teorema 3.8 (Corolário do Teorema 2.8). *Sejam A uma álgebra diferenciável e (X, \mathcal{O}_X) denotando o espectro real $(\text{Spec}_\tau(A), \tilde{A})$. Então, o funtor*

$$\Gamma(X, \bullet) : \mathcal{O}_X\text{-Mod} \longrightarrow A\text{-Mod}_{\mathcal{O}_X\text{-Mod}}$$

é uma equivalência categórica. Além disso, o Teorema de Serre-Swan é válido para (X, \mathcal{O}_X) .

Demonstração. O espaço topológico X é homeomorfo a um subconjunto fechado de \mathbb{R}^n para algum n finito, pela observação 3.3. Portanto, X é um espaço topológico paracompacto de dimensão topológica limitada. Por [6, Theorem of existence of partitions of unity, p. 52], temos que o feixe \mathcal{O}_X admite uma partição da unidade, conseqüentemente é fino. Logo, pela observação 2.1 e o teorema 3.2, segue o resultado. \square

Apêndice A

Alguns resultados de módulos

Definição A.1. Um A -módulo M é dito de *apresentação finita* se conúcleo de um homomorfismo A -módulos $A^m \rightarrow A^n$ para alguns $m, n \in \mathbb{N}$ ou, equivalentemente, se existe uma sequência exata de A -módulos da forma

$$A^m \longrightarrow A^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

com $m, n \in \mathbb{N}$.

Apresentaremos agora alguns resultados importantes sobre módulos de apresentação finita.

Proposição A.1. *Seja $(f_i)_{i \in I}$ uma família de elementos de um anel A gerando o ideal A de A . Para que um A -módulo M seja de apresentação finita, é necessário e suficiente que, para todo índice i , o A_{f_i} -módulo M_{f_i} seja de apresentação finita.*

Demonstração. Ver [1, Cap. II, §5.1, Corolário da Proposição 3, p. 109]. □

Proposição A.2. *Seja S um subconjunto multiplicativo de A e sejam M e N A -módulos. Se M é de apresentação finita, então o homomorfismo natural de $S^{-1}A$ -módulos*

$$\varphi : S^{-1}(\text{Hom}_A(M, N)) \longrightarrow \text{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

dado por $\varphi\left(\left(\frac{u}{s}\right)\right)\left(\frac{m}{t}\right) = \frac{u(m)}{st}$, onde $m \in M$, $s, t \in S$ e $u \in \text{Hom}_A(M, N)$, é isomorfismo.

Demonstração. Ver [5, Cap. II, Proposição 2.10, p. 69]. □

Proposição A.3. *Se M e N são A -módulos, existe um morfismo canônico de \mathcal{O}_X -módulos*

$$v : (\text{Hom}_A(M, N))^{\sim} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\tilde{A}}(\tilde{M}, \tilde{N}).$$

Se M é de apresentação finita, então v é um isomorfismo.

Demonstração. Ver [8, Cap. I, (ii) do corolário (I.3.12), p. 88]. □

Apêndice B

Categorias Abelianas

A proposta desde apêndice é explicitar algumas das propriedades de categorias abelianas que foram usadas ao longo do texto. Por exemplo, foi assumido muitas vezes durante o trabalho a existência de objetos como núcleos e conúcleos, mais isso só se fez possível pois as categorias abordadas durante essa dissertação, são na verdade abelianas.

Definição B.1. Uma categoria \mathcal{A} é dita uma *categoria abeliana*, se os seguintes axiomas de (Ab.1) a (Ab.6) são satisfeitos.

(Ab.1) Para cada par de objetos X, Y de \mathcal{A} , $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é um grupo Abeliano. Mais ainda, para objetos X, Y, Z de \mathcal{A} a aplicação

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

é \mathbb{Z} -bilinear. Isto é,

$$Z' \xrightarrow{h} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \end{array} Y \xrightarrow{g} Z$$

tal que

$g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ em $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)$ e $(f_1 + f_2) \circ h = f_1 \circ h + f_2 \circ h$ em $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z', Y)$.

(Ab.2) Existe um objeto $\mathbf{0}$ em \mathcal{A} . Então, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ é um grupo abeliano trivial.

(Ab.3) Para qualquer que sejam os objetos X e Y em \mathcal{A} , a soma direta (coproduto) $X \oplus Y$ existe em \mathcal{A} . Isto é, $X \oplus Y$ é um objeto em \mathcal{A} que é representado pelo seguinte funtor covariante de \mathcal{A} para Ab , onde Ab denota a categoria dos grupos abelianos:

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \bullet) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \bullet) : \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Ab} .$$

Nomeadamente, para um objeto Z em \mathcal{A} , existe um isomorfismo

$$\widetilde{X \oplus Y} Z := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X \oplus Y, Z) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z).$$

(Ab.4) Para um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em \mathcal{A} , o objeto $\text{Ker}(f)$ existe em \mathcal{A} . Logo abaixo será dada a definição de núcleo de f ($\text{Ker}(f)$).

O núcleo $\text{Ker}(f)$ de um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é um objeto que representa o seguinte funtor contravariante:

$$\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, Y)) : \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Ab}$$

Nomeadamente,

$$\widetilde{\text{Ker}(f)} Z := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, \text{Ker}(f)) \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, X) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Z, Y)). \quad (\text{B.1})$$

(Ab.5) Para um morfismo $f : X \rightarrow Y$, o objeto conúcleo $\text{Coker}(f)$ existe em \mathcal{A} . Considere o funtor

$$\text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \bullet) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, \bullet)) : \mathcal{A} \rightsquigarrow \text{Ab} \quad (\text{B.2})$$

Então, o funtor B.2 é representado pelo objeto $\text{Coker}(f)$:

$$\widetilde{\text{Coker}(f)} Z := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Coker}(f), Z) \xrightarrow{\cong} \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z)). \quad (\text{B.3})$$

Antes de apresentar o último axioma Ab.6, é importante observar alguns detalhes. Primeiro, observe que $i : \text{Ker}(f) \rightarrow X$ é um monomorfismo. De fato, se $\phi, \psi : K \rightarrow \text{Ker}(f)$ satisfazendo $i \circ \phi = i \circ \psi$, então a composição com $f : X \rightarrow Y$ resulta que $f \circ i \circ \phi = f \circ i \circ \psi = 0$. Por B.1, existe um único $\iota : K \rightarrow \text{Ker}(f)$ satisfazendo $i \circ \iota = i \circ \phi = i \circ \psi : K \rightarrow X$, concluindo que $\iota = \phi = \psi$. Consequentemente, $i : \text{Ker}(f) \rightarrow X$ é um monomorfismo. Por Ab.5 o conúcleo $\text{Coker}(i)$ existe em \mathcal{A} . Defina a *coimagem* de $f : X \rightarrow Y$ como o conúcleo do morfismo $i : \text{Ker}(f) \rightarrow X$, isto é, $\text{Coim}(f) := \text{Coker}(i)$. Agora, considere $Z = \text{Coker}(f)$ em B.3. Então, $\mathbf{1}_{\text{Coker}(f)} \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\text{Coker}(f), \text{Coker}(f))$ determina um elemento $\pi \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, \text{Coker}(f))$ satisfazendo $\pi \circ f = 0$. Agora, defina $\text{Im}(f) := \text{Ker}(\pi)$. Por B.1 existe um único morfismo $g : X \rightarrow \text{Ker}(\pi) = \text{Im}(f)$ fazendo o seguinte

diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{Ker}(f) & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\pi} & \text{Coker}(f) \\
 & & \downarrow \pi' & \dashrightarrow g & \uparrow i' & & \\
 & & \text{Coker}(i) & \xrightarrow{h} & \text{Ker}(\pi) & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 & & \text{Coim}(f) & & \text{Im}(f) & &
 \end{array} \tag{B.4}$$

Além disso, pela unicidade de $\text{Coker}(i)$, a igualdade $g \circ i = 0$ implica que existe um único $h : \text{Coker}(i) \rightarrow \text{Ker}(\pi) = \text{Im}(f)$ fazendo o diagrama acima B.4 comutar. Note que h é unicamente determinada. Pois, se existe outro $h' : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$, a igualdade $i' \circ h \circ \pi' = i' \circ h' \circ \pi' = f$ implica que $h \circ \pi' = h' \circ \pi'$, uma vez que i' é um monomorfismo. Então, como π' é um epimorfismo, segue que $h = h'$. Denote $\text{Coim}(f) := \text{Coker}(i)$.

(Ab.6) O morfismo $h : \text{Coim}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$ é um isomorfismo.

Apêndice C

Resultados Básicos

Com o objetivo de tornar a leitura mais agradável, esse apêndice foi desenvolvido com algumas definições e resultados básicos que são amplamente usados ao longo do trabalho.

Definição C.1. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} duas categorias. Se $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ são funtores, então dizemos que F é um *adjunto à esquerda* para G (equivalentemente: G é um *adjunto à direita para F*) se existe um isomorfismo natural

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\bullet, G(\bullet)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(\bullet), \bullet).$$

Em outras palavras, para todo par de objetos A de \mathcal{A} e B de \mathcal{B} existe um isomorfismo

$$\varphi_{A,B} : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B),$$

tal que para todo morfismo de objetos $A' \xrightarrow{f} A$ em \mathcal{A} e $B \xrightarrow{g} B'$ em \mathcal{B} , o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B)) & \xrightarrow{\varphi_{A,B}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \\ \text{Hom}(f, G(g)) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(F(f), g) \\ \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A', G(B')) & \xrightarrow{\varphi_{A',B'}} & \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A'), B') \end{array}$$

é comutativo.

Definição C.2. Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor. O funtor F induz o mapa

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A_1, A_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A_1), F(A_2))$$

Para cada par de objetos A_1 e A_2 de \mathcal{A} , o funtor F é chamado

- (i) *Fiel* se φ é injetivo;
- (ii) *Completo* se φ é sobrejetivo;

(iii) *Completamente fiel* se φ é bijetivo;

(iv) *Essencialmente sobrejetivo* se para qualquer $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ existe um objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ tal que $F(A)$ é isomorfo a B em \mathcal{B} .

Definição C.3. Uma *equivalência de categorias* $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um funtor tal que existe um funtor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ de modo que as composições $F \circ G$ e $G \circ F$ são isomorfas aos funtores identidades $\text{Id}_{\mathcal{B}}$ e $\text{Id}_{\mathcal{A}}$, respectivamente. Neste caso, dizemos que G é *quase-inverso* para F .

Lema C.1. Um funtor $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma *equivalência de categorias* se, e somente se \mathcal{F} é *completamente fiel* e *essencialmente sobrejetivo*.

Demonstração. Ver [11, Proposição 1.3.13, p. 22]. □

Definição C.4. Seja X um espaço topológico. Um *pré-feixe* de grupos abelianos consiste dos seguintes dados:

P1. Para cada aberto $U \subseteq X$, um grupo abeliano $\mathcal{F}(U)$;

P2. Para cada inclusão $V \subseteq U$, um morfismo de grupos abelianos $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ chamado *morfismo de restrição*. Esses morfismos de restrições estão sujeitos as seguintes condições:

(a) Para todo aberto $U \subseteq X$, $\rho_{UU} = \text{Id}_U$;

(b) Para cada tripla $W \subseteq V \subseteq U$ de abertos de X o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{VU}} & \mathcal{F}(V) \\ & \searrow \rho_{WU} & \swarrow \rho_{WV} \\ & \mathcal{F}(W) & \end{array}$$

é comutativo. Um elemento $\rho_{VU}(s) \in \mathcal{F}(V)$ é denotado por $s|_V$.

Definição C.5. Um pré-feixe \mathcal{F} sobre um espaço topológico X é um *feixe* se satisfaz as seguintes condições:

F1. Se U é um subconjunto aberto de X , $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de U , isto é, cada U_i é um aberto e $s \in \mathcal{F}(U)$ é um elemento tal que $s|_{U_i} = 0$, para todo $i \in I$, então $s = 0$;

F2. Se U é um subconjunto aberto de X , e $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de U , cada U_i é um aberto e tem-se $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ para cada $i \in I$, com a propriedade de que para cada $i, j \in I$, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, então existe um elemento $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in I$.

Definição C.6. Seja X um espaço topológico e \mathcal{O}_X um feixe de anéis comutativos sobre X . Um par (X, \mathcal{O}_X) é chamado de *espaço anelado*. Por outro lado, dizem-se que o espaço anelado (X, \mathcal{O}_X) é *localmente anelado* se o talo $\mathcal{O}_{X,x}$ é um anel local para todo x em X , isto é, $\mathcal{O}_{X,x}$ possui um único ideal maximal.

Definição C.7. Um *morfismo de espaços anelados* de (X, \mathcal{O}_X) para (Y, \mathcal{O}_Y) é um par consistindo de uma mapa contínuo $f : X \rightarrow Y$ e $\tilde{f} : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ um morfismo de feixes de anéis sobre Y , onde $f_*\mathcal{O}_X(V) := \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ para cada aberto V de Y e restrições $f_*\rho_V^U := \rho_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)}$ para cada inclusão $\iota : U \rightarrow V$ de abertos de Y . Assim, dizemos que $(f, \tilde{f}) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ é um morfismo de espaços anelados.

Definição C.8. Seja $f : X \rightarrow Y$ um mapa contínuo. Seja \mathcal{F} um \mathcal{O}_X -módulo e \mathcal{G} um \mathcal{O}_Y -módulo. Um *f-mapa* $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ é uma coleção de mapas $\gamma_V : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ indexado por subconjuntos $V \subset Y$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{\gamma_V} & \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(U)} \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\gamma_U} & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \end{array}$$

é comutativo para todo $U \subset V \subset Y$ aberto.

Definição C.9 (Esquema afim). Um *esquema afim* é um espaço localmente anelado que é isomorfo (como um espaço localmente anelado) ao espectro de algum anel.

Definição C.10. Um *esquema* é um espaço localmente anelado (X, \mathcal{O}_X) tal que seu espaço topológico subjacente admite uma cobertura aberta $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ tal que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ é um esquema afim para cada $i \in I$.

Definição C.11. Seja \mathcal{O}_X um feixe de anéis. Um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} sobre X é dito *injetivo* (com respeito a \mathcal{O}_X) se, para qualquer subfeixe \mathcal{H} de um feixe \mathcal{G} sobre X e qualquer homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ existe uma extensão $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ de h . Isto é, \mathcal{F} é injetivo se o funtor contravariante

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\bullet, \mathcal{F})$$

é exato à direita.

Definição C.12. Uma categoria \mathcal{A} possui *injetivos suficientes* se, para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ existe um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} e um monomorfismo $\iota : A \rightarrow \mathcal{F}$.

Teorema C.2. *A categoria $\mathcal{O}_X\text{-Mod}$ possui injetivos suficientes.*

Demonstração. Ver [3, Cap. II, seção 3]. □

Definição C.13. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana com injetivos suficientes. Seja $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. Uma *resolução injetiva* de \mathcal{F} é um complexo

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \dots$$

junto com o mapa $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0$ tal que

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow \dots$$

é exato.

Definição C.14. O *i-ésimo grupo de cohomologia de X com coeficientes em um \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F}* , denotado por $H^i(X, \mathcal{F})$, é o i -ésimo grupo de cohomologia do complexo

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^0) \xrightarrow{d^0} \Gamma(X, \mathcal{F}^1) \xrightarrow{d^1} \Gamma(X, \mathcal{F}^2) \xrightarrow{d^2} \dots$$

isto é,

$$H^i(X, \mathcal{F}) = \frac{\text{Ker}(d^i : \Gamma(X, \mathcal{F}^i) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1}))}{\text{Im}(d^{i-1} : \Gamma(X, \mathcal{F}^{i-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}^i))}.$$

Quando $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, para todo $i > 0$, \mathcal{F} é chamado um *feixe acíclico*.

Teorema C.3. *Seja X um espaço topológico paracompacto. Então para qualquer feixe \mathcal{F} sobre X , temos*

(i) $H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$;

(ii) Se \mathcal{F} é suave, então $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$, para $p > 0$.

Isto é, todo feixe suave sobre um espaço topológico paracompacto é acíclico.

Demonstração. Ver [23, Teorema 3.11, p. 56]. □

Referências Bibliográficas

- [1] BOURBAKI, N., *Commutative algebra: Chapters 1-7*, Elements of Mathematics (Berlin), Translated from the French, Reprint of the 1989 English translation, Springer-Verlag, 1998.
- [2] BOURBAKI, N., *Algebra I: Chapters 1-3*, Elements of Mathematics, Translated from the French, Springer-Verlag, 1989.
- [3] BREDON, G. E., *Sheaf theory*, Graduate Texts in Mathematics, N.170, Springer-Verlag, 2^a Ed., New York, 1997.
- [4] CATTANI, E., ET AL. *Hodge theory*, Princeton University Press, 2013.
- [5] EISENBUD, D., *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, N. 150, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [6] GONZÁLES, J. A. NAVARRO E SALAS, J. B. SANCHO DE , *C^∞ -Differentiable spaces*, Lecture Notes in Math., 1824, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [7] GRIFFITHS, P. E HARRIS, J., *Principles of algebraic geometry*, John Wiley & Sons, Canada, 1978.
- [8] GROTHENDIECK, A., *Éléments de géométrie algébrique: I. Le langage des schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math, N. 4 (1960), 228 pp.
- [9] GROTHEDIECK, A., *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. (2), N. 9, p. 119-221, 1957.
- [10] HARTSHORNE, R., *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, N. 52, Springer, 1977.
- [11] KASHIWARA, M. E SCHAPIRA, P., *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, v. 334, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [12] KATO, G., *The heart of cohomology*, Springer, 2006.

- [13] LIU, Q., *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Translated from the French by Reinie Ern e, Oxford University Press, Oxford, 2002.
- [14] MAC LANE, S., *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics , N. 5, Springer-Verlag, 2^a Ed, New York, 1998.
- [15] MORYE, A. S. *Note on the Serre-Swan theorem*, Mathematische Nachrichten, v. 286, p. 272-278, 2013.
- [16] MORYE, A. S. , *On the Serre-Swan Theorem, and on vector bundles over real abelian varieties*, PhD thesis, Homi Bhabha National Institute, March, 2011.
- [17] MUNKRES, J. R., *Topology*, 2^a Ed, Prentice Hall, 2000.
- [18] ROTMAN, J. J., *An introduction to homological algebra*, Universitext, Springer-Verlag, 2^a Ed, New York, 2009.
- [19] SERRE, JEAN-PIERRE, *Faisceaux alg ebriques coh erents*, Annals of Mathematics, v. 61, N. 2, 1955.
- [20] SWAN, R. G., *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 105 (1962), N. 2, p. 264-277.
- [21] TAYLOR, J. L., *Several complex variables with connections to algebraic geometry and Lie groups*, Graduate Studies in Mathematics, v. 46, American Mathematical Society, 2002.
- [22] TENGAN, E. E BORGES, H., * lgebra comutativa em quatro movimentos*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2015.
- [23] WELLS JR., R. O., *Differential analysis on complex manifolds*, 3^a Ed, Springer-Verlag, New York, 2008.