



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática



PROFMAT

O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações

Eduardo Isidoro dos Santos

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações

por

Eduardo Isidoro dos Santos

sob a orientação da

Prof.^a Dr.^a Miriam da Silva Pereira

João Pessoa – PB
Agosto de 2017

Catálogo na Publicação
Seção de Catalogação e Classificação

S237p Santos, Eduardo Isidoro dos.
O polinômio e série de Taylor: um estudo com aplicações /
Eduardo Isidoro dos Santos. - João Pessoa, 2017.
94 f. : il. -

Orientadora: Dr^a Miriam da Silva Pereira.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PPGMAT

1. Matemática. 2. Polinômio de Taylor. 3. Série de Taylor.
I. Título.

UFPB/BC

CDU - 51(043)

O Polinômio e Série de Taylor: Um estudo com aplicações

por

Eduardo Isidoro dos Santos ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada em 07 de Agosto de 2017.

Banca Examinadora:

Miriam da Silva Pereira

Profa. Dra. Miriam da Silva Pereira – UFPB
(Orientador)

Esteban Pereira da Silva

Prof. Dr. Esteban Pereira da Silva – Pós-Doc. UFPB/UFPE
(Examinador Externo)

Carlos Bocker Neto

Prof. Dr. Carlos Bocker Neto – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES-Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior durante a elaboração desta dissertação.

A Deus, que pela sua infinita misericórdia e fidelidade, me permitiu concluir esse Mestrado. A Ele a honra e glória para Sempre.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por essa vitória alcançada, sem Ele nada seria possível realizar.

Aos meus pais José Izidoro e Benícia Marques, que sempre rogam a Deus a minha proteção e sucesso.

À Karla Linhares que sempre está presente em todos momentos da minha vida e que demonstrou nessa trajetória de curso todo seu apoio, compreensão e amor.

À professora Miriam Silva, pela orientação, incentivo e paciência, me auxiliando em toda a estrutura desse trabalho.

Aos amigos, Matheus Vinícius, Anderson Dias e Suzana Alves por terem me incentivado a realizar a seleção desse mestrado, pela motivação durante todo curso e pela expectativa da conclusão, no desejo de se alegrarem com a minha vitória.

Aos meus amigos da turma do PROFMAT 2015, pelo respeito e união, compartilhando conhecimentos no desejo que todos chegassem ao fim deste curso, em especial aos amigos Manoel Wallace e Mailson Alves que me ajudaram grandemente nesta conquista.

Aos meus amigos de Pernambuco da cidade do Cabo de Santo Agostinho, em especial Célio Leonardo e Lázaro Maxuel, que demonstraram sempre uma amizade verdadeira e me apoiaram em tantos momentos da minha vida, inclusive no ingresso ao PROFMAT.

Aos professores do PROFMAT-UFPB, por terem transmitido seus conhecimentos com dedicação, contribuindo no desenvolvimento de cada aluno na área de Matemática.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática por todo acompanhamento pedagógico, visando uma formação mais sólida dos professores de matemática desse país.

Enfim à todos que estiveram ao meu lado durante todo esse período de estudos, com motivações e orações.

Resumo

Neste trabalho, abordamos dois conceitos importantes: o Polinômio de Taylor e a Série de Taylor. Apresentamos como o Polinômio de Taylor pode ser usado para aproximar o valor de funções analíticas na vizinhança de um ponto determinado e estimamos a precisão da aproximação obtida. Posteriormente, estudamos a possibilidade de representar, localmente, funções através de uma série de potências, chamada série de Taylor. Finalizamos apresentando algumas aplicações dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Polinômio de Taylor, Série de Taylor.

Abstract

In this work, we present two important concepts: Taylor Polynomial and Taylor Series. We discuss how the Taylor Polynomial can be used to approximate the value of Analytic functions in the neighborhood of a given point, and estimate the precision of the approximation obtained. Subsequently, we study the possibility of locally representing functions through a power system, called the Taylor Serie. We conclude by presenting some applications of the results obtained.

Keywords: Taylor Polynomial, Taylor Series.

Sumário

Introdução	2
1 Conceitos Fundamentais	4
1.1 Funções	4
1.2 Limites	11
1.3 Limites Infinitos	19
1.4 Funções Contínuas	22
1.5 Derivadas	26
1.6 Séries de Potências	38
2 Fórmula de Taylor	43
2.1 Polinômio de Taylor de Ordem 1	43
2.2 Polinômio de Taylor de Ordem 2	48
2.3 Polinômio de Taylor de Ordem 3 e 4	53
2.4 Polinômio de Taylor de Ordem n	59
2.5 Série de Taylor e Maclaurin	69
3 Aplicações do Polinômio e Série de Taylor	77
3.1 Regra de L'Hospital	77
3.2 Irracionalidade do número e	78
3.3 Fórmula para calcular π	80
3.4 Outra Fórmula para Calcular π	81
3.5 Aproximações de Áreas	82
3.6 Considerações Finais	88
Referências Bibliográficas	89

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma teoria publicada em 1715 no livro *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*, escrito pelo matemático Brook Taylor que nasceu em 1685 e morreu aos 46 anos em 1731. Como sua família era rica Taylor teve toda sua educação básica em casa com professores particulares e somente aos 18 anos, (1703), inicia seus estudos na universidade de St. John de Cambridge, onde formou-se em direito no ano de 1709 e durante esse período já estava bastante envolvido com a Matemática.

Entre 1712 e 1724, publicou treze artigos relacionados com a Matemática. Dentre eles, um novo método para computar logaritmos. No ano de 1715 publica dois livros: *Methodus Incrementorum Directa et Inversa* e *Linear Perspective*. Neste primeiro, se encontra a Fórmula de Taylor e as representação de funções em série. Apesar de James Gregory (1638 – 1675) já trabalhar com essas séries e Johann Bernoulli (1667 – 1748), matemático de sua época, também conhecer essa representação, Taylor desenvolveu sua fórmula sozinho sem o conhecimento do trabalho dos outros e foi o primeiro a enunciá-la e descrever sua forma geral. Assim, o polinômio aproximador de funções viria a ser conhecido como o Polinômio de Taylor e as representações de funções em série como Série de Taylor. Esse reconhecimento só aconteceria alguns anos após a sua morte, pois na sua época, sua teoria não foi vista como importante.

Colin Maclaurin (1698 – 1746) citou a obra de Taylor em um livro no ano de 1742, popularizando as representações de funções em série e trabalhando com um tipo específico de série, as centralizadas na origem, por isso essas séries ficaram conhecidas como Série de Maclaurin. Mas foi a partir de 1772, que Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), reconhece a importância do trabalho de Taylor e elege seu teorema como princípio básico do cálculo diferencial. No ano de 1786 o termo série de Taylor começa a ser utilizado. O Polinômio e a Série de Taylor, são temas presentes em diversos livros de cálculo e análise e essa teoria se tornou a base de programação de calculadoras e softwares.

No *Capítulo* 1, descrevemos alguns conceitos fundamentais do cálculo utilizados na abordagem do tema deste trabalho. Dentre eles destacamos limites e derivadas e

Teoremas como o de Rolle e de Cauchy.

O *Capítulo 2* é dedicado ao Polinômio de Taylor, demonstrando casos mais simples como o Polinômio de ordem 1 e generalizamos a expressão de sua fórmula para todo natural. Vale ressaltar que em toda estrutura deste capítulo e dos demais, apresentamos alguns exemplos para melhor entendimento da teoria de Taylor, mostrando a visualização gráfica dos resultados, toda construída com auxílio do recurso computacional Geogebra Match. Finalizamos o capítulo desenvolvendo a série de Taylor e entendendo sua diferença com o Polinômio. Nesta parte, observamos que determinadas funções podem ser representadas pela série de Taylor e algumas delas válidas para todo número real.

No *Capítulo 3*, mostramos a aplicação o Polinômio e Série de Taylor para obter alguns resultados clássicos. Destacamos uma fórmula para obter uma aproximação para o valor de π e estimativas de áreas, aplicação de fundamental importância principalmente para obtermos o valor de integrais definidas de algumas funções, que pelas técnicas de integração conhecidas no cálculo não podem ser resolvidas.

Capítulo 1

Conceitos Fundamentais

Apresentamos neste capítulo uma breve noção de Função juntamente com alguns tipos e representações gráficas e conceitos fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral. Dentre essas definições do cálculo abordamos a noção intuitiva de limites, sua definição formal e regras de operações. Apresentamos o conceito de derivada, regras operatórias e demonstrações da derivação de algumas funções, como as trigonométricas. Importantes teoremas do cálculo serão demonstrados, como o do confronto, o de Rolle e o Teorema de Cauchy. Concluimos o capítulo com a definição e exemplificação de Série de Potências, conceito de extrema importância para o entendimento das Séries de Taylor estudadas no capítulo 2.

Vale ressaltar que não abordamos o estudo de Séries, pois apenas utilizamos critérios de convergência para verificação em séries de potências. Esses detalhes podem ser analisados em [6] p. 12 e [11] p. 539. Utilizamos também em alguns momentos técnicas de integração, ao integrarmos uma série de potências termo a termo e na aplicação de estimativas de áreas no capítulo 3. Tais técnicas podem ser observadas em [2] p. 337.

Esse capítulo é fundamental para o entendimento de demonstrações posteriores.

1.1 Funções

Nesta seção vamos analisar a definição de função, alguns tipos e suas representações gráficas. Para maiores detalhes ver [2] p. 26, [10] p. 56. e [7] p. 11.

Podemos definir uma função f , como uma relação entre dois conjuntos A e B , onde para todo valor de x do conjunto A existe um único y que pertence a B . O conjunto A será chamado de domínio, o B de contradomínio e cada elemento único $b \in B$, associado a um elemento $a \in A$, será chamado de imagem de f quando $x = a$ ou ainda o valor que f assume em a . Em geral uma função assim definida é indicada por $f : A \rightarrow B$ (f de A em B). Em particular uma função de uma variável real a valores

reais é uma função em que $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

A representação gráfica de uma função é o conjunto de todos os pares ordenados $(x, f(x))$ para todo x do domínio da f . Além disso quando x percorre o domínio, a função será crescente ou decrescente para todo x ou apresentar crescimento e decrescimento em intervalos desse domínio. Dessa forma na Definição 1.1, formalizamos esse conceito.

Definição 1.1. Uma função será crescente em um intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I . E será decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$ em I .

Na figura 1.1 percebemos que no intervalo $[a, b]$ e $[0, c]$ a função é crescente, já no intervalo $[b, 0]$ a função é decrescente.

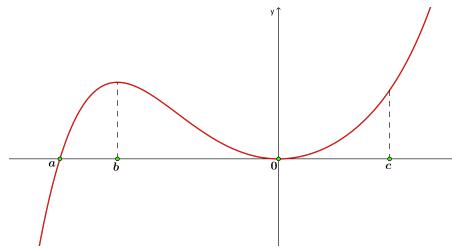


Figura 1.1: Gráfico de uma função para análise de crescimento e decrescimento

Funções Polinomiais. São funções cuja lei de formação é um polinômio, ou seja,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

com $a_n \neq 0$ e $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$ são números reais fixados, coeficientes do polinômio. Tais funções são definidas nos reais e o número $n \in \mathbb{N}$ representa o grau do polinômio. Em particular o Polinômio de Taylor que será construído no capítulo 2 é um exemplo de função polinomial. Vejamos o gráfico de algumas funções polinomiais.

- a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$ é uma função polinomial do primeiro grau com a e b número reais e $a_n \neq 0$. Também conhecida como função afim, seu gráfico é uma reta que intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ e o eixo das ordenadas no ponto $(0, b)$. Se o valor de a conhecido como coeficiente angular, pois o mesmo é a tangente do ângulo formado pela reta e o eixo das abscissas, for positivo a função será crescente e caso seja negativo a função será decrescente, Figuras 1.2 e 1.3.

1. Conceitos Fundamentais

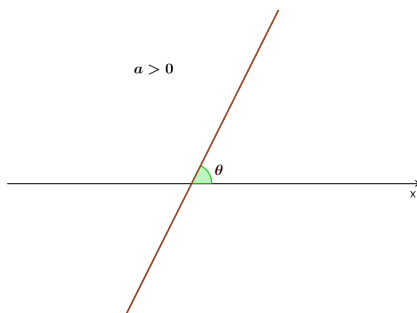


Figura 1.2: Coeficiente angular positivo

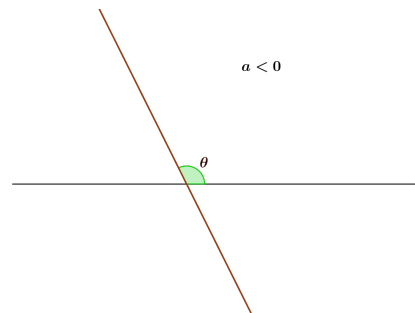


Figura 1.3: Coeficiente angular negativo

Como aplicação podemos visualizar na Figura 1.4 o gráfico da função crescente $f(x) = 2x - 4$ e na Figura 1.5 o gráfico da função decrescente $f(x) = -2x - 4$.

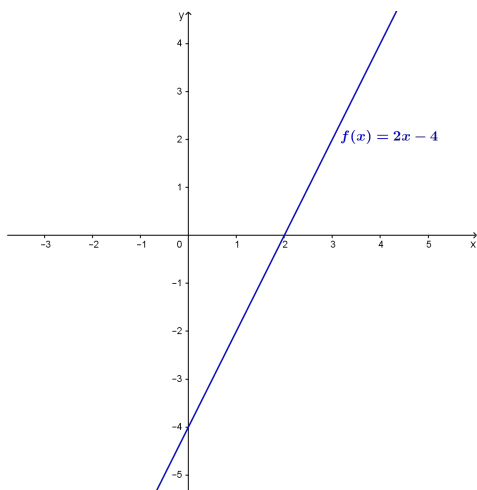


Figura 1.4: Gráfico de $f(x) = 2x - 4$

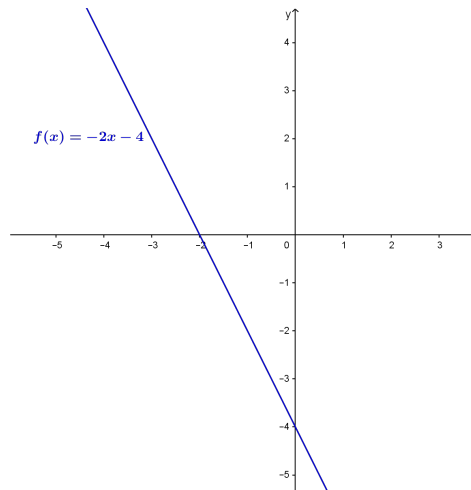


Figura 1.5: Gráfico de $f(x) = -2x - 4$

- b. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c número reais e $a_n \neq 0$, é uma função polinomial do segundo grau também conhecida como função quadrática. Seu gráfico é uma parábola que terá concavidade para cima se $a > 0$ e para baixo se $a < 0$. Podemos observar os gráficos das funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ nas Figuras 1.6 e 1.7 respectivamente.

1. Conceitos Fundamentais

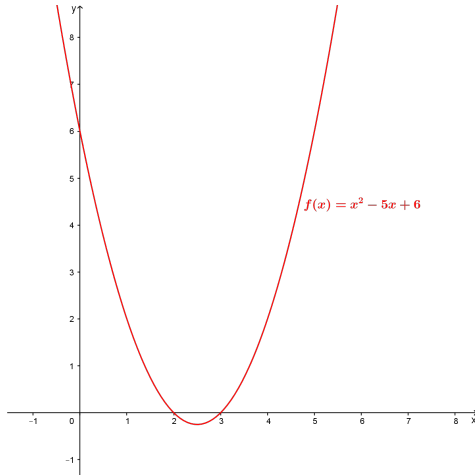


Figura 1.6: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 5x + 6$

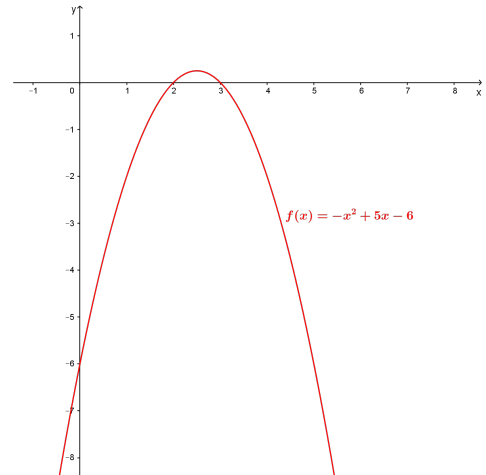


Figura 1.7: Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

Função Exponencial. De maneira geral é uma função da forma $f(x) = a^x$ com a uma constante real, positiva e diferente de 1. Dessa forma a imagem dessa função será maior do que zero para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos perceber também que pela Definição 1.1, de função crescente e decrescente, essa função será crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. As representações gráficas dessa função podem ser visualizadas nas Figuras 1.8 e 1.9 respectivamente.

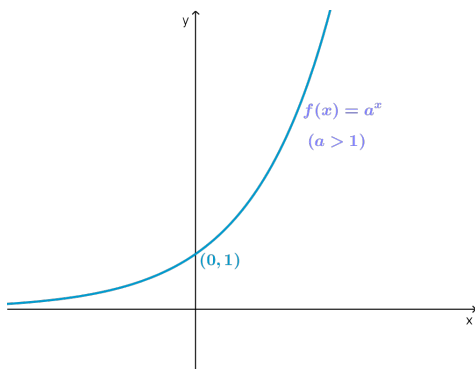


Figura 1.8: Gráfico de $f(x) = a^x$ para $a > 1$

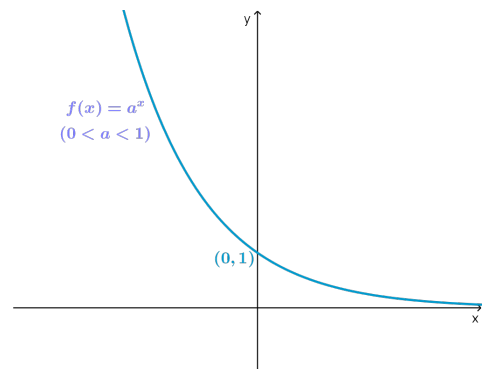


Figura 1.9: Gráfico de $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Em particular no tema principal, o Polinômio de Taylor, vamos construir a aproximação da função exponencial de base a igual ao número de Euler $2,71828182\dots$, ou seja, $f(x) = e^x$, que por sua vez terá sua representação gráfica semelhante a Figura 1.8.

Função Logarítmica. Para tais funções devemos saber que pela definição de logaritmo, temos que se $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$,

$$\log_a b = y \iff a^y = b.$$

Assim o logaritmo de um número $b > 0$ na base $0 < a \neq 1$, é o expoente que devemos dar a base a de modo que a potência obtida seja b . Assim uma função logarítmica é uma função $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada x ao número $\log_a x$ com $0 < a \neq 1$. Podemos perceber que o gráfico estará todo à direita do eixo y e intercepta o eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$, pois $\log_a 1 = 0$ para todo $0 < a \neq 1$, e ainda que se $a > 1$ a função será crescente e caso $0 < a < 1$ a função será decrescente, tais situações podem ser verificadas nas Figuras 1.10 e 1.11 respectivamente.

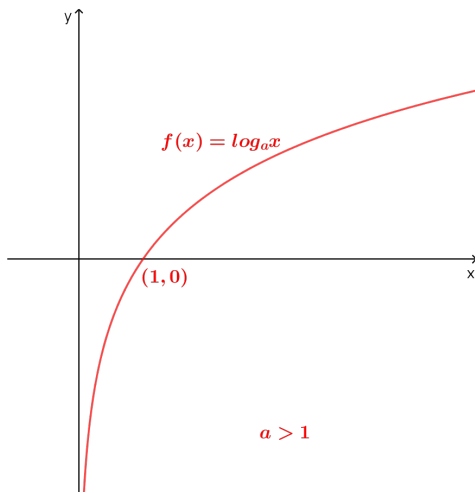


Figura 1.10: Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $a > 1$

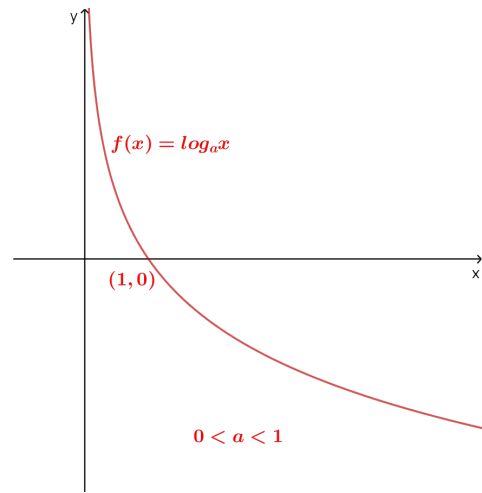


Figura 1.11: Gráfico de $f(x) = \log_a x$ para $0 < a < 1$

Funções Trigonômicas. Vamos apresentar as definições das principais funções trigonométricas: seno, cosseno e tangente. Para maiores detalhes ver [2] p. 50. Inicialmente vamos considerar uma circunferência λ de raio 1 centrada na origem de um sistema cartesiano e uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \lambda$, que associa um número real x em unidades de radianos a um ponto P na circunferência, ou seja, um arco de comprimento x associado a um par ordenado no plano que é um ponto pertencente a circunferência.

Essa circunferência é conhecida como Círculo Trigonométrico (Figura 1.12) e é orientada positivamente de A para B e negativamente de A para B' . Assim observando ainda a Figura 1.12, temos que em $f(x) = P$, x é positivo e em $f(x) = P'$, x é negativo. Em particular sabemos que o comprimento de uma circunferência é $2\pi R$, onde R é o raio. Portanto o Círculo Trigonométrico tem comprimento 2π , assim concluímos

conforme a Figura 1.12 que, $f(0) = A$, $f(\frac{\pi}{2}) = B$, $f(\pi) = A'$, $f(\frac{3\pi}{2}) = B'$ e $f(2\pi) = A$. Podemos perceber também que $f(x) = f(x + 2\pi)$ e portanto a função f é periódica e seu período é 2π e os arcos que diferem de um número inteiro de voltas são chamados de arcos côngruos.

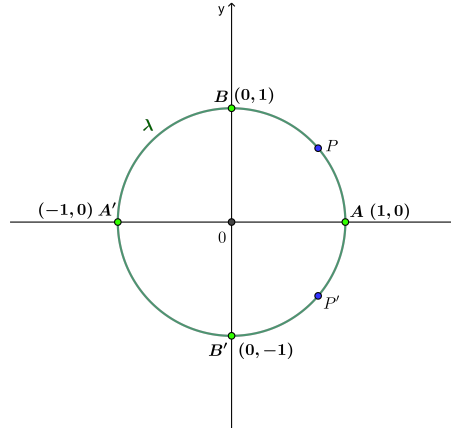


Figura 1.12: Círculo Trigonométrico

Seno, Cosseno e Tangente. Seja x um arco AP no Círculo trigonométrico (Figura 1.13). Aplicando as razões trigonométricas seno e cosseno do ângulo x no triângulo retângulo OP_2P , temos que $\text{sen}(x) = \overline{OP_1}$ (ordenada do ponto P) e $\text{cos}(x) = \overline{OP_2}$ (abscissa do ponto P).

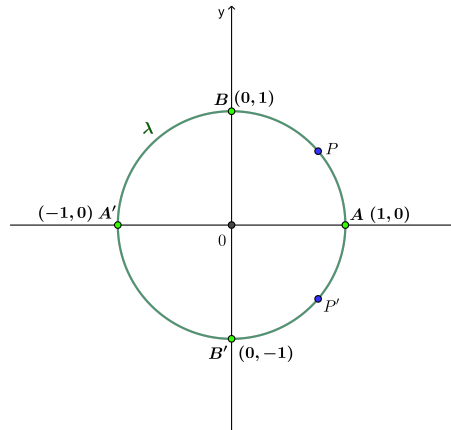


Figura 1.13: Seno e Cosseno no Círculo Trigonométrico

Para verificarmos a Tangente no Círculo Trigonométrico, vamos tomar a reta tangente a circunferência no ponto $A = (1, 0)$ e um número real $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando a tangente do ângulo x no triângulo retângulo OAT (Figura 1.14), concluímos que $\text{tg}(x) = \overline{AT}$.

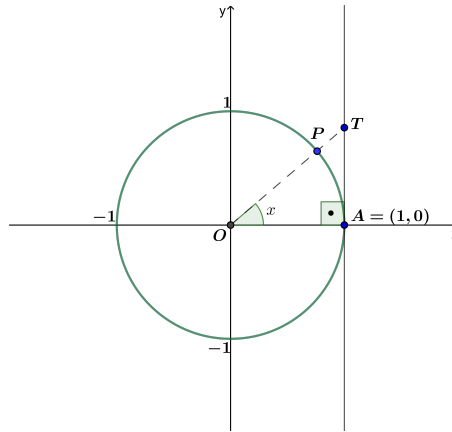


Figura 1.14: Tangente no Círculo Trigonométrico

Função Seno e Função Cosseno. A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{sen}(x)$, que associa cada valor de x em radianos ao número $\text{sen}(x)$ é chamada de função Seno, cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 1.15. A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos(x)$, que associa cada valor de x em radianos ao número $\cos(x)$ é chamada de função cosseno com representação gráfica na Figura 1.16.

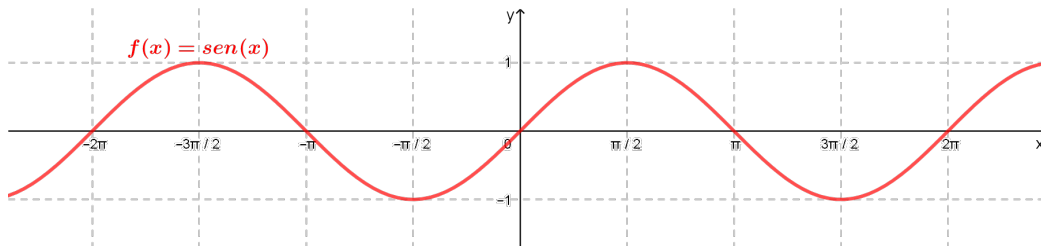


Figura 1.15: Gráfico da Função $f(x) = \text{sen}(x)$

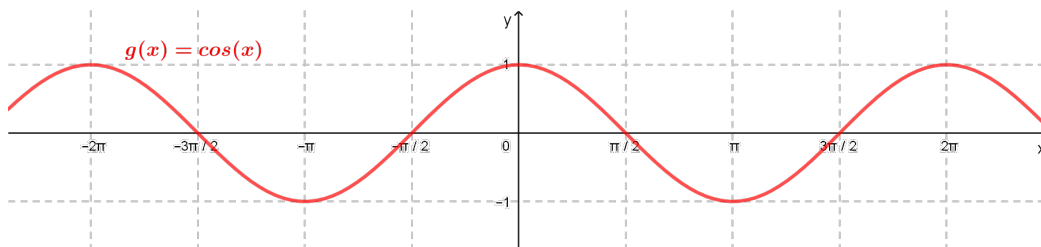


Figura 1.16: Gráfico da Função $g(x) = \cos(x)$

Podemos perceber que as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π , pois $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ e $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ e a imagem dessas funções é o intervalo $[-1, 1]$, ou seja, $|\text{sen}(x)| \leq 1$ e $|\cos(x)| \leq 1$.

Função Tangente A função $h : \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \text{tg}(x)$, que associa cada valor de x em radianos ao número $\text{tg}(x)$, é chamada de função Tangente. Seu gráfico pode ser visualizado na Figura 1.17.

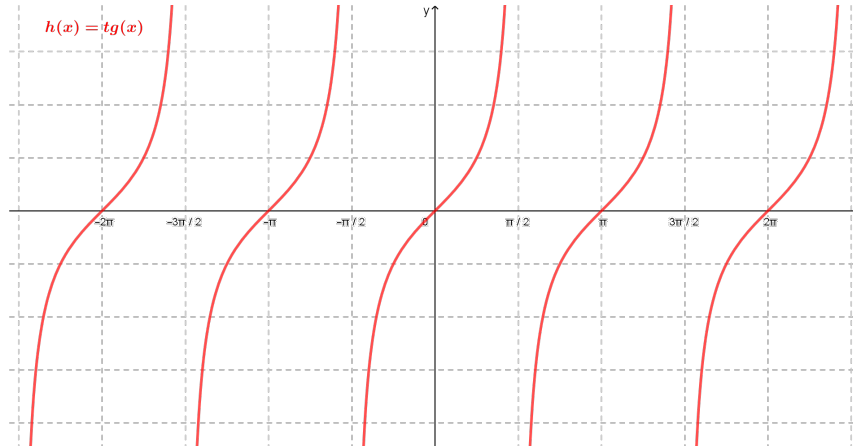


Figura 1.17: Gráfico da Função $h(x) = \text{tg}(x)$

Concluimos observando que a função tangente é periódica de período π , ou seja, $\text{tg}(x) = \text{tg}(x + \pi)$ para todo x real diferente $\frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número inteiro.

1.2 Limites

Vamos considerar uma placa metálica quadrada que se dilata uniformemente quando aquecida. Denotamos por x o comprimento de cada lado dessa placa, temos que sua área é dada por $A = x^2$.

Suponhamos que $3\text{cm} < x < 4\text{cm}$ e que ao ser aquecida suas medidas lineares se aproximam de 4cm . Assim, cada vez que x se aproxima de 4cm a área tende a 16cm^2 , Figura 1.18.

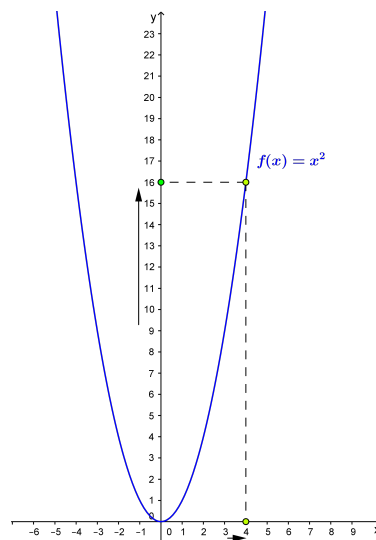


Figura 1.18: Comportamento da função $f(x) = x^2$ para valores de x à esquerda de 4.

Agora vamos considerar que $4\text{cm} < x < 5\text{cm}$ e a placa sofra uma contração térmica

de maneira que suas medidas lineares novamente se aproximam de $4cm$. Dessa maneira, a área estará novamente se aproximando de $16cm^2$, Figura 1.19.

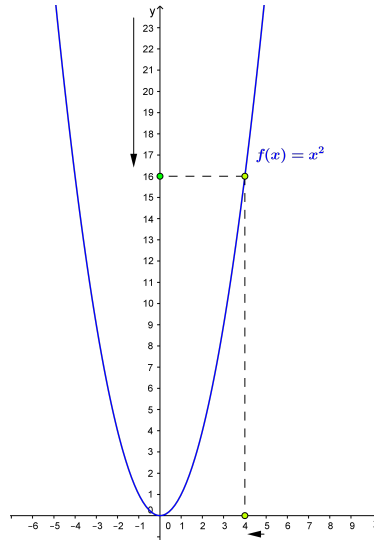


Figura 1.19: Comportamento da função $f(x) = x^2$ para valores de x à direita de 4.

Percebemos que quando os valores de x se aproximam de $4cm$ pela direita ou pela esquerda, a área estará cada vez mais próxima de $16cm^2$. Podemos expressar este comportamento matematicamente, dizendo que o limite da função x^2 quando x está próximo de $4cm$ é 16, em símbolos,

$$\lim_{x \rightarrow 4} x^2 = 16.$$

É importante salientar que a ideia de limite está relacionada à entender o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto dado. No exemplo acima, estamos interessados em determinar o comportamento de $f(x) = x^2$ para valores que estão próximos à $4cm$. Pode acontecer também do limite não ser tão evidente. Por exemplo, considerando a função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$. Vamos determinar qual o comportamento dessa função para valores de x próximos de 1. Nas Tabelas 1.1 e 1.2 observamos os valores de f para próximos de 1, porém menores que 1 e maiores que 1, respectivamente.

x	0,5	0,75	0,9	0,99
$f(x)$	2	2,5	2,8	2,98

Tabela 1.1: Valores de $f(x)$ para x à esquerda de 1

x	1,5	1,25	1,1	1,01
$f(x)$	4	3,5	3,2	3,02

Tabela 1.2: Valores de $f(x)$ para x à direita de 1

Por esses resultados somos levados a supor que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$.

De fato, o domínio dessa função abrange todos os reais exceto o 1 que anula o denominador. Porém, isto não é relevante para o cálculo do limite, pois estamos interessados em observar o valor de f para pontos numa vizinhança de 1. Então, para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(2x + 1)(x - 1)}{x - 1} = 2x + 1.$$

Logo, para $x \neq 1$, o comportamento da função f é semelhante ao comportamento da função $2x + 1$ (Figura 1.20). Neste caso, intuitivamente, podemos dizer que quando x se aproxima de 1 os valores de $f(x)$ se aproximam de 3.

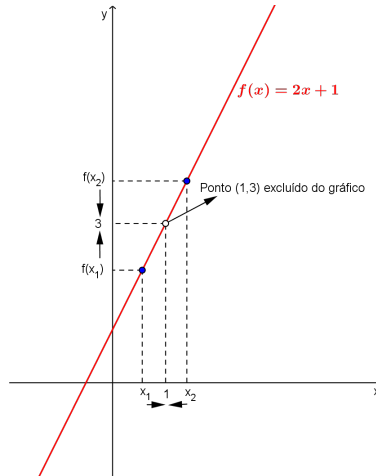


Figura 1.20: Comportamento da função $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ para x próximo de 1

Com base nas ideias expressadas nos exemplos anteriores, apresentamos a seguir a definição de limite e visualizamos graficamente na Figura 1.21.

Definição 1.2. Sejam I um intervalo aberto e a um número real tal que $a \in I$. Se uma função f está definida para todo $x \in I$, exceto possivelmente em a , dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a é L , se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$. Neste caso, escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

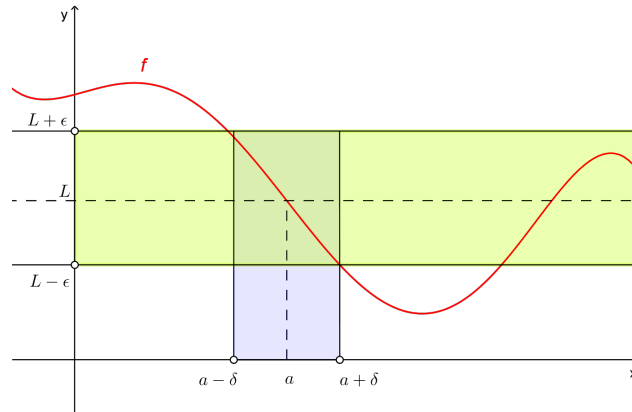


Figura 1.21: Gráfico que expressa o conceito formal de limite

Em outras palavras $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se e só se $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se x está no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, temos que $f(x)$ pertence ao intervalo $(L - \epsilon, L + \epsilon)$.

Exemplo 1.1. Vamos usar a definição de limite para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 7) = 3$ e visualizar este resultado na Figura 1.22. De fato, dado $\epsilon > 0$, desejamos encontrar um número $\delta > 0$ tal que se

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(-2x + 7) - 3| < \epsilon$$

Como $|(-2x + 7) - 3| = |-2x + 4| = 2|x - 2|$. Dessa forma, queremos determinar um número real $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Isso sugere escolher $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$, escolhemos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ temos que se $0 < |x - 2| < \delta$ então,

$$|(-2x + 7) - 3| = |-2x + 4| = |(-2)(x - 2)| = |(-2)||x - 2| = 2|x - 2| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Assim,

$$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |(-2x + 7) - 3| < \epsilon.$$

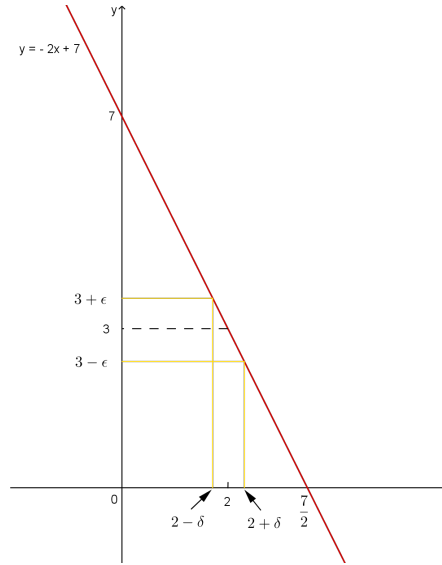


Figura 1.22: Gráfico da função $f(x) = -2x + 7$ para visualização do $\lim_{x \rightarrow 2} (-2x + 7) = 3$

Teorema 1.1. *Seja f uma função definida num intervalo aberto I com $a \in I$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$. (Unicidade do Limite).*

Demonstração.

De fato, suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ com $L_1 \neq L_2$. Pela definição, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L_1| < \epsilon$$

Da mesma maneira, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - L_2| < \epsilon$$

Temos pela desigualdade triangular que se $0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| \Rightarrow |L_1 - L_2| \leq 2\epsilon$$

Tomando-se $\epsilon = \frac{1}{2}|L_1 - L_2| > 0$, temos que

$$|L_1 - L_2| < 2\epsilon = 2 \cdot \frac{1}{2}|L_1 - L_2| = |L_1 - L_2|$$

o que é um absurdo. Logo, $L_1 = L_2$.

No que segue, vamos enunciar algumas das principais propriedades das operações com limites. Para maiores detalhes veja [1] p. 127.

Teorema 1.2. *Seja K uma constante qualquer. Suponhamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$. Então,*

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M;$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [Kf(x)] = KL;$
3. $\lim_{x \rightarrow a} K = K$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LM;$
5. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M},$ se $M \neq 0$.

Vamos demonstrar apenas o item 1, para as demais demonstrações veja [2] p.98.

Demonstração.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Da mesma maneira se $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{1}{2}\epsilon$$

e

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon$$

Pela desigualdade triangular que $|f(x) - L + g(x) - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$.
Portanto,

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon$$

$$|[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon$$

Assim,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |[f(x) + g(x)] - (L + M)| < \epsilon$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$.

Exemplo 1.2. Vamos calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3}$. Não podemos usar a regra 5 do Teorema 1.2, pois $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2x - 3 = 0$, mas multiplicando o numerador e denominador por $\sqrt{x} + \sqrt{3}$, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

Aplicando agora a regra 5 do Teorema 1.2, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 1)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{8\sqrt{3}}$$

Teorema 1.3. (Teorema do Confronto.) *Sejam f , g e h funções definidas num intervalo real aberto contendo x_0 , exceto possivelmente em x_0 , tal que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, temos que se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Demonstração.

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Da mesma maneira, se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - L| < \epsilon.$$

Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$ e $|h(x) - L| < \epsilon$ ou ainda $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ e $L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$. Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ temos que

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

Portanto,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(x) - L| < \epsilon$$

ou seja, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$.

Definição 1.3. Seja f uma função tal que o seu domínio contém o intervalo aberto (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela direita é L

e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $a < x < a + \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definição 1.4. Suponhamos que exista um intervalo aberto (c, a) com $a, c \in \mathbb{R}$ contido no domínio da f . Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda é L , denotamos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

se dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.

As Definições 1.3 e 1.4 são conhecidas como limites laterais e nos auxiliam no tratamento do limite de funções definidas por partes. Vejamos a demonstração desse fato no Teorema 1.4.

Teorema 1.4. *Seja f uma função e suponha que os intervalos (c, a) e (a, b) com $a, b, c \in \mathbb{R}$ estejam contidos no domínio dessa função. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

Demonstração.

Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. É o mesmo que afirmar que $a - \delta < x < a$ ou $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Concluimos então que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Reciprocamente se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $a < x < a + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Analogamente se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $a - \delta_2 < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que $a - \delta < x < a$ e $a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$. Logo $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$, ou ainda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

Exemplo 1.3. Consideramos a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 + 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

Vamos determinar se $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe. Temos,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 3 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 5 - x^2 = 4 \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 1.4 temos que os limites laterais existem e possuem o mesmo valor. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$. A visualização gráfica deste exemplo está representada na Figura 1.23.

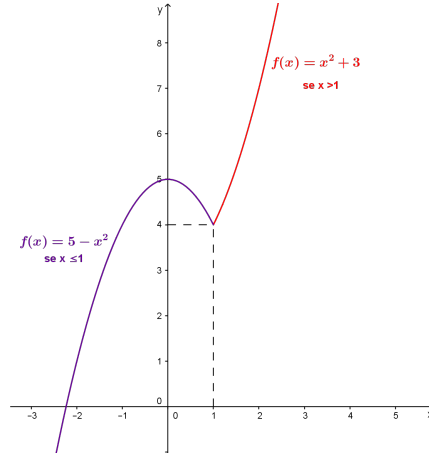


Figura 1.23: Gráfico da função $f(x)$ dada no Exemplo 1.3

1.3 Limites Infinitos

Seja f uma função definida em um intervalo aberto contendo a exceto possivelmente em a . Se, quando x se aproximar de a , $f(x)$ crescer ilimitadamente diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$. Caso $f(x)$ decresça ilimitadamente diremos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Formalmente para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, temos que dado um número $M > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. Analogamente para $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, temos que dado um número $M < 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < M$. As duas situações podem ser visualizadas graficamente nas Figuras 1.24 e 1.25.

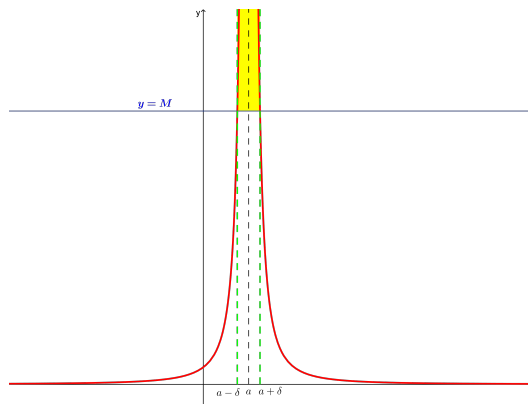


Figura 1.24: Gráfico representando a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

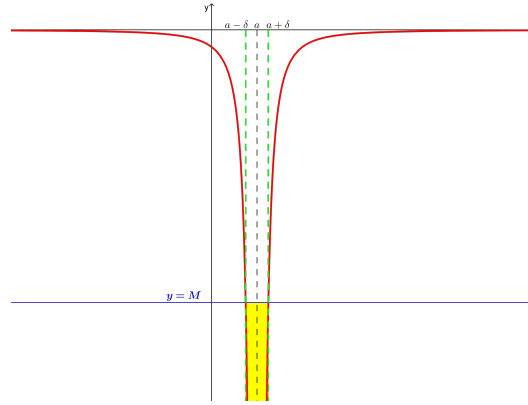


Figura 1.25: Gráfico representando a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

Teorema 1.5. Se n é natural par então, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$. Se n for natural ímpar então, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$.

Demonstração.

Considere a função $f(x) = (x-a)^n$ com n um número natural par. Temos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$. Observando também que $f(x) > 0$ para todo x em $a < x < a + \delta$, onde $\delta > 0$ e pelo fato de $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{\epsilon}$$

Assim, se $a < x < a + \delta$ então $\frac{1}{f(x)} > \epsilon$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Como $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0$, temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{\epsilon}.$$

Assim, $a - \delta < x < a \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \epsilon$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Concluimos então que para todo n natural par $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$.

Suponhamos agora $f(x) = (x-a)^n$ com n um número natural ímpar. Novamente temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $f(x) > 0$ para todo x em $a < x < a + \delta$, onde $\delta > 0$. Assim, como $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$, concluimos de modo análogo ao anterior que $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$. Agora, tomando $a - \delta < x < a$ temos $f(x) < 0$ para todo x desse intervalo. Assim

sendo $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 0$ temos que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - 0| < \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow -f(x) < \frac{1}{\epsilon}$$

Logo,

$$f(x) > -\frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} < -\epsilon < 0$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$.

Concluimos então se n for natural ímpar, $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{(x-a)^n} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{(x-a)^n} = -\infty$.

Observamos que em qualquer caso o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ possui um assíntota vertical $x = a$ e o eixo das abscissas é uma assíntota horizontal, pois quando x tende a infinito $f(x)$ tende a zero.

Exemplo 1.4. Seja a função $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$. Analisando as Tabelas 1.3 e 1.4, podemos observar o comportamento de $f(x)$ nas seguintes situações:

x	3	2,5	2,25	2,01	2,001
$f(x)$	1	8	64	10^6	10^9

Tabela 1.3: Comportamento de $f(x)$ para x à direita de 2

x	1	1,5	1,75	1,99	1,999
$f(x)$	-1	-8	-64	-10^6	-10^9

Tabela 1.4: Comportamento de $f(x)$ para x à esquerda de 2

Com base nestes resultados percebemos que para valores de x próximos de 2, porém maiores que 2, a função cresce ilimitadamente e para valores de x próximos de 2, porém menores que 2, a função decresce ilimitadamente.

Com base no Teorema 1.5 concluimos que $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$, representado graficamente na Figura 1.26.

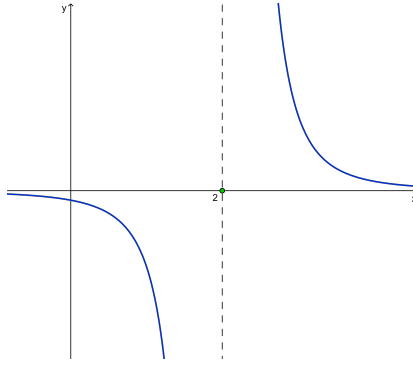


Figura 1.26: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-2)^3}$

1.4 Funções Contínuas

Definição 1.5. Dizemos que uma função f definida em um intervalo aberto é contínua em x_0 do seu domínio se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemplo 1.5. Consideramos a função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ e $x_0 = 4$. Como para $x_0 = 4$, $f(x_0)$ não está definida e $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$, concluímos que f não é contínua em $x_0 = 4$ (veja Figura 1.27).

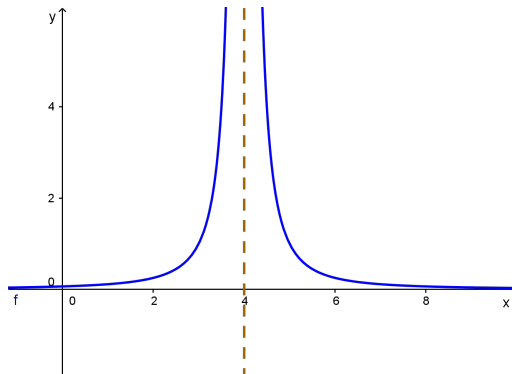


Figura 1.27: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$

Exemplo 1.6. Seja a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x < 2 \\ x^2 - 5x + 10 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

Podemos perceber que 2 é um ponto do domínio da função e $f(2) = 4$. Além disso, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$ e $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$. Como os limites laterais são diferentes, concluímos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ não existe e dessa forma $f(x)$ é descontínua em 2, Figura 1.28.

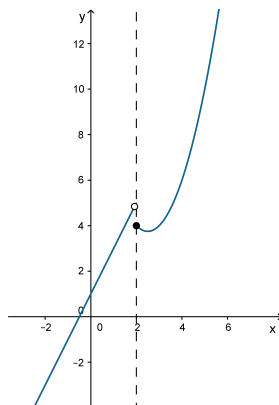


Figura 1.28: Gráfico da função $f(x)$ para x próximo de 2

Exemplo 1.7. Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{se } x < 1 \\ 5 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$$

Neste caso, temos que em $x_0 = 1$, $f(1) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ e como $f(1) = 4$, segue que a função é contínua em 1, Figura 1.29.

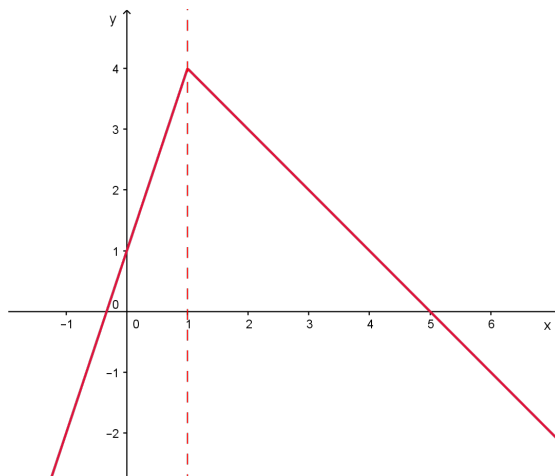


Figura 1.29: Gráfico da função $f(x)$ para x próximo de 1

Podemos perceber que nos Exemplos 1.5 e 1.6, o gráfico de f apresenta um "salto" em x_0 , enquanto isso não ocorre no gráfico do Exemplo 1.7. Caso uma função f seja contínua em todo ponto x_0 do seu domínio, diremos simplesmente que a função é contínua. Na Definição 1.6 temos uma forma alternativa de definir continuidade de uma função em um ponto.

Definição 1.6. Sejam f uma função real e x_0 um ponto do seu domínio. Dizemos que f é contínua em x_0 , se para todo $\epsilon > 0$ dado existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica

$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ou ainda,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \implies f(x_0) - \epsilon < f(x) < f(x_0) + \epsilon.$$

A definição acima pode ser ilustrada na Figura 1.30.

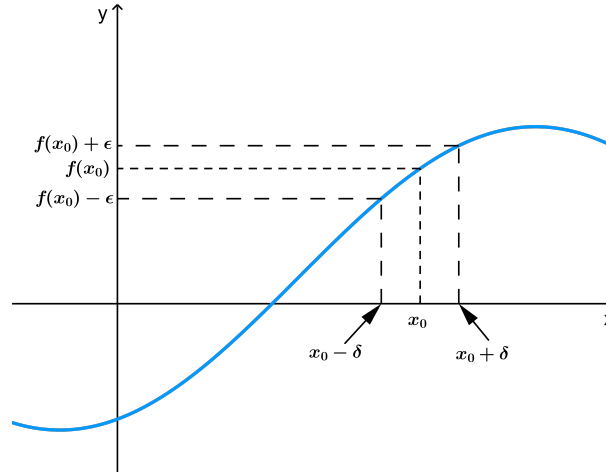


Figura 1.30: Continuidade em um ponto x_0

Exemplo 1.8. Toda função da forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com a e b números reais, é contínua. Pela definição ao fixarmos um $x_0 \in \mathbb{R}$ devemos verificar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

uma vez que,

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0|,$$

temos que dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, temos $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ para $|x - x_0| < \delta$.

Exemplo 1.9. Seja uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = c$ onde c é uma constante real. Pela definição ao fixarmos um $x_0 \in \mathbb{R}$ devemos verificar que dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que,

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

mas, como $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0$, temos que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ é sempre válida. Logo tomando qualquer $\delta > 0$ teremos $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Teorema 1.6. Se f e g são funções contínuas em um ponto x_0 que pertence ao domínio de f e g . Então,

1. $f \pm g$ é contínua em x_0 ;
2. $f \cdot g$ é contínua em x_0 ;
3. f/g é contínua em x_0 , desde que $g(x_0) \neq 0$.

Demonstração. Veja [4] p.85 ou [10] p.99

Teorema 1.7. *São válidos os seguintes resultados sobre continuidade:*

- a) *Toda função polinomial é contínua.*
- b) *As funções trigonométricas, seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, são contínuas em todo seu domínio.*

Demonstração. Veja [10] p.99. ou [4] p.393..

Na maioria das vezes, a técnica de cálculo de limites consiste em conduzir o problema até que possamos aplicar os limites fundamentais, facilitando assim, as soluções procuradas. Apresentamos a seguir um limite fundamental estratégico para a solução de problemas.

Proposição 1.8. Se x está em radianos temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

Demonstração. Seja um círculo trigonométrico e um ângulo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ conforme Figura 1.31. Logo temos que o segmento $\overline{EF} = \text{sen}(x)$ e o segmento $(\overline{CD}) = \text{tg}(x)$. Graficamente temos que a área do triângulo $(\triangle ODE)$ é menor que a área do setor circular (ODE) e a área desse setor é menor que a área do triângulo $(\triangle ODC)$.

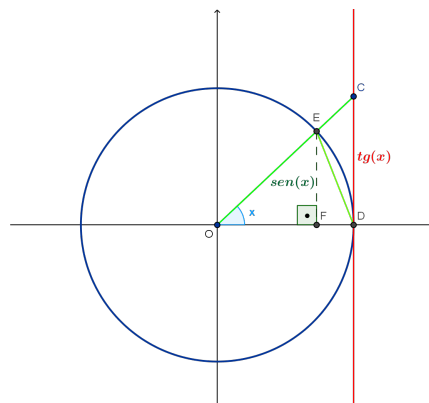


Figura 1.31: Gráfico para demonstração do $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$

Portanto,

$$\text{Área}(\triangle ODE) < \text{Área}_{\text{setor}}(ODE) < \text{Área}(\triangle ODC)$$

então,

$$\frac{\text{sen}(x)}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\text{tg}(x)}{2} \implies \text{sen}(x) < x < \text{tg}(x) \implies 1 < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{\text{tg}(x)}{\text{sen}(x)}.$$

Logo,

$$1 < \frac{x}{\text{sen}(x)} < \frac{1}{\cos(x)} \implies \cos(x) < \frac{\text{sen}(x)}{x} < 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ o resultado segue do Teorema do Confronto 1.3, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1.$$

1.5 Derivadas

Para entendermos o conceito de derivada de uma função, vamos definir o coeficiente angular de uma reta tangente ao gráfico de uma função num ponto específico. A princípio vamos observar o coeficiente angular de uma reta secante ao gráfico de uma função f . Dessa forma sejam $P = (x_1, f(x_1))$ e $Q = (x_2, f(x_2))$ os pontos de interseção da reta s com o gráfico da função f conforme a Figura 1.32.

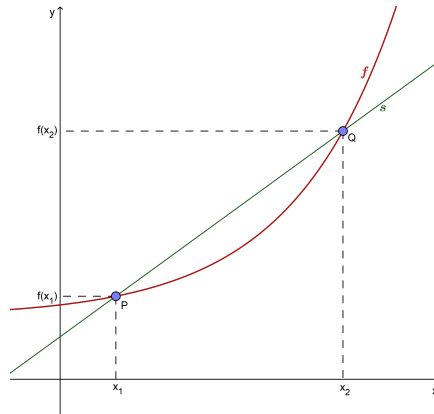


Figura 1.32: Reta secante ao gráfico de uma função f nos pontos P e Q

Seja m_s o coeficiente angular da reta s , isto é, $m_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Queremos determinar o coeficiente angular de uma reta t tangente ao gráfico de f no P . Assim, mantemos P fixo e consideramos o ponto Q movendo-se em direção a P ao longo da curva. Equivalentemente, estamos considerando o x_2 se aproximando de x_1 e, neste

caso, $f(x_2)$ tende a $f(x_1)$. Na Figura 1.33, podemos observar algumas situações do deslocamento do ponto Q .

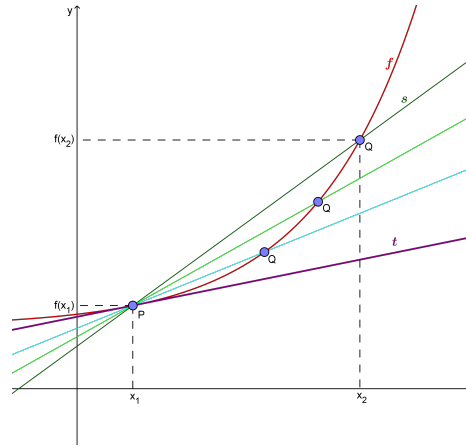


Figura 1.33: Gráfico da definição de derivada de uma função em um ponto x_1

Portanto, se m_t é o coeficiente angular da reta tangente t então,

$$m_t = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Esse limite que nos fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função num ponto qualquer, é um dos mais importantes limites do cálculo.

Se x_1 é um ponto do domínio da função f , generalizamos o procedimento acima e definimos a derivada da função f no ponto x_1 denotada por $f'(x_1)$ por

$$f'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Podemos reescrever o limite acima de outra forma. Denotaremos por Δx a variação $x_2 - x_1$, e, neste caso, se x_2 tende a x_1 , Δx tende a zero. Portanto,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Exemplo 1.10. O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $(1, 1)$ é dado por

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1^2 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Portanto, a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $(1, 1)$ é dada por $y - 1 = 2(x - 1) = 2x - 1$, (Figura 1.34).

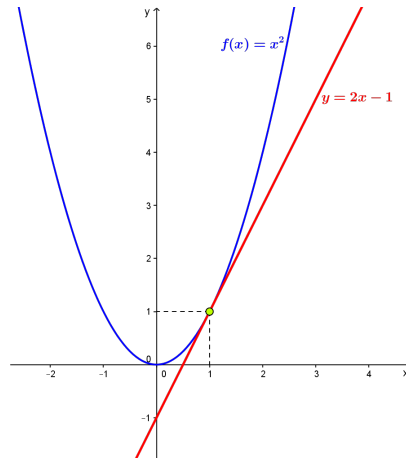


Figura 1.34: Reta tangente ao gráfico de x^2 no ponto $(1, 1)$

Exemplo 1.11. Observamos o deslocamento de uma partícula em movimento retilíneo uniforme e suponhamos que $s(t) = 3t^2 + 1$ é a função em relação ao tempo em segundos que nos proporcione as diversas posições dessa partícula em metros, em função do tempo. Na Tabela 1.5 podemos observar algumas dessas situações:

t	$s = 3t^2 + 1$
0	1
1	4
2	13
3	28
4	49

Tabela 1.5: Posições em metros da partícula em relação ao tempo em segundos

Sabemos que a velocidade média é dada pelo quociente entre a variação do espaço e a variação do tempo.

$$V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

Assim, a velocidade média no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 2$, é $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{13 - 1}{2 - 0} = 6m/s$. Se o intervalo fosse entre $t = 0$ e $t = 3$, teríamos $V_m = \frac{28 - 1}{3 - 0} = 9m/s$.

Percebemos então que a velocidade média não é constante. Mas se desejássemos encontrar o valor da velocidade da partícula num instante específico? Suponhamos que desejamos encontrar a velocidade num instante t_1 . Assim com um tempo $t \neq t_1$,

sabemos que nossa velocidade média seria:

$$V_m = \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}$$

Observamos que quanto menor for a diferença $(t - t_1)$, mais próximos estamos do valor que queremos: a velocidade em t_1 . Em outras palavras se tendermos t a t_1 chegaremos ao resultado. Assim, a velocidade no instante t_1 será dada por

$$V_{t_1} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1} \quad (1.1)$$

Esse limite nos fornece o que denominamos de velocidade instantânea. Podemos perceber que essa velocidade é a derivada da função s no instante t_1 . O limite 1.1 pode ser reescrito como

$$V_{t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_1 + \Delta t) - s(t_1)}{\Delta t}$$

Dessa forma, podemos aplicar essa definição no nosso exemplo, calculando a velocidade instantânea em $t_1 = 3$. Como $s(t) = 3t^2 + 1$, temos

$$V_{t_1} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{3t^2 + 1 - (3t_1^2 + 1)}{t - t_1} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{3(t^2 - t_1^2)}{t - t_1} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{3(t + t_1)(t - t_1)}{t - t_1} = 6t_1.$$

Assim, para $t_1 = 3$, temos que a velocidade instantânea para esse momento é: $V_{t_1} = 6t_1 = 18m/s$.

Teorema 1.9. *Se $n \neq 0$ é um número inteiro positivo, as seguintes fórmulas são válidas:*

1. Se $f(x) = c$ para todo x , onde c é uma constante real, então $f'(x) = 0$.
2. Se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Se $f(x) = x^{-n}$ então $f'(x) = -nx^{-n-1}$;
4. Se $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ então $f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Demonstração. Demonstramos o item 1 e 2. Para as outras demonstrações veja [2] p. 145. Pela definição, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

Por outro lado,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Desenvolvendo o binômio $(x + \Delta x)^n$ observamos que o limite acima fica igual a:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} (\Delta x) x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} (\Delta x)^{n-1} x + \binom{n}{n} (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

ou ainda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + n(\Delta x)x^{n-1} + \binom{n}{2} (\Delta x)^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (\Delta x)^{n-1} x + (\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

Cancelando x^n com $-x^n$ e pondo Δx em evidência, ficamos com:

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \left[n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \Delta x \cdot x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (\Delta x)^{n-2} \cdot x + (\Delta x)^{n-1} \right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[n \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \Delta x \cdot x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (\Delta x)^{n-2} \cdot x + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} n \cdot x^{n-1} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\binom{n}{2} \Delta x \cdot x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} (\Delta x)^{n-2} x + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

Portanto, $f'(x) = n \cdot x^{n-1} + 0 = n \cdot x^{n-1}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 1.10. *Sejam f e g funções deriváveis em x_0 e k uma constante real, temos*

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(kf)'(x_0) = kf'(x_0)$
3. $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, se $g(x_0) \neq 0$.

Demonstração.

1. De fato,

$$\begin{aligned}(f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0).\end{aligned}$$

2. Pela definição, temos

$$(kf)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = k \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = kf'(x_0)$$

3. Como

$$(fg)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0},$$

somando e subtraindo o termo $g(x)f(x_0)$ temos que

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - g(x)f(x_0) + g(x)f(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]\end{aligned}$$

Como diferenciabilidade implica continuidade, veja [10] p. 121, concluímos que

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. Temos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)}$$

Somando e subtraindo o termo $f(x_0)g(x_0)$ temos,

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{(x - x_0)g(x)g(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{(x - x_0)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{g(x_0)g(x_0)} \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0)}{(x - x_0)} - \frac{f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{(x - x_0)} \right)\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

com $g(x_0) \neq 0$.

Teorema 1.11. (Regra da Cadeia.) *Sejam duas funções deriváveis $y = f(u)$ e $u = g(x)$, com a imagem g contida no domínio da f . Então $h(x) = f(g(x))$ é derivável e sua derivada é dada por*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Demonstração. Pela definição se $h(x) = f(g(x))$, temos que

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$

Sendo $g(x + \Delta x) - g(x) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{g(x + \Delta x) - g(x)} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x + \Delta x)) - f(g(x))}{g(x + \Delta x) - g(x)} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Sendo $u = g(x)$ e Δu o acréscimo de u correspondente a Δx temos

$$u + \Delta u = g(x + \Delta x) \implies \Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Observando que quando Δx tende a zero, Δu tende a zero, concluímos que

$$h'(x) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u} g'(x) = f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Exemplo 1.12. Seja $h(x) = (2x^2 + 3x)^2$. Para calcularmos $h'(x)$ podemos desenvolver o binômio e derivar. Agora, aplicando o Teorema 1.11 e usando $u = 2x^2 + 3x$, temos então que $g(x) = u$ e $h(x) = f(u) = u^2$. Portanto,

$$h'(x) = f'(u)u' = 2uu' = 16x^3 + 36x^2 + 18x$$

Teorema 1.12. (Regras de L'Hospital) *Se $f(x)$ e $g(x)$ são deriváveis com $g'(x) \neq 0$ em um intervalo aberto que contém x_0 exceto possivelmente em x_0 . Suponha que*

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ou que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ então

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

se o limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir ou for $+\infty$ ou $-\infty$.

Demonstração. Mostraremos apenas o caso particular onde $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $f'(x)$ e $g'(x)$ são contínuas e $g'(x_0) \neq 0$. Para maiores detalhes ver Apêndice A41 de [7] p. 525. Como $f'(x)$ e $g'(x)$ são contínuas e $g'(x_0) \neq 0$ temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

Como e $f(x_0) = g(x_0) = 0$ concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Teorema 1.13. *São válidas*

1. $f(x) = \text{sen}(x) \implies f'(x) = \text{cos}(x)$
2. $f(x) = \text{cos}(x) \implies f'(x) = -\text{sen}(x)$
3. $f(x) = \text{tg}(x) \implies f'(x) = \text{sec}^2(x)$
4. $f(x) = \text{sec}(x) \implies f'(x) = \text{sec}(x)\text{tg}(x)$
5. $f(x) = \text{cotg}(x) \implies f'(x) = -\text{cossec}^2(x)$
6. $f(x) = \text{cossec}(x) \implies f'(x) = -\text{cossec}(x)\text{cotg}(x)$

Demonstração.

1. Pela definição de derivada temos que, $\text{sen}'(x)$ será dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \implies \text{sen}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$$

Como $\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \text{cos}\left(\frac{2x+h}{2}\right)$, temos

$$\operatorname{sen}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

Pelo limite fundamental sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$, logo

$$\operatorname{sen}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right) = 1 \cdot \cos(x) = \cos(x)$$

2. Temos $\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}$ e como

$$\cos(x+h) - \cos(x) = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

temos

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{2x+h}{2}\right)$$

Utilizando o limite fundamental, Proposição 1.8, concluímos que:

$$\cos'(x) = (-1) \cdot \operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(x)$$

3. Como $\operatorname{tg}(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$ e aplicando o item 4 do Teorema 1.10 temos

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\operatorname{sen}'(x) \cdot \cos(x) - \operatorname{sen}(x) \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

4. Sabemos que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. Logo utilizando a regra do quociente (item 4 do Teorema 1.10) temos,

$$\sec'(x) = \frac{(1)' \cdot \cos(x) - 1 \cdot \cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \sec(x) \cdot \operatorname{tg}(x)$$

5. Sendo $\cotg(x) = \frac{1}{\tg(x)}$, temos novamente pela regra do quociente (item 4 do Teorema 1.10) que:

$$\cotg'(x) = \frac{-\sec^2(x)}{\tg^2(x)} = -\sec^2(x) \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{1}{\sen^2(x)} = -\frac{1}{\cos^2(x)} \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{1}{\sen^2(x)}$$

Assim

$$\cotg'(x) = -\operatorname{cosec}^2(x).$$

6. Temos que $\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sen(x)}$. Aplicando a regra do quociente (item 4 do Teorema 1.10) temos

$$\operatorname{cosec}'(x) = \frac{-\cos(x)}{\sen^2(x)} = -\frac{1}{\sen(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sen(x)} = -\operatorname{cosec}(x) \cdot \cotg(x).$$

Nos próximos resultados apresentamos algumas outras versões de limites fundamentais.

Proposição 1.14. São válidos os seguintes limites:

- a) $\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- c) $\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Demonstração do Item a

a) Pela definição de derivada da Seção 1.5 e utilizando o fato que $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$, demonstração no Exemplo 1.13, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \implies (\ln(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \frac{1}{x}$$

Para $x = 1$ temos

$$\ln'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = 1$$

Demonstração dos Itens b e c

Fazendo a substituição de $\frac{1}{x} = h$ em $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$, percebemos que quando x tende a infinito h tende a zero, logo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}.$$

Portanto os limites dos itens (b) e (c) são iguais. Assim provando que $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = e$, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}} = e^{\left(\lim_{h \rightarrow 0} \ln(1 + h)^{\frac{1}{h}}\right)} = e^1 = e.$$

Demonstração do Item d

Fazendo a substituição $e^x - 1 = w$, em $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$, podemos perceber que quando x tende a zero w também tende a zero. E o valor de x em função de w será dado por:

$$e^x = w + 1 \implies \ln(e^x) = \ln(w + 1) \implies x = \ln(w + 1).$$

Substituindo temos,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{w}{\ln(w + 1)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{w} \cdot \ln(w + 1)} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(w + 1)^{\frac{1}{w}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Exemplo 1.13. Vamos mostrar que se $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^x$, então $f'(x) = \frac{1}{x}$ para $x > 0$ e $g'(x) = e^x$. De fato, segue da definição de derivada que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x + h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{x + h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Fazendo a substituição: $w = \frac{h}{x}$, percebemos que quando h tende a zero, w também tende a zero, logo

$$f'(x) = \lim_{w \rightarrow 0} \ln(1 + w)^{\frac{1}{wx}} = \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(1 + w)^{\frac{1}{w}} \right) = \frac{1}{x}$$

Agora, se $g(x) = e^x$, então

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[e^x \cdot \frac{(e^h - 1)}{h} \right] = e^x.$$

Os próximos Teoremas 1.15 e 1.16 respectivamente serão utilizados na demonstração do Teorema de Rolle.

Teorema 1.15. *Se $f(x)$ existe para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e f tem um valor máximo ou mínimo em c , com $a < c < b$, então se $f'(c)$ existe, $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Ver [10] p. 150.

Teorema 1.16. (Teorema de Weierstrass) *Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.*

Demonstração. Ver [2] p. 513.

Teorema 1.17. (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Se f for constante então sua derivada será zero em (a, b) . Portanto para qualquer c em (a, b) teremos $f'(c) = 0$. Supondo que f não é constante, temos pelo teorema de Weierstrass que f assume um valor máximo e mínimo em $[a, b]$, pois f é contínua em $[a, b]$ e como por hipótese $f(a) = f(b)$, então pelo menos o valor máximo ou mínimo pertencem ao intervalo $]a, b[$. Portanto existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema 1.18. (Teorema de Cauchy) *Se f e g forem contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$ então existe pelo menos um c em $]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

se $g(b) \neq g(a)$ e $g'(c) \neq 0$.

Demonstração. Seja a função $h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)]$. Como f e g são contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em $]a, b[$ e pelo fato da diferença de duas funções contínuas ser contínua, Teorema 1.6, temos que h é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Como

$$h(a) = f(a)[g(b) - g(a)] - g(a)[f(b) - f(a)] = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b)$$

e

$$h(b) = f(b)[g(b) - g(a)] - g(b)[f(b) - f(a)] = f(a) \cdot g(b) - g(a) \cdot f(b),$$

segue que $h(a) = h(b)$.

Assim, como $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , com $h(a) = h(b)$. Então, pelo Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Logo,

$$h'(x) = f'(x)[g(b) - g(a)] - g'(x)[f(b) - f(a)]$$

e

$$h'(c) = f'(c)[g(b) - g(a)] - g'(c)[f(b) - f(a)] = 0$$

Portanto,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Podemos observar que se tomarmos $g(x) = x$, concluimos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1} \implies f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

obtendo o Teorema do Valor Médio.

1.6 Séries de Potências

Uma série de potências em $(x - x_0)$ é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$$

onde c_n são os coeficientes da série, x_0 é um número real fixado e x é uma variável.

Precisamos determinar os valores de x que tornam a série convergente e para isso vamos utilizar nesta seção, alguns testes de convergência de séries, que podem ser mais detalhados em [6] p. 12, mas vamos mencionar quando uma série é convergente na Definição 1.7.

Definição 1.7. Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente se a sua sequência de somas parciais (S_n) converge, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$$

onde S é um número real. Se S_n divergir a série não tem soma e será considerada divergente.

Exemplo 1.14. A série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$, converge trivialmente em $x = 0$. Porém, diverge nos demais valores de x , pois pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} [(n+1)|x|] = \infty,$$

para todo $x \neq 0$.

Exemplo 1.15. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todo x real, pois pelo teste da razão temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x| = 0 < 1$$

Portanto a série é absolutamente convergente para todo x real, logo é convergente.

Exemplo 1.16. A série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é convergente se $|x| < 1$, pois é uma série geométrica e converge para o número $\frac{1}{1-x}$, ou seja,

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

se $-1 < x < 1$.

Nestes exemplos, podemos perceber três diferentes possibilidades de uma série de potências convergir, enunciadas no seguinte teorema:

Teorema 1.19. *Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potências então exatamente uma e apenas uma das três condições é válida:*

1. *A série converge apenas quando $x = 0$;*
2. *A série é absolutamente convergente para todo x real;*
3. *Existe um número real $R > 0$, tal que a série é absolutamente convergente para os valores de x quando $|x| < R$ e divergente se $|x| > R$.*

O número R é o raio de convergência da série. No caso 1 temos $R = 0$ e no caso 2 temos $R = \infty$. No caso 3 não podemos afirmar nada em relação aos extremos do intervalo, portanto os valores de x nos quais a série converge serão observados nas seguintes possibilidades: $(-R, R)$, $[-R, R]$, $(-R, R]$, $[-R, R)$. Caso a série esteja na forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, trocamos x por $(x - x_0)$ e as condições tornam-se:

1. A série converge apenas quando $x = x_0$;
2. A série é absolutamente convergente para todo x real;
3. Existe um número real $R > 0$, tal que a série é absolutamente convergente para os valores de x quando $|x - x_0| < R$ e divergente se $|x - x_0| > R$.

Podemos definir uma função f a partir de uma série de potências da seguinte forma: o domínio de f é o intervalo de convergência da série e, para cada x do domínio definimos $f(x)$ como a soma da série em x . Assim, se uma função é definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

dizemos que essa é uma representação de $f(x)$ por uma série de potências. Dessa forma, as funções assim definidas possuem propriedades análogas aos polinômios. Por exemplo, podemos então derivar e integrar essa série termo a termo conforme os Teoremas 1.20 e 1.21. Vale também ressaltar que as técnicas de integração utilizadas agora e posteriormente podem ser verificadas em [2] p. 336.

Teorema 1.20. (Derivação termo a termo de uma Série de Potência)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potência cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$f'(x)$ existirá para todo x do intervalo aberto $(-R, R)$, sendo dada por

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}.$$

Demonstração. Ver [11] p.755.

Teorema 1.21. (Integração termo a termo de uma Série de Potência)

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ uma série de potência cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for a função definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

f será integrável em todo subintervalo fechado de $(-R, R)$ e calculamos a integral de f integrando termo a termo a série de potências, isto é, se x está em $(-R, R)$, então

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

e o raio de convergência da série resultante também será R .

Demonstração. Ver [11] p.761.

Exemplo 1.17. A função $f(x) = \frac{1}{1-x}$, é representada pela série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

com domínio $-1 < x < 1$. Na Figura 1.35, podemos observar a convergência das somas parciais nesse intervalo e a divergência fora dele.

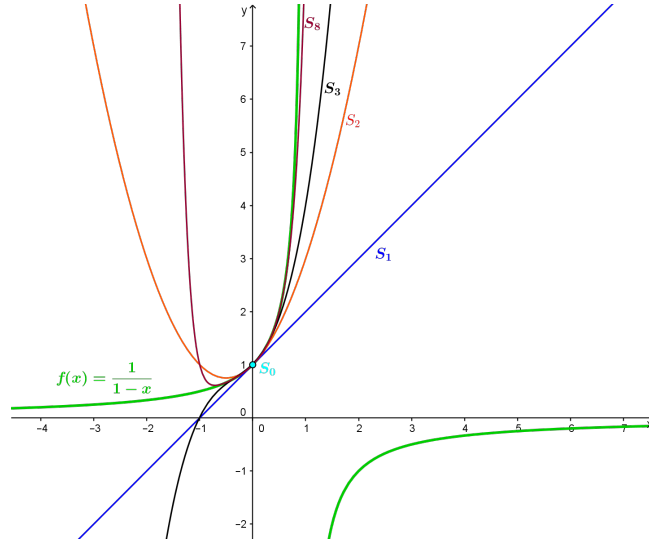


Figura 1.35: Gráfico das Somas Parciais da Série da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Ao diferenciarmos ou integrarmos uma série de potências termo a termo, obtemos uma nova série cujo intervalo de convergência é o mesmo da série original conforme os Teoremas 1.20 e 1.21, mas a respeito dos extremos nada podemos garantir. Tais pontos devem ser verificados.

Exemplo 1.18. Para determinar a série de potências que representa a função $\frac{1}{1+x^2}$ podemos fazer a substituição x por $-x^2$ na série do Exemplo 1.17. Portanto, se $|x| < 1$ temos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Dessa forma, como $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg(x)$ e $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$, temos que ao integrarmos a série termo a termo obtemos, para $|x| < 1$,

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Devemos verificar o que ocorre nos extremos do intervalo de convergência. Se $x = 1$, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, é uma série convergente, pelo critério da série alternada. De fato, sendo o termo geral $a_n = \frac{1}{2n+1}$ percebemos que $a_k > a_{k+1}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$. O mesmo ocorre para $x = -1$. Portanto, concluímos que para $|x| \leq 1$, temos

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Na Figura 1.36, podemos visualizar o comportamento de algumas somas parciais.

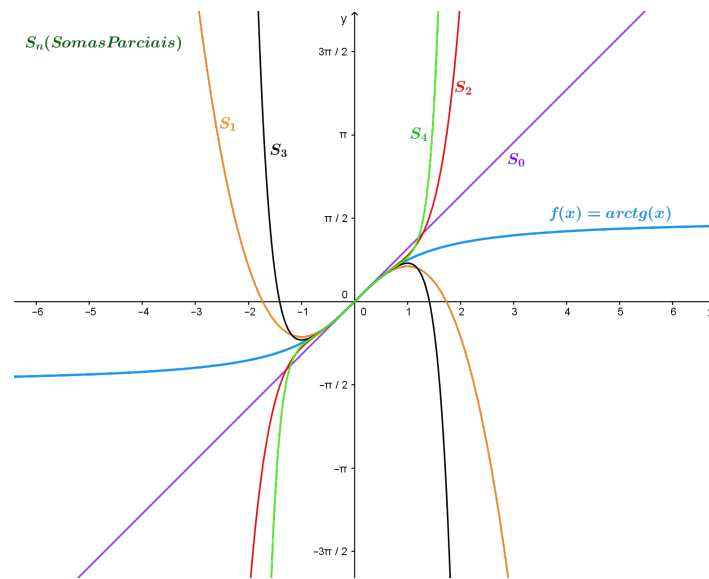


Figura 1.36: Gráfico da função $f(x) = \arctg(x)$ e de somas parciais de sua série

Estamos representando uma série de potências através de uma série geométrica conhecida e por técnicas de derivação e integração termo a termo. Posteriormente, vamos demonstrar que existe uma relação entre a função e os coeficientes da série de potências que a representa.

Capítulo 2

Fórmula de Taylor

2.1 Polinômio de Taylor de Ordem 1

Consideramos uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no ponto x_0 , onde I é um intervalo aberto e $x_0 \in I$. Tomemos a reta t , Figura 2.1, tangente ao gráfico da função nesse ponto $(x_0, f(x_0))$. Para valores de x próximos de x_0 , temos que a função $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que representa a equação da reta t é uma boa aproximação de $f(x)$.

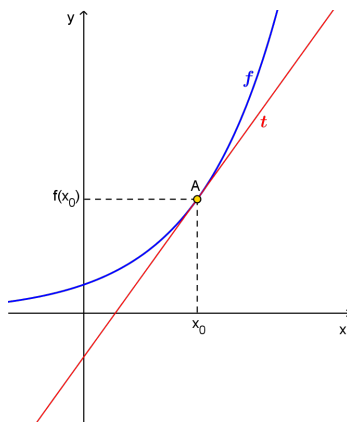


Figura 2.1: Gráfico representativo da Aproximação Linear

Como t é uma reta que passa pelo ponto $A = (x_0, f(x_0))$, temos que sua equação é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde m é o coeficiente angular da reta t ou ainda a derivada de f no ponto x_0 . Assim, $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Quando $x = x_0$ temos,

$$T(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$$

Agora, seja $x \in I$ um ponto na vizinhança de x_0 de maneira que $T(x) \neq f(x)$. A esta diferença de valores denotamos por $E_1(x)$, ou seja, o erro que cometemos ao

aproximarmos valores de $f(x)$ por $T(x)$, ou ainda, $E_1(x) = f(x) - T(x)$. Podemos visualizar graficamente na Figura 2.2.

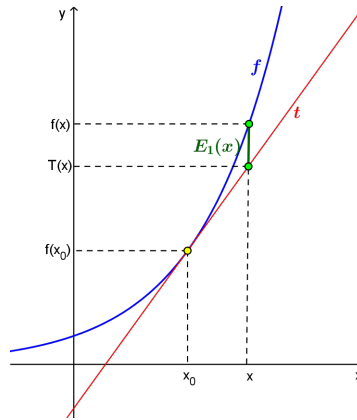


Figura 2.2: Gráfico representando o erro obtido pela Aproximação Linear

Observamos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_1(x) = 0$$

De fato,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} E_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - T(x)) = f(x_0) - T(x_0) = 0,$$

pois, $f(x_0) = T(x_0)$.

Como $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ e $E_1(x) = f(x) - T(x)$, temos

$$E_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Para $x \neq x_0$,

$$\frac{E_1(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0).$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Portanto, como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_1(x)}{x - x_0} = 0$, segue que $E_1(x)$ tende a zero mais rapidamente que $(x - x_0)$. Além disso, a reta tangente é a única reta que possui essa propriedade. De fato, seja $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função que representa a equação da reta s , Figura 2.3, de coeficiente angular m_s e que passa por $(x_0, f(x_0))$, isto é, $S(x) = f(x_0) + m_s(x - x_0)$.

Utilizando o mesmo argumento anterior temos $E_s(x) = f(x) - S(x)$ onde $E_s(x)$ é o erro que cometemos ao aproximarmos valores de $f(x)$ por $S(x)$, assim

$$E_s(x) = f(x) - f(x_0) - m_s(x - x_0).$$

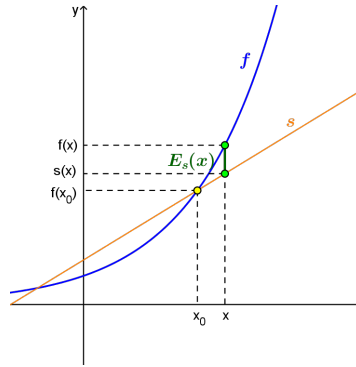


Figura 2.3: Gráfico representando o erro obtido pela reta secante

Então,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_s(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m_s \right] = f'(x_0) - m_s.$$

Notamos que esse limite só será zero se $f'(x_0) = m_s$, ou seja, m_s deve ser a derivada da função no ponto x_0 , ou ainda, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto x_0 . Assim, $T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ é o único polinômio de ordem 1 que localmente melhor aproxima valores da função f em volta de x_0 .

Portanto, se uma função f for derivável até a primeira ordem num ponto x_0 pertencente ao intervalo aberto I , definimos

$$P_1(x) = T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

o Polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de x_0 .

Exemplo 2.1. Vamos utilizar o polinômio de Taylor de ordem 1 para estimar o valor de $\sqrt{9,03}$. Neste caso, nossa função é $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Como desejamos obter a aproximação de $\sqrt{9,03}$, devemos construir o Polinômio de Taylor de ordem 1 da função $f(x) = \sqrt{x}$ ao redor de $x_0 = 9$.

Como $f(x_0) = f(9) = 3$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, temos

$$f'(x_0) = f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Assim, o polinômio de Taylor de ordem 1 de $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x_0 = 9$ é

$$P_1(x) = 3 + \frac{1}{6}(x - 9) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{9}{6} = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$$

A Figura 2.4, mostra os gráficos da função $f(x)$ e do polinômio $P_1(x)$.

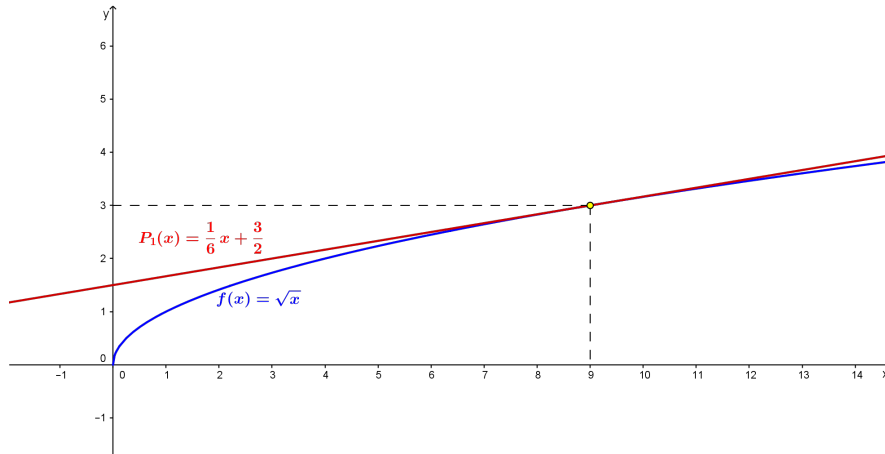


Figura 2.4: Gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ e do seu Polinômio de Taylor de ordem 1

Com auxílio de uma calculadora obtemos $f(9,03) = 3,004995\dots$. Utilizando o polinômio de Taylor temos,

$$P_1(9,03) = \frac{1}{6} \cdot 9,03 + \frac{3}{2} = 1,505 + 1,5 = 3,005.$$

Percebemos que o valor de $P_1(9,03)$ aproxima-se do valor de $f(9,03)$, precisamos apenas saber a precisão deste resultado. Sabemos que $|E_1(x)| = |f(x) - P_1(x)|$, onde $E_1(x)$ é o erro que cometemos ao substituir o valor de $f(x)$ por $P_1(x)$. Analisando essa diferença com 6 casas decimais temos,

$$|E_1(9,03)| = |f(9,03) - P_1(9,03)| = |3,004995 - 3,005| = |-0,000005| < 10^{-5}.$$

Nesse exemplo, observamos que analisando o valor da $\sqrt{9,03}$ com 6 casas decimais, estamos cometendo um erro menor que 10^{-5} . Em geral, precisamos de uma expressão que nos forneça o erro que cometemos ao realizar esta aproximação, sem necessariamente calcular $f(x)$. O Teorema 2.1 demonstra este fato.

Teorema 2.1. *Seja f uma função derivável até a segunda ordem no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$$

onde $E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2}(x - x_0)^2$.

Demonstração:

De fato, sendo $E_1(x) = f(x) - P_1(x)$, temos

$$E_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Daí percebemos que $E_1(x_0) = 0$. Agora seja $g(x) = (x - x_0)^2$. Obtemos que $g(x_0) = 0$. Além disso podemos observar que

$$\frac{E_1(x)}{g(x)} = \frac{E_1(x) - E_1(x_0)}{g(x) - g(x_0)}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe c que pertence ao intervalo $]x_0, x[$ tal que:

$$\frac{E_1(x) - E_1(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{E'_1(c)}{g'(c)}$$

Consequentemente,

$$\frac{E_1(x)}{g(x)} = \frac{E'_1(c)}{g'(c)}$$

Agora, como $E'_1(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e $g'(x) = 2(x - x_0)$ segue que $E'_1(x_0) = 0$ e $g'(x_0) = 0$. Assim, obtemos a igualdade

$$\frac{E_1(x)}{g(x)} = \frac{E'_1(c) - E'_1(x_0)}{g'(c) - g'(x_0)}$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $\bar{x}$ que pertence ao intervalo $]x_0, c[$ tal que:

$$\frac{E'_1(c) - E'_1(x_0)}{g'(c) - g'(x_0)} = \frac{E''_1(\bar{x})}{g''(\bar{x})}$$

Consequentemente

$$\frac{E_1(x)}{g(x)} = \frac{E''_1(\bar{x})}{g''(\bar{x})}$$

sendo $E''_1(x) = f''(x)$ e $g''(x) = 2$ temos que $E''_1(\bar{x}) = f''(\bar{x})$ e $g''(\bar{x}) = 2$, portanto

$$\frac{E_1(x)}{g(x)} = \frac{f''(\bar{x})}{2}$$

$$E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} g(x)$$

$$E_1(x) = \frac{f''(\bar{x})}{2} (x - x_0)^2$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.2. Considerando a função $f(x) = \sqrt{x}$ do Exemplo 2.1. Neste caso, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$. Portanto, para algum $\bar{x}$ tal que $x_0 < \bar{x} < x$, temos

$$|E_1(9, 03)| = \left| \frac{f''(\bar{x})}{2} (9, 03 - 9)^2 \right| = \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^3}} \right) (3 \cdot 10^{-2})^2 \right|$$

assim,

$$|E_1(9, 03)| = \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^3}} \right) 9 \cdot 10^{-4} \right|$$

Não podemos calcular o $\bar{x}$, mas sabemos que

$$9 < \bar{x} < 9,03$$

$$9^3 < \bar{x}^3 < (9,03)^3$$

$$\sqrt{9^3} < \sqrt{\bar{x}^3} < \sqrt{(9,03)^3}$$

$$3^3 < \sqrt{\bar{x}^3} < \sqrt{(9,03)^3}$$

$$\frac{1}{3^3} > \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^3}} > \frac{1}{\sqrt{(9,03)^3}}$$

Da desigualdade $\frac{1}{3^3} > \frac{1}{\sqrt{\bar{x}^3}}$ concluímos que

$$|E_1(9, 03)| = \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{\bar{x}^3}} \right) (9 \cdot 10^{-4}) \right| < \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) \frac{1}{3^3} (9 \cdot 10^{-4}) \right|.$$

Portanto, $E_1(9, 03) < \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-4}$, isto é, $E_1(9, 03) < 10^{-5}$. Assim utilizando $P_1(9, 03)$ no lugar de $f(9, 03)$, concluímos que estamos cometendo um erro menor que 10^{-5} .

2.2 Polinômio de Taylor de Ordem 2

Considerando uma função f derivável até a segunda ordem num intervalo aberto I com $x, x_0 \in I$, podemos obter uma melhor aproximação de $f(x)$, para cada valor de x próximo à x_0 . Nesse caso, vamos determinar um polinômio $P_2(x)$ de ordem 2, que deve satisfazer as seguintes condições:

a) $f(x_0) = P_2(x_0);$

b) $f'(x_0) = P_2'(x_0);$

c) $f''(x_0) = P_2''(x_0).$

Consideramos um polinômio do segundo grau da forma

$$P_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2,$$

com A, B e C coeficientes reais. Temos $P_2(x_0) = A$ e, portanto, $f(x_0) = P_2(x_0) = A$.

2. Fórmula de Taylor

Além disso, $P_2'(x) = B + 2C(x - x_0)$ e $P_2''(x) = 2C$, assim

$$f'(x_0) = P_2'(x_0) = B + 2C(x_0 - x_0) = B$$

$$f''(x_0) = P_2''(x_0) = 2C \implies C = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Portanto, o polinômio de Taylor, de ordem 2 de f em volta x_0 é dado por

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Essa expressão nos fornece um valor aproximado de $f(x)$ com a propriedade que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$, onde $E_2(x)$ é o erro que cometemos ao estimar o valor de $f(x)$ por $P_2(x)$. Assim, se $E_2(x) = f(x) - P_2(x)$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \frac{f''(x_0)}{2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Observamos que o cálculo do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$, conduz a uma indeterminação $\left[\frac{0}{0} \right]$. Utilizamos a regra de L'Hospital. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} - \frac{f''(x_0)}{2} = 0.$$

O Polinômio de Taylor de ordem 2 é o único que possui a propriedade do erro $E_2(x)$, tender a zero mais rapidamente que $(x - x_0)^2$. De fato, suponhamos que exista $P_2^*(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$, com A, B e $C \in \mathbb{R}$, possuindo a propriedade do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0$, onde $E_2^*(x)$ é erro que cometemos ao aproximar a função $f(x)$ por $P_2^*(x)$. Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0$, podemos escrever

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x) - E_2^*(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

2. Fórmula de Taylor

Além disso, $E_2(x) = f(x) - P_2(x)$ e $E_2^*(x) = f(x) - P_2^*(x)$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P_2^*(x) - P_2(x)}{(x - x_0)^2} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A - f(x_0) + (x - x_0)[B - f'(x_0)] + (x - x_0)^2 \left[C - \frac{f''(x_0)}{2} \right]}{(x - x_0)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{A - f(x_0)}{(x - x_0)^2} + \frac{B - f'(x_0)}{(x - x_0)} + C - \frac{f''(x_0)}{2} \right] = 0\end{aligned}$$

Logo, esse limite só será zero se $A = f(x_0)$ e $B = f'(x_0)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[C - \frac{f''(x_0)}{2} \right] = 0$$

e $C = \frac{f''(x_0)}{2}$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 2, é o único que possui a propriedade do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0$.

Exemplo 2.3. Vamos determinar o polinômio de Taylor de ordem 2 em torno de $x_0 = 1$ da função $f(x) = \ln(x)$. Notamos inicialmente que, $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, assim $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ e $f''(1) = -1$. Logo,

$$P_2(x) = 0 + 1(x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$$

Podemos visualizar graficamente na Figura 2.5.

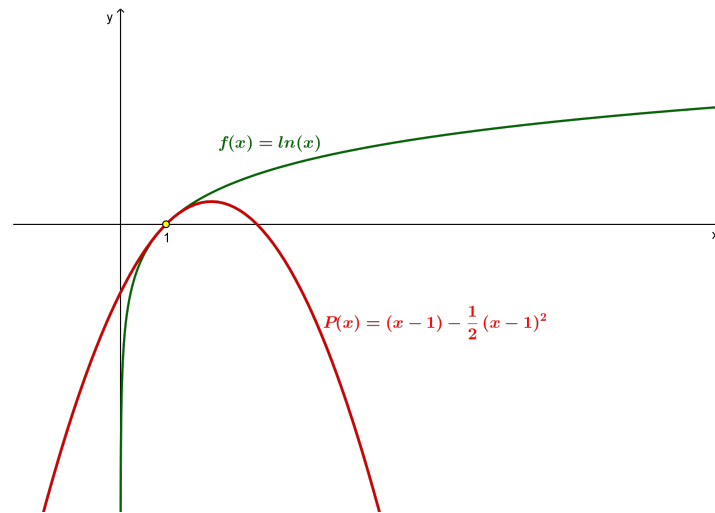


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = \ln(x)$ e do seu Polinômio de Taylor de ordem 2

Teorema 2.2. *Seja f uma função derivável até a terceira ordem no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0*

e x tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + E_2(x),$$

onde $E_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3$.

Demonstração.

Temos que $E_2(x) = f(x) - P_2(x)$, logo

$$E_2(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \right]$$

Derivando E_2 , temos:

$$E_2'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + f''(x_0)(x - x_0)]$$

$$E_2''(x) = f''(x) - f''(x_0)$$

$$E_2'''(x) = f'''(x)$$

Para $x = x_0$, temos $E_2(x_0) = E_2'(x_0) = E_2''(x_0) = 0$.

Seja $h(x) = (x - x_0)^3$. Derivando $h(x)$, temos:

$$h'(x) = 3(x - x_0)^2$$

$$h''(x) = 3 \cdot 2(x - x_0)$$

$$h'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$$

Daí temos $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = 0$. Assim,

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2(x) - E_2(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe c que pertence ao intervalo $]x_0, x[$ tal que:

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'(c)}{h'(c)}.$$

Como

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'(c) - E_2'(x_0)}{h'(c) - h'(x_0)}$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe d que pertence ao

intervalo $]x_0, c[$ tal que:

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2''(d)}{h''(d)}.$$

Prosseguindo com este argumento, temos

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2''(d) - E_2''(x_0)}{h''(d) - h''(x_0)}$$

Novamente pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe $\bar{x}$ que pertence ao intervalo $]x_0, d[$ tal que:

$$\frac{E_2(x)}{h(x)} = \frac{E_2'''(\bar{x})}{h'''(\bar{x})}$$

Portanto,

$$E_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(x - x_0)^3$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.4. Vamos utilizar o Polinômio de Taylor em torno de $x_0 = 1$ de $f(x) = \ln(x)$, calculado anteriormente no Exemplo 2.3, para obter uma aproximação para $\ln(1,4)$ estimando o erro cometido por esta aproximação.

Obtemos $P_2(x) = (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2$. Portanto

$$P_2(1,4) = (1,4 - 1) - \frac{1}{2}(1,4 - 1)^2 = 0,4 - 0,08 = 0,32$$

Sendo $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, podemos estimar o $E_2(x)$. Assim temos,

$$|E_2(1,4)| = \left| \frac{f'''(\bar{x})}{3!}(1,4 - 1)^3 \right| = \left| \frac{2}{\bar{x}^3 \cdot 3!}(0,4)^3 \right| = \left| \frac{1}{\bar{x}^3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4^3 \cdot 10^{-3} \right| = \left| \frac{1}{\bar{x}^3} \cdot \frac{64}{3} \cdot 10^{-3} \right|$$

Para algum $\bar{x}$ entre $x_0 = 1$ e $x = 1,4$. Assim,

$$1 < \bar{x} < 1,4$$

$$1 < \bar{x}^3 < (1,4)^3$$

$$1 > \frac{1}{\bar{x}^3} > \frac{1}{(1,4)^3}$$

Dessa forma, percebemos que $\frac{1}{\bar{x}^3} < 1$. Logo,

$$|E_2(1,4)| = \left| \frac{1}{\bar{x}^3} \cdot \frac{64}{3} \cdot 10^{-3} \right| < \left| 1 \cdot \frac{64}{3} \cdot 10^{-3} \right| = \frac{64}{3} \cdot 10^{-3} < 10^2 \cdot 10^{-3} = 10^{-1}$$

Portanto, quando usamos o Polinômio de Taylor de ordem 2 para aproximar o valor de $\ln(1,4)$, estamos cometendo um erro menor que 10^{-1} .

2.3 Polinômio de Taylor de Ordem 3 e 4

De maneira análoga ao que fizemos para determinar o Polinômio de Taylor de ordem 2, vamos construir $P_3(x)$, Polinômio de Taylor de ordem 3, que se aproxime de uma função f dada. É necessário que f seja derivável até a 3.^a ordem num intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Neste caso, temos que $P_3(x)$ deverá compartilhar em x_0 com a função f os seguintes valores:

1. $f(x_0) = P_3(x_0)$
2. $f'(x_0) = P'_3(x_0)$
3. $f''(x_0) = P''_3(x_0)$
4. $f'''(x_0) = P'''_3(x_0)$

Suponhamos $P_3(x)$ um polinômio de ordem 3 da forma $P_3(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3$, com A, B, C e $D \in \mathbb{R}$. Para determinar os valores de A, B, C e D observamos que:

$$\begin{aligned} P_3(x_0) &= A + B(x_0 - x_0) + C(x_0 - x_0)^2 + D(x_0 - x_0)^3 = A \implies f(x_0) = P_3(x_0) = A \\ P'_3(x) &= B + 2 \cdot C(x - x_0) + 3 \cdot D(x - x_0)^2 \implies f'(x_0) = P'_3(x_0) = B \\ P''_3(x) &= 2 \cdot 1 \cdot C + 3 \cdot 2 \cdot D(x - x_0) \implies C = \frac{f''(x_0)}{2!} \\ P'''_3(x) &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot D \implies D = \frac{f'''(x_0)}{3!} \end{aligned}$$

Determinamos assim o polinômio de Taylor, de ordem 3 de f em volta x_0 :

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

Podemos repetir o argumento na determinação do Polinômio de Taylor de ordem 4, $P_4(x)$, de uma função f derivável até a 4.^a ordem num intervalo aberto I e $x_0 \in I$. De maneira análoga, sejam A, B, C, D e $E \in \mathbb{R}$ tal que

$$P_4(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3 + E(x - x_0)^4.$$

Nesse caso, temos que $P_4(x)$ deve satisfazer as seguintes condições:

2. Fórmula de Taylor

1. $f(x_0) = P_4(x_0)$
2. $f'(x_0) = P_4'(x_0)$
3. $f''(x_0) = P_4''(x_0)$
4. $f'''(x_0) = P_4'''(x_0)$
5. $f^{(4)}(x_0) = P_4^{(4)}(x_0)$

Como no caso anterior, obtemos $A = f(x_0)$, $B = f'(x_0)$, $C = \frac{f''(x_0)}{2!}$, $D = \frac{f'''(x_0)}{3!}$ e $E = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$. Logo, o Polinômio de Taylor de ordem 4 de f em volta x_0 é dado por

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

Os erros cometidos ao aproximar a função f por $P_3(x)$ e $P_4(x)$, vamos denotar por $E_3(x)$ e $E_4(x)$ respectivamente. E para esses dois polinômios seguem também respectivamente as seguintes propriedades: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_4(x)}{(x - x_0)^4} = 0$.

Vamos verificar que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = 0$ a outra propriedade segue analogamente.

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3} \right] - \frac{f'''(x_0)}{3!}.$$

Para calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3}$ usamos a regra

de L'Hospital duas vezes, pois obtemos indeterminações do tipo $\left[\frac{0}{0} \right]$. Temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{3!(x - x_0)}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = \frac{f'''(x_0)}{3!} - \frac{f'''(x_0)}{3!} = 0$$

Como queríamos demonstrar.

O polinômio de Taylor de ordem 3

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

é o único com a propriedade do $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = 0$. De fato, suponhamos que exista $P_3^*(x) \neq P_3(x)$ de modo que

$$P_3^*(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + D(x - x_0)^3,$$

onde $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ e $P_3^*(x)$ com a propriedade $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3^*(x)}{(x - x_0)^3} = 0$, sendo $E_3^*(x)$ é erro cometido ao utilizar $P_3^*(x)$ para aproximar valores de $f(x)$.

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x) - E_3^*(x)}{(x - x_0)^3} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{A - f(x_0)}{(x - x_0)^3} + \frac{B - f'(x_0)}{(x - x_0)^2} + \frac{C - \frac{f''(x_0)}{2!}}{(x - x_0)} + D - \frac{f'''(x_0)}{3!} \right] = 0.$$

Logo, esse limite só será zero se $A = f(x_0)$, $B = f'(x_0)$ e $C = \frac{f''(x_0)}{2!}$ e, consequentemente, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[D - \frac{f'''(x_0)}{3!} \right] = 0$$

isto é, $D = \frac{f'''(x_0)}{3!}$. Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 3 é o único que possui a propriedade

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_3(x)}{(x - x_0)^3} = 0.$$

Exemplo 2.5. Vamos construir os Polinômios de Taylor de ordem 3 e 4 da função $f(x) = \cos(x)$ ao redor do ponto $\frac{\pi}{4}$ e visualizar graficamente o resultado.

Inicialmente temos $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$, e $f^{(4)}(x) = \cos(x)$. Portanto,

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Podemos determinar $P_3(x)$ e $P_4(x)$:

$$P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

e

$$P_4(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{\sqrt{2}}{48} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$$

Na Figura 2.6 podemos observar os polinômios aproximadores de Taylor de ordens 3 e 4 da função $f(x) = \cos(x)$.

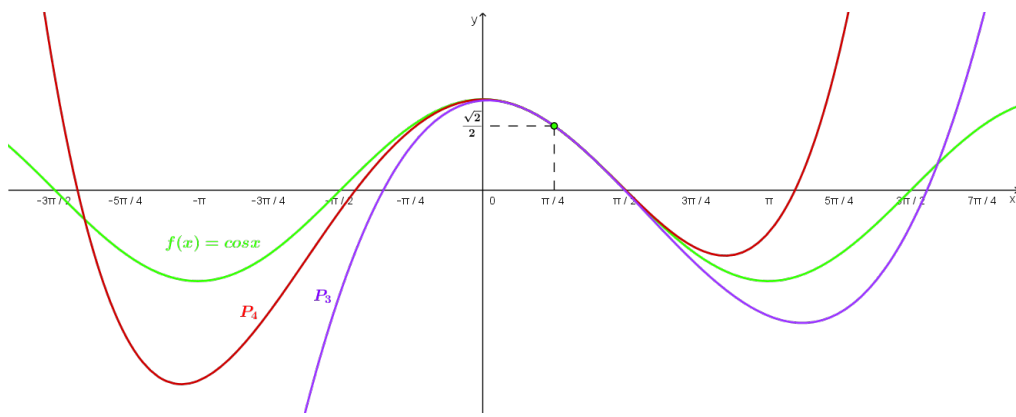


Figura 2.6: Gráficos dos Polinômios de Taylor de ordem 3 e 4 de $f(x) = \cos(x)$

É importante notar que ao aumentarmos o grau do polinômio, mais próximo o seu gráfico fica em relação ao gráfico da função. Na Figura 2.7 representamos os polinômios Taylor da função $f(x) = \cos(x)$ ao redor do ponto $\frac{\pi}{4}$ do Exemplo 2.5, de ordem 1, 2, 3 e 4 observando assim a aproximação cada vez mais precisa.

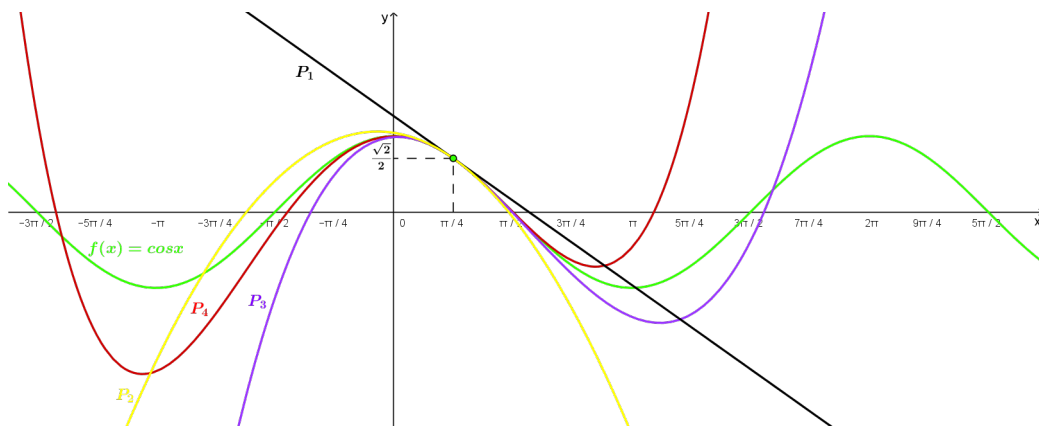


Figura 2.7: Gráfico de $f(x) = \cos(x)$ e de polinômios aproximadores de Taylor

No Exemplo 2.6, vamos obter aproximações do $\cos(48^\circ)$ pelo polinômio de Taylor construído no Exemplo 2.5.

Exemplo 2.6. Utilizando os polinômios de Taylor de ordem 1, 2, 3 e 4 da função $f(x) = \cos(x)$ ao redor do ponto $\frac{\pi}{4}$, vamos obter uma estimativa do valor do $\cos(48^\circ)$. Temos que 48° em radianos equivale $\frac{4\pi}{15}$. Sendo $\cos\left(\frac{4\pi}{15}\right) = 0,669130606\dots$ e usando as seguintes aproximações: $\left(\frac{4\pi}{15} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{60} \approx 0,05235$ e $\sqrt{2} \approx 1,41421$ obtemos:

$$P_1\left(\frac{4\pi}{15}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(0,05235) \approx 0,67008$$

$$P_2\left(\frac{4\pi}{15}\right) = P_1\left(\frac{4\pi}{15}\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}(0,05235)^2 \approx 0,66911$$

$$P_3\left(\frac{4\pi}{15}\right) = P_2\left(\frac{4\pi}{15}\right) + \frac{\sqrt{2}}{12}(0,05235)^3 \approx 0,66913$$

$$P_4\left(\frac{4\pi}{15}\right) = P_3\left(\frac{4\pi}{15}\right) + \frac{\sqrt{2}}{48}(0,05235)^4 \approx 0,6691302$$

Dessa forma, percebemos que ao aumentarmos o grau do polinômio estamos nos aproximando cada vez mais do valor real de $\cos(48^\circ)$. Tal fato também pode ser observado com as expressões dos erros $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$ e $E_4(x)$ de $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ e $P_4(x)$ respectivamente.

Teorema 2.3. *Seja f uma função real derivável até a 4.^a ordem no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + E_3(x),$$

$$\text{onde } E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4!}(x - x_0)^4.$$

Demonstração.

Temos que $E_3(x) = f(x) - P_3(x)$, logo

$$E_3(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Derivando E_3 temos,

$$E_3'(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2}(x - x_0)^2;$$

$$E_3''(x) = f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x - x_0);$$

$$E_3'''(x) = f'''(x) - f'''(x_0);$$

$$E_3^{(4)}(x) = f^{(4)}(x).$$

2. Fórmula de Taylor

Para $x = x_0$ temos $E_3(x_0) = E'_3(x_0) = E''_3(x_0) = E'''_3(x_0) = 0$. Tomando a função $h(x) = (x - x_0)^4$, percebemos que

$$\begin{aligned}h'(x) &= 4(x - x_0)^3; \\h''(x) &= 4 \cdot 3(x - x_0)^2; \\h'''(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2(x - x_0); \\h^{(4)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!.\end{aligned}$$

Além disso, para $x = x_0$ temos $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = h'''(x_0) = 0$ e

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E_3(x) - E_3(x_0)}{h(x) - h(x_0)},$$

então, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe a que pertence ao intervalo $]x_0, x[$ tal que

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E'_3(a)}{h'(a)}.$$

Como

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E'_3(a) - E'_3(x_0)}{h'(a) - h'(x_0)},$$

pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe b que pertence ao intervalo $]x_0, a[$ tal que

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E''_3(b)}{h''(b)}.$$

Prosseguindo com este argumento obtemos

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E''_3(b) - E''_3(x_0)}{h''(b) - h''(x_0)}$$

e pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe c que pertence ao intervalo $]x_0, b[$ tal que

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E'''_3(c)}{h'''(c)}$$

e como

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{E'''_3(c) - E'''_3(x_0)}{h'''(c) - h'''(x_0)}$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy existe $\bar{x}$ que pertence ao intervalo $]x_0, c[$ tal que

$$\frac{E_3(x)}{h(x)} = \frac{f^{(4)}(\bar{x})}{h^{(4)}(x)}$$

$$\text{Portanto, } E_3(x) = \frac{f^{(4)}(\bar{x})}{4!}(x - x_0)^4.$$

Teorema 2.4. *Seja f uma função real derivável até a 5.^a ordem no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4 + E_4(x),$$

$$\text{onde } E_4(x) = \frac{f^{(5)}(\bar{x})}{5!}(x-x_0)^5.$$

Demonstração. A demonstração é análoga a do Teorema 2.3.

Exemplo 2.7. Tomando a função $f(x) = \cos(x)$ do Exemplo 2.5 e sendo $E_1(x)$, $E_2(x)$, $E_3(x)$ e $E_4(x)$ os erros respectivos que obtemos ao aproximar $f(x)$ por $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ e $P_4(x)$, polinômios de Taylor construídos em torno do ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$, vamos calcular esses erros analisando a precisão desses resultados. Adotamos $\frac{\pi}{60} \approx 0,05235$.

Como $\frac{\pi}{4} < \bar{x} < \frac{4\pi}{15}$, $0 < \cos(\bar{x}) < 1$ e $0 < \sin(\bar{x}) < 1$, temos que:

$$\begin{aligned} \left| E_1 \left(\frac{4\pi}{15} \right) \right| &= \frac{\cos(\bar{x})}{2} \left(\frac{\pi}{60} \right)^2 < \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{60} \right)^2 \approx 1,37026 \times 10^{-3} \\ \left| E_2 \left(\frac{4\pi}{15} \right) \right| &= \frac{\sin(\bar{x})}{3!} \left(\frac{\pi}{60} \right)^3 < \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{60} \right)^3 \approx 2,391105 \times 10^{-5} \\ \left| E_3 \left(\frac{4\pi}{15} \right) \right| &= \frac{\cos(\bar{x})}{4!} \left(\frac{\pi}{60} \right)^4 < \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{60} \right)^4 \approx 3,12935 \times 10^{-7} \\ \left| E_4 \left(\frac{4\pi}{15} \right) \right| &= \frac{\sin(\bar{x})}{5!} \left(\frac{\pi}{60} \right)^5 < \frac{1}{120} \left(\frac{\pi}{60} \right)^5 \approx 3,27643 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Dessa forma, verificamos que o erro se torna cada vez menor sempre que construímos um polinômio de grau maior.

2.4 Polinômio de Taylor de Ordem n

É possível generalizar o procedimento seguido nas seções anteriores para obter um polinômio de ordem n , com $n \in \mathbb{Z}_+$, que aproxime os valores de f em pontos x numa vizinhança de x_0 .

Seja uma função f , n vezes derivável num intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Queremos determinar o Polinômio P_n de ordem n , que aproxime os valores da função f , ao tomarmos valores de x próximos a x_0 . De forma análoga aos casos anteriores, devemos ter:

$$f(x_0) = P_n(x_0), f'(x_0) = P'_n(x_0), f''(x_0) = P''_n(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Portanto, o polinômio deve ser da forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Procedendo como nos casos anteriores, obtemos $f(x_0) = a_0$ e calculando as derivadas de P_n temos $f'(x_0) = a_1$, $\frac{f''(x_0)}{2!} = a_2$ e assim sucessivamente. Percebemos que ao derivarmos P_n n vezes obtemos

$$P_n^{(n)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n.$$

Como $f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0)$, então

$$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot (n - 3) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n = n!a_n$$

Logo

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Portanto, o Polinômio de Taylor de ordem n em torno de x_0 é dado por

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Como nos casos anteriores o erro que se obtém ao aproximarmos a função $f(x)$ pelo valor de $P_n(x)$ é $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ com $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Teorema 2.5. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ onde f é uma função n - vezes derivável em $x = x_0$. Então, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, onde $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$.*

Demonstração.

$$\text{Seja } g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!}. \text{ Como } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Devemos mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \right] = 0 \quad (2.1)$$

Como o segundo termo do Limite 2.1 não depende de x basta mostrar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (2.2)$$

Como f é n -vezes diferenciável em x_0 e como g é um polinômio, para calcular o Limite 2.2 podemos aplicar a regra de L'Hospital $(n - 1)$ vezes a primeira parte da equação e

obtemos,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - g^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Teorema 2.6. *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ onde f é uma função n -vezes derivável. Suponhamos que $P^*(x)$ é um polinômio de ordem n em $(x - x_0)$ satisfazendo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - P^*(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Então, $P^*(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno do ponto x_0 .*

Demonstração. Seja

$$P^*(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n^*(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, onde $E_n^*(x)$ é o erro cometido ao estimar valores de $f(x)$ por $P^*(x)$.

Como $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$, onde $E_n(x)$ é o erro cometido ao estimar valores de $f(x)$ por $P_n(x)$, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x) - E_n^*(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{[f(x) - P_n(x)] - [f(x) - P^*(x)]}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P^*(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{a_0 - f(x_0)}{(x - x_0)^n} + \frac{a_1 - f'(x_0)}{(x - x_0)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}}{(x - x_0)} + a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!} \right] = 0.$$

Logo, esse limite só será zero se $a_0 = f(x_0)$, $a_1 = f'(x_0)$, $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$, $\dots$, $a_{n-1} = \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}$. Concluimos então que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[a_n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!} \right] = 0,$$

isto é, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}$. Portanto $P_n(x)$ é o único que possui a propriedade $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{E_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Teorema 2.7. *Seja f uma função derivável até a ordem $(n+1)$ no intervalo aberto I com x_0 e $x \in I$. Então, existe pelo menos um $\bar{x}$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x),$$

onde $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$ é o erro que obtemos ao substituir $f(x)$ por $P_n(x)$.

Demonstração.

Temos que $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, logo

$$E_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Derivando $E_n(x)$ $(n + 1)$ vezes, temos

$$E'_n(x) = f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x - x_0) - \frac{f'''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 1)!}(x - x_0)^{n-1}$$

$$E''_n(x) = f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x - x_0) - \dots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n - 2)!}(x - x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

$$E_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)$$

$$E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Para $x = x_0$, temos $E_n(x_0) = E'_n(x_0) = E''_n(x_0) = E'''_n(x_0) = \dots = E_n^{(n)}(x_0) = 0$.
Seja a função $h(x) = (x - x_0)^{n+1}$, assim

$$h'(x) = (n + 1)(x - x_0)^n$$

$$h''(x) = (n + 1) \cdot n(x - x_0)^{n-1}$$

$\vdots$

$$h^{(n)}(x) = (n + 1) \cdot n \cdots 2(x - x_0)$$

$$h^{(n+1)}(x) = (n + 1) \cdot n \cdots 1 = (n + 1)!$$

Para $x = x_0$, temos $h(x_0) = h'(x_0) = h''(x_0) = h'''(x_0) = \dots h^{(n)}(x_0) = 0$. Observamos que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n(x) - E_n(x_0)}{h(x) - h(x_0)}.$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe a_1 que pertence ao intervalo $]x_0, x[$ tal que:

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(a_1)}{h'(a_1)}.$$

Como

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E'_n(a_1) - E'_n(x_0)}{h'(a_1) - h'(x_0)}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy, existe a_2 que pertence ao intervalo $]x_0, a_1[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E''_n(a_2)}{h''(a_2)}$$

Repetindo esse argumento n vezes obtemos a_n no intervalo $]x_0, a_{n-1}[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n)}(a_n)}{h^{(n)}(a_n)}.$$

Assim,

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n)}(a_n) - E_n^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(a_n) - h^{(n)}(x_0)}.$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio de Cauchy existe $\bar{x}$ que pertence ao intervalo $]x_0, a_n[$ tal que

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n+1)}(\bar{x})}{h^{(n+1)}(\bar{x})}.$$

Portanto,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}.$$

A expressão $E_n(x)$ no teorema anterior é conhecida como Resto de Lagrange em homenagem ao matemático francês Joseph L. Lagrange.

Exemplo 2.8. Vamos obter o Polinômio de Taylor de ordem n da função $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$, visualizar graficamente algumas aproximações e obter o valor de e com erro inferior a 10^{-8} . Inicialmente observamos que $f^{(n)}(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$ e $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Assim, substituindo na fórmula de Taylor

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

obtemos

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

Graficamente podemos verificar na Figura 2.8 alguns polinômios aproximadores da função $f(x) = e^x$.

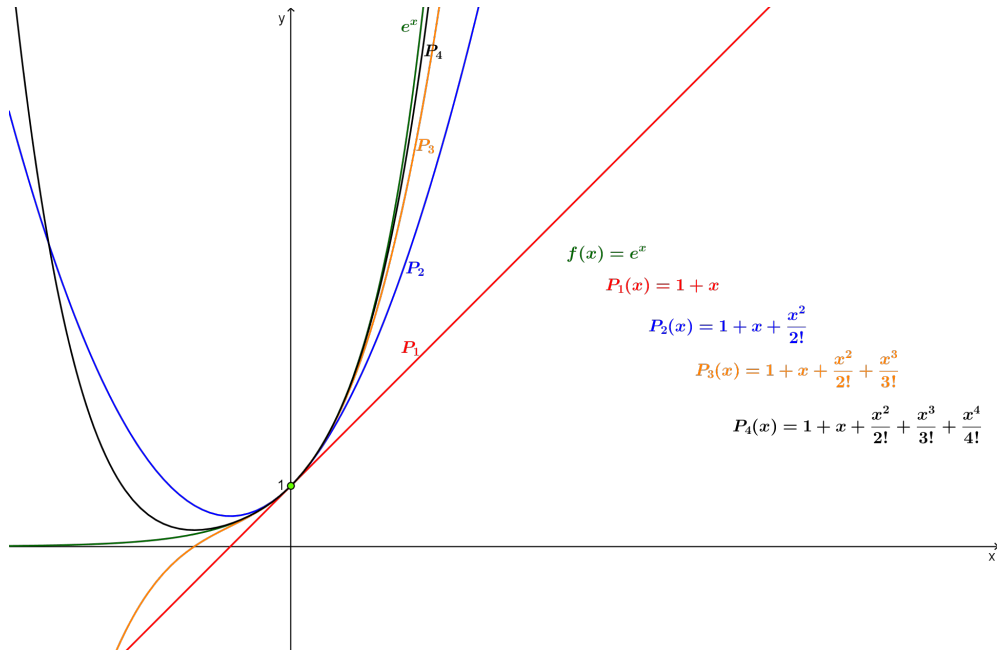


Figura 2.8: Gráfico de $f(x) = e^x$ e de seus Polinômios aproximadores até a ordem 4

Pelo Teorema 2.7 obtemos a expressão do erro que cometemos ao aproximar os valores de $f(x)$ pelos valores de $P_n(x)$. Temos que,

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)}$$

para algum $\bar{x}$ no intervalo aberto $]x_0, x[$. Portanto desenvolvendo a expressão do erro relativo a aproximação da função $f(x) = e^x$ por $P_n(x)$ desenvolvido na origem, temos:

$$E_n(x) = \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(n+1)}$$

Como $f(1) = e$, podemos obter aproximações para o número de Euler por meio do Polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x_0 = 0$. Sendo $e = 2,718281828459 \dots$, temos para $x = 1$ que:

$$P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \approx e.$$

Esta expressão se aproxima de e com a seguinte precisão

$$E_n(1) = \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!}$$

para algum $0 < \bar{x} < 1$ e assim,

$$1 = e^0 < e^{(\bar{x})} < e^1 < 3.$$

Portanto,

$$|E_n(1)| = \left| \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Como desejamos obter uma aproximação com um erro inferior a 10^{-8} , temos:

$$|E_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8} = \frac{1}{100000000}$$

Logo $(n+1)! > 300.000.000$. Pela Tabela 2.1 percebemos que esse fato será observado para $n = 11$. Então e com um erro menor que 10^{-8} , vale:

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \frac{1}{11!} = 2,718281826 \dots$$

<i>Fatorial</i>	<i>Resultado</i>
0!	1
1!	1
2!	2
3!	6
4!	24
5!	120
6!	720
7!	5040
8!	40.320
9!	362.880
10!	3.628.800
11!	39.916.800
12!	479.001.600

Tabela 2.1: Valores do Fatorial

Exemplo 2.9. Para datar rochas ou artefatos com mais de 50.000 anos, é preciso usar outros elementos radioativos. A seguinte equação é válida para qualquer isótopo radioativo:

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1 = e^{(\ln 2)t/\lambda}$$

onde $R(t)$ é o número de átomos do isótopo radioativo no instante t . $S(t)$ é o número de átomos do produto estável que resulta do decaimento radioativo, $S(0)$ é o número de átomos do produto estável inicialmente presentes na amostra (no instante $t = 0$) e λ é a meia-vida do isótopo radioativo (o tempo que metade dos átomos da amostra leva para decair).

- a. Determine o valor aproximado de t nesta equação usando o Polinômio de Taylor de grau 2 de e^x no entorno de $x = 0$.
- b. Um pedaço de mica é analisado e os cientistas descobrem que 5% dos átomos do mineral são do isótopo radioativo rubídio 57 e 0,04% são de estrôncio 87. Se todo estrôncio 87 foi produzido pelo decaimento do rubídio 57 presente na amostra, qual é a idade da amostra? Use a aproximação do item (a). A meia-vida do rubídio 87 é $48,6 \times 10^9$ anos.

Solução.

a. Do Exemplo 2.8, sabemos que o polinômio de Taylor de ordem 2 de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ será dado por $P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$. Logo, estimando o valor de $e^{(\ln 2)t/\lambda}$ por $P_2(x)$ temos,

$$e^{(\ln 2)t/\lambda} = \frac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1 \approx P_2\left(\frac{(\ln 2)t}{\lambda}\right) = 1 + \frac{(\ln 2)t}{\lambda} + \frac{\left[\frac{(\ln 2)t}{\lambda}\right]^2}{2!}$$

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \approx \frac{(\ln 2)t}{\lambda} + \frac{\left[\frac{(\ln 2)t}{\lambda}\right]^2}{2!}$$

$$\frac{(\ln^2 2)}{2!\lambda^2}t^2 + \frac{(\ln 2)}{\lambda}t - \frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \approx 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau na variável t temos,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} - 4 \cdot \frac{\ln^2 2}{2\lambda^2} \cdot \left[-\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right] = \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} + \frac{2\ln^2 2}{\lambda^2} \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right] \\ &= \frac{\ln^2 2}{\lambda^2} \left(1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right] \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$t \approx \frac{-\frac{\ln 2}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{\ln^2 2}{\lambda^2} \left(1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right] \right)}}{2 \frac{\ln^2 2}{2\lambda^2}} \approx \frac{-\frac{\ln 2}{\lambda} \pm \frac{\ln 2}{\lambda} \sqrt{1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right]}}{\frac{\ln^2(2)}{\lambda^2}}.$$

Como $t > 0$, temos

$$t \approx \frac{\frac{\ln(2)}{\lambda} \left(\sqrt{1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right]} - 1 \right)}{\frac{\ln^2(2)}{\lambda^2}} = \frac{\lambda}{\ln(2)} \left(\sqrt{1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right]} - 1 \right).$$

b. Denotamos por M a quantidade de átomos da mica analisada, temos que $\frac{5}{100}M$ são do isótopo radioativo, ou seja $R(t)$, $\frac{0,04}{100}M$ são de estrôncio 87, ou seja, $S(t)$. Como todo estrôncio foi produzido do decaimento do rubídio, não existiam átomos de estrôncio inicialmente na amostra, ou seja, $S(0) = 0$. Como $\lambda = 48,6 \times 10^9$ e utilizando $\ln 2 \approx 0,693$, temos então que

$$t \approx \frac{\lambda}{\ln 2} \left(\sqrt{1 + 2 \left[\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} \right]} - 1 \right) = \frac{48,6 \times 10^9}{0,693} \left(\sqrt{1 + 2 \left[\frac{\frac{0,04}{100}M - 0}{\frac{5}{100}M} \right]} - 1 \right)$$

$$t \approx 70,12 \times 10^9 \left(\sqrt{1,016} - 1 \right) = 5,587 \times 10^8$$

Exemplo 2.10. Utilizando a expressão do Polinômio de Taylor de ordem n , vamos obter uma aproximação da função $f(x) = \sin(x)$ em torno de $x_0 = 0$, estimar o valor do $\sin(1)$, com erro inferior a 10^{-5} , onde 1 é expresso em unidades de radianos e fazer a análise gráfica do resultado. Temos, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$, $f^{(5)}(x) = \cos(x)$ e assim sucessivamente.

Para $x_0 = 0$, temos $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$. Notamos que $f^{(n)}(0) = 0$, se n é par e se n é ímpar os valores de $f^{(n)}(0)$ vão se alternando entre 1 e -1 , assim

$$P_1(x) = 0 + 1(x - 0) = x$$

$$P_2(x) = 0 + 1(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 = x$$

$$P_3(x) = 0 + 1(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-1}{3!}(x - 0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = 0 + 1(x - 0) + \frac{0}{2!}(x - 0)^2 + \frac{-1}{3!}(x - 0)^3 + \frac{0}{4!}(x - 0)^4 = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Portanto, $P_1(x) = P_2(x)$, $P_3(x) = P_4(x) \dots P_{2k+1}(x) = P_{2k+2}(x)$ com $k \in \mathbb{Z}_+$.

Logo,

$$P_{2k+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Para determinar a estimativa do erro que cometemos, devemos observar que,

$$P_{2k+1}(x) = P_{2k+2}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + 0 \cdot \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

Logo

$$|E_{2k+1}(x)| = |E_{2k+2}(x)| = \left| \frac{f^{(2k+3)}(\bar{x})}{(2k+3)!} (x-0)^{(2k+3)} \right| = \left| \frac{f^{(2k+3)}(\bar{x})}{(2k+3)!} x^{(2k+3)} \right|$$

Como $|f^{(2k+3)}(\bar{x})| \leq 1$ temos que,

$$|E_{2k+1}(x)| = \left| \frac{f^{(2k+3)}(\bar{x})}{(2k+3)!} x^{(2k+3)} \right| \leq \frac{1}{(2k+3)!} |x|^{(2k+3)}$$

Estimando o valor de $\sin(1)$, para 1 em unidades de radianos, com erro inferior a 10^{-5} , temos então que,

$$|E_{2k+1}(1)| \leq \frac{1}{(2k+3)!} < 10^{-5} = \frac{1}{100000}$$

Assim $(2k+3)! > 100.000$. Pela Tabela 2.1 isso ocorre quando $2k+3 = 9$ isto é $k = 3$. Portanto com erro inferior a 10^{-5} , temos,

$$\sin(1) = 0,8414709 \dots \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 0,8414682 \dots$$

A visualização gráfica pode ser observada na Figura 2.9, onde verificamos algumas aproximações da função $f(x) = \sin(x)$, utilizando Polinômios de Taylor.

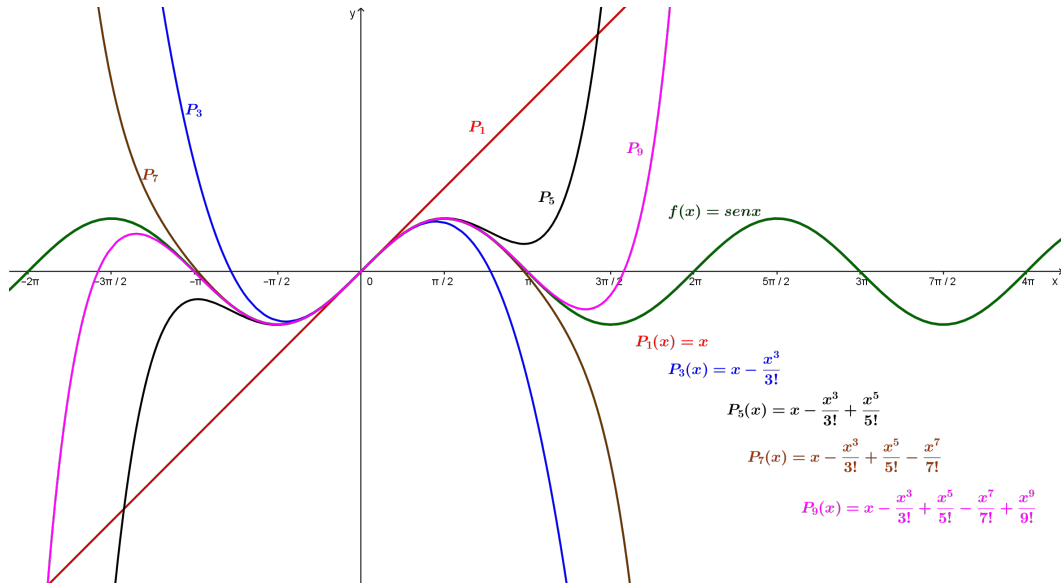


Figura 2.9: Gráfico de $f(x) = \sin(x)$ e de Polinômios aproximadores de Taylor

2.5 Série de Taylor e Maclaurin

Seja f uma função com derivadas de todas as ordens representada por uma série de potência, ou seja,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$$

onde seu domínio é o intervalo de convergência da série contendo x_0 . Derivando algumas vezes essa função, percebemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= c_1 + 2 \cdot c_2(x - x_0) + 3 \cdot c_3(x - x_0)^2 + 4 \cdot c_4(x - x_0)^3 + \dots + n \cdot c_n(x - x_0)^{n-1} + \dots \\ f''(x) &= 2 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 \cdot c_4(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot c_n(x - x_0)^{n-2} + \dots \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4(x - x_0) + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot c_n(x - x_0)^{n-3} + \dots \\ f^{(4)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 + \dots + n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot c_n(x - x_0)^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

Para $x = x_0$, obtemos

$$c_0 = f(x_0), \quad c_1 = f'(x_0), \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

De modo geral para qualquer n natural maior ou igual a zero temos $c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Concluimos que a função $f(x)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad (2.3)$$

Denominamos a representação de $f(x)$ dada em 2.3, por Série de Taylor de f em x_0 . Em particular, quando $x_0 = 0$ a série será denominada Série de Maclaurin. Observando essa representação podemos então concluir que o Polinômio de Taylor de ordem n , obtido na Seção 2.4 é uma soma parcial da Série de Taylor.

Com este resultado podemos obter a representação da série de potências de uma função f , infinitamente derivável, sem utilização da integração ou derivação termo a termo de uma série conhecida.

Exemplo 2.11. Vamos determinar a série de Maclaurin de $f(x) = \arctg(x)$. Derivando sucessivamente, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}, \\ f^{(5)}(x) &= \frac{24(5x^4-10x^2+1)}{(1+x^2)^5}, \quad f^{(6)}(x) = -\frac{240(3x^5-10x^3+3x)}{(1+x^2)^6} \\ f^{(7)}(x) &= \frac{720(7x^6-35x^4+21x^2-1)}{(1+x^2)^7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } c_0 &= 0, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2!} = 0, \quad c_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3}, \quad c_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = 0, \\ c_5 &= \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{5}, \quad c_6 = \frac{f^{(6)}(0)}{6!} = 0 \text{ e } c_7 = \frac{f^{(7)}(0)}{7!} = -\frac{1}{7}. \text{ Logo,} \end{aligned}$$

$$\arctg(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{3}x^3 + 0 + \frac{1}{5}x^5 + 0 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Podemos observar que o n -ésimo termo dessa série será da forma $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Concluimos então que

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Tal resultado é o mesmo do Exemplo 1.18. Para verificar a convergência da série, utilizamos o critério da razão. Logo, se $\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^{2(n+1)+1}}{2(n+1)+1} \cdot \frac{2n+1}{(-1)^n \cdot x^{2n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1) \cdot \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{2n+1}{x^{2n+1}} \right|$$

e, assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-x^2) \frac{2n+1}{2n+3} \right| = |-x^2 \cdot 1| = |-x^2| = x^2$$

Dessa forma, a série será convergente se $x^2 < 1$, isto é, $-1 < x < 1$. Verificamos no Exemplo 1.18 que a convergência acontece também nas extremidades do intervalo. Portanto, concluímos que para $-1 \leq x \leq 1$ temos

$$\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

No Exemplo 2.11, percebemos que a igualdade da f em relação a sua série é observado para todo x tal que $-1 \leq x \leq 1$. Em geral, é necessário estabelecer um teorema que nos permita concluir para quais valores de x temos uma função igual a sua série.

Observando que se temos uma série infinita $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, onde suas somas parciais são denotadas por $S_1, S_2, \dots, S_n$, sua convergência acontece se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ de maneira que S é a soma da série.

Assim, se uma função é representada por sua Série de Potências, a igualdade estará estabelecida para todo x se o limite de S_n quando n tende a infinito, for igual a função.

Como a Série de Potências é a Série de Taylor e o Polinômio de Taylor de ordem n , denotado por $P_n(x)$, é uma soma parcial dessa série, precisamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$. Tal fato ocorrerá se $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$, onde $E_n(x)$ é o erro que cometemos ao aproximar a função f por $P_n(x)$.

Teorema 2.8. *Se uma função f possui derivadas de todas as ordens em um intervalo aberto contendo x_0 e se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0$$

para todo x nesse intervalo, então $f(x)$ é representada por sua série de Taylor de $f(x)$ em x_0 .

Demonstração

Sabemos que $P_n(x) = f(x) - E_n(x)$. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - E_n(x)] = f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = f(x) - 0 = f(x)$$

Exemplo 2.12. Vamos determinar a série de Maclaurin de $f(x) = \sin(x)$ e provar que a série que representa essa função é válida para todo x real.

No Exemplo 2.10 desenvolvemos o polinômio de Taylor da função $f(x) = \sin(x)$ em torno $x_0 = 0$. Como o Polinômio de Taylor é a soma parcial da Série de Taylor,

concluimos que

$$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots$$

Precisamos agora provar que essa igualdade é válida para todo x real. Como para n natural temos que $f^{(n+1)}(x)$ é $\pm \text{sen}(x)$ ou $\pm \cos(x)$, temos $|f^{(n+1)}(x)| \leq 1$. Sendo o erro dado por $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{(n+1)}$, para algum $\bar{x}$ entre 0 e x temos

$$0 \leq |E_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{(n+1)} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\bar{x})|}{(n+1)!} |x|^{(n+1)} \leq \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

Podemos observar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{(n+1)}}{(n+1)!} = 0$, pois pelo teste da razão a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}$ é absolutamente convergente. Segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0.$$

Logo, a função $f(x) = \text{sen}(x)$ é igual a sua série de Maclaurin para todo x real.

Nas Figuras 2.10, 2.11 e 2.12, podemos analisar algumas somas parciais dessa série e observar graficamente a convergência para todo x real.

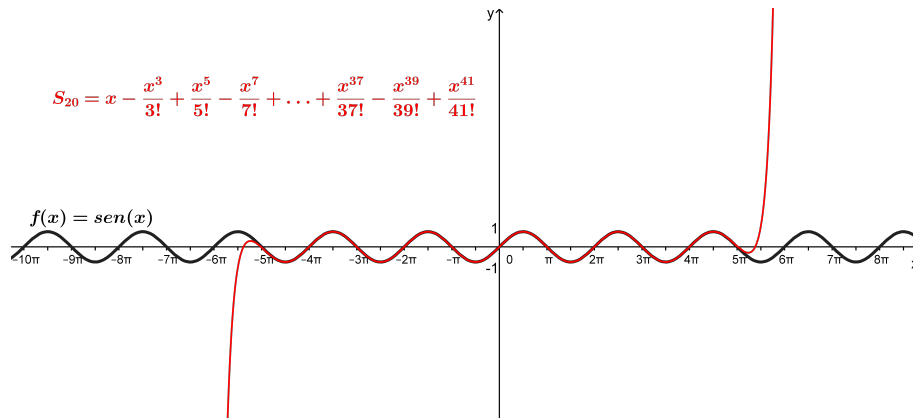


Figura 2.10: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ e de Soma Parcial da sua série

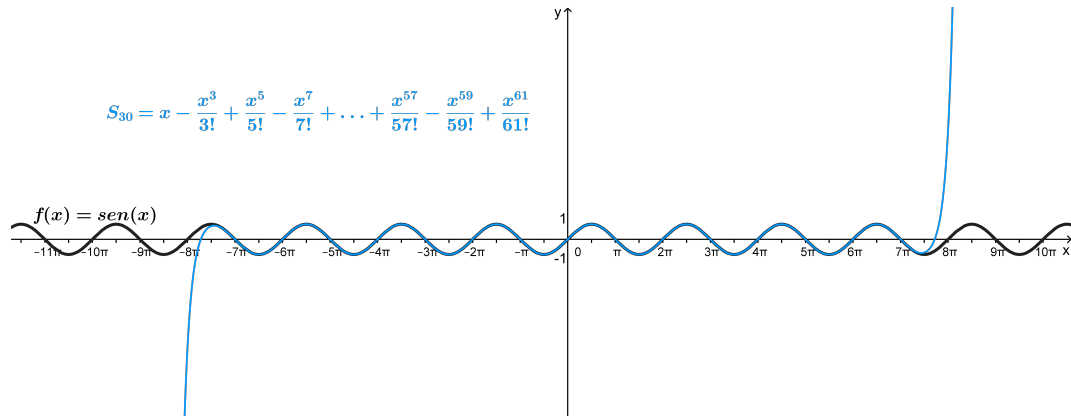


Figura 2.11: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ e de Soma Parcial da sua série

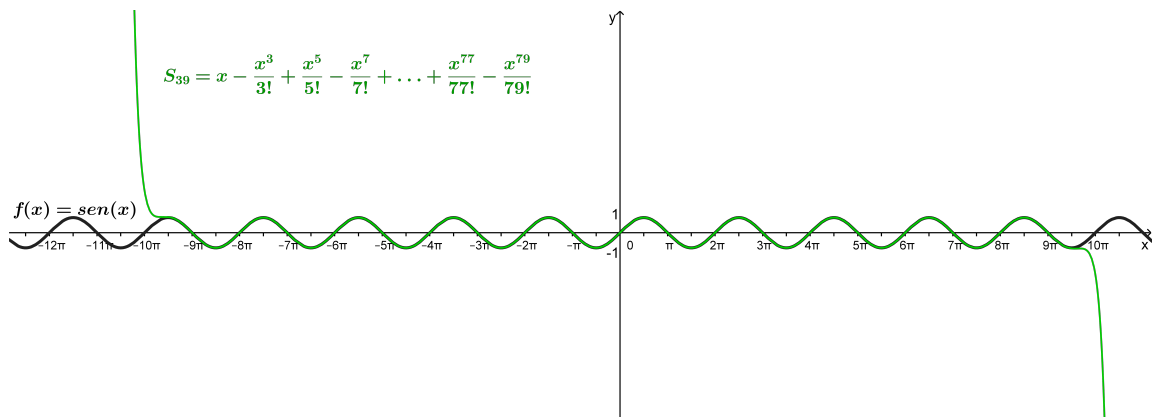


Figura 2.12: Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$ e de Soma Parcial com maior aproximação

Podemos obter a partir da série de Maclaurin da função $f(x) = \text{sen}(x)$, a série de Maclaurin da função $f(x) = \cos(x)$, aplicando a derivada na série termo a termo. A série resultante possui o mesmo intervalo de convergência, nesse caso vale para todo x real.

Exemplo 2.13. Vamos obter a série de Maclaurin da função $f(x) = \cos(x)$, utilizando o resultado do Exemplo 2.12. Portanto

$$(\text{sen}(x))' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)'$$

Logo,

$$\cos(x) = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\text{Portanto, } f(x) = \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ para todo } x \text{ real.}$$

Vejamos graficamente na Figura 2.13 uma soma parcial dessa série observando sua convergência.

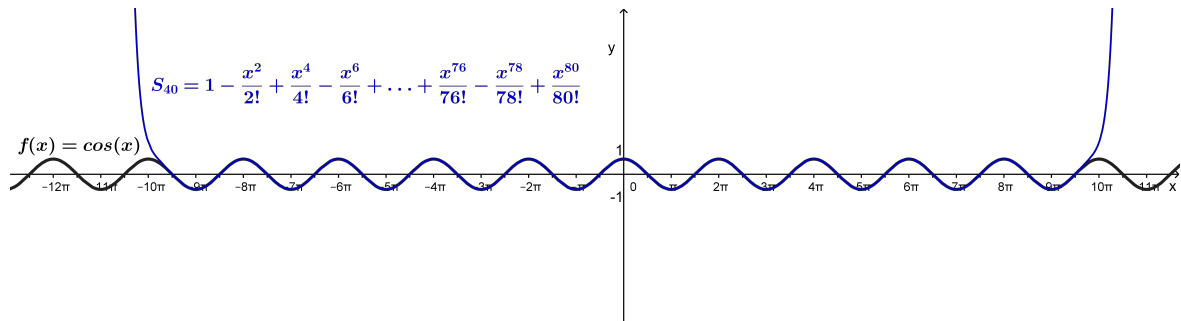


Figura 2.13: Gráfico de $f(x) = \cos(x)$ e de uma Soma Parcial da sua série

Exemplo 2.14. Mostramos no exemplo 1.15 que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ é convergente para todo x real e afirmamos que converge para função $f(x) = e^x$.

Construindo a série de Maclarin de $f(x) = e^x$, temos que esta função é infinitamente derivável e todas as derivadas são iguais, ou seja, $f^{(n)}(x) = e^x$ com n natural. Em particular, para $x_0 = 0$ temos $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Portanto, substituindo em

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Dessa forma

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Vamos mostrar que essa convergência é válida para todo x real para função e^x , utilizando o Teorema 2.8. Assim podemos observar mais uma maneira de verificar esta afirmação.

Demonstração

O erro que cometemos ao utilizar o polinômio de Taylor de ordem n é dado por

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

para algum $\bar{x}$ entre 0 e x .

2. Fórmula de Taylor

Se $x = 0$ a soma da série será 1 e $f(0) = e^0 = 1$.

Se $x > 0$ temos $e^{\bar{x}} < e^x$ e, portanto,

$$0 < \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Podemos perceber que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pois a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ é convergente pelo

teste da razão e portanto o limite do seu termo geral é zero, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$.

Concluimos então pelo Teorema do Confronto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(x) = 0.$$

Se $x < 0$, temos que $x < \bar{x} < 0$ e $0 < e^{\bar{x}} < 1$. Portanto, se $x^{n+1} > 0$ temos

$$0 < \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

e, para $x^{n+1} < 0$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1} < 0.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, segue em cada caso pelo Teorema do Confronto que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$. Portanto, para todo x real

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Podemos visualizar algumas somas parciais da série da função $f(x) = e^x$ nas Figuras 2.14 e 2.15.

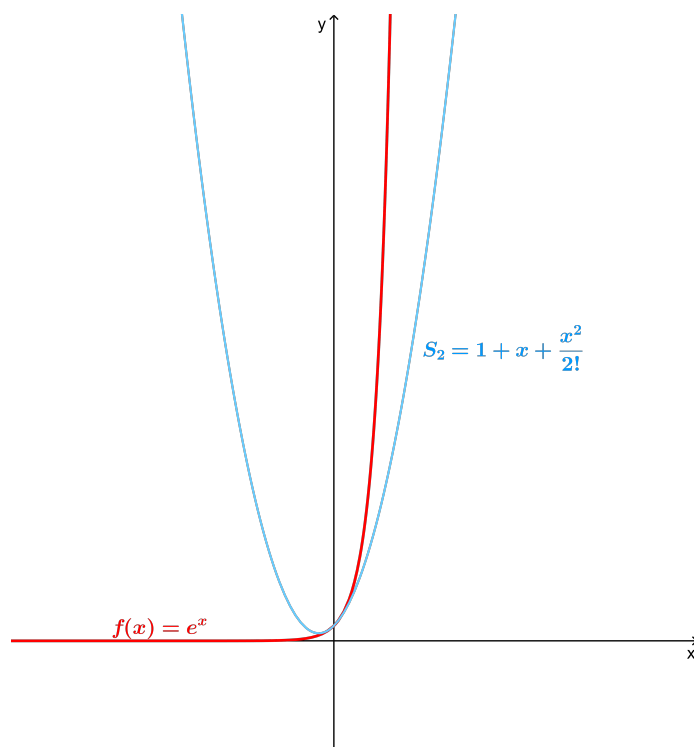


Figura 2.14: Gráfico de $f(x) = e^x$ e de Soma Parcial da sua série

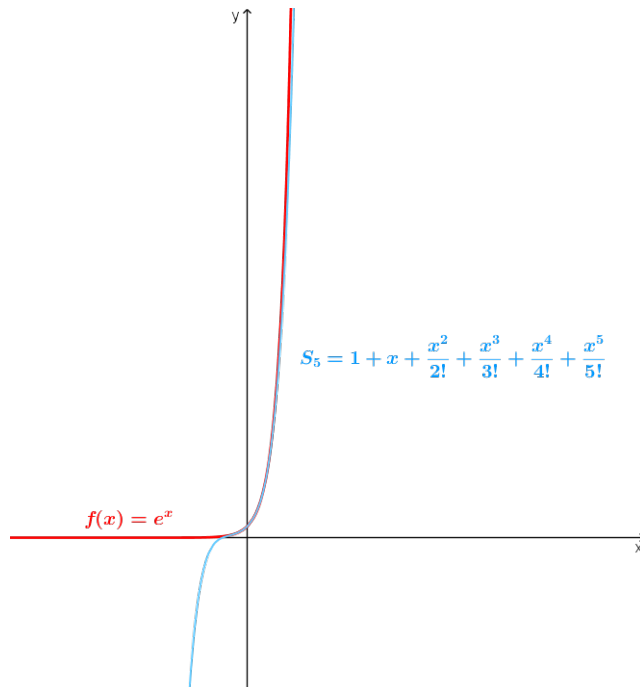


Figura 2.15: Gráfico de $f(x) = e^x$ e de Soma Parcial da sua série com maior precisão

Capítulo 3

Aplicações do Polinômio e Série de Taylor

Neste capítulo vamos utilizar o Polinômio e Série de Taylor, para provar alguns resultados matemáticos como a irracionalidade do número de Euler, desenvolver uma fórmula para obter o valor de π e calcular integrais definidas, utilizando o polinômio aproximador de Taylor de uma determinada função, para obter uma estimativa da área abaixo do gráfico dessa função.

3.1 Regra de L'Hospital

Utilizando o Polinômio de Taylor, vamos mostrar um caso particular das regras de L'Hospital, Teorema 1.12, considerando duas funções f e g com derivadas contínuas até a 2.^a ordem.

Dessa forma sendo f e g deriváveis até a 2.^a ordem, definidas no intervalo aberto I com $x, x_0 \in I$ e $g'(x) \neq 0$, se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, a regra de L'Hospital nos afirma que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Assim vamos escrever a Fórmula de Taylor das funções f e g , sendo o polinômio aproximador de ordem 1. Portanto existe pelo menos um $\bar{x}_1$ e um $\bar{x}_2$ no intervalo aberto de extremos x_0 e x tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x}_1)}{2}(x - x_0)^2$$

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(\bar{x}_2)}{2}(x - x_0)^2$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, temos pela continuidade de f e g que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0$$

logo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\bar{x}_1)}{2}(x - x_0)^2}{g'(x_0)(x - x_0) + \frac{g''(\bar{x}_2)}{2}(x - x_0)^2} \right]$$

como $(x - x_0) \neq 0$ temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f'(x_0) + \frac{f''(\bar{x}_1)}{2}(x - x_0)}{g'(x_0) + \frac{g''(\bar{x}_2)}{2}(x - x_0)} \right] = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

finalmente como $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = g'(x_0)$ concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.2 Irrracionalidade do número e

No Exemplo 2.8 construímos o polinômio de Taylor $P_n(x)$ de ordem n em torno de $x_0 = 0$ de $f(x) = e^x$:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Para $x = 1$, obtemos uma aproximação para o número e :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Com um erro inferior a $\frac{3}{(n+1)!}$.

Suponhamos que o número e seja racional da forma $e = \frac{a}{b}$, com a e b inteiros positivos e primos entre si, temos então que

$$0 < e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

e

$$0 < \frac{a}{b} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$$

Tomando $n > b$ e $n \geq 3$, segue que

$$0 < \frac{an!}{b} - n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) < n! \frac{3}{(n+1)!}$$

$$0 < \frac{an!}{b} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4}$$

Notamos que $\frac{an!}{b}$ e $\left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \dots + \frac{n!}{n!}\right)$ são números inteiros, logo sua diferença deve ser um número inteiro. Assim, temos uma contradição pois um número inteiro não pode estar compreendido entre 0 e $\frac{3}{4}$. Portanto, e é um número irracional.

Uma forma alternativa de mostrar irracionalidade do número e , é proceder da seguinte forma: sabemos que para $x = 1$, $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Suponhamos que o número e seja racional, isto é, da forma $e = \frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos e primos entre si. Então,

$$e = \frac{p}{q} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Dessa forma, temos

$$\frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{q!} \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \frac{1}{(q+3)(q+2)(q+1)} + \dots \right).$$

Como

$$\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+2)(q+1)} + \dots \right) < \left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + \dots \right)$$

e $\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+1)} + \dots \right)$ é uma série geométrica e converge para $\frac{1}{q}$, temos então que

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{q}$$

Multiplicando por $q!$, temos:

$$0 < p(q-1)! - q! \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!} < \frac{1}{q}.$$

Como $0 < p \cdot (q-1)!$ e $q! \cdot \sum_{n=0}^q \frac{1}{n!}$ são inteiros, temos que sua diferença é um número inteiro. Logo, temos um número inteiro entre 0 e $\frac{1}{q}$, absurdo.

3.3 Fórmula para calcular π .

No Exemplo 2.11 obtivemos a série de Taylor da função $\arctg(x)$ de modo que

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Como essa igualdade é válida para todo $-1 \leq x \leq 1$, em particular para $x = 1$ temos:

$$\arctg(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \dots$$

Logo,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \dots$$

Esse resultado ficou conhecido como a fórmula de Leibniz para π . Podemos observar graficamente a convergência dessa série na Figura 3.1. Portanto,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots + (-1)^n \frac{4}{2n+1} \dots$$

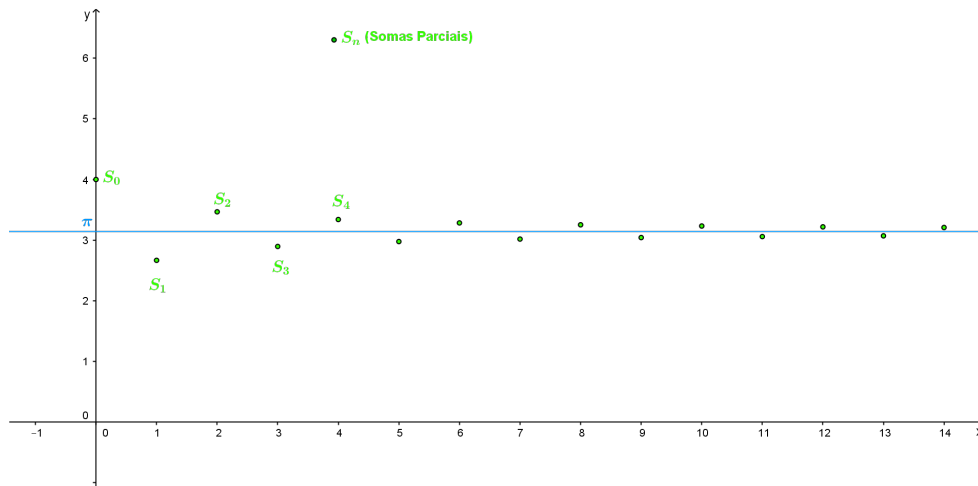


Figura 3.1: Convergência das somas parciais da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{2n+1}$ para π

Nesse caso a convergência para π ocorre lentamente. Podemos obter uma convergência mais rápida por meio do próximo resultado.

3.4 Outra Fórmula para Calcular π

Inicialmente vamos provar que a expressão $\frac{\pi}{4} = \arctg\left(\frac{1}{2}\right) + \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$ é verdadeira. Denotando por $\alpha = \arctg\left(\frac{1}{2}\right)$ e $\beta = \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$, temos que a tangente da soma nos fornece que:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)tg(\beta)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = tg\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

logo

$$\alpha + \beta = \left(\frac{\pi}{4}\right) \implies \arctg\left(\frac{1}{2}\right) + \arctg\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Agora, utilizando a série de Taylor $\arctg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ para $-1 \leq x \leq 1$, temos que

$$\arctg\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

e

$$\arctg\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1}$$

Logo,

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1} \right)$$

Para percebemos como a convergência acontece rapidamente, usando uma aproximação de cada somatório com apenas 4 termos, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2}\right)^9 \approx 0,46368427$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{3}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{3}\right)^9 \approx 0,321741023$$

Assim,

$$\pi \approx 4 \cdot (0,46368427 + 0,321741023) \approx 3,1417$$

Obtemos π com as três primeiras casas decimais corretas. Na figura 3.2, podemos observar essa convergência para π .

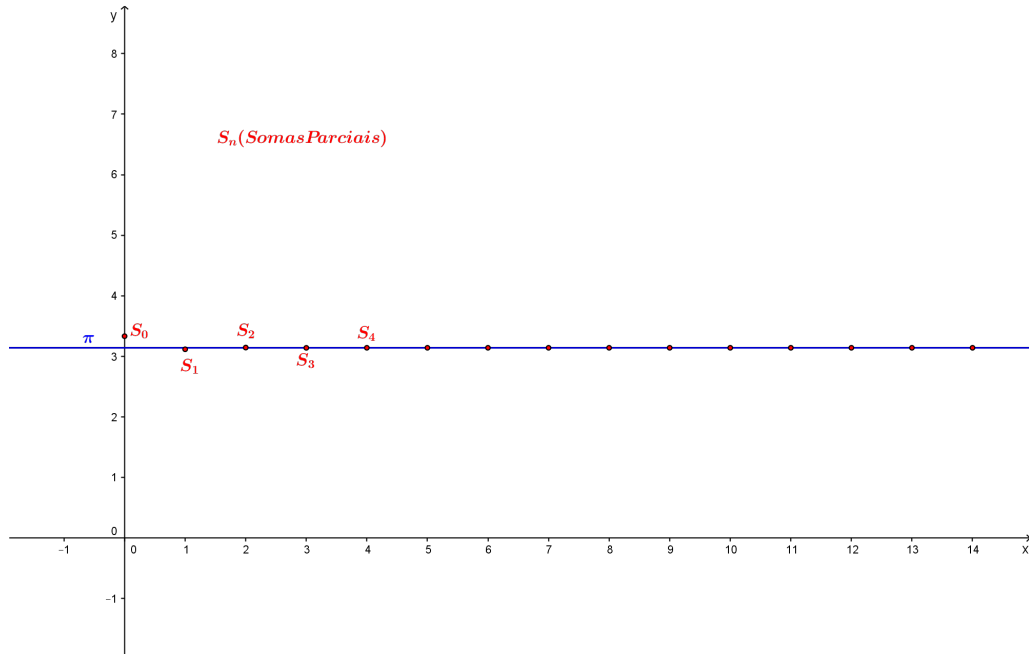


Figura 3.2: Convergência mais rápida das somas parciais para π

3.5 Aproximações de Áreas

Utilizamos o Polinômio de Taylor no capítulo 2 para obtermos uma aproximação do valor de uma função, de maneira que essa diferença fosse a menor que desejássemos. Argumento análogo pode ser aplicado, utilizando o polinômio de Taylor para aproximar áreas. Dessa forma podemos construir o Polinômio de Taylor que representa a aproximação de uma função f e calcular a integral definida desse polinômio. Assim, estamos obtendo uma aproximação da área e consequentemente a precisão de tal resultado será dada pela integral do erro. Logo sendo $P_n(x)$ o polinômio aproximador de $f(x)$ e $E_n(x)$ o erro dessa aproximação, temos

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \implies \int_a^b f(x) = \int_a^b P_n(x) + \int_a^b E_n(x)$$

onde f é contínua num intervalo e a e b são números reais que pertencem a esse intervalo.

Essa conclusão terá grande utilidade principalmente quando não for possível obter uma primitiva da função por intermédio das técnicas de integração conhecidas. Para os Exemplos 3.1 e 3.2, utilizaremos a seguinte desigualdade: $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. (Veja demonstração em [12] p.174).

Exemplo 3.1. Vamos utilizar o Polinômio de Taylor para obter o valor de

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

com erro inferior a 10^{-4} .

O que desejamos obter, é uma aproximação da área abaixo da curva da função $f(x) = e^{-x^2}$ e verificar a precisão desse resultado. Inicialmente utilizando recurso computacional temos com 5 casas decimais que a $\int_0^1 e^{-x^2} dx = 0,74682$ (Figura 3.3).

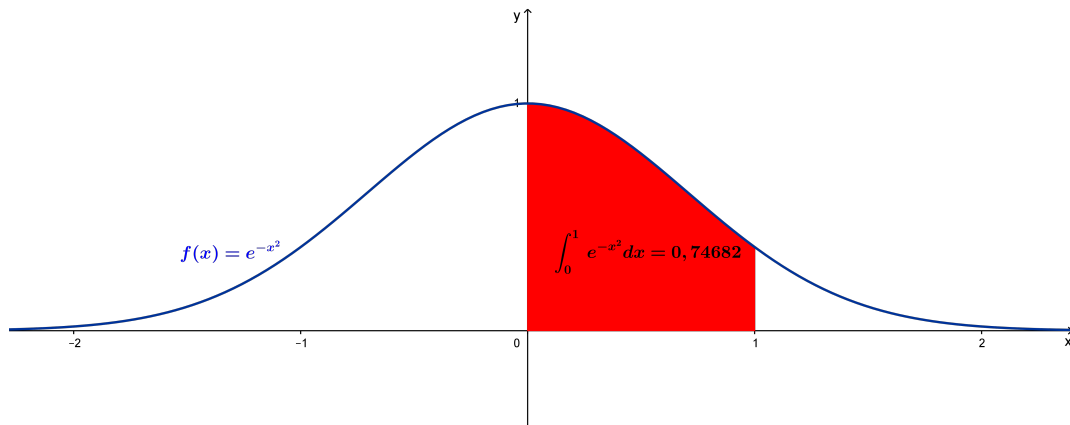


Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = e^{-x^2}$ com representação da $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

Como já construímos o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ temos que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$$

Onde $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{(n+1)}$, para algum $\bar{x}$ no intervalo $]0, x[$. Portanto temos

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(n+1)}$$

Substituindo x por $-x^2$ temos

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(2n+2)}$$

Aplicando a integral temos

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{(-1)^{n+1} e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(2n+2)} \right) dx$$

Desejamos que o erro seja inferior a 10^{-4} , isto é $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(2n+2)} dx \right| < 10^{-4}$. Observe que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(2n+2)} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-1)^{n+1} e^{(\bar{x})}}{(n+1)!} x^{(2n+2)} \right| dx = \int_0^1 \frac{|e^{(\bar{x})}|}{(n+1)!} x^{(2n+2)} dx.$$

Além disso, como $0 < (\bar{x}) < 1$ temos que $e^{(\bar{x})} < e < 3$. Portanto

$$\int_0^1 \frac{|e^{(\bar{x})}|}{(n+1)!} x^{(2n+2)} dx \leq \int_0^1 \frac{e}{(n+1)!} x^{(2n+2)} dx \leq \int_0^1 \frac{3 \cdot x^{(2n+2)}}{(n+1)!} dx.$$

Desejamos que nossa área tenha um erro menor que 10^{-4} então

$$\int_0^1 \frac{3 \cdot x^{(2n+2)}}{(n+1)!} dx < 10^{-4},$$

logo

$$\left. \frac{3 \cdot x^{(2n+3)}}{(2n+3)(n+1)!} \right|_0^1 = \frac{3}{(2n+3)(n+1)!} < 10^{-4}.$$

Essa desigualdade é satisfeita para $n = 6$. Portanto temos

$$\int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!} \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} \right) \Big|_0^1$$

e concluímos então que

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} = 0,74683603 \dots$$

Percebemos então que com a utilização da integral do Polinômio de Taylor obtemos para essa aproximação o valor da área com 4 casas decimais corretas.

Exemplo 3.2. Vamos obter $\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ com erro inferior a 10^{-3} . Neste exemplo utilizamos o fato de que se $f(x) = \ln(1+x)$, sua n -ésima derivada é $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$. Vamos provar este fato via indução em n .

Para $n = 1$, temos

$$f^{(1)}(x) = (-1)^{1-1} \frac{(1-1)!}{(1+x)^1} = (-1)^0 \frac{0!}{(1+x)} \implies f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Supondo que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, temos que $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$, logo

$$(f^{(n)}(x))' = (-1)^{n-1} \left(\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \right)'$$

Logo

$$(f^{(n)}(x))' = (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]'(1+x)^n - (n-1)![(1+x)^n]'}{(1+x)^{2n}}$$

e daí

$$(f^{(n)}(x))' = (-1)^{n-1} \frac{(-1)(n-1)!n(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} \Rightarrow f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Logo n -ésima derivada da função $f(x) = \ln(1+x)$ é $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ para todo n natural.

Concluída esta etapa podemos estimar o valor de $\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$ de acordo com a aproximação desejada. Inicialmente vamos visualizar nas Figuras 3.4 e 3.5 o comportamento gráfico, a área desejada e o valor da integral que aproximadamente com 5 casas decimais vale 0,17503.

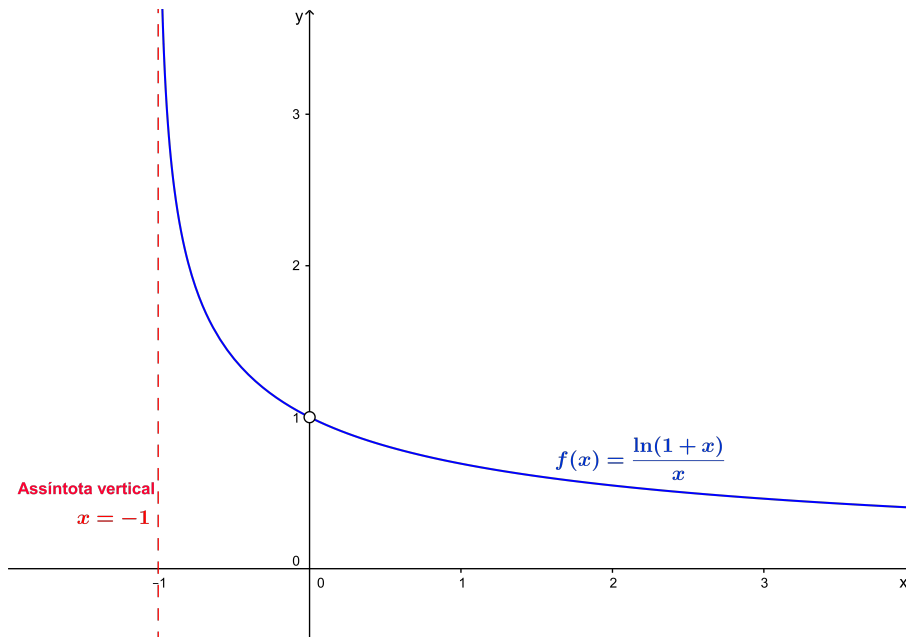


Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$

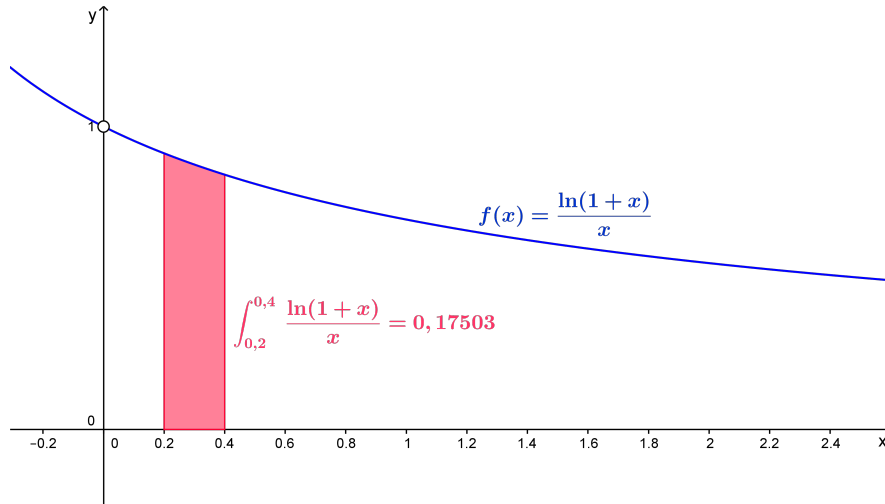


Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ com representação da Integral $\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

Inicialmente desenvolvendo o Polinômio de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função $f(x) = \ln(1+x)$ temos: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$, $f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$. de modo geral provamos por indução que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

.

Portanto obtemos então $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(4)}(0) = -6$, $f^{(5)}(0) = 24$. Logo

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + E_n(x) \quad (3.1)$$

onde $E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!} x^{(n+1)} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}}$, para $0 \leq \bar{x} \leq x$.

Dividindo por x os dois lados da igualdade em 3.1, obtemos a função e o Polinômio aproximador:

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}}$$

3. Aplicações do Polinômio e Série de Taylor

Portanto calculando $\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$, temos

$$\int_{0,2}^{0,4} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{n} \right) dx + \int_{0,2}^{0,4} \left((-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}} \right) dx$$

Desejamos que $\left| \int_{0,2}^{0,4} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}} dx \right| < 10^{-3}$ e daí temos que

$$\left| \int_{0,2}^{0,4} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}} dx \right| \leq \int_{0,2}^{0,4} \left| (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}} \right| dx$$

portanto

$$\int_{0,2}^{0,4} \frac{|x|^n}{(n+1)(1+\bar{x})^{n+1}} dx \leq \int_{0,2}^{0,4} \frac{x^n}{n} dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)n} \Big|_{0,2}^{0,4} = \frac{(0,4)^{n+1} - (0,2)^{n+1}}{(n+1)n} < 10^{-3}$$

Podemos observar a validade da última desigualdade para $n = 4$. Logo

$$\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx \int_{0,2}^{0,4} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} \right) dx = \left(x - \frac{x^2}{2 \cdot 2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3} - \frac{x^4}{4 \cdot 4} \right) \Big|_{0,2}^{0,4}$$

e daí temos:

$$\left(0,4 - \frac{(0,4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{(0,4)^3}{3 \cdot 3} - \frac{(0,4)^4}{4 \cdot 4} \right) - \left(0,2 - \frac{(0,2)^2}{2 \cdot 2} + \frac{(0,2)^3}{3 \cdot 3} - \frac{(0,2)^4}{4 \cdot 4} \right) \approx 0,17472.$$

Concluimos então que

$$\int_{0,2}^{0,4} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx 0,17472.$$

Obtemos assim o valor da integral com a aproximação desejada.

3.6 Considerações Finais

Neste trabalho abordamos como temas principais o Polinômio e a Série de Taylor. Neste primeiro tema percebemos que a essência teórica, seria aproximar os valores de uma função utilizando polinômios. Dessa maneira observamos que as operações se tornavam mais simples, pois basicamente os polinômios são regidos por cálculos de fácil manipulação e além disso, dependendo da função, tal aplicação seria extremamente necessária.

Percebemos que os resultados assim obtidos, necessitavam de uma análise de precisão, pois o Polinômio de Taylor proporciona uma aproximação dos valores de uma determinada função, por falta ou excesso. Portanto utilizamos um resultado conhecido como Resto de Lagrange, para obtenção da estimativa do erro ao substituirmos o valor da função pelo do Polinômio.

Nas Séries de Taylor observamos que o objetivo não era mais obter aproximações, mas representar efetivamente uma determinada função num intervalo real. Nesse caso vimos que a função deveria ser infinitamente derivável e que o intervalo de convergência da série, determinaria onde a igualdade entre a função e a Série de Taylor que a representava, seria satisfeita.

Concluimos o trabalho aplicando o Polinômio e a Série de Taylor, onde mostramos a irracionalidade do número de Euler, desenvolvemos uma fórmula para obter o valor de π e calculamos integrais definidas, substituindo uma função por um Polinômio de Taylor, obtendo assim aproximações de áreas.

Por fim fica a percepção da grande importância do trabalho desenvolvido por esse matemático brilhante, Brook Taylor, que num momento histórico sem nenhum recurso tecnológico, percebeu com bastante genialidade todas essas aproximações polinomiais e as representações em série infinitas, tornando essa teoria um tema essencial no estudo do cálculo diferencial e integral.

Referências Bibliográficas

- [1] A. CAMINHA, *Fundamentos de Cálculo da coleção PROFMAT*, SBM, Rio de Janeiro, 2015.
- [2] H. L. GUIDORIZZI, *Um curso de cálculo volume 1*, LTC, Rio de Janeiro, 2013 .
- [3] N. PISKOUNOV, *Calcul Différentiel et Integral*, Éditions MIR, Moscou, 1966.
- [4] A. MUNEM, *Cálculo*, Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, 2007.
- [5] W. SWOKOWSKI, *Cálculo com Geometria Analítica volume 1*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1983.
- [6] W. SWOKOWSKI, *Cálculo com Geometria Analítica volume 2*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1983.
- [7] J. STEWART, *Cálculo, volume 1*, Cengage Learning, São Paulo, 2013.
- [8] J. STEWART, *Cálculo, volume 2*, Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2006.
- [9] L. KONGUETSOFF, *Cálculo Diferencial e Integral*, McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1974.
- [10] L. LEITHOLD, *Cálculo com Geometria Analítica, volume 1*, Harper & Row, São Paulo, 1977.
- [11] L. LEITHOLD, *Cálculo com Geometria Analítica, volume 2*, Harper & Row, São Paulo, 1977.
- [12] M. URBANO, H. CORRÊA, A. AMÉLIA, *Cálculo Diferencial e Integral: funções de uma variável*, UFG, Goiânia, 1994.
- [13] D. HUGHES-HALLETT, A. GLEASON, *Calculus*, John Wiley & Sons , United States of America, 1974.
- [14] G. IEZZI, C. MURAKAMI, N. JOSÉ MACHADO, *Fundamentos de Matemática Elementar 8: Limites, derivadas e noções de integral*, Atual, São Paulo, 1993.

- [15] DIEDERICHSEN JULIETA, *Taylor Brook (1685-1731)*. Disponível em <http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/taylor.htm>. Acesso em: 21/05/2017.
- [16] BUSCABIOGRAFIAS, *Brook Taylor(1685/08/18-1731/12/29)*. Disponível em <https://www.buscabiografias.com/biografia/verDetalle/2155/Brook%20Taylor>. Acesso em: 21/05/2017.