

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid somantes

Ricardo Ferreira Dias

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2017

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid somantes

por

Ricardo Ferreira Dias

sob a orientação do

Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos

João Pessoa – PB
Agosto de 2017

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

D541e Dias, Ricardo Ferreira.

O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid somantes / Ricardo Ferreira Dias. - João Pessoa, 2017.
73 f.

Orientador: Jamilson Ramos Campos.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/PPGMAT

1. Matemática. 2. Espaços de sequências. 3. Operadores absolutamente somantes. 4. Sequências mid p -somáveis.
I. Título.

UFPB/BC

CDU - 51(043)

O espaço das sequências mid somáveis e operadores mid somantes

por

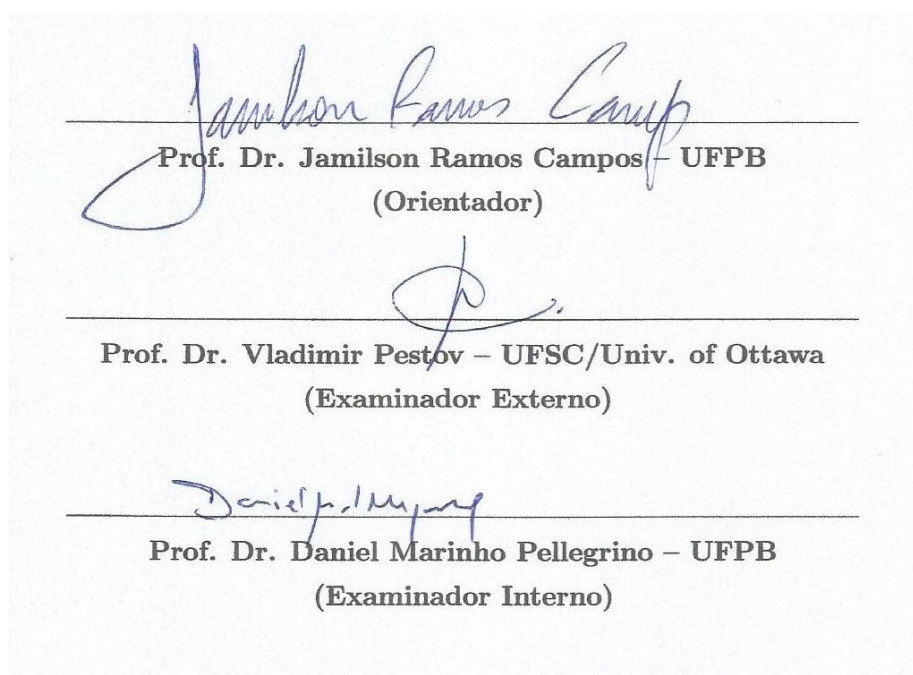
Ricardo Ferreira Dias ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise Funcional

Aprovada em 18 de Agosto de 2017.

Banca Examinadora:



¹O autor foi bolsista da Capes durante a elaboração desta dissertação.

Dedico este trabalho aos meus pais, Joaquim e Maria da Penha; a minha irmã, Naiele e a minha namorada, Juliana.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pela força espiritual, determinação, fé, esperança, saúde, paz, livramento de todos os males que poderiam interferir de forma negativa na minha formação acadêmica. Pelas pessoas maravilhosas que Ele colocou nos meus caminhos para me ajudarem e por toda benção e iluminação que vem derramando sobre a minha vida.

Aos meus Pais, Joaquim Severino Dias e Maria da Penha Ferreira Dias, que estão fazendo de tudo para me proporcionar uma boa formação, pelo incentivo, apoio, confiança, pela compreensão nos momentos de euforias, pelo amor e por absolutamente tudo que tens feito por mim.

À minha irmã, Naiele Ferreira Dias, que sempre está ajudando-me no que pode.

À minha namorada, Juliana Maria de Oliveira, pelo companheirismo, por toda compreensão em todos os momentos, pelo seu constante apoio incondicional, pelo seu carinho e preocupação para comigo, pela paciência, por sempre está comigo tanto nos bons e maus momentos da minha vida, pelo zelo, incentivo e por tudo. A ela, meu respeito, minha admiração, meu carinho e todo meu amor.

Ao meu orientador, Jamilson Ramos Campos, que esteve comigo em toda a construção deste trabalho do início ao fim, pela paciência de ensinar-me, por ter me dado a oportunidade de aprender coisas novas, pelo empenho, dedicação e ideias depositadas neste trabalho.

Ao meu amigo e professor Gutemberg Alves, por me acompanhar desde do Ensino Médio até o mestrado. Seus ensinamentos e sua amizade são fundamentais para mim.

Ao professor Esdras Jafet, por sua constante disponibilidade e incentivo na minha trajetória desde a Graduação até o ingresso ao mestrado.

Ao meu amigo Lucas de Carvalho, pelos momentos de estudos, pela convivência e por todo aprendizado.

A todas as pessoas que não citei aqui mas que ajudaram-me de forma direta e indireta para a obtenção e realização desta Dissertação e da minha conclusão do curso.

Aos professores Daniel Pellegrino e Vladimir Pestov, membros da Banca Examinadora, pela correções, pelas sugestões e valiosas contribuições.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Muito obrigado a todos!

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar um novo espaço de sequências introduzido por Karn e Sinha em 2014, a saber, o espaço das sequências $\text{mid } p$ -somáveis. Mais especificamente, estudaremos um recente trabalho de G. Botelho e J. R. Campos que aprofunda o estudo seminal do espaço e apresenta novas classes de operadores envolvendo este novo espaço e os espaços clássicos de sequências absolutamente e fracamente p -somáveis, denominados operadores absolutamente $\text{mid } p$ -somantes e operadores fracamente $\text{mid } p$ -somantes. A partir disto, estudamos um novo teorema de fatoração, envolvendo estas novas classes de operadores, para os operadores absolutamente p -somantes.

Palavras-chave: Espaços de sequências; Operadores absolutamente somantes; Sequências $\text{mid } p$ -somáveis; Operadores absolutamente e fracamente $\text{mid } p$ -somantes.

Abstract

The main goal of this work is to study a new sequence space introduced in 2014 by Karn and Sinha, namely the space of mid p -summable sequences. More specifically, we will study a recent work by G. Botelho and J.R. Campos, which deepens the seminal study of this space and presents new classes of operators involving the new space and the classical sequence spaces of absolutely and weakly p -summable sequences, called absolutely mid p -summing and weakly mid p -summing operators. From this, we study a new factorization theorem, involving these new classes of operators, for the absolutely p -summing operators.

Keywords: Sequence spaces; Absolutely summing operators; Mid p -summing sequences; Absolutely and weakly mid p -summing operators.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Tópicos de Análise Funcional	3
1.2 Séries em espaços de Banach	11
2 Operadores absolutamente somantes	16
2.1 Espaços de sequências a valores vetoriais	16
2.2 Operadores absolutamente (p, q) -somantes	30
3 O espaço das sequências mid somáveis	38
3.1 O espaço $\ell_p^{\text{mid}}(E)$	38
3.2 Incomparabilidade dos espaços $\ell_p^u(E)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(E)$	46
3.3 A classe de sequências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$	47
3.4 Operadores mid somantes	51
3.5 Uma fatoração para operadores absolutamente somantes	60
Referências Bibliográficas	62

Notações

A seguir, listamos algumas notações utilizadas neste trabalho.

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto $\{1, 2, 3, \dots\}$;
- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais;
- $\mathbb{C}$ denota o conjunto dos números complexos;
- $\mathbb{K}$ denota o corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- X, Y denotam espaços topológicos ou classes de sequência;
- E, F, G e H denotam espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$;
- BAN denota a família de todos os espaços de Banach;
- $(\mathcal{L}(E; F); \|\cdot\|)$ denota o espaço vetorial normado, sobre $\mathbb{K}$, de todos os operadores lineares e contínuos de E em F , munido com a norma usual do sup;
- E' denota o dual topológico de E , isto é, $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$;
- E'' denota o bidual topológico de E ;
- T' denota o operador adjunto de T ;
- e_j denota a sequência escalar $\left(0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \dots\right)$;
- i denota o operador inclusão;
- id_E denota a aplicação identidade em E ;
- B_E denota a bola unitária fechada no espaço E ;
- $\dim(E)$ denota a dimensão de E ;
- $E \xrightarrow{1} F$ denota que $E \subseteq F$ e $\|\cdot\|_F \leq \|\cdot\|_E$ para todo $x \in E$;

- $E \stackrel{1}{=} F$ denota que E é isomorfo a F e $\|x\|_F = \|x\|_E$ para todo $x \in E$;
- $(x_j)_{j=1}^n$ denota a sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$;
- $J_E : E \longrightarrow E''$ denota o mergulho canônico de E em E'' ;
- $\Pi_{p;q}(E; F)$ denota o conjunto dos operadores lineares e contínuos absolutamente $(p; q)$ -somante entre espaços de Banach E e F ;
- $\Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E; F)$ denota o conjunto dos operadores lineares e contínuos absolutamente mid $(p; q)$ -somante entre os espaços de Banach E e F ;
- $W_{p,q}^{\text{mid}}(E; F)$ denota o conjunto dos operadores lineares e contínuos fracamente mid $(p; q)$ -somante entre os espaços de Banach E e F ;

Introdução

Um conjunto S de um espaço de Banach E é dito ser *limitado* se para toda sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ fraco* nula em E' , tem-se $f_n \rightarrow 0$ uniformemente em S . Perceba que o autor estar usando o termo “*limitado*” em um contexto diferente usado em Análise Funcional: um subconjunto S de um espaço normado E é limitado quando existe uma constante $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$, para todo $x \in S$. Os conjuntos limitados surgiram a partir de um erro cometido por I. M. Gelfand [9]. Ele dizia que um subconjunto S em um espaço de Banach E é compacto se, e somente se, toda sequência fraco-nula em E' é uniformemente nula em S . Todo conjunto compacto goza dessa propriedade, no entanto R. Phillips, em um trabalho de 1940 ([14]), construiu um exemplo de um conjunto não compacto que possui essa propriedade.

O conceito de conjunto limitado pode ser generalizado para o conceito p -limitado por: um subconjunto S de um espaço de Banach E é dito p -limitado ($1 \leq p < \infty$), se para toda sequência fraco* p -somável $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in E'$ (isto é, $\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^p < \infty$, para todo $x \in E$) existe um $(\alpha_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ tal que $|\varphi_n(x)| \leq \alpha_n$, para todo $x \in S$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Recentemente os autores dos trabalhos de [17, 15, 4, 6] e [7] estudaram o conceito de conjuntos p -compactos para $1 \leq p < \infty$.

Sendo $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, fazendo uso da aplicação $T_x : \ell_{p^*} \rightarrow E$, dada por $T_x(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n x_n$, onde $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{p^*}$, dizemos que $K \subset E$ é relativamente p -compacto se existir um $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(E)$ tal que $K \subset T_x(B(\ell_{p^*}))$. Similarmente, um subconjunto $K \subset E$ é dito ser (relativamente) fracamente p -compacto se existir um $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ tal que $K \subset T_x(B(\ell_{p^*}))$.

É um fato que os conjuntos p -compactos são p -limitados (ver [10, Proposition 2.1]). Ainda sobre a aplicação T_x mostra-se que:

Proposição 0.1 ([10], Proposition 2.4). O conjunto $T_x(B_{\ell_{p^*}})$ é p -limitado se, e somente se, para toda $(f_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$, tem-se $((f_n(x_k))_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p)$.

A partir deste resultado, Karn e Sinha definem um novo espaço de sequências que chamam de *espaço das sequências operador p -somáveis*, como sendo o espaço das sequências que satisfazem uma (e portanto ambas) das condições equivalentes da proposição acima. Eles estudam em que condições esse novo espaço coincide com os

espaços das sequências fortemente e fracamente p -somáveis e uma classe de operadores definidos entre o novo espaço e o das sequências fracamente p -somáveis.

Em 2017, os pesquisadores G. Botelho, J. R. Campos e J. Santos, em seu artigo [2], retomaram o estudo desse espaço, buscando aprofundar resultado do artigo seminal e avançar no sentido de ampliar a teoria, principalmente provendo resultados ausentes ou pouco explorados. Eles definem uma norma completa para esse novo espaço e estudam mais profundamente classes de operadores, sob o ponto de vista da teoria de ideais. O principal objetivo do nosso trabalho é fazer um estudo do novo espaço por meio do trabalho [2].

Nosso texto se apresenta na seguinte forma: O Capítulo 1 é provido de algumas definições e resultados clássicos de Análise Funcional que serão necessários para o desenvolvimento de outros resultados no decurso de todo o texto. No Capítulo 2, estudaremos diversos espaços de sequências a valores vetoriais e, além disso, estudaremos também a classe dos operadores absolutamente $(p; q)$ -somantes. O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de um novo espaço de sequência introduzido no trabalho de Karn-Sinha, tendo como base o trabalho [1] de Botelho, Campos e Santos. Ainda neste capítulo, estudaremos duas novas classes de operadores relacionadas com esse novo espaço de sequências e, por fim, apresentaremos um novo teorema de fatoração para operadores absolutamente p -somantes.

Capítulo 1

Preliminares

No decorrer deste capítulo apresentaremos resultados de Análise Funcional que serão fundamentais para o desenvolvimento e compreensão dos assuntos que trataremos nos Capítulos 2 e 3 desse trabalho. Na primeira seção apresentaremos alguns resultados clássicos tais como o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach e suas consequências. Na segunda seção, apresentaremos um pouco da teoria de séries em espaços de Banach.

Muitas das demonstrações dos resultados aqui apresentados, em parte pelo fato de serem bem conhecidas, serão omitidas e uma referência a elas será pontuada.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

Nesta seção revisitaremos algumas definições e resultados clássicos de Análise Funcional que, sobretudo, serão usados no decurso de todo esse trabalho. A principal referência aqui usada é o excelente livro [3].

Denotaremos por B_E a bola unitária fechada no espaço normado E , definida por $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

Definição 1.1. Um função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_E : E &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto \|x\|_E, \end{aligned} \tag{1.1}$$

definida no espaço vetorial E , é dita ser uma *norma* quando as seguintes propriedades são satisfeitas

P.1 $\|x\|_E \geq 0$, para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

P.2 $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

P.3 $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$, para todos $x, y \in E$.

Sendo assim, o espaço vetorial E munido com a função em (1.1) é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*, que designaremos por $(E, \|\cdot\|_E)$. Todo espaço vetorial normado E se torna um espaço métrico com a métrica induzida pela norma, isto é,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

Com isso, dizemos que E é um *espaço de Banach* quando for um espaço métrico completo com a métrica induzida por uma norma.

Apresentaremos agora um resultado de grande importância em nosso trabalho e cuja demonstração pode ser encontrada em [3, Proposição 1.1.1].

Proposição 1.1. Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E . Então F é um espaço de Banach se, e somente se, F for fechado em E .

Apresentaremos agora alguns espaços de sequências escalares que são clássicas na Análise Funcional e serão muito usados de em nossos estudos. Além disso, ainda servirão como base para generalizações a valores vetoriais, como apresentaremos mais adiante. Denotamos

$$\begin{aligned} c_{00} &:= \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ com } a_j = 0, \forall j \geq j_0 \right\}, \\ c_0 &:= \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_j a_j = 0 \right\}, \\ \ell_p &:= \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\} \text{ e} \\ \ell_{\infty} &:= \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists M \geq 0 \text{ com } |a_j| \leq M \right\}. \end{aligned}$$

Esses espaços de sequências são chamados, respectivamente, espaço das sequências eventualmente nulas, espaço das sequências nulas, espaço das sequências p -somáveis e espaço das sequências limitadas.

Os teoremas a seguir, a despeito de sua grande aplicação prática, também são fundamentais para mostrar que o espaço ℓ_p é um espaço vetorial normado.

Teorema 1.2 (Desigualdade de Holder para sequências). Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então

$$\sum_{j=1}^n |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$

Demonstração: Veja [[11], pág.12 à 14]. □

Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski para seqüências). Para $p \geq 1$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j + b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^n |b_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e escalares $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$.

Demonstração: Veja [[11], pág.14-15]. □

Sobre os espaços ℓ_∞ e ℓ_p definimos as seguintes normas, respectivamente,

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j |a_j|$$

e

$$\|(a_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.2)$$

com as quais eles são espaços de Banach. Esse fato é mostrado em [3].

Mostra-se que c_0 é subespaço fechado de ℓ_∞ , então, pela Proposição 1.1 obtemos c_0 é espaço de Banach. Porém, c_{00} não goza desta propriedade, pois c_{00} não é subespaço fechado de c_0 (Veja [3], pág.7).

Apresentaremos agora um pouco da teoria dos operadores lineares contínuos entre espaços de Banach.

Um *operador linear contínuo* entre espaços normados E e F , ambos sobre um corpo $\mathbb{K}$, é uma função $T : E \longrightarrow F$, que é linear, isto é,

$$T(x + \lambda y) = T(x) + \lambda T(y), \quad \forall x, y \in E \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}$$

e contínua:

$$\begin{aligned} &\text{Para todos } x_0 \in E \text{ e } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon \\ &\text{sempre que } x \in E \text{ e } \|x - x_0\| < \delta. \end{aligned}$$

É importante observar que muitas vezes não é tão simples classificar um operador linear quanto à sua continuidade via definição. Assim, apresentaremos em seguida um teorema que nos traz algumas caracterizações de um operador linear contínuo.

Teorema 1.4. *Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) T é lipschitziano.
- (b) T é uniformemente contínuo.
- (c) T é contínuo.
- (d) T é contínuo em algum ponto de E .
- (e) T é contínua na origem.
- (f) $\sup_{x \in B_E} \|T(x)\| < \infty$.
- (g) Existe $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\|_F \leq C \|x\|_E$, $\forall x \in E$.

Demonstração: Veja [[3], Teorema 2.1.1]. □

O conjunto de todos os operadores lineares contínuos entre os espaços vetoriais normados E e F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. Este conjunto, munido com as operações usuais de funções torna-se um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

A seguinte proposição apresenta a definição de uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 1.5. Sejam E e F espaços normados.

- (a) A expressão

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

- (b) Para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$ vale a seguinte desigualdade

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \cdot \|x\|_E.$$

- (c) Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ também é um espaço de Banach.

Demonstração: (a) Verifiquemos as propriedades de norma vistas na Definição 1.1.
P.1 - É óbvio que $\|T\| \geq 0$, pois, $\|T(x)\| \geq 0$, para todo $x \in E$. Mais ainda, se $\|T\| = 0$ temos $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in B_E$. Daí, se $x \neq 0$, temos

$$\frac{1}{\|x\|} \|T(x)\| = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = 0.$$

Assim, $\|T(x)\| = 0$, para todo $x \in E$, o que implica $T(x) = 0$, para todo $x \in E$ e portanto $T = 0$. A recíproca é evidente.

P.2 - Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $T \in \mathcal{L}(E, F)$, temos

$$\|\lambda T\| = \sup_{x \in B_{E'}} \|\lambda T(x)\| = \lambda \sup_{x \in B_{E'}} \|T(x)\| = \lambda \|T\|.$$

P.3 - Para quaisquer $T, T^* \in \mathcal{L}(E, F)$, segue que

$$\begin{aligned} \|T + T^*\| &= \sup_{x \in B_{E'}} \|(T + T^*)(x)\| = \sup_{x \in B_{E'}} \|T(x) + T^*(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in B_{E'}} (\|T(x)\| + \|T^*(x)\|) \\ &\leq \sup_{x \in B_{E'}} \|T(x)\| + \sup_{x \in B_{E'}} \|T^*(x)\| \\ &= \|T\| + \|T^*\|. \end{aligned}$$

(b) Para $0 \neq x \in E$, temos

$$\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \sup_{y \in B_{E'}} \|T(y)\|.$$

Disto, obtemos

$$\|T(x)\| \leq \sup_{y \in B_{E'}} \|T(y)\| \|x\|$$

e, pelo item (a), conclui-se que $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$.

(c) Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, sempre que $n, m \geq n_0$. Daí obtemos,

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|, \quad (1.3)$$

sempre que $x \in E$ e $n, m \geq n_0$. Isso mostra que, para todo $x \in E$, a sequência $(T_n(x))_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em F . Como F é um espaço de Banach, temos que a sequência converge em F . Assim, podemos definir

$$\begin{aligned} T : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto T(x) := \lim_n T_n(x). \end{aligned}$$

Observe que, pelas propriedades do limite, a linearidade de T segue diretamente. Agora fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (1.3) temos,

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \|(T_n - T)(x)\| \leq \|T_n - T\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|, \quad (1.4)$$

sempre que $x \in E$ e $n \geq n_0$. Para finalizar, mostraremos que $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$. Fazendo $n = n_0$ para todo $x \in E$, obtemos

$$\|T_{n_0}(x) - T(x)\| = \|(T_{n_0} - T)(x)\| \leq \|T_{n_0} - T\| \|x\| \leq \epsilon \|x\|,$$

o que nos mostra que $(T - T_{n_0}) \in \mathcal{L}(E, F)$ e, portanto,

$$T = (T - T_{n_0}) + T_{n_0} \in \mathcal{L}(E, F).$$

Finalmente, segue de (1.4) que $\|T_n - T\| \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$, e assim temos que $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$. $\square$

Quando $F = \mathbb{K}$, $(\mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ será um espaço de Banach chamado de *dual topológico* de E , denotado por E' , cujos elementos serão chamados de *funcionais lineares contínuos*.

O teorema a seguir diz respeito a aplicações abertas e contínuas, isto é, aplicações que transformam conjuntos abertos em conjuntos abertos. Mais precisamente, o próximo resultado estabelece condições para que um operador linear e contínuo entre espaços de Banach seja uma aplicação aberta.

Teorema 1.6 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração: Veja [[3], Teorema 2.4.2]. $\square$

O próximo resultado nos oferece uma caracterização para operadores lineares contínuos muito útil em diversas situações apresentadas em nosso trabalho.

Teorema 1.7 (Teorema do Gráfico Fechado). *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. São equivalentes:*

- (a) T é contínuo.
- (b) O gráfico de T , $G(T) := \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\}$, é um subespaço fechado de $E \times F$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} \xi : E \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \xi(x, y) := \|y - T(x)\|. \end{aligned} \tag{1.5}$$

De fato ξ é contínua, pois é a composta de funções contínuas $(\|y - (\cdot)\| \circ T)$. Também temos

$$G(T) := \{(x, y) \in E \times F : \|y - T(x)\| = 0\} = \xi^{-1}(0)$$

e isso mostra que $G(T)$ é fechado, por ser imagem inversa do fechado por ξ .

(b) $\Rightarrow$ (a) Usando a norma $\|(x, y)\|_1 := \|x\|_E + \|y\|_F$ em $E \times F$ e supondo que $G(T)$ é fechado, segue que, $G(T)$ é um espaço de Banach. A função projeção

$$\begin{aligned} \pi : G(T) &\longrightarrow E \\ (x, T(x)) &\longmapsto \pi(x, T(x)) := x \end{aligned}$$

é linear e bijetora (Veja: [12], pág.9). Além disso, π é contínua, pois

$$\|\pi(x, T(x))\| = \|x\| \leq \|x\| + \|T(x)\| = \|(x, T(x))\|_1.$$

Agora, tome $A \subseteq G(T)$ um subconjunto aberto. Do Teorema da Aplicação Aberta, segue que $(\pi^{-1})^{-1}(A) = A$ é aberto, portanto π^{-1} é contínua. Dessa forma, pelo Teorema 1.4, existe $C > 0$ tal que

$$\|\pi^{-1}(x)\|_1 = \|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|, \quad \text{sempre que } x \in E.$$

Logo,

$$\|T(x)\| \leq \|T(x)\| + \|x\| = \|(x, T(x))\|_1 \leq C \|x\|,$$

sempre que x estiver em E . Portanto, T é contínuo. $\square$

Definição 1.2. Sejam E e F espaços vetoriais normados e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. O operador assim definido

$$\begin{aligned} T' : F' &\longrightarrow E' \\ \varphi &\longmapsto T'(\varphi)(x) := \varphi(T(x)), \end{aligned}$$

é chamado de *operador adjunto* de T .

Mostra-se em [[12], Proposição 1.16] que se $T \in \mathcal{L}(E; F)$, então $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. E mais ainda, se T for um isomorfismo (isométrico), então T' também o é.

O próximo teorema apresenta sua importância não somente no campo da Matemática, mais também se sobressai em outras áreas na matemática ou fora dela, como por exemplo na Física, Teoria dos Jogos e Probabilidade.

Teorema 1.8 (Teorema de Hahn-Banach). *Sejam E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

$$p(ax) = |a| p(x) \quad \forall a \in \mathbb{K} \text{ e } \forall x \in E$$

e

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Se $G \subseteq E$ é um subespaço vetorial e $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear tal que $|\varphi(x)| \leq p(x)$, para todo $x \in G$, então existe um funcional linear $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que estende φ a E e que satisfaz $|\tilde{\varphi}| \leq p(x)$, para todo $x \in E$.

Demonstração: Veja [[3], Teorema 3.1.2.]. □

Apresentaremos alguns corolários que decorrem do Teorema de Hanh-Banach. Co-mumente, estes corolários também são chamados Teoremas de Hahn-Banach.

Corolário 1.9. Seja G um subespaço de um espaço normado E sobre um corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e seja $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$, cuja restrição a G coincide com φ , e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Demonstração: Defina a seguinte função

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = \|\varphi\| \|x\|. \end{aligned}$$

Temos,

$$p(ax) = \|\varphi\| \|ax\| = |a| \|\varphi\| \|x\|$$

e

$$p(x+y) = \|\varphi\| \|x+y\| \leq (\|x\| + \|y\|) \|\varphi\| = \|\varphi\| \|x\| + \|\varphi\| \|y\| = p(x) + p(y),$$

para todo $a \in \mathbb{K}$ e todos $x, y \in E$. Assim, como $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\| = p(x)$, para todo $x \in G$, pelo Teorema 1.8, existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a G coincide com φ e $|\tilde{\varphi}(x)| \leq p(x) = \|\varphi\| \|x\|$, para todo $x \in E$. Portanto, $\tilde{\varphi}$ é contínuo e $\|\tilde{\varphi}\| \leq \|\varphi\|$. Por outro lado,

$$\|\varphi\| = \sup_{x \in B_G} |\varphi(x)| = \sup_{x \in B_G} |\tilde{\varphi}(x)| \leq \sup_{x \in B_E} |\tilde{\varphi}(x)| = \|\tilde{\varphi}\|$$

e isso mostra que $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. □

Corolário 1.10. Seja E um espaço normado. Para quaisquer $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda x_0 &\longmapsto p(\lambda x_0) = \lambda \|x_0\| \end{aligned}$$

um funcional linear contínuo e $G = [x_0]$, o subespaço vetorial gerado por x_0 . Pelo Corolário 1.9, existe $\tilde{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{K}$ que coincide com φ em G e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Dessa forma,

$$\tilde{\varphi}(x_0) = \varphi(x_0) = \|x_0\|$$

e

$$\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} |\varphi(\lambda x_0)| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} |\lambda| \|x_0\| = \sup_{\lambda x_0 \in B_G} \|\lambda x_0\| = 1.$$

□

O corolário a seguir expressa uma relação dual para a norma de um vetor em E .

Corolário 1.11. Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \max \left\{ |\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1 \right\}.$$

Demonstração: Sejam $x \in E$ e $\varphi \in E'$. Pela continuidade de φ , temos $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \|x\|$. Daí,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} (\|\varphi\| \|x\|) = \|x\|. \quad (1.6)$$

Usando o Corolário 1.10, existe $\xi \in E'$ com $\|\xi\| = 1$ e $\xi(x) = \|x\|$. Assim

$$\|x\| = \xi(x) \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|. \quad (1.7)$$

Logo, de (1.6) e (1.7), obtemos a primeira igualdade. Para a segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned} \max \left\{ |\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1 \right\} &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \\ &= \|x\| = \|\xi(x)\| \\ &\leq \max \left\{ |\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1 \right\}. \end{aligned}$$

□

A próxima seção é dedicada a um breve estudo sobre séries em espaços de Banach.

1.2 Séries em espaços de Banach

Nesta seção trataremos de dois tipos especiais de séries: as que são *absolutamente convergentes* e as *incondicionalmente convergentes*. Veremos também as relações que as mesmas possuem quando o espaço em questão for de Banach e, por fim, exibiremos o bem conhecido *Teorema de Dvoretzky-Rogers*.

Definição 1.3. Sejam E um espaço de Banach e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E . Dizemos que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é

(a) *somável*, quando a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é convergente.

(b) *absolutamente somável*, quando a série $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| < \infty$.

(c) *incondicionalmente somável*, quando a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$ é convergente para toda permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Também é de costume dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente quando $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ e incondicionalmente convergente quando, dada qualquer permutação $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente.

Devido a um resultado de Dirichlet, sabemos que na reta as sequências incondicionalmente e absolutamente somáveis coincidem. De certa forma, o próximo resultado estabelece uma relação entre os conceitos caracterizando espaços de Banach arbitrários.

Proposição 1.12. Seja E um espaço vetorial normado. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) E é um espaço de Banach.

(ii) Toda sequência absolutamente somável em E é incondicionalmente somável.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Sejam E um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência absolutamente somável em E e σ uma permutação dos naturais. Considere $y_n = \|x_n\|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ absolutamente somável em $\mathbb{R}$, pois $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, e então $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{\sigma(n)}\| < \infty$. Assim, a sequência das somas parciais $\left(\sum_{k=1}^n \|x_{\sigma(k)}\| \right)_{n=1}^{\infty}$ é convergente. Para concluir, devemos mostrar que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é de Cauchy. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^m x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^n x_{\sigma(k)} \right\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_{\sigma(k)}\| < \sum_{k=n_0}^{\infty} \|x_{\sigma(k)}\| < \epsilon,$$

sempre que $n > m > n_0$. Observe que a última desigualdade segue do critério de Cauchy para séries. Assim, a sequência das somas parciais $\left(\sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} \right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E , isto é,

$$\sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)} \xrightarrow{n} x \in E,$$

o que mostra que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicionalmente somável.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Agora suponhamos que toda sequência absolutamente somável em E é incondicionalmente somável. Assim, nestas condições, a própria sequência é somável, basta tomar a permutação $\sigma = id$. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em E . Então, dado $k \in \mathbb{N}$ e tomando um $\epsilon = 2^{-k} > 0$, existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_n - x_m\| < 2^{-k}, \quad \text{sempre que } n, m \geq n_0^{(k)}.$$

Podemos encontrar uma sequência de índices $n_1 < n_2 < \dots$ tais que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$. Em particular

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Isso mostra que a série $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|$ é absolutamente convergente e, por hipótese é incondicionalmente convergente. Finalmente, note que

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}),$$

disto, tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$ temos que $(x_{n_{k+1}})_{k=1}^\infty$ é convergente. Daí, como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e admite uma subsequência convergente, então $(x_n)_{n=1}^\infty$ também converge para o mesmo limite da subsequência, implicando que E é um espaço de Banach. $\square$

Muitas vezes não é fácil dizer se uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em E é incondicionalmente somável usando apenas a definição. Portanto, o próximo teorema exhibe caracterizações para este tipo de sequências, que na maioria das vezes são mais preferíveis do que a própria definição.

Teorema 1.13. *Se E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em E , as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável.
- (b) Para cada $\epsilon > 0$, existe $m_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min M > m_\epsilon$, temos $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \epsilon$.
- (c) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é subsérie somável, ou seja, para qualquer sequência estritamente crescente $(k_n)_{n=1}^\infty$ de inteiros positivo, a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{k_n}$ é convergente.

(d) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sinal somável, isto é, para qualquer escolha de $\epsilon_n \in \{-1, 1\}$ temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x_n$ converge.

Demonstração: Veja [[12], Teorema 1.22]. $\square$

Para demonstrar o Teorema de Dvoretzky-Rogers, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 1.14. Seja E um espaço de Banach de dimensão $2n$. Então existem n vetores $y_1, \dots, y_n$ em E , com $\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1$ e $j = 1, \dots, n$, tais que para quaisquer escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tem-se

$$\left\| \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j \right\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demonstração: Veja [[12], Lema 1.26]. $\square$

O Teorema de Dvoretzky-Rogers é um resultado de grande importância para o estudo das séries em espaços de Banach. Ele garante a existência, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, de sequências incondicionalmente somáveis que não são absolutamente somáveis.

Teorema 1.15 (Dvoretzky-Rogers). *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então para qualquer escolha de $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_2 , existe uma sequência incondicionalmente somável $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E , com $\|x_n\| = |\lambda_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se escolhermos $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\ell_2 - \ell_1$, obteremos uma sequência somável que não é absolutamente somável.*

Demonstração: Tomemos $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ em ℓ_2 e escolhamos uma sequência de índices $(n_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{N}$ tais que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ e

$$\sum_{n \geq n_k} |\lambda_n|^2 \leq 2^{-2k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como E tem dimensão infinita, podemos tomar para todo $k \in \mathbb{N}$ um subespaço $E_k \subset E$ como dimensão $2(n_{k+1} - n_k)$. Pelo Lema 1.14, existem $(n_{k+1} - n_k)$ vetores, que denotaremos por $y_{n_k}, y_{n_k+1}, \dots, y_{n_{k+1}-1}$, com normas pertencentes ao intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ e tais que

$$\left\| \sum_{n=n_k}^N \alpha_n y_n \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^N |\alpha_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

sempre que N estiver entre n_k e $n_{k+1} - 1$ e para quaisquer escalares $\alpha_{n_k}, \dots, \alpha_N$.

Agora, seja $x_j := \frac{\lambda_j y_j}{\|y_j\|}$, para todo $j \geq n_1$. Observemos que $\|x_n\| = |\lambda_n|$, para todo

$n \geq n_1$, isto é, $(x_n)_{n=1}^\infty$ não é absolutamente somável. Para toda escolha $\epsilon_n = \pm 1$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=n_k}^N \epsilon_n x_n \right\| &= \left\| \sum_{n=n_k}^N \frac{\epsilon_n \lambda_n y_n}{\|y_n\|} \right\| \leq \left(\sum_{n=n_k}^N \frac{|\epsilon_n|^2 |\lambda_n|^2}{\|y_n\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \left(\sum_{n=n_k}^N |\lambda_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2(2^{-2k})^{\frac{1}{2}} = 2^{-k+1} \end{aligned}$$

sempre que N estiver entre n_k e $n_{k+1} - 1$. Veja ainda que se $n_k < n < m < n_{k+1}$ e $\alpha_{n_k} = 0, \dots, \alpha_{n-1} = 0, \alpha_n = \epsilon_n, \dots, \alpha_m = \epsilon_m$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n}^m \epsilon_j x_j \right\| &= \left\| \sum_{j=n_k}^m \alpha_j x_j \right\| = \left\| \sum_{j=n_k}^m \frac{\alpha_j \lambda_j y_j}{\|y_j\|} \right\| \\ &\leq \left(\sum_{j=n_k}^m \frac{|\alpha_j|^2 |\lambda_j|^2}{\|y_j\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \left(\sum_{j=n_k}^m |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2(2^{-2k})^{\frac{1}{2}} = 2^{-k+1}. \end{aligned}$$

Finalmente, mostraremos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_j x_j$ é de Cauchy em E . Para tanto, dado $\epsilon > 0$, seja $k_0 = k_0(\epsilon)$ tal que $\sum_{j=k_0}^\infty 2^{-j+1} < \epsilon$. Se $m > n > n_{k_0}$, então, existem $t \in \mathbb{N}$ e $k \geq k_0$ tais que $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ e $n_{k+t} \leq m \leq n_{k+t+1} - 1$.

Assim, se $t = 0$, o que já foi provado nos diz que

$$\left\| \sum_{j=n}^m \epsilon_j x_j \right\| \leq 2^{-k+1} < \sum_{j=k_0}^\infty 2^{-j+1} < \epsilon.$$

Se $t > 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=n}^m \epsilon_j x_j \right\| &\leq \left\| \sum_{j=n}^{n_{k+1}-1} \epsilon_j x_j \right\| + \left\| \sum_{n_{k+1}}^{n_{k+2}-1} \epsilon_j x_j \right\| + \dots + \left\| \sum_{j=n_{k+t}}^m \epsilon_j x_j \right\| \\ &\leq 2^{-k+1} + 2^{-(k+1)+1} + \dots + 2^{-(k+t)+1} \\ &\leq \sum_{j=k_0}^\infty 2^{-j+1} < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^\infty \epsilon_n x_n$ é de Cauchy em E e portanto converge para toda a escolha de $\epsilon_n = \pm 1$. Pelo Teorema 1.13, temos que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicionalmente somável. $\square$

Capítulo 2

Operadores absolutamente somantes

Neste capítulo, estudaremos diversos tipos de espaços de sequências a valores vetoriais e, além disso, estudaremos também um tipo de classe de operadores que melhoram a convergência de séries: a classe dos operadores absolutamente $(p; q)$ -somantes.

2.1 Espaços de sequências a valores vetoriais

O objetivo desta seção é generalizar os espaços de sequências que foram definidos no capítulo anterior e, além disso, exibir mais dois novos espaços, que servirão para estudar uma classe especial de operadores lineares e contínuos.

Vamos começar definindo o espaço das sequências limitadas a valores vetoriais.

Definição 2.1. Seja E um espaço vetorial normado. Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o conjunto

$$\begin{aligned}\ell_\infty(E) &:= \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \exists M \geq 0 \text{ com } \|x_j\|_E \leq M \right\} \text{ ou} \\ &:= \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sup_j \|x_j\|_E < \infty \right\}\end{aligned}$$

das *sequências limitadas* em E . Não é difícil mostrar que este conjunto de sequências é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências e que a função

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_\infty : \ell_\infty(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty := \sup_j \|x_j\|_E,\end{aligned}$$

define uma norma no espaço $\ell_\infty(E)$.

Proposição 2.1. Quando E for um espaço de Banach, $(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ também é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja E um espaço de Banach. Tomemos $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty(E)$ onde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k - x^r\|_\infty < \epsilon$, sempre que $k, r \geq k_0$. Em particular,

$$\|x_j^k - x_j^r\| \leq \sup_j \|x_j^k - x_j^r\| = \|x^k - x^r\|_\infty < \epsilon, \quad (2.1)$$

vale para todo $j \in \mathbb{N}$ e para $k, r \geq k_0$. Assim, fixando um $j \in \mathbb{N}$, temos que a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E e podemos definir a sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in E$ por $y_j = \lim_k x_j^k$. Fazendo $r \rightarrow \infty$ em (2.1), temos

$$\|x_j^k - y_j\|_E < \epsilon, \quad \text{sempre que } k \geq k_0 \text{ e } \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.2)$$

Em particular, tomando $k = k_0$, segue que $\sup_j \|x_j^{k_0} - y_j\|_E < \epsilon$ o que implica em $(x_j^{k_0} - y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ e, portanto, $y := x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_\infty(E)$. Por fim, por (2.2), temos

$$\sup_j \|x_j^k - y_j\|_E < \epsilon, \quad \text{sempre que } k \geq k_0,$$

o que nos diz que $\|x^k - y\|_\infty \xrightarrow{k} 0$. □

Definição 2.2. Seja E um espaço vetorial normado, denotamos por $c_{00}(E)$ o conjunto

$$c_{00}(E) := \{(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \text{existe } j_0 \in \mathbb{N} \text{ com } x_j = 0, \forall j \geq j_0\}.$$

das *sequências eventualmente nulas* em E e por $c_0(E)$ o conjunto

$$c_0(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \|x_j\|_E \xrightarrow{j} 0 \right\}.$$

das *sequências nulas* em E .

Como toda sequência eventualmente nula converge para zero e toda sequência nula é convergente, e portanto, limitada, é uma tarefa simples mostrar que $c_{00}(E)$ é subespaço vetorial de $c_0(E)$ e que $c_0(E)$ é subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$, com as operações usuais sobre sequências.

Em $c_0(E)$ e $c_{00}(E)$ consideraremos então a norma $\|\cdot\|_\infty$ herdada de $\ell_\infty(E)$ e mostraremos que $c_0(E)$ é um subespaço fechado em $\ell_\infty(E)$ com essa norma.

Proposição 2.2. Seja E um espaço de Banach. Então $c_0(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$.

Demonstração: Seja $(x^k)_{k=1}^\infty \in c_0(E)$, com $x^k \xrightarrow{k} y \in \ell_\infty(E)$. Dado $\epsilon > 0$, existe

$k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_j^k - y_j\|_E \leq \|(x_j^k)_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j \|x_j^k - y_j\|_E < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $k \geq k_0$ e $\forall j \in \mathbb{N}$. Como $x^{k_0} = (x_j^{k_0})_{j=1}^\infty \in c_0(E)$, temos $\|x_j^{k_0}\|_E \xrightarrow{j} 0$ e assim existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_j^{k_0}\|_E < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{sempre que } j \geq j_0.$$

Desta forma,

$$\|y_j\|_E = \|y_j - x_j^{k_0} + x_j^{k_0}\|_E \leq \|y_j - x_j^{k_0}\|_E + \|x_j^{k_0}\|_E < \epsilon,$$

para todo $j \geq j_0$. O que mostra que $\|y_j\|_E \rightarrow 0$ e, consequentemente, $c_0(E)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$. $\square$

A Proposição 2.2, juntamente com Proposição 1.1, nos diz que $(c_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Porém, $c_{00}(E)$ não goza desta propriedade, pois não é fechado em $c_0(E)$ (Veja, [3], pág.7).

Por simplicidade, até o fim desta seção iremos sempre considerar $1 \leq p < \infty$ e E um espaço vetorial normado.

Definição 2.3. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita ser *fortemente p-somável* quando

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_E^p < \infty. \quad (2.3)$$

Denotaremos por $\ell_p(E)$ o espaço de todas as sequências fortemente p-somáveis em E . Assim, de (2.3) podemos dizer que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ se, e somente se, $(\|x_j\|_E)_{j=1}^\infty \in \ell_p$.

Segundo a definição, é imediato que $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$. Além disso, temos que $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty$ sequências em $\ell_p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos $(\|x_j\|_E)_{j=1}^\infty, (\|y_j\|_E)_{j=1}^\infty \in \ell_p$. Daí,

$$\lambda (\|x_j\|_E)_{j=1}^\infty + (\|y_j\|_E)_{j=1}^\infty := (\lambda \|x_j\|_E + \|y_j\|_E)_{j=1}^\infty \in \ell_p$$

pois ℓ_p é espaço vetorial. Sobre o espaço $\ell_p(E)$ é possível definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_p : \ell_p(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{\ell_p(E)} := \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|_E^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

na qual satisfaz todas as propriedades de norma vistas em 1.1, o que torna-o um espaço vetorial normado. Quando não houver risco de ambiguidade entre ℓ_p e $\ell_p(E)$ denotaremos $\|\cdot\|_{\ell_p(E)}$ simplesmente por $\|\cdot\|_p$.

Proposição 2.3. $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach sempre que E for um espaço de Banach.

Demonstração: Sendo E um espaço de Banach, tomemos $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Denotaremos, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Assim dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k - x^r\|_p < \epsilon$, sempre que $k, r \geq k_0$. Disto, observemos que

$$\|x_j^k - x_j^r\|_E^p \leq \sum_{j=1}^\infty \|x_j^k - x_j^r\|_E^p = \|x^k - x^r\|_p^p < \epsilon^p, \quad (2.4)$$

sempre que $k, r > k_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Concluimos então que a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E , e desta forma podemos definir $y_j := \lim_k x_j^k \in E$, o que nos fornece uma sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ de elementos de E . Resta-nos mostrar agora que $y \in \ell_p(E)$ e $\|x^k - y\|_p \xrightarrow{k} 0$. Como $(x^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$ e de (2.4) temos que

$$\sum_{j=1}^m \|x_j^k - x_j^r\|_E^p < \epsilon^p,$$

sempre que $k, r > k_0$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Fazendo $r \rightarrow \infty$, temos

$$\sum_{j=1}^m \|x_j^k - y_j\|_E^p < \epsilon^p, \quad \text{sempre que } k \geq k_0, \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Agora, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.5) obtemos

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j^k - y_j\|_E^p = \|x^k - y\|_p^p < \epsilon^p \quad \text{sempre que } k > k_0.$$

O que mostra que $\|x^k - y\|_p \xrightarrow{k} 0$. Finalmente, como $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial, resulta que

$$y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_p(E),$$

o que conclui a demonstração. □

Definição 2.4. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita ser *fracamente p -somável* quando

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty, \quad \text{sempre que } \varphi \in E'. \quad (2.6)$$

Denotaremos por $\ell_p^w(E)$ o conjunto de todas as seqüências fracamente p-somáveis em E . De (2.6) observe que, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ se, somente se, $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p$, para todo $\varphi \in E'$. Observe também que $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de seqüências. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi \in E'$. Pelo Teorema 1.3, temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_j + y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda \varphi(x_j) + \varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |\lambda| \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

O que mostra que $\lambda(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty := (\lambda x_j + y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ e, portanto, $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial.

Sobre o espaço $\ell_p^w(E)$ é possível definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{p,w} : \ell_p^w(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que mostraremos estar bem definida e para a qual não é difícil mostrar que satisfaz todas as propriedades de norma vistas na Definição 1.1.

Lema 2.4. Sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ estiver em $\ell_p^w(E)$, teremos

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Demonstração: Defina o seguinte operador

$$\begin{aligned} T_x : E' &\longrightarrow \ell_p \\ \varphi &\longmapsto T_x(\varphi) := (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

e note que a boa definição deste operador segue diretamente da definição de $\ell_p^w(E)$. Se o operador T_x for linear e contínuo, teremos

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\| (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{\ell_p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T_x(\varphi)\|_{\ell_p} = \|T_x\| < \infty,$$

o que mostra o lema e, consequentemente, a boa definição da função norma em 2.7.

Linearidade da T_x : Sejam $\varphi, \psi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} T_x(\lambda\varphi + \psi) &= ((\lambda\varphi + \psi)(x_j))_{j=1}^\infty = (\lambda\varphi(x_j) + \psi(x_j))_{j=1}^\infty \\ &= \lambda(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty + (\psi(x_j))_{j=1}^\infty = \lambda T_x(\varphi) + T_x(\psi). \end{aligned}$$

Continuidade da T_x : Vamos mostrar que seu gráfico é fechado. Seja $((\varphi_k, T_x(\varphi_k)))_{k=1}^\infty$ tal que $(\varphi_k, T_x(\varphi_k)) \rightarrow (\varphi, y)$, isto é,

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ em } E' \text{ e } T_x(\varphi_k) = (\varphi_k(x_j))_{j=1}^\infty \xrightarrow{k} y := (y_j)_{j=1}^\infty \text{ em } \ell_p. \quad (2.8)$$

De 2.8 segue que, para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_k(x_j) - y_j|^p \leq \sum_{j=1}^\infty |\varphi_k(x_j) - y_j|^p = \|(\varphi_k(x_j))_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_p^p < \epsilon^p,$$

sempre que $k \geq k_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo

$$\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} y_j \text{ em } \mathbb{K}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Por outro lado, como $\varphi_k \xrightarrow{k} \varphi$ em E' , temos

$$\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} \varphi(x_j) \text{ em } \mathbb{K}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Portanto, por (2.9) e (2.10) e pela unicidade do limite temos, $\varphi(x_j) = y_j \forall j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$y = (y_j)_{j=1}^\infty = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = T_x(\varphi).$$

Desta forma, o gráfico de T_x é fechado em $E' \times \ell_p$ donde concluímos que T_x é contínuo. $\square$

Proposição 2.5. $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{p,w})$ é um espaço de Banach, sempre que E for um espaço de Banach.

Demonstração: De fato, sejam E um espaço de Banach e $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Denotaremos para cada $k \in \mathbb{N}$, temos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_{p,w} = \left\| (x_j^k - x_j^r)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon,$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Então, para todo $\varphi \in B_{E'}$ e $j \in \mathbb{N}$, temos

$$|\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \right) < \epsilon^p,$$

sempre que $k, r \geq k_0$ e isso implica que $|\varphi(x_j^k - x_j^r)| < \epsilon$, sempre que $k, r \geq k_0$ e para todo j . Assim, pelo Teorema de Hahn-Banach,

$$\|x_j^k - x_j^r\|_E = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j^k - x_j^r)| < \epsilon, \quad \text{sempre que } k, r \geq k_0 \text{ e } \forall j \in \mathbb{N}.$$

Diante disso, concluímos que a sequência $(x_j^k)_{j=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E e desta forma podemos definir $y_j := \lim_k x_j^k \in E$ o que nos fornece uma sequência $y = (y_j)_{j=1}^{\infty}$ de elementos de E . Resta-nos mostrar que $y \in \ell_p^w(E)$ e $\|x^k - y\|_{p,w} \xrightarrow{k} 0$. Com efeito, para cada $m \in \mathbb{N}$ e, para todo $\varphi \in B_{E'}$ temos

$$\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \|(x_j^k - x_j^r)\|_{p,w}^p < \epsilon^p, \quad (2.11)$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Agora, fazendo $r \rightarrow \infty$ em (2.11), segue que

$$\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j^k - y_j)|^p < \epsilon^p, \quad \text{sempre que } k \geq k_0 \text{ e } \forall m \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Por fim, fazendo $m \rightarrow \infty$ em (2.12), obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j)|^p \leq \epsilon^p \quad \text{sempre que } k \geq k_0. \quad (2.13)$$

O que mostra que a sequência $(x^k - y) \in \ell_p^w(E)$ se $k \geq k_0$. Consequentemente, para $k = k_0$, concluímos que $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_p^w(E)$. Além disso, de (2.13) temos

$$\|x^k - y\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \quad \text{sempre que } k \geq k_0,$$

o que prova que $\|x^k - y\|_{p,w} \xrightarrow{k} 0$. □

Uma importante e útil característica dos espaços $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ será apresentada agora pela próxima proposição e melhor comentada no Capítulo 3.

Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Definimos $\widehat{T}^s : \ell_p(E) \rightarrow \ell_p(F)$ e $\widehat{T}^w : \ell_p^w(E) \rightarrow \ell_p^w(F)$ como sendo os operadores induzidos por T pela relação

$$(x_j)_{j=1}^\infty \longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty.$$

Proposição 2.6. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $\hat{T}^s$ e $\hat{T}^w$ operadores como definidos acima e $1 \leq p < \infty$. Então,

(a) $\hat{T}^s \in \mathcal{L}(\ell_p(E), \ell_p(F))$.

(b) $\hat{T}^w \in \mathcal{L}(\ell_p^w(E), \ell_p^w(F))$.

Demonstração: (a) Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, então

$$\begin{aligned} \left\| \hat{T}^s((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_p &= \left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|T\|^p \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|T\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_p. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Isso mostra que $\hat{T}^s$ esta bem definido. Além disso, dados $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} \hat{T}^s((x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty) &= (T(x_j + \lambda y_j))_{j=1}^\infty = (T(x_j) + \lambda T(y_j))_{j=1}^\infty \\ &= (T(x_j))_{j=1}^\infty + (T(y_j))_{j=1}^\infty \\ &= \hat{T}^s((x_j)_{j=1}^\infty) + \lambda \hat{T}^s((y_j)_{j=1}^\infty) \end{aligned}$$

e temos que $\hat{T}^s$ é linear e sua continuidade segue de (2.14).

(b) Note que $\frac{\varphi \circ T}{\|T\|} \in B_{E'}$, para todo $\varphi \in B_{F'}$ e $T \neq 0$. Com efeito, $\|\varphi \circ T\| \leq \|\varphi\| \|T\| \leq \|T\|$ e assim

$$\left\| \frac{\varphi \circ T}{\|T\|} \right\| = \frac{\|\varphi \circ T\|}{\|T\|} \leq 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left\| \hat{T}^w((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|T\|^p \left| \frac{\varphi \circ T}{\|T\|}(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|T\| \sup_{\varphi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \left| \frac{\varphi \circ T}{\|T\|}(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|T\| \sup_{\xi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \|T\| \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}. \quad (2.15)$$

O que mostra que $\widehat{T}^w$ está bem definido. Além disso, procedendo como no caso de (a), mostramos que $\widehat{T}^w$ é linear e contínua. $\square$

A proposição a seguir nos fornece uma caracterização para espaço $\ell_p^w(E)$.

Proposição 2.7. Sejam $1 < p < \infty$ e E um espaço de Banach. Então $\ell_p^w(E)$ e $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ são isomorfos isometricamente.

Demonstração: Defina

$$\begin{aligned} J: \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E) &\longrightarrow \ell_p^w(E) \\ T &\longmapsto (T(e_i))_{i=1}^\infty. \end{aligned}$$

Como $(e_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$, pois

$$\|(e_i)_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{\xi \in B_{(\ell_{p^*})'}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi(e_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_p}} \left(\sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 1,$$

e T é contínuo, segue da Proposição 2.6 (b) que J está bem definido. É claro que J é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} \|J(T)\|_{p,w} &= \|(T(e_i))_{i=1}^\infty\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi(T(e_i))_{i=1}^\infty\|_p \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \varphi(T(e_i)) \right| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \left| \varphi \left(T \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i \right) \right) \right| \\ &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(T((\lambda_i)_{i=1}^\infty))| \\ &= \sup_{(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}} \|T((\lambda_i)_{i=1}^\infty)\| = \|T\|, \end{aligned}$$

sempre que T estiver em $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$. Assim, J é uma isometria.

Para finalizar, sendo $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, defina $T_x: \ell_{p^*} \rightarrow E$ por $T_x((\lambda_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty x_i \lambda_i$. A boa definição de T_x segue de

$$\left\| \sum_{i=m+1}^n \lambda_i x_i \right\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \varphi \left(\sum_{i=m+1}^n \lambda_i x_i \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
 &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \varphi(x_i) \right| \\
 &\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{i=m+1}^n |\lambda_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=m+1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
 &= \left(\sum_{i=m+1}^n |\lambda_i|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=m+1}^n |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

pois, como $(\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \ell_{p^*}$ e $(x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, a expressão (2.16) nos diz que a sequência das somas parciais da série é de Cauchy, e portanto $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i x_i$ é convergente. Assim, T_x está bem definido. T_x é claramente linear e ainda, calculando como em (2.16),

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\| \leq \|(\lambda_i)_{i=1}^n\|_{p^*} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_i))_{i=1}^n\|_p,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|T_x((\lambda_i)_{i=1}^\infty)\| \leq \|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_{p^*} \|(\lambda_i)_{i=1}^\infty\|_{w,p}$$

donde $T_x \in \mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$. Com isso obtemos

$$J(T_x) = (T_x(e_i))_{i=1}^\infty = (x_i)_{i=1}^\infty,$$

o que mostra que J é sobrejetor. Portanto, concluímos que J é um isomorfismo isométrico. $\square$

Observação 2.1. Seja J_E o mergulho canônico de E em E'' . Então $(J_E(x_j))_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E'')}$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E)}$. Com efeito, como J_E é uma isometria linear, pela Proposição 2.6, segue que

$$\left\| (J_E(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} \leq 1.$$

Apresentaremos um resultado útil que é consequência imediata do Princípio da Reflexividade Local (Veja [[5], pág.73]) e que será usado posteriormente em nosso texto.

Proposição 2.8. Sejam E um espaço de Banach, $\varphi_i \in E'$, $i = 1, \dots, m$, e $p \geq 1$. Então

$$\sup_{\psi \in B_{E''}} \left(\sum_{i=1}^m |\psi(\varphi_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x \in B_E} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi_i(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 2.2. Note que se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, temos $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty$ e, portanto,

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_p = \lim_n \left(\sum_{j=n}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0. \quad (2.17)$$

Esta observação em geral não vale para $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{p,w})$, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 2.1. Seja $(e_j)_{j=1}^\infty$ a sequência dos vetores canônicos em c_0 . Em Nogueira [13], mostra-se que $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(c_0)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$. Agora, vejamos que a sequência $(e_j)_{j=1}^\infty$ não satisfaz a propriedade da observação acima com a norma $\|\cdot\|_{p,w}$. Para todo $\psi \in B_{(c_0)'}'$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{(c_0)'}} \left(\sum_{j=n}^\infty |\varphi(e_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{j=n}^\infty |\psi(e_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |\psi(e_n)|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Corolário 1.10), para cada $e_n \in c_0$ existe $\psi_n \in (c_0)'$ tal que $\|\psi_n\| = 1$ e $\psi_n(e_n) = \|e_n\|_\infty = 1$. Logo,

$$\|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \geq |\psi_n(e_n)| = 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \neq 0$. Isto nos permite falar na seguinte definição:

Definição 2.5. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita ser *incondicionalmente p -somável* quando

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0.$$

Denotamos o espaço das sequências incondicionalmente p -somáveis por

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) : \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0 \right\}. \quad (2.18)$$

O termo incondicionalmente p -somável é justificado pelo seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [[5], Proposition 8.3].

Teorema 2.9. *Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é incondicionalmente somável se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1^u(E)$.*

Vamos mostrar agora que o espaço $\ell_p^u(E)$, com a norma induzida de $\ell_p^w(E)$, é um espaço de Banach.

Proposição 2.10. $\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$ com a norma $\|\cdot\|_{p,w}$, quando E for um espaço de Banach.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço de $\ell_p^w(E)$. De fato, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Por (2.18), temos

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = \lim_n \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0$$

e segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_n \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \\ &\leq \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty + \lambda(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \\ &\leq \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} + |\lambda| \lim_n \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0, \end{aligned}$$

o que mostra que $(x_j)_{j=1}^\infty + \lambda(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Agora, sejam E um espaço de Banach, $(x^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência em $\ell_p^u(E)$ e $y = (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ tal que $x^k \xrightarrow{k} y \in \ell_p^w(E)$. Temos que, dados $\epsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_j^k)_{j=n}^\infty\|_{p,w} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{sempre que } n \geq n_0(k), \quad (2.19)$$

e também temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\epsilon}{2} > \|x^k - y\|_{p,w} = \|(x_j^k)_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} \geq \|(x_j^k)_{j=n}^\infty - (y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w}, \quad (2.20)$$

sempre que $k \geq k_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Logo, diante de (2.19) e (2.20) concluímos que

$$\begin{aligned} \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} &= \|(y_j)_{j=n}^\infty + (x_j^{k_0})_{j=n}^\infty - (x_j^{k_0})_{j=n}^\infty\|_{p,w} \\ &\leq \|(y_j)_{j=n}^\infty - (x_j^{k_0})_{j=n}^\infty\|_{p,w} + \|(x_j^{k_0})_{j=n}^\infty\|_{p,w} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0(k)$, isto é, $\lim_n \|(y_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0$. □

Vamos estabelecer algumas relações de inclusões entre os espaços de sequências estudados. O símbolo $E \xhookrightarrow{1} F$ denotará que E é um subespaço vetorial de F e

$$\|x\|_F \leq \|x\|_E, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Proposição 2.11. Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e E um espaço de Banach. Então

(a) $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q(E)$.

(b) $\ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^w(E)$.

(c) $\ell_p^u(E) \xhookrightarrow{1} \ell_q^u(E)$.

Demonstração: (a) Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, temos $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty$ e assim $\lim_n \|x_j\| = 0$. Por isso, $\sup_j \|x_j\| =: \lambda < \infty$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^{q-p} \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^n \lambda^{q-p} \|x_j\|^p = \lambda^{q-p} \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p.$$

Agora, fazendo $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^q \leq \lambda^{q-p} \sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p,$$

ou seja,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q^q \leq \lambda^{q-p} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p^p \quad (2.21)$$

o que mostra, $\ell_p(E) \subseteq \ell_q(E)$. Finalmente, como

$$\|x_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Segue que $\lambda = \sup_j \|x_j\| \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p$. Portanto, de (2.21) obtemos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q^q \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p^{q-p} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p^p = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p^q,$$

ou seja, $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_q \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$.

(b) Para demonstração deste item usaremos o item (a). Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, então

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\| (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_q \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\| (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} < \infty.$$

Isso mostra que $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_q^w(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$.

(c) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Pelo item (b) temos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}$, assim

$$\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{q,w} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Disto,

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{q,w} \leq \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} = 0$$

e dessa forma, $\ell_p^u(E) \subseteq \ell_q^u(E)$. Novamente pelo item (b), $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. $\square$

Para mostrar uma das inclusões da próxima proposição precisaremos dos resultados a seguir:

Definição 2.6. Seja E um espaço vetorial normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito ser fracamente limitado se $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E'$.

O lema seguinte mostra a equivalência das definições de conjuntos limitados e conjuntos fracamente limitados, cuja demonstração pode ser encontrada em [13, Lema 2.4.9].

Lema 2.12. Seja E um espaço vetorial normado e A um subconjunto de E . Então A é limitado se, e somente se, A é fracamente limitado.

Agora, apresentaremos um resultado que estabelece relações de inclusões nos espaços de sequências $\ell_p(E)$, $\ell_p^u(E)$, $\ell_p^w(E)$ e $\ell_\infty(E)$.

Proposição 2.13. Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach. Então as seguintes inclusões são satisfeitas:

$$\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^u(E) \subseteq \ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E),$$

onde a inclusão $\subseteq$ acima ocorre com igualdade de norma.

Demonstração: A Proposição 2.10 nos dá imediatamente a inclusão $\ell_p^u(E) \subseteq \ell_p^w(E)$.

Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Então, por definição temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty, \quad (2.22)$$

para todo funcional $\varphi \in E'$. Daí, como a série (2.22) é convergente, seu termo geral converge para zero, isto é, $|\varphi(x_j)|^p \xrightarrow{j} 0$, o que implica $|\varphi(x_j)| \xrightarrow{j} 0$. Portanto, $\varphi(x_j) \xrightarrow{j} 0$, para todo funcional $\varphi \in E'$. Isso mostra que a sequência $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty$ é limitada, ou seja, para qualquer $\varphi \in E'$ o conjunto $\{\varphi(x_j) : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado ou, equivalentemente, $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado. Pelo Lema 2.12 segue que $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Portanto, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$, isto é, $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$. Além disso,

$$\|x_j\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w},$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Tomando o supremo sobre $j \in \mathbb{N}$ obtemos $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}$, donde $\ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$.

Finalmente, seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Então

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty \|\varphi\|^p \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p < \infty, \end{aligned}$$

donde $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p < \infty$. Como $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$, então $\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p < \infty$ e

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{p,w} \leq \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_p = \lim_n \left(\sum_{j=n}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

donde se conclui que $\ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E)$. □

Por fim, vale a seguinte versão fraca do Teorema de Dvoretzky-Rogers, cuja demonstração pode ser encontrada em [[8], Theorem 2.18]:

Teorema 2.14 (Dvoretzky-Rogers). *Sejam $1 \leq p < \infty$ e E um espaço de Banach de dimensão infinita. Então existem seqüências fracamente p -somáveis em E que não são fortemente p -somáveis.*

2.2 Operadores absolutamente (p, q) -somantes

Para finalizar este capítulo apresentaremos nesta seção uma classe especial de operadores Lineares e contínuos que melhoram a convergência de séries em espaços de Banach.

Recordemos da seção anterior que se $T \in \mathcal{L}(E, F)$ os operadores induzidos por T pela relação $(x_j)_{j=1}^\infty \mapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty$ entre espaços $\ell_p(\cdot)$ e espaços $\ell_p^w(\cdot)$ estão sempre bem definidos. Dado o Teorema de Dvoretzky-Rogers, um caso especial ocorre quando o operador induzido por T entre $\ell_q^w(E)$ e $\ell_p(E)$ está bem definido.

Definição 2.7. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. O operador T é dito ser *absolutamente (p, q) -somante* (ou

(p, q) -somante) quando o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

estiver bem definido.

Denotaremos por $\Pi_{p,q}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores absolutamente (p, q) -somantes de E em F . Se $p = q$, denotaremos esse conjunto por $\Pi_p(E, F)$.

Como nem sempre é uma tarefa fácil mostrar que um operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$ é absolutamente (p, q) -somante, mostraremos algumas caracterizações que podem facilitar essa tarefa. Antes disso, apresentaremos uma propriedade do supremo de uma função $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ que será empregada na demonstração dessas caracterizações e que se fará presente em outras demonstrações no decorrer deste trabalho.

Lema 2.15. Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ em função. Então

$$\sup_{x \in A} \left(\sup_{y \in B} f(x, y) \right) = \sup_{y \in B} \left(\sup_{x \in A} f(x, y) \right)$$

Demonstração: Veja [[13], Lema 2.4.10]. □

A proposição seguinte, estabelece algumas caracterizações para os operadores absolutamente (p, q) -somante.

Proposição 2.16. Sejam E, F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. As seguintes sentenças são equivalentes:

(i) T é (p, q) -somante.

(ii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.23)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E, j = 1, \dots, n$.

(iii) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$.

(iv) Existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

(v) $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.

Mais que isto, $\pi_{p;q}(T) := \inf \{C > 0 : C \text{ satisfaz a desigualdade (2.23)}\}$ satisfaz $\pi_{p;q}(T) = \|\widehat{T}\|$.

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (iii) Sejam T um operador (p, q) -somante e $\left((x^k, \widehat{T}(x^k)) \right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência convergente no produto cartesiano $\ell_q^w(E) \times \ell_p(F)$, isto é, $(x^k, \widehat{T}(x^k)) \rightarrow (x, y)$. Então

$$x^k \rightarrow x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E) \quad (2.24)$$

e

$$\widehat{T}(x^k) \rightarrow y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F). \quad (2.25)$$

De (2.24), dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 > 0$ tal que

$$|\varphi(x_j^k - x_j)|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j)|^q \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j)|^q \right) = \|x^k - x\|_{q,w}^q < \epsilon^q,$$

sempre que $k \geq k_0$, para todo $\varphi \in E'$ e para todo $j \in \mathbb{N}$. Dessa forma, pelo Teorema de Hanh-Banach, obtemos

$$\|x_j^k - x_j\|^q = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j^k - x_j)|^q < \epsilon^q$$

sempre que $k \geq k_0$ e para todo $j \in \mathbb{N}$ e, portanto, temos $x_j^k \xrightarrow{k} x_j$ em E . Como T é contínua, segue

$$\lim_k T(x_j^k) = T(x_j), \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

De (2.25) temos, dado $\epsilon > 0$, existe k_0' tal que

$$\|T(x_j^k) - y_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j^k) - y_j\|^p = \left\| (T(x_j^k))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p^p = \left\| \widehat{T}(x^k) - y \right\|_p^p < \epsilon^p,$$

sempre que $k \geq k_0'$ e para todo $j \in \mathbb{N}$, o que nos dá

$$\lim_k T(x_j^k) = y_j \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

De (2.26) e (2.27) e da unicidade do limite, segue que

$$\widehat{T}(x) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} = y$$

e pelo Teorema do Gráfico Fechado $\widehat{T}$ é contínua. Então,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Se vale (iii), então existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, tomando $(x_j)_{j=1}^{\infty} = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \in c_{00}(E) \subset \ell_q^w(E)$, temos

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

e segue o resultado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.28)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, $j = 1, \dots, n$. Então, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ temos,

$$\begin{aligned} \left\| (T(x_j))_{j=1}^{\infty} \right\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_n \sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \lim_n \left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_n \left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_n \left[C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ &= C \sup_n \left[\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{2.15}{=} C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\sup_n \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
 &= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
 &= C \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w}.
 \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Segue trivialmente de (iii) que $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ estiver em $\ell_q^w(E)$. Além disso, perceba que

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E)}} \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_p \\
 &\leq \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E)}} C \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{q,w} = C.
 \end{aligned}$$

O que mostra $\|\widehat{T}\| \leq \pi_{p,q}(T)$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) segue de $\ell_q^u(E) \subseteq \ell_q^w(E)$ e (iv) $\Rightarrow$ (v) é imediata.

(v) $\Rightarrow$ (ii). Se $(T(x_j))_{j=1}^\infty$ estiver em $\ell_p(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^u(E)$, então o operador

$$\begin{aligned}
 \widehat{T} : \ell_q^u(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\
 (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty
 \end{aligned}$$

está bem definido. Portanto, como $\widehat{T}$ é linear e seguindo de forma análoga feita em (i) $\Rightarrow$ (iii), obteremos que o gráfico de $\widehat{T}$ é fechado e concluímos que $\widehat{T}$ é contínuo. Assim,

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^n) \right\|_p \leq \|\widehat{T}\| \|(x_j)_{j=1}^n\|_{q,w},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E, j = 1, \dots, n$. A expressão acima também nos dá $\pi_{p,q}(T) \leq \|\widehat{T}\|$. $\square$

O resultado a seguir justifica as restrições sobre p e q na definição de operador absolutamente somante.

Proposição 2.17. Sejam E e F espaços de Banach. Se $p < q$ então apenas o operador nulo é (p, q) -somante.

Demonstração: Com efeito, como $p < q$ então existe $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$. Logo, para todo $0 \neq x \in E$, a sequência $(\lambda_j x)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$, pois,

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(\lambda_j x)|^q = \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q |\varphi(x)|^q = |\varphi(x)|^q \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^q \right) < \infty.$$

Agora, suponhamos por absurdo que $T \in \Pi_{p,q}(E, F)$, $T \neq 0$. Então, pela Proposição 2.16, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|T(\lambda_j x)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\varphi(\lambda_j x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (2.29)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$ onde $j = 1, \dots, n$. Consequentemente, obtemos

$$\begin{aligned} \|T(x)\| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^q |\varphi(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} |\varphi(x)| \right] \\ &= C \|x\| \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

e tomando o supremo sobre $x \in B_{E'}$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C}{\|T\|} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.30)$$

Para finalizar, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.30), temos $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, o que é absurdo. $\square$

Não é difícil mostrar que o conjunto $\Pi_{p,q}(E, F)$ munido com a função

$$\begin{aligned} \pi_{p,q}(\cdot) : \Pi_{p,q}(E, F) &\longrightarrow [0, \infty) \\ T &\longmapsto \pi_{p,q}(T) := \|\widehat{T}\| \end{aligned}$$

é um espaço vetorial normado e vale a seguinte relação

$$\|T\| \leq \pi_{p,q}(T), \text{ para todo } T \in \Pi_{p,q}(E, F). \quad (2.31)$$

De fato, fazendo $n = 1$ em (ii) da Proposição 2.16, temos

$$\|T(x)\| \leq \pi_{p,q}(T) \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \pi_{p,q}(T) \|x\|. \quad (2.32)$$

Agora, tomando o supremo sobre $x \in B_E$ em (2.32), obtemos $\|T\| \leq \pi_{p,q}(T)$.

Proposição 2.18. Se $1 \leq q \leq p < \infty$, então $(\Pi_{p,q}(E, F), \pi_{p,q}(\cdot))$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $(T_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $(\Pi_{p,q}(E, F), \pi_{p,q}(\cdot))$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\pi_{p,q}(T_n - T_m) < \epsilon, \text{ sempre que } n, m > n_0.$$

Dessa forma, como $\|\cdot\| \leq \pi_{p,q}(\cdot)$, segue que

$$\|T_n - T_m\| \leq \pi_{p,q}(T_n - T_m) < \epsilon, \text{ sempre que } n, m > n_0.$$

Portanto, $(T_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E, F)$ e como $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço de Banach, temos

$$T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E, F).$$

Defina

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p^w(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Note que $\widehat{T}$ é um operador linear limitado. Com efeito, como $q \leq p$, temos

$$\left\| \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_{p,w} = \left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} \leq \|T\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} \leq \|T\| \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{q,w},$$

onde a última desigualdade segue do fato de $\ell_q^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E)$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja

$$\begin{aligned} \widehat{T}_n : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto (T_n(x_j))_{j=1}^\infty. \end{aligned}$$

Como $\left\| \widehat{T}_n \right\| = \pi_{p,q}(T_n)$, temos que $(\widehat{T}_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_q^w(E), \ell_p(F))$. Além disso, como $\ell_p(F)$ é um espaço de Banach, segue que $\mathcal{L}(\ell_q^w(E), \ell_p(F))$ também é um espaço de Banach e assim

$$\widehat{T}_n \longrightarrow T^* \in \mathcal{L}(\ell_q^w(E), \ell_p(F)). \quad (2.33)$$

Assim, dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E)$ e $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \widehat{T}_n((x_j)_{j=1}^\infty) - T^*((x_j)_{j=1}^\infty) \right\|_p < \epsilon, \text{ sempre que } n \geq n_0.$$

Fazendo

$$(y_j)_{j=1}^\infty = T^*((x_j)_{j=1}^\infty) \in \ell_p(F),$$

temos

$$\|T_n(x_j) - y_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|T_n(x_j) - y_j\|^p = \left\| (T_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_p^p < \epsilon^p,$$

sempre que $n \geq n_0$ e $\forall j \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\lim_n T_n(x_j) = y_j, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.34)$$

Por outro lado, como $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E, F)$, temos

$$\lim_n T_n(x_j) = T(x_j), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

e pela unicidade do limite, segue de (2.34) e (2.35) que

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Assim

$$\widehat{T}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} = T^*((x_j)_{j=1}^{\infty}),$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ o que acarreta $\widehat{T} = T^*$ e $\widehat{T}_n \longrightarrow \widehat{T} \in \mathcal{L}(\ell_q^w(E), \ell_p(F))$ e mostra que o operador induzido $\widehat{T}$ está bem definido.

Para finalizar nossa demonstração, resta mostrar que $T_n \xrightarrow{\pi_{p,q}(\cdot)} T$. De fato, por (2.33), dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\pi_{p,q}(T_n - T) = \left\| \widehat{T_n - T} \right\| = \left\| \widehat{T}_n - \widehat{T} \right\| = \left\| \widehat{T}_n - T^* \right\| < \epsilon,$$

para todo $n \geq n_0$.

□

Capítulo 3

O espaço das sequências mid somáveis

Inspirado no espaço definido por A. K. Karn e D. P. Sinha, os pesquisadores G. Botelho, J. R. Campos e J. Santos, em seu artigo [2] (que será a principal referência deste capítulo), estudaram mais atentamente esse espaço de sequências, apresentando novas propriedades, uma norma completa e estudando mais profundamente classes de operadores que trabalham sobre esse tipo de espaço. Começaremos agora a parte final de nosso trabalho.

3.1 O espaço $\ell_p^{\text{mid}}(E)$

O novo espaço de sequências definido por Karn e Sinha recebeu o nome de espaço das sequências operador p -somáveis. Esse nome foi alterado no trabalho [2] para um nome mais conveniente: espaço das sequências mid p -somáveis. A necessidade dessa mudança será clara na Seção 3.4. Começemos com a definição adotada no trabalho de Botelho *et al.* [2], equivalente à definição original do trabalho de Karn e Sinha.

Definição 3.1. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita ser *mid p -somável* quando

$$\left((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \right)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Simbolicamente,

$$\ell_p^{\text{mid}}(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N} : \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p < \infty, \text{ sempre que } (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E') \right\}.$$

Não é difícil mostrar que $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. Vamos, a partir de agora, mostrar que esse é um espaço de Banach,

quando munido de uma norma conveniente. Para isso precisaremos estudar alguns fatos e mostrar alguns resultados.

Em seu trabalho original, Karn e Sinha mostram que $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^{\text{mid}}(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ e que vale o seguinte resultado:

Teorema 3.1 ([10], Proposition 3.1 and Theorem 4.5). *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. Então:*

- (i) $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$ se, e somente se, $\Pi_p(E; \ell_p) = \mathcal{L}(E; \ell_p)$.
- (ii) $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p(E)$ se, e somente se, E é um subespaço de $L_p(\mu)$ para alguma medida de Borel μ .

Diremos que E é um espaço *fraco p -mid* se $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$; e é um espaço *forte p -mid* quando $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p(E)$.

Então surge a questão natural a se verificar se $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ pode herdar a norma de $\ell_p^w(E)$ e ser completo com ela. Esse não será o caso como veremos por meio das próximas duas proposições. Mas antes precisamos de um lema.

Lema 3.2. Se E é um espaço de dimensão infinita, então as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ não são equivalentes em $c_{00}(E)$. Em particular, $\ell_p(E)$ não é fechado em $\ell_{p,w}(E)$.

Demonstração: Primeiramente, observemos que $c_{00}(E)$ é denso nos espaços $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ e $(\ell_p^u(E), \|\cdot\|_{p,w})$. De fato, para o primeiro caso, seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ e $\epsilon > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\sum_{j=n_0+1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

Como $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$, a sequência

$$x' = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}, 0, 0, 0, \dots) \in c_{00}(E)$$

e

$$\|x - x'\|_p = \left(\sum_{j=n_0+1}^\infty \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon.$$

A densidade de $c_{00}(E)$ no espaço $(\ell_p^u(E), \|\cdot\|_{p,w})$ segue diretamente da definição de $\ell_p^u(E)$. Agora, suponhamos por absurdo que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$. Então

$$\ell_p(E) = \overline{c_{00}(E)}^{\|\cdot\|_p} = \overline{c_{00}(E)}^{\|\cdot\|_{p,w}} = \ell_p^u(E).$$

Assim, como $\ell_p(E) = \ell_p^u(E)$, segue que o operador identidade em E é absolutamente p -somante, o que é absurdo, pelo Teorema de Dvoretz-Rogers Fraco. Para finalizar,

suponhamos por absurdo que $\ell_p(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$, daí, temos que $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ e $(\ell_p(E), \|\cdot\|_{p,w})$ são completos. Assim, a aplicação identidade

$$\begin{aligned} i : (\ell_p(E), \|\cdot\|_p) &\longrightarrow (\ell_p(E), \|\cdot\|_{p,w}) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto i((x_j)_{j=1}^\infty) \end{aligned}$$

é linear e bijetora e contínua, pois, dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in (\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ temos

$$\|i((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{p,w} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p, \quad (3.1)$$

onde a desigualdade segue do fato de $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E)$. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, i é um isomorfismo, então

$$\|i^{-1}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_p = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}. \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2) obtemos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w},$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ estiver em $\ell_p(E)$. Portanto, para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$, concluímos que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$, o que é absurdo. $\square$

Proposição 3.3. Seja E um espaço fraco p -mid. São equivalentes:

- (a) $\ell_p(E)$ é fechado em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$.
- (b) As normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ são equivalentes em $\ell_p(E)$.
- (c) As normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$.
- (d) E tem dimensão finita.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Seja $\ell_p(E)$ fechado em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$. Então os espaços $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ e $(\ell_p(E), \|\cdot\|_{p,\text{mid}})$ são completos. Assim, procedendo como no lema anterior, a aplicação identidade entre esses espaços é contínua pois, dado $(x_j)_{j=1}^\infty \in (\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ temos

$$\|i((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{p,\text{mid}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p, \quad (3.3)$$

onde a desigualdade segue do fato de $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E)$. Assim, pelo Teorema da Aplicação Aberta, i é um isomorfismo e

$$\|i^{-1}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_p = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}}. \quad (3.4)$$

De (3.3) e (3.4), obtemos

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_p(E)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Segue do fato de $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Como E é um espaço fraco p -mid, pelo Teorema da Aplicação Aberta, as normas $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ são equivalentes em $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$, consequentemente são equivalentes em $c_{00}(E)$. Pelo item (b), as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ são equivalentes, em particular, no espaço $c_{00}(E)$. Desta forma, pelo Lema 3.2, segue que E tem dimensão finita.

(d) $\Rightarrow$ (a) Como E é um espaço fraco p -mid, temos $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$. Assim, sendo E um espaço de dimensão finita, segue pelo Lema 3.2 que $\ell_p(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E) = \ell_p^{\text{mid}}(E)$. $\square$

De modo inteiramente análogo, mostra-se a proposição seguinte.

Proposição 3.4. Seja E um espaço forte p -mid. São equivalentes:

- (a) $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$.
- (b) As normas $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ são equivalentes em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$.
- (c) As normas $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ e $\|\cdot\|_{p,w}$ são equivalentes em $c_{00}(E)$.
- (d) E tem dimensão finita.

Assim, mostramos que em geral $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ não é completo com a norma herdada de $\ell_p^w(E)$ e, por isso, demanda uma norma particular. Vamos agora definir essa norma.

É possível definir a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{p,\text{mid}} : \ell_p^{\text{mid}}(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

a qual mostraremos estar bem definida.

Lema 3.5. Sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty$ estiver em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$, teremos

$$\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Demonstração: Sendo $x = (x_j)_{j=1}^\infty$, defina o seguinte operador

$$\begin{aligned} T_x : \ell_p^w(E') &\longrightarrow \ell_p(\ell_p) \\ (\varphi_n)_{n=1}^\infty &\longmapsto T_x((\varphi_n)_{n=1}^\infty) := \left((\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \right)_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

Observe que a boa definição deste operador segue diretamente da definição de $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ e sua linearidade é de fácil demonstração. Assim, se o operador T_x for contínuo, teremos

$$\begin{aligned} \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \|T_x\| \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \\ &= \|T_x\| \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \right) \\ &= \|T_x\| < \infty, \end{aligned}$$

o que prova nosso resultado e, conseqüentemente, a boa definição da função (3.5). Desta forma, basta provar que T_x é contínuo e, para isso, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado.

Seja $(\varphi^k, T_x(\varphi^k))_{k=1}^\infty$ uma sequência convergente no produto cartesiano $\ell_p^w(E') \times \ell_p(\ell_p)$, isto é,

$$\varphi^k \xrightarrow{k} \varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \text{ em } \ell_p^w(E') \quad (3.6)$$

$$T_x(\varphi^k) \xrightarrow{k} \psi = \left((\psi_{j,n})_j \right)_n \text{ em } \ell_p(\ell_p). \quad (3.7)$$

Como $\ell_p^w(E') \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(E')$, temos de (3.6) que

$$\varphi_n^k \xrightarrow{k} \varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Por outro lado, como $\ell_p(\ell_p) \xhookrightarrow{1} \ell_\infty(\ell_p)$, segue de (3.7) que

$$\left((T_x(\varphi^k))_{j,n} \right)_j \xrightarrow{k} (\psi_{j,n})_j, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Como φ_n^k é contínua, obtemos de (3.8)

$$\varphi_n^k(x_j) \xrightarrow{k} \varphi_n(x_j), \quad \forall n, j \in \mathbb{N}$$

e de (3.9) obtemos

$$\varphi_n^k(x_j) \xrightarrow{k} \psi_{j,n}, \quad \forall n, j \in \mathbb{N},$$

pois $(T_x(\varphi^k))_{j,n} = (\varphi_n^k(x_j))_j$. Assim, pela unicidade do limite acima temos $\varphi_n(x_j) =$

$\psi_{j,n}$, para todo $n, j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$T_x(\varphi) = \left((\varphi_n(x_j))_j \right)_n = \left((\psi_{j,n})_j \right)_n = \psi.$$

Daí, o gráfico de T_x é fechado em $\ell_p^w(E') \times \ell_p(\ell_p)$ e T_x é contínuo. $\square$

Agora, estamos em condições para verificar as propriedades de normas para a função (3.5). Então,

P.1) É óbvio que $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \geq 0$ para toda $(x_j)_{j=1}^\infty$, pois $|\varphi_n(x_j)| \geq 0, \forall n, j \in \mathbb{N}$. Se $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\varphi_n(x_j) = 0$ sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} = \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} = 0 &\Rightarrow \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p = 0, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \\ &\Rightarrow \varphi_n(x_j) = 0, \forall (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} \text{ e } \forall j \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

onde, a última implicação segue do Corolário de Hanh-Banach (1.11).

P.2) Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} &= \|(\lambda x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(\lambda x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\lambda|^p \cdot |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \cdot \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}}. \end{aligned}$$

P.3) Para desigualdade triangular da norma mid, sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$.

Então,

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} &= \|(x_j + y_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j + y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j) + \varphi_n(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j) + \varphi_n(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \left\| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty + (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\left\| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p + \left\| (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \left\| (\varphi_n(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{j=1}^\infty \left\| (\varphi_n(y_j))_{j=1}^\infty \right\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)| \right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(y_j)| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}}.
\end{aligned}$$

Com isso, a função dada em (3.5) define um norma no espaço $\ell_p^{\text{mid}}(E)$.

A proposição seguinte mostra a relação de inclusão entre os espaços $\ell_p(E)$, $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ e $\ell_p^w(E)$.

Proposição 3.6. Seja E um espaço de Banach. Então

$$\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E).$$

Demonstração: A sequência $(\varphi_1, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p^w(E')}$, sempre que φ_1 estiver em $B_{E'}$.

Com efeito,

$$\|(\varphi_1, 0, 0, \dots)\|_{p,w} = \sup_{\psi \in B_{E''}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(\varphi_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\psi \in B_{E''}} |\psi(\varphi_1)| = \|\varphi_1\|.$$

Assim, se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$, temos

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,w} &= \sup_{\varphi_1 \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_1(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(\varphi_1, 0, 0, \dots) \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{p,\text{mid}}, \end{aligned}$$

o que mostra $\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E)$. Para a segunda inclusão, observemos primeiro que se $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, como $J_E(B_E)$ é um subconjunto normante de E'' , temos

$$\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w}^p = \sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p.$$

Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\ell_p(E)$, definindo o seguinte conjunto $J = \{j \in \mathbb{N} : x_j \neq 0\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p &= \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left(\frac{x_j}{\|x_j\|} \cdot \|x_j\| \right) \right|^p \\ &= \sum_{j \in J} \left(\|x_j\|^p \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \varphi_n \left(\frac{x_j}{\|x_j\|} \right) \right|^p \right) \right) \\ &\leq \sum_{j \in J} \left(\|x_j\|^p \cdot \left(\sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p \right) \right) \\ &= \left(\sup_{x \in B_E} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^p \right) \cdot \sum_{j \in J} \|x_j\|^p \\ &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w}^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p. \end{aligned}$$

Com isso, tomando o $\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \|\cdot\|_{p,\text{mid}} \leq \|\cdot\|_p$ segue. Isso

nos mostra que $\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E)$. □

Finalmente, o resultado a seguir, mostra que a norma definida em (3.5) torna o espaço $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ completo, sempre que E for um espaço de Banach.

Proposição 3.7. O espaço $(\ell_p^{\text{mid}}(E), \|\cdot\|_{p,\text{mid}})$ é Banach, sempre que E for um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ um sequência de Cauchy em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \|x^k - x^r\|_{p,\text{mid}} &= \left\| (x_j^k - x_j^r)_{j=1}^\infty \right\|_{p,\text{mid}} \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \epsilon, \end{aligned} \quad (3.10)$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Procedendo de maneira inteiramente análoga como foi feito no espaço $\ell_p^w(E)$, obtemos que a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E , para cada $j \in \mathbb{N}$. Assim, como E é um espaço de Banach, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $y_j \in E$ tal que $x_j^k \xrightarrow{k} y_j$ em E . Com isso, formamos um sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em E . Agora, basta provar que $y \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e que $\|x^k - y\|_{p,\text{mid}} \xrightarrow{k} 0$. Com efeito, podemos fazer $r \rightarrow \infty$ em (3.10) e obtemos

$$\left\| (x_j^k - y_j)_{j=1}^\infty \right\|_{p,\text{mid}} < \epsilon, \quad \text{sempre que } k \geq k_0.$$

Isso nos mostra que $\|x^k - y\|_{p,\text{mid}} \xrightarrow{k} 0$ e que a sequência $(x^k - y) \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$, para todo $k \geq k_0$. Consequentemente, para $k = k_0$, temos $(x_0^k - y) \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e assim, como $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ é um espaço vetorial, concluímos que $y = x_0^{k_0} - (x_0^{k_0} - y) \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$. $\square$

3.2 Incomparabilidade dos espaços $\ell_p^u(E)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(E)$

Na Proposição 2.13 vimos as seguintes relações de inclusões para os espaços

$$\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^u(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E).$$

Já na Proposição 3.6 vimos também as seguintes relações de inclusões

$$\ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E).$$

Isso nos motiva a perguntar qual a relação entre os espaços $\ell_p^u(E)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(E)$. O exemplo a seguir mostra que os espaços $\ell_p^u(E)$ e $\ell_p^{\text{mid}}(E)$, em geral, são incomparáveis. Para isso,

como consequência imediata do Theorem 3.7 de [8], precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 3.8. O operador $u : c_0 \longrightarrow \ell_p$ é 2-somante.

Exemplo 3.1. Por um lado, combinando o Teorema 3.1 (i) com a proposição 3.8, obtemos $\ell_2^{\text{mid}}(c_0) = \ell_2^w(c_0)$. Assim, como $\ell_2^u(c_0)$ é um subespaço próprio de $\ell_2^w(c_0)$ (veja [5, Pág. 93]), segue que $\ell_2^{\text{mid}}(c_0) \not\subseteq \ell_2^u(c_0)$. Por outro lado, temos

$$\ell_1^u(\ell_1) = \ell_1^w(\ell_1) \not\subseteq \ell_1(\ell_1) = \ell_1^{\text{mid}}(\ell_1),$$

onde, a primeira igualdade segue da Proposição 8.2 (1) de [5], combinado com o fato de que todo operador linear e contínuo de c_0 em ℓ_1 é compactos. Já a segunda igualdade, é consequência imediata do Teorema 3.1 (ii).

Como vimos, em geral, $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ não está contido em $\ell_p^u(E)$, mas a proposição seguinte mostra um caso em que isso pode ocorrer.

Proposição 3.9. Seja E um espaço forte p -mid, então $\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^u(E)$.

Demonstração: Pelo Teorema da Aplicação Aberta, obtemos que as normas $\|\cdot\|_p$ e $\|\cdot\|_{p,\text{mid}}$ são equivalentes em $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p(E)$. Seja $x = (x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$. Então, como $(x_j)_{j=1}^k \xrightarrow{k} x$ em $\ell_p(E)$, temos, pela equivalência das normas, que $(x_j)_{j=1}^k \xrightarrow{k} x$ em $\ell_p^{\text{mid}}(E)$. Desta forma, como $\ell_p^{\text{mid}} \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E)$, obtemos

$$\|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{p,w} = \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{k-1}\|_{p,w} \leq \|(x_j)_{j=1}^\infty - (x_j)_{j=1}^{k-1}\|_{p,\text{mid}} \quad (3.11)$$

e fazendo $k \longrightarrow \infty$ em 3.11, teremos $\|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{p,w} \longrightarrow 0$. Isso mostra que $x \in \ell_p^u(E)$. $\square$

3.3 A classe de sequências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$

No Capítulo 2 estudamos alguns dos espaços de sequências mais conhecidos e uma classe de operadores que melhoram convergência de séries, caso dos operadores absolutamente somantes. Esses tipos de classes de operadores, caracterizados por transformações de sequências a valores vetoriais, foram estudados de forma abstrata num recente trabalho (em 2016) por G. Botelho e J. R. Campos [1]. O ambiente abstrato de classes de sequências desenvolvido nesse trabalho generaliza todas as classes de operadores nesse escopo e resgata importantes resultados da teoria de ideais de operadores para essas classes.

Vamos mostrar a partir de agora que o espaço das sequências mid p -somáveis se encaixa no modelo abstrato de Botelho e Campos e isto nos permitirá, com muita facilidade, obter resultados para classes de operadores que estudaremos mais tarde.

A partir daqui e ao longo do restante desse capítulo, vamos estabelecer as definições do ambiente do trabalho [1] e estudar o nosso espaço sob essa ótica.

Definição 3.2. Uma *classe de sequências* $X(\cdot)$ é uma aplicação

$$\begin{aligned} X(\cdot) : BAN &\longrightarrow E^{\mathbb{N}} \\ E &\longmapsto X(E), \end{aligned}$$

onde, $X(E)$ é um espaço de Banach e satisfaz as seguintes condições

- (i) $c_{00}(E) \subseteq X(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{\infty}(E)$.
- (ii) $\|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Exemplo 3.2. Baseado nos espaços de sequências que estudamos no capítulo anterior, é realmente fácil mostrar que as correspondências $c_0(\cdot), \ell_p(\cdot), \ell_p^w(\cdot), \ell_p^u(\cdot), \ell_{\infty}(\cdot)$ são classes de sequências, para $1 \leq p < \infty$.

A próxima definição estabelece uma propriedade que algumas classes de sequências gozam.

Definição 3.3. Uma classe de sequências $X(\cdot)$ é dita ser *finitamente determinada* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}$,

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \iff \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < \infty, \quad (3.12)$$

e neste caso, temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Diante desta definição, mostra-se em [13] que as classes de sequências $\ell_{\infty}(\cdot), \ell_p(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são finitamente determinadas.

Mostraremos agora que $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é uma classe de sequências finitamente determinada.

Proposição 3.10 ([2], Proposition 1.9). A aplicação

$$\begin{aligned} \ell_p^{\text{mid}}(\cdot) : BAN &\longrightarrow E^{\mathbb{N}} \\ E &\longmapsto \ell_p^{\text{mid}}(E), \end{aligned}$$

é uma classe de sequências finitamente determinada.

Demonstração: Com efeito, pela Proposição (3.7) temos que $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ é um espaço de Banach, sempre que E for um espaço de Banach. Além disso, como $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^{\text{mid}}(E)$, obtemos $c_{00}(E) \subseteq \ell_p^{\text{mid}}(E)$. A inclusão $\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{\infty}(E)$, segue do fato de

$$\ell_p^{\text{mid}}(E) \xhookrightarrow{1} \ell_p^w(E) \xhookrightarrow{1} \ell_{\infty}(E).$$

3. O espaço das seqüências mid somáveis

Como $\|\cdot\|_{p,w} \leq \|\cdot\|_{p,\text{mid}} \leq \|\cdot\|_p$ e $\|e_j\|_{p,w} = \|e_j\|_p = 1$, segue que $\|e_j\|_{p,\text{mid}} = 1$.

Finalmente, para mostrar que a classe de seqüências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é finitamente determinada, para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in E^\mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{p,\text{mid}} &= \sup_k \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^k |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\sup_k \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')} } \left(\sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}}. \end{aligned}$$

Esta igualdade implica que a condição (3.12) é satisfeita para a classe de seqüências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e, desta forma, ela é finitamente determinada. $\square$

Vejamos outra importante propriedade estabelecida para classes de seqüências e muito necessária à teoria de ideais de operadores.

Definição 3.4. Uma classe de seqüências $X(\cdot)$ é dita ser *linearmente estável* se para quaisquer espaços de Banach E, F e para qualquer $T \in \mathcal{L}(E, F)$, o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : X(E) &\longrightarrow X(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) := (T(x_j))_{j=1}^\infty, \end{aligned}$$

está bem definido e $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

Nos trabalhos de F. S. S. Leite [12] e D. F. Nogueira [13] prova-se que as classes de seqüências $c_0(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_p^u(\cdot)$, $\ell_\infty(\cdot)$ são linearmente estáveis. O próximo resultado será usado na demonstração de que $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é linearmente estável.

Lema 3.11. Sejam E, F espaços de Banach, $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$ e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então $(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$ e, mais ainda,

$$\|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \leq \|T\| \cdot \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w}.$$

Demonstração: Seja $T' : F' \longrightarrow E'$ o operador adjunto de T . Como a classe de

3. O espaço das sequências mid somáveis

sequências $\ell_p^w(\cdot)$ é linearmente estável e T' é contínuo, temos

$$(\psi_j \circ T)_{j=1}^\infty = \left(T'(\psi_j)\right)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E').$$

Além disso, o operador induzido $\widehat{T}' : \ell_p^w(F') \longrightarrow \ell_p^w(E')$ (que está bem definido) é linear, contínuo (por um argumento de gráfico fechado) e $\|\widehat{T}'\| = \|T'\| = \|T\|$. Assim,

$$\begin{aligned} \|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{p,w} &= \left\| \left(T'(\psi_j)\right)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} = \left\| \widehat{T}'(\psi_j)_{j=1}^\infty \right\|_{p,w} \\ &\leq \|\widehat{T}'\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w} = \|T\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{p,w}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.12 ([2], Proposition 1.10). A classe de sequências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é linearmente estável.

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$, $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ o operador adjunto de T . Pela estabilidade linear de $\ell_p^w(\cdot)$, obtemos que o operador induzido

$$\widehat{T}' : \ell_p^w(F') \longrightarrow \ell_p^w(E'),$$

está bem definido e é contínuo. Logo,

$$\left(T'(\varphi_n)\right)_{n=1}^\infty = (\varphi_n \circ T)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E'),$$

para todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$. Desta forma, como $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$,

$$\left((\varphi_n(T(x_j)))_{j=1}^\infty\right)_{n=1}^\infty = \left((\varphi_n \circ T(x_j))_{j=1}^\infty\right)_{n=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

o que mostra que $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$.

Para mostrar a igualdade de normas $\|\widehat{T}'\| = \|T\|$ vamos estabelecer o fato:

Afirmção 3.1. $\|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|_{p, \text{mid}} = \|x\|_E$ para todo espaço de Banach E e todo $x \in E$.

De fato, temos $\|\cdot\|_{p,w} \leq \|\cdot\|_{p, \text{mid}} \leq \|\cdot\|_p$ e como

$$\|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|_{p,w} = \|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|_p = \|x\|_E,$$

obtemos $\|(0, \dots, 0, x, 0, \dots)\|_{p, \text{mid}} = \|x\|_E$.

Assim, com a afirmação acima, podemos calcular

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{T}\| &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p^{\text{mid}}(E)}} \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{p,\text{mid}} \\
 &= \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_p^{\text{mid}}(E)}} \|T((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{p,\text{mid}} \\
 &\geq \sup_{x \in B_E} \|(0, \dots, 0, T(x), 0, \dots)\|_{p,\text{mid}} \\
 &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\| = \|T\|.
 \end{aligned}$$

Para mostrar a desigualdade contrária, observemos que dado $(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}$, temos $(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|})_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}$. Com efeito, pelo Lema 3.11, temos

$$\left\| \left(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|} \right)_{n=1}^\infty \right\|_{p,w} = \frac{1}{\|T\|} \cdot \|(\psi_n \circ T)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \leq \frac{1}{\|T\|} \cdot \|T\| \cdot \|(\psi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \leq 1.$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{p,\text{mid}} &= \|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}} \\
 &= \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\psi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |(\psi_n \circ T)(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|T\| \cdot \sup_{(\psi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(F')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \left| \left(\psi_n \circ \frac{T}{\|T\|} \right)(x_j) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \|T\| \cdot \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \|T\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{p,\text{mid}}.
 \end{aligned}$$

Esta desigualdade mostra que $\|\widehat{T}\| \leq \|T\|$, o que conclui a demonstração. $\square$

3.4 Operadores mid somantes

Nesta seção estudaremos dois tipos especiais de classes de operadores que melhoram a convergência de séries, envolvendo as sequências mid p -somáveis, determinados pela cadeia

$$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^{\text{mid}}(E) \subseteq \ell_p^w(E).$$

Definição 3.5. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. O operador T é dito ser *absolutamente mid* $(p; q)$ -*somante* quando o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^{\text{mid}}(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

estiver bem definido.

Denotaremos por $\Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores absolutamente mid $(p; q)$ -somante de E em F . Quando $p = q$, denotaremos por $\Pi_p^{\text{mid}}(E, F)$.

O resultado a seguir, um dos primeiros propostos por Botelho e Campos [[1], Proposição 2.4], nos fornece imediatamente uma caracterização por desigualdades da classe $\Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$, como a obtida para a classe dos operadores absolutamente somantes.

Proposição 3.13. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_n, Y$ classes de sequências. As seguintes condições são equivalentes para um dado operador multilinear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n, F)$:

- (a) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$, sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.
- (b) O operador induzido

$$\widehat{A} : X_1(E_1) \times \dots \times X_n(E_n) \longrightarrow Y(F),$$

$$\widehat{A}\left((x_j^1)_{j=1}^\infty, \dots, (x_j^n)_{j=1}^\infty\right) = (A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty,$$

está bem definido, é n -linear e contínuo.

As condições acima implicam na condição (c) abaixo, e todas são equivalentes se as classes de sequências $X_1, \dots, X_n, Y$ são finitamente determinadas.

- (c) Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left\| (A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^k \right\|_{Y(F)} \leq C \cdot \prod_{m=1}^n \left\| (x_j^m)_{j=1}^k \right\|_{X_m(E_m)}, \quad (3.13)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e toda sequência finita $x_j^m \in E_m$, $j = 1, \dots, k$, $m = 1, \dots, n$.

Neste caso,

$$\|\widehat{A}\| = \inf \{C : (3.13) \text{ é satisfeita} \}.$$

De posse do resultado acima, podemos apresentar (facilmente) uma caracterização para operadores absolutamente mid (p, q) -somantes.

Teorema 3.14. *As seguintes sentenças são equivalentes:*

- (i) $T \in \Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$.

(ii) O operador induzido

$$\begin{aligned}\widehat{T} : \ell_q^{\text{mid}}(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty\end{aligned}$$

está bem definido é linear e contínuo.

(iii) Existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^k \right\|_p \leq A \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q, \text{mid}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$.

(iv) Existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \leq A \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{q, \text{mid}},$$

para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^{\text{mid}}(E)$.

Além disso,

$$\|T\|_{\Pi_{p,q}^{\text{mid}}} := \left\| \widehat{T} \right\| = \inf \{A : (iii) \text{ é satisfeito} \} = \inf \{A : (iv) \text{ é satisfeito} \}.$$

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $T \in \Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E; F)$, então

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^{\text{mid}}(E).$$

Isso implica na validade do item (a) da Proposição 3.13, acarretando que o operador induzido $\widehat{T} : \ell_q^{\text{mid}}(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ está bem definido, é linear e contínuo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Em nosso contexto, supor (ii) acarreta, pela Proposição 3.13, que existe $A > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^k \right\|_p \leq A \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q, \text{mid}},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, com $j = 1, \dots, k$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como as classes de seqüências $\ell_q^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_p(\cdot)$ são finitamente determinadas, então, tomando o supremo sobre k na desigualdade acima, obtemos

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^\infty \right\|_p \leq A \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_{q, \text{mid}},$$

para toda seqüência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^{\text{mid}}(E)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Assumindo (iv), para todo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^{\text{mid}}(E)$ temos, $\sum_{j=1}^\infty \|T(x_j)\|^p < \infty$, isto é, a seqüência $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$. Isto nos diz que $T \in \Pi_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$. $\square$

Vamos definir agora a nossa segunda classe de operadores mid somantes.

Definição 3.6. Sejam $1 \leq q \leq p < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. O operador T é dito ser *fracamente mid $(p; q)$ -somante* quando o operador induzido

$$\begin{aligned} \widehat{T} : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p^{\text{mid}}(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \widehat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

estiver bem definido.

Denotaremos por $W_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores fracamente mid $(p; q)$ -somantes de E em F . Quando $p = q$, denotaremos por $W_p^{\text{mid}}(E, F)$.

Para obter uma caracterização por desigualdades para a classe $W_{p,q}^{\text{mid}}(E, F)$, como a obtida para os operadores absolutamente mid somantes, precisaremos de mais uma definição e um resultado encontrado no trabalho de Botelho e Campos [1].

Definição 3.7. Sejam X e Y classes de sequências. Dizemos que:

- $X < Y$ se, para todo espaço de Banach E , $X(E)$ é um subespaço fechado de $Y(E)$ e, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se,

$$\lim_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Y(E)} = 0.$$

- $X \prec Y$ se, para todo espaço de Banach E , $X(E)$ é um subespaço fechado de $Y(E)$ e, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^\infty \in X(E)$ se, e somente se,

$$\lim_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^l\|_{Y(E)} = 0.$$

Usaremos a proposição seguinte, cuja demonstração se encontra em G. Botelho e J. R. Campos [[1], Corolário 2.6], juntamente com a Proposição 3.13 para demonstrar o próximo teorema.

Proposição 3.15. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X_1, \dots, X_n, Y, Z_1, \dots, Z_n, W$ classes de sequências tais que $Z_1, \dots, Z_n, W$ são finitamente determinadas. Suponha que uma das condições abaixo sejam satisfeitas:

- (i) $X_m < Z_m$ para todo $m = 1, \dots, n$, e $Y < W$.
- (ii) $X_m \prec Z_m$ para todo $m = 1, \dots, n$, e $Y \prec W$.
- (iii) $X_m < Z_m$ para todo $m = 1, \dots, n$, e $Y \prec W$.

Então, para todos os espaços de Banach $E_1, \dots, E_n, F$, as seguintes condições são equivalentes para um operador n -linear $A \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$:

- (a) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in Y(F)$ sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in X_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.
- (b) $(A(x_j^1, \dots, x_j^n))_{j=1}^\infty \in W(F)$ sempre que $(x_j^m)_{j=1}^\infty \in Z_m(E_m)$, $m = 1, \dots, n$.

Neste caso,

$$\left\| \hat{A} : X_1(E_1) \times \dots \times X_n(E_n) \longrightarrow Y(F) \right\| = \left\| \hat{A} : Z_1(E_1) \times \dots \times Z_n(E_n) \longrightarrow W(F) \right\|.$$

O próximo teorema apresenta caracterizações para operadores fracamente mid (p, q) -somantes.

Teorema 3.16. *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $T \in W_{p,q}^{mid}(E; F)$.

- (ii) *O operador induzido*

$$\begin{aligned} \tilde{T} : \ell_q^w(E) &\longrightarrow \ell_p^{mid}(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \tilde{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

está bem definido, é linear e contínuo.

- (iii) $(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^{mid}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^u(E)$.

- (iv) *O operador induzido*

$$\begin{aligned} \hat{T} : \ell_q^u(E) &\longrightarrow \ell_p^{mid}(F) \\ (x_j)_{j=1}^\infty &\longmapsto \hat{T}((x_j)_{j=1}^\infty) = (T(x_j))_{j=1}^\infty \end{aligned}$$

está bem definido, é linear e contínuo.

- (v) *Existe uma constante $B > 0$ tal que*

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^k \right\|_{p,mid} \leq B \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q,w},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$.

- (vi) *Existe uma constante $B > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq B \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q,w} \cdot \left\| (\varphi_n)_{n=1}^\infty \right\|_{p,w},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$, e todo $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(F')$.

(vii) Existe uma constante $B > 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq B \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{q,w} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,w},$$

para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ e todo $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F')$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \|T\|_{W_{p,q}^{\text{mid}}} &:= \|\tilde{T}\| = \|\widehat{T}\| = \inf \{B : (v) \text{ é satisfeito}\} \\ &= \inf \{B : (vi) \text{ é satisfeito}\} = \inf \{B : (vii) \text{ é satisfeito}\}. \end{aligned}$$

Demonstração: (i) $\Rightarrow$ (ii) Como $T \in W_{p,q}^{\text{mid}}(E; F)$, então

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E).$$

Isso implica o item (a) da Proposição 3.13, que por sua vez implica que o operador induzido

$$\tilde{T} : \ell_q^w(E) \longrightarrow \ell_p^{\text{mid}}(F),$$

está bem definido, é linear e contínuo.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Primeiramente, observe que, $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ é uma classe de sequências finitamente determinada e, como $\ell_q^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_q^w(E)$ e, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$ se, e somente se, $\lim_k \|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{q,w} = 0$, temos, $\ell_q^u(\cdot) < \ell_p^w(\cdot)$. Desta forma, a primeira condição da Proposição 3.15 é satisfeita. Logo, como o operador induzido $\tilde{T} : \ell_q^w(E) \longrightarrow \ell_p^{\text{mid}}(F)$ está bem definido, isto é,

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E),$$

obtemos da Proposição 3.15, de (b) $\Rightarrow$ (a) que,

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(F), \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Como $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(F)$, sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$, então obtemos, pelo item (a) da Proposição 3.13, que o operador induzido

$$\widehat{T} : \ell_q^u(E) \longrightarrow \ell_p^{\text{mid}}(F),$$

está bem definido, é linear e contínuo.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Pela Proposição 3.13, temos que os itens (iii) e (iv) deste teorema são

equivalentes e, ainda por essa proposição, obtemos que esses itens implicam que existe $B > 0$ tal que

$$\left\| (T(x_j))_{j=1}^k \right\|_{p, \text{mid}} \leq B \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q, w},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x_j \in E$, com $j = 1, \dots, k$.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Assumindo (v), temos

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p, w} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k \left| \frac{\varphi_n}{\|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p, w}} (T(x_j)) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p, w} \cdot \left(\sup_{(\psi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\psi_n(T(x_j))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq B \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^k \right\|_{q, w} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p, w}, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, todo $x_j \in E$, $j = 1, \dots, k$ e todo $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F')$.

(vi) $\Rightarrow$ (vii) Como as classes de seqüências $\ell_p^{\text{mid}}(\cdot)$ e $\ell_q^w(\cdot)$ são finitamente determinadas, então, tomando o supremo sobre k na desigualdade acima, obtemos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq B \cdot \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{q, w} \cdot \|(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p, w}.$$

(vii) $\Rightarrow$ (i) Assumindo (vii), se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_n(T(x_j))|^p < \infty$, sempre que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E')$. Isso mostra $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{\text{mid}}(F)$ e portanto $T \in W_{p, q}^{\text{mid}}(E, F)$. $\square$

Um importante fato sobre as classes de operadores definidas acima é que:

Proposição 3.17. Se $p < q$, então $\Pi_{p, q}^{\text{mid}}(E; F) = W_{p, q}^{\text{mid}}(E; F) = \{0\}$.

Demonstração: Faremos apenas o caso $\Pi_{p, q}^{\text{mid}}(E; F)$, uma vez que, a prova para a outra classe de operadores é análoga. Como $p < q$, vamos tomar uma seqüência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q \setminus \ell_p$. É fácil mostrar que, para todo $0 \neq x \in E$, a seqüência $(\lambda_j x)_{j=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_q^{\text{mid}}(E)$. Agora, suponha por absurdo, que exista um $T \in \Pi_{p, q}^{\text{mid}}(E; F)$, com $T \neq 0$. Então, pelo Teorema (3.14), existe $A > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j=1}^k \|T(\lambda_j x)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi_n(\lambda_j x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right),$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned}
 \|T(x)\| \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq A \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^\infty |\lambda_j|^q |\varphi_n(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
 &= A \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left[\left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right) \\
 &= A \cdot \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
 &\leq A \cdot \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \sup_{x \in B_E} \left(\sum_{n=1}^\infty |\varphi_n(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
 &= A \cdot \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_p^w(E')}} \|(\varphi_n)_{n=1}^\infty\|_{p,w} \right) \\
 &= A \cdot \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

e tomando o supremo sobre $x \in B_E$

$$\|T\| \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq A \cdot \left(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Para finalizar, fazendo $k \rightarrow \infty$ acima, obtemos $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, o que é absurdo. $\square$

A seguir, apresentaremos caracterizações de espaços fraco e forte p -mid relacionados com as classes de operadores definidos nesta seção.

Teorema 3.18. *Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

- (a) E é um espaço fraco p -mid.
- (b) $\Pi_p^{\text{mid}}(E; F) = \Pi_p(E; F)$, para todo espaço de Banach F .
- (c) $\Pi_p^{\text{mid}}(E; \ell_p) = \Pi_p(E; \ell_p) = \mathcal{L}(E; \ell_p)$
- (d) $W_p^{\text{mid}}(F; E) = \mathcal{L}(F; E)$, para todo espaço de Banach F .
- (e) $id_E \in W_p^{\text{mid}}(E; E)$.

Demonstração: (a) $\Rightarrow$ (b) Sendo $T \in \Pi_p^{\text{mid}}(E; F)$ segue que, o operador induzido $\tilde{T} : \ell_p^{\text{mid}}(E) \rightarrow \ell_p(F)$ está bem definido, é linear e contínuo. Desta forma, como E

é um espaço fraco p -mid, isto é, $\ell_p^{\text{mid}}(E) = \ell_p^w(E)$, obtemos que o operador induzido $\tilde{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p(F)$, também está bem definido, é linear e contínuo. Isso mostra que $T \in \Pi_p(E; F)$. Os mesmos argumentos mostram a inclusão $\Pi_p^{\text{mid}}(E; F) \supseteq \Pi_p(E; F)$.

(d) $\Rightarrow$ (e) É óbvio.

(e) $\Rightarrow$ (a) Se $id_E \in W_p^{\text{mid}}(E; E)$, então o operador induzido $\widehat{id_E} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p^{\text{mid}}(E)$ está bem definido. Assim, podemos identificar $\ell_p^w(E)$ como $\ell_p^{\text{mid}}(E)$ pela relação acima, isto é, $\ell_p^w(E) = \ell_p^{\text{mid}}(E)$ e, portanto, E é um espaço fraco p -mid.

(b) $\Rightarrow$ (na primeira igualdade de (c)) É óbvio.

(a primeira igualdade de (c)) $\Rightarrow$ (a) Seja $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. A identificação $\ell_p^w(E') = \mathcal{L}(E; \ell_p)$, cuja demonstração se encontra em [[5], Proposição 8.2(2)], nos dá que a aplicação

$$\begin{aligned} S_\varphi : E &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longmapsto S_\varphi(x) = (\varphi_n(x))_{n=1}^\infty \end{aligned}$$

é um operador linear e contínuo. Assim, como é possível inverter os índices dos somatórios da definição de $\ell_p^{\text{mid}}(E)$, temos

$$(S_\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

sempre que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$. Desta forma, $S_\varphi \in \Pi_p^{\text{mid}}(E; \ell_p)$ e, por hipótese, $S_\varphi \in \Pi_p(E; \ell_p)$, sempre que $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$. Agora, tomando $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, obtemos

$$(S_\varphi(x_j))_{j=1}^\infty = ((\varphi_n(x_j))_{n=1}^\infty)_{j=1}^\infty \in \ell_p(\ell_p),$$

sempre que $\varphi = (\varphi_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E')$, o que mostra que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(E)$.

(a) $\Rightarrow$ (na segunda igualdade de (c)) Segue diretamente do item (i) do Teorema 3.1.

(a) $\Rightarrow$ (d) Sejam $T \in \mathcal{L}(F; E)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(F)$. Pela estabilidade linear de $\ell_p^w(\cdot)$ e pela hipótese temos

$$(T(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) = \ell_p^{\text{mid}}(E),$$

mostrando que $T \in W_p^{\text{mid}}(F; E)$. □

Também vale um resultado semelhante para espaços forte p -mid. As demonstrações, por serem também muito semelhantes, serão omitidas.

Teorema 3.19. *Sejam F um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$. As seguintes sentenças são equivalentes:*

(a) F é um espaço forte p -mid.

(b) $\Pi_p^{\text{mid}}(E; F) = \Pi_p(E; F)$, para todo espaço de Banach E .

(c) $id_F \in \Pi_p^{\text{mid}}(F; F)$.

(d) F é um subespaço de $L_p(\mu)$, para alguma medida de Borel μ .

3.5 Uma fatoração para operadores absolutamente somantes

É fácil verificar, a partir das definições, que quando $q \leq r \leq p$, temos

$$\Pi_{p,r}^{\text{mid}} \circ W_{r,q}^{\text{mid}} \subseteq \Pi_{p,q}.$$

Mostraremos que, quando $p = q$, obtemos um novo teorema de fatoração para operadores absolutamente p -somantes. Para tanto usaremos o Teorema da Fatoração de Pietsch encontrado, por exemplo, em [8, Pág. 45].

Teorema 3.20 (Teorema da Fatoração de Pietsch). *Sejam $1 \leq p < \infty$, E e F espaços de Banach, K um subconjunto normante fraco* compacto de $B_{E'}$. Para todo operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$, as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) T é p -somante.
- (ii) *Existem uma medida de probabilidade de Borel μ em K , um subespaço fechado X de $L_p(\mu)$ e um operador $\hat{T} \in \mathcal{L}(X; F)$ tal que:*
 - (a) $j_p i_E(E) \subset X$.
 - (b) $\hat{T} j_p i_E(x) = T(x)$, para todo $x \in E$.

Em outras palavras, se $j_p^E : i_E(E) \rightarrow X$ é a aplicação induzida por $j_p : C(K) \rightarrow L_p(\mu)$, com $i_E(E) \subset C(K)$ e $X \subset L_p(\mu)$, então o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \hat{T} \\ i_E(E) & \xrightarrow{j_p^E} & X. \end{array}$$

O mergulho isométrico $i_E : E \rightarrow C(K)$ e a inclusão formal $j_p : C(K) \rightarrow L_p(\mu)$ (que é p -somante) são aplicações canônicas na teoria de operadores absolutamente somantes e um estudo simples sobre elas pode ser encontrado em [8, Págs. 40 a 45].

Estamos agora em condições de apresentar o resultado que dá nome à seção:

Teorema 3.21. *Todo operador absolutamente p -somante pode ser fatorado por meio de operadores absolutamente e fracamente mid p -somantes, isto é, $\Pi_p = \Pi_p^{\text{mid}} \circ W_p^{\text{mid}}$.*

Demonstração: Pelo que dissemos no início da seção, nós precisamos apenas mostrar que $\Pi_p \subseteq \Pi_p^{\text{mid}} \circ W_p^{\text{mid}}$. Seja $T \in \Pi_p(E; F)$. Pelo Teorema da Fatoração de Pietsch, o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ i_E \downarrow & & \uparrow \hat{T} \\ i_E(E) & \xrightarrow{j_p^E} & X. \end{array}$$

Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, pela continuidade de i_E e a estabilidade linear de $\ell_p^w(\cdot)$, temos $(i_E(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(i_E(E))$. Assim, como j_p é absolutamente p -somante [Veja [8], Exemplo 2.9(d)], segue que

$$(j_p^E(i_E(x_j)))_{j=1}^\infty \in \ell_p(X) \subseteq \ell_p^{\text{mid}}(X),$$

o que mostra que $j_p^E \circ i_E \in W_p^{\text{mid}}(E; X)$. Agora, seja $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^{\text{mid}}(X)$. Como X é um subespaço fechado de $L_p(\mu)$, obtemos a partir do Teorema 3.1 (ii) que $(y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(X)$. Assim, como $\hat{T}$ é contínuo e $\ell_p(\cdot)$ é linearmente estável, obtemos $(\hat{T}(y_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p(F)$, mostrando que $\hat{T} \in \Pi_p^{\text{mid}}(X; F)$. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] G. BOTELHO E J. R. CAMPOS, *On the transformation of vector-valued sequences by linear and multilinear operators*, Monatsh. Math, **183** (2017), 415–435.
- [2] G. BOTELHO, J. R. CAMPOS E J. SANTOS, *Operator ideals related to absolutely summing and strongly summing operators*, Pacific J. Math. **287** (1) (2017), 1–17.
- [3] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Coleção Textos Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, 2º Ed., 2015.
- [4] Y. S. CHOI E J. M. KIM, *The dual space of $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_p)$ and the p -approximation property (pre-print)*.
- [5] A. DEFANT E K. FLORET, *Tensor Norms and Operator Ideals*, Vol. 176, Elsevier, 1993.
- [6] J. M. DELGADO, E. OJA, C. PINEIRO E E. SERRANO, *The p -approximation property in terms of density of finite rank operators*, J. Math. Anal. Appl. **354** (2009), 159–164.
- [7] J. M. DELGADO, C. PINEIRO E E. SERRANO, *Operators whose adjoints are quasi p -nuclear*, Studia Math. **197** (3) (2010), 291–304.
- [8] J. DIESTEL, H. JARCHOW E A. TONGE, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [9] I.M.GELFAND, *Abstrakte Funktionen und lineare operatone*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **5** (1938), 742–752.
- [10] A. K. KARN E D. P. SINHA, *An operator summability of sequences in Banach spaces*, Glasg. Math. J. **56** (2) (2014), 427–437.
- [11] E. KREYSZIG, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

- [12] F. S. S. LEITE, *Operadores Lineares Cohen Fortemente Somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2017.
- [13] D. F. NOGUEIRA, *Espaços de Sequências Vetoriais e Ideais de Operadores*, Dissertação de mestrado, UFU (2016).
- [14] R. PHILLIP, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **48** (1940), 516–541.
- [15] C. PINEIRO E J. M. DELGADO, *p-convergent sequences and Banach spaces in which p-compact sets are q-compact*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (3) (2011), 957–967.
- [16] J. S. SANTOS, *Resultados de Coincidência para Aplicações Absolutamente Somantes*, Dissertação de mestrado, UFPB (2008).
- [17] D. P. SINHA E A. K. KARN, *Compact operators whose adjoints factor through subspaces of ℓ_p* , Studia Math, **150** (2002), 17–33.