

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o completamento I -ádico e a
teoria de homologia local para
módulos Artinianos

Antonival Lopes do Nascimento Filho

JOÃO PESSOA – PB
AGOSTO DE 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Sobre o completamento I -ádico e a teoria de homologia local para módulos Artinianos

por

Antonival Lopes do Nascimento Filho

sob a orientação do

Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal

e coorientação do

Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta

João Pessoa – PB
Agosto de 2016

Catálogo na publicação
Setor de Catalogação e Classificação

N244s Nascimento Filho, Antonival Lopes do.
Sobre o completamento I -ádico e a teoria de homologia local para módulos Artinianos / Antonival Lopes do Nascimento Filho. - João Pessoa, 2017.
71 f.

Orientador(a): Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PPGM.

1. Matemática. 2. Funtor Completamento. 3. Funtor Derivado. 4. Homologia Local. 5. Dual de Matlis. 6. Mittag-Leffler. 7. Dimensão Noetheriana. I. Título.

UFPB/BC

CDU - 51(043)

Sobre o completamento I -ádico e a teoria de homologia local para módulos Artinianos

por

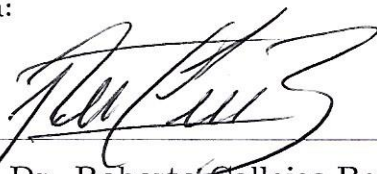
Antonival Lopes do Nascimento Filho ¹

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

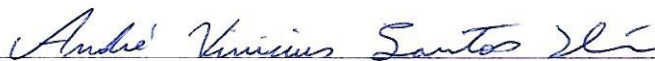
Área de Concentração: Álgebra.

Aprovada em 11 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Roberto Callejas Bedregal – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. André Vinícius Santos Dória – UFS
(Examinador Externo)



Profa. Dra. Jacqueline Rojas – UFPB
(Examinador Interno)

¹O autor foi bolsista da CAPES durante a elaboração desta dissertação.

*“Ao meu amigo Luis Alba,
por $n+1$ horas de socorro
matemático, além de ser
uma cara bem legal e que
ajuda a todo mundo”.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela companhia e por ter me concedido saúde, condições financeiras e psicológicas suficientes para a conclusão do mestrado. Agradeço também a minha família: minha mãe Leninha, meu irmão Alvinho, minha avó Dona Maria, meu amigo Sandro e a minha namorada/melhor amiga Mariana (Chuchu).

Agradeço aos meus professores Roberto Bedregal, Napoleón Caro, e ao meu grande amigo e salva-vidas Luis Alba pelas orientações.

Também devo mencionar os professores com quem mais gostei de conviver. Além dos já acima citados destaco o professor Andrade, o professor Adriano, o professor Aron e o professor Lizandro.

Meu sincero muito obrigado aos amigos e colegas mais próximos: Zé, Pedro, Luis, Clemerson, Marcius, Esteban, Lucas, Wendel, Camila, Sally, Isabelly, Daniel, Raiza, Cássia, André, Ageu, Mauri, Fran, Esaú, Djair, Txutxu, Rich, Wastheny, Cássio, Manu, Fernando, Sebastião, Alan... entre outros que não citarei porque se não essa lista nunca acaba.

Cabe também agradecer a todo mundo com quem morei, que não citarei os nomes pois foram muitos, já que nesse período de dois anos morei em 8 lugares diferentes. Todavia, afirmo que minha relação com todos os colegas de apartamento, quitinete e quarto se manteve continuamente agradável e amistosa. Espera... a menos de uma pessoa específica. Mas tirando esse contra-exemplo a afirmação é válida.

Agradeço aos irmãos da Igreja Batista Boas Novas que me ajudaram na mudança e manutenção em João Pessoa nos primeiros dias. Em especial à Dani e ao professor Ornan. Além disso, mil obrigados ao Douglas por aceitar me abrigar em sua casa mesmo sem nunca ter me visto.

Jamais esqueceria de agradecer aos meus padrinhos Jarbas e Ném por terem me acolhido em sua casa e me tratado como um filho durante o período em que fiz o curso de verão, curso esse que me fez ingressar no mestrado. Muito obrigado de verdade.

Menções honrosas: RU, Beto's Grill, Geraldinho, Tia Rita, Cassio's Fest House, Dona Cida e Seu Djair,

*“Dizia eu que a
aritmética...”.*

Prof. Girafales

Resumo

Neste trabalho, estudamos o funtor completamente I -ádico. Sua definição, propriedades e resultados importantes. Além disso, estudamos também os módulos de homologia local, segundo a definição dada por Nguyen Tu Cuong e Tran Tuan Nam. Uma parte do trabalho é reservada ao estudo da homologia local de módulos Artinianos. Em alguns aspectos, a teoria de homologia local aqui apresentada é dual a teoria de cohomologia local de Grothendieck.

Palavras-chave: Funtor completamente; Funtor derivado; Homologia local; Dual de Matlis; Mittag-Leffler; Dimensão Noetheriana.

Abstract

In this work we study the I -adic completion functor, its properties and main results. Moreover, we study local homology modules as defined by N. T. Cuong and T. T. Nam. The final part of this work is reserved to the study of local homology of Artinian modules. In some aspects, local homology theory has a dual behaviour with respect to Grothendieck's local cohomology theory of sheaves.

Keywords: Completion functor; Derived functor; Local homology; Matlis duality; Mittag-Leffler condition; Noetherian dimension.

Sumário

Introdução	1
1 O funtor completamento I-ádico	4
2 Funtores derivados do completamento I-ádico	13
2.1 Completamento I -ádico generalizado e seus funtores derivados à esquerda	21
3 Homologia local e módulos de homologia Koszul	26
4 Homologia local de módulos Artinianos	37
4.1 Sequência exata longa de homologia local	37
4.2 Aciclicidade de $H_i^I(M)$	39
4.3 Módulos de homologia local Artinianos e Noetherianos	42
4.4 Resultados de anulamento e não-anulamento	45
A Limite inverso	49
B Funtores aditivos e funtores derivados	53
C Limite Microscópico e Colimite Telescópico - Mic e Tel	58

Introdução

Vamos brincar de funtor? Essa é uma piada interna que se popularizou em nosso grupo de estudo, mas que de certa forma, não deixa de ter seu fundo de verdade.

O que falar sobre o funtor completamento? A princípio, quando o termo foi sugerido para o desenvolvimento deste trabalho, esse nome soava estranho, desconhecido. Agora, parece um termo tão familiar. É interessante como a gente vai tomando posse ao longo do tempo de alguns termos na matemática, ao ponto de, às vezes, quando alguém fala sobre tal termo, a gente acaba soltando uma pérola do tipo: Completamento? Esse é meu funtor.

Certa vez ouvi um professor falando a frase: Uma novidade para nós na matemática é como um sapato novo. Você no começo usa com o maior cuidado. Depois de um tempo tá chutando pedra por aí com ele. De imediato concordei e ri, mas agora pensando bem, não quero sair chutando coisas por aí com “meu funtor”. Acho que me apeguei.

Bem, algumas brincadeiras à parte, uma reflexão surge às vésperas da apresentação do trabalho: O que nos motiva a estudar? O que nos faz buscar o conhecimento sobre determinada coisa em matemática? Necessidade? Objetivo profissional ou financeiro? Enfim. Talvez no começo sim, mas recentemente me flagrei lendo Álgebra por vontade própria, e me fazia bem tal coisa. Pois é, acho que é mais do que necessidade nesses momentos. Ou melhor, uma necessidade diferente surge. Provavelmente a área acaba encantando alguns daqueles que a buscam.

No estudo sobre o completamento I -ádico e dos módulos de homologia local o sentimento não foi diferente.

Usaremos $\Lambda_I(M) = \varprojlim_t \frac{M}{I^t M}$ para denotar o completamento I -ádico de M . Será mostrado que o funtor completamento I -ádico é um funtor covariante aditivo da categoria dos R -módulos e R -homomorfismos para categoria $\hat{R}$ -módulos e $\hat{R}$ -homomorfismos. Além disso, esse funtor é exato quando os módulos são finitamente gerados e R é Noetheriano. Infelizmente, mesmo R sendo Noetheriano, ele não é exato na categoria dos módulos em geral. Vamos denotar por $L_i^I(-)$ o i -ésimo funtor derivado à esquerda do $\Lambda_I(-)$. Como o funtor tensor não é exato à esquerda e o limite inverso não é exato à direita na categoria dos R -módulos, o funtor Λ_I não é exato nem à direita e nem à

esquerda. Portanto, em geral, $L_0^I \neq \Lambda_I$. De modo que o cálculo desses funtores é em geral muito difícil.

Greenlees e May [GM92] usaram colimite homotópico, ou telescópico, da cocadeia de complexos de Koszul para definir o grupo de homologia local por

$$H_\bullet^I(M) = H_\bullet(\text{Hom}(\text{Tel}K^\bullet(\underline{x}^t); M)),$$

onde $\underline{x}$ é um sistema finitamente gerado de I . Então eles mostraram, sobre certas condições em $\underline{x}$ que são satisfeitas quando R é Noetheriano, que $H_\bullet^I(M) \cong L_\bullet^I(M)$. A proposta desse trabalho é o estudo, com métodos de álgebra comutativa e homológica, dos módulos de homologia local na categoria dos módulos Artinianos sobre anéis Noetherianos. Para isso, daremos a definição, proposta por Ngyuen Nu Cuong e Tran Tuan Nam em [CN01, Definition 3.1], do i -ésimo módulo de homologia local $H_i^I(M)$ de M com respeito a I por

$$H_i^I(M) = \varprojlim_t \text{Tor}_i^R(R/I^t; M).$$

Esta definição é dual a definição de Grothendieck de módulos de cohomologia local para módulos finitamente gerados sobre anéis Noetherianos e é em geral diferente da definição de Greenlees e May. Todavia, ambas coincidem para módulos Artinianos (veja a Proposição 4.1).

A organização do trabalho é a seguinte. No primeiro capítulo apresentamos o funtor completamente, definição, propriedades e resultados importantes para o estudo dele ao longo do trabalho. Em seguida, no capítulo dois, falamos sobre o funtor derivado do completamente, além de exibir uma importante condição para exatidão de limites inversos. O capítulo três traz uma definição para módulo de homologia local e um resultado que possibilita o cálculo desse módulo via módulo de homologia de Koszul, resultando num importante corolário de mudança de base no módulo de homologia local. Por fim, o capítulo quatro trata dos módulos de homologia local no caso especial de módulos Artinianos, mostrando que a definição dada por Nguyen Tu Cuong e Tran Tuan Nam coincide com a definição dada por Greenlees e May neste caso. Além disso, nesse último capítulo alguns resultados para o anulamento e não-anulamento de tais módulos são apresentados.

O apêndice A trata sobre o limite inverso. Sua definição, propriedades, exemplos e resultados importantes. Já o apêndice B traz as definições de funtores aditivos e funtores derivados, exibindo resultados sobre existência e exatidão de seqüências longas dos funtores derivados induzidas de seqüências curtas. Além disso destacamos os exemplos $\text{Ext}_R^i(M, -)$ e $\text{Tor}_i^R(-, N)$ de funtores derivados. Por fim, o apêndice C apresenta as

definições de Tel e Mic , colimite telescópico e limite microscópico respectivamente, bem como algumas das definições necessárias para entender Tel e Mic . Essas noções são apresentadas porque estão presentes nas definições de módulo de homologia local de Greenlees e May.

Propaganda feita, esperamos que o leitor acredite que é sincera e sinta-se convidado a conhecer mais sobre o tema.

Capítulo 1

O funtor completamento I -ádico

Este capítulo inicia com conceitos básicos topológicos que nos permitirão introduzir a noção de completamento via sequências de Cauchy. Além disso vamos apresentar a definição funtorial de completamento que depende de um certo limite inverso e mostrar uma equivalência entre as duas abordagens. Por fim discutimos a exatidão desse funtor.

Definição 1.1 (Filtração). Seja R um anel comutativo, $\mathfrak{q}$ um ideal e M um R -módulo. Uma filtração de M é uma cadeia descendente infinita de submódulos:

$$M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots.$$

Chamamos ela de uma $\mathfrak{q}$ -filtração se $\mathfrak{q}M_n \subset M_{n+1} \forall n$, e uma $\mathfrak{q}$ -filtração estável se também ocorrer $\mathfrak{q}M_n = M_{n+1}$ para n suficientemente grande, ou equivalentemente, se também existir um m com $\mathfrak{q}^n M_m = M_{n+m}$ para $n \geq 0$. Por exemplo, definindo $M_n := \mathfrak{q}^n M$, temos uma $\mathfrak{q}$ -filtração estável; chamamos essa última de filtração $\mathfrak{q}$ -ádica.

Se M é um módulo munido com a filtração $M = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$. Então M tem uma topologia: os conjuntos abertos são as uniões arbitrárias dos conjuntos $m + M_n$. De fato:

- União arbitrária de abertos é aberto;
- Interseção de dois abertos é aberto, pois a interseção de duas uniões é a união das interseções:

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} m + M_n\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} m' + M_n\right) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} m + M_n\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} m' + M_n\right).$$

Além disso, se a interseção U de $m + M_n$ e $m' + M_{n'}$ é não-vazia e se $n \geq n'$, então $U = m + M_n$, porque se $m'' \in U$, então:

$$m + M_n = m'' + M_n \subset m'' + M_{n'} = m' + M_{n'}.$$

Aqui, para exibir alguns resultados, vamos usar a definição de aplicação contínua: $f : X \rightarrow Y$ é contínua em $x \in X$ com $y = f(x)$ se para toda vizinhança V de y , $\exists U$ vizinhança de x com $f(U) \subset V$.

A aplicação adição $M \times M \rightarrow M$, dada por $(m, m') \mapsto m + m'$, é contínua, pois

$$(m + M_n) + (m' + M_n) \subset (m + m') + M_n.$$

De fato, sendo $(m, m') \in M \times M$, tem-se $(m + m') \in M$. Tome $V = (m + m') + M_n$ vizinhança de $(m + m')$. Agora, consideremos $U = m + M_n$ e $U' = m' + M_n$ vizinhanças de m e m' respectivamente. Chamando f a aplicação adição, temos que:

$$f(U \times U') = (m + M_n) + (m' + M_n) \subset (m + m') + M_n = V.$$

Assim, com m' fixado, a translação $m \mapsto m + m'$ é um homeomorfismo $M \rightarrow M$ (da mesma forma, a inversão $m \mapsto -m$ é um homeomorfismo, logo M é um grupo topológico).

Lema 1.2 (Topologia $\mathfrak{a}$ -ádica). Seja $\mathfrak{a}$ um ideal em R , considere a $\mathfrak{a}$ -ádica filtração. Se a filtração em M for uma $\mathfrak{a}$ -filtração, então multiplicação por escalar $(x, m) \mapsto xm$ também é contínua, porque

$$(x + \mathfrak{a}^n)(m + M_n) \subset xm + M_n.$$

De fato, como a filtração é uma $\mathfrak{a}$ -filtração, temos que $\mathfrak{a}M_n \subset M_{n+1} \Rightarrow \mathfrak{a}^m M_n \subset M_{n+m}$. Dado $(x, m) \in R \times M$, considere $V = xm + M_n$ vizinhança de $xm \in M$. Chamando f a multiplicação por escalar e tomando $U = x + \mathfrak{a}^n$ e $U' = m + M_n$ vizinhanças de x e m respectivamente, temos que:

$$\begin{aligned} f(U \times U') &= f(x + \mathfrak{a}^n, m + M_n) \\ &= (x + \mathfrak{a}^n)(m + M_n) \\ &= xm + xM_n + \mathfrak{a}^n m + \mathfrak{a}^n M_n \\ &\subset xm + M_n \\ &= V, \end{aligned}$$

já que:

- $xM_n \subset M_n$, pois M_n é submódulo;
- $\mathfrak{a}^n m \in \mathfrak{a}^n M \subset M_n$, decorre de $\mathfrak{a}^m M_n \subset M_{n+m}$;
- $\mathfrak{a}^n M_n \subset M_n$ pois M_n é submódulo.

Além disso, se a filtração é $\mathfrak{a}$ -estável, então ela fornece a mesma topologia da filtração $\mathfrak{a}$ -ádica. De fato:

Primeiro, tome $\mathfrak{a}^n M$ um aberto na filtração $\mathfrak{a}$ -ádica. Note que

$$M_n \supset \mathfrak{a}^n M \supset \mathfrak{a}^n M_{n'} = M_{n+n'} \quad (*)$$

onde M_n e $M_{n+n'}$ são abertos na filtração $\mathfrak{a}$ -estável. A primeira inclusão ocorre por se tratar de uma $\mathfrak{a}$ -filtração; a segunda inclusão é imediata; a igualdade ocorre para n' suficientemente grande. Agora, dado M_n aberto na filtração $\mathfrak{a}$ -estável. Perceba que

$$\mathfrak{a}^s M \subset M_n \subset \mathfrak{a}^r M \quad (**)$$

onde $\mathfrak{a}^s M$ e $\mathfrak{a}^r M$ são abertos na filtração $\mathfrak{a}$ -ádica. Na primeira inclusão, por se tratar de uma $\mathfrak{a}$ -filtração, basta tomar $s = n$; na segunda inclusão basta tomar $r = 0$. De $(*)$ e $(**)$ segue o resultado.

Assim, quaisquer duas $\mathfrak{a}$ -filtrações estáveis fornecem a mesma topologia, chamada topologia $\mathfrak{a}$ -ádica.

Definição 1.3 (Sequência de Cauchy, limite e completamento). Uma sequência $(m_n)_{n \geq 0}$ em M é chamada sequência de Cauchy se, dado n_0 , existe n_1 tal que

$$m_n - m_{n'} \in M_{n_0}, \text{ ou simplesmente } m_n - m_{n+1} \in M_{n_0}, \text{ para todo } n, n' \geq n_1;$$

as duas condições são equivalentes porque M_{n_0} é um subgrupo e

$$m_n - m_{n'} = (m_n - m_{n+1}) + (m_{n+1} - m_{n+2}) + \cdots + (m_{n'-1} - m_{n'}).$$

Dizemos que $m \in M$ é o limite de (m_n) se, dado n_0 , existe n_1 tal que $m - m_n \in M_{n_0}$ para todo $n \geq n_1$. As sequências de Cauchy formam um R -módulo com operações naturais de adição e produto por escalar. De fato, chamando C o conjunto das sequências de Cauchy, basta definir:

$$\begin{aligned} C \times C &\rightarrow C \\ (m_n)_{n \geq 0} + (m'_n)_{n \geq 0} &\mapsto (m_n + m'_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R \times C &\rightarrow C \\ (x, (m_n)_{n \geq 0}) &\mapsto (xm_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

O conjunto L das sequências cujo limite é 0 formam um submódulo de C . O módulo quociente $\frac{C}{L}$ é denotado $\hat{M} = \frac{C}{L}$ e é chamado o completamento de M .

Além de ser um R -módulo, o completamento $\hat{M}$ também possui uma estrutura

natural de $\hat{R}$ -módulo que é dada por

$$\begin{aligned}\hat{R} \times \hat{M} &\rightarrow \hat{M} \\ ((x_i), (m_i))_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto (x_i m_i)_{i \in \mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Dizemos que M é completo quando o homomorfismo

$$\begin{aligned}M &\rightarrow \hat{M} \\ m &\mapsto (m)\end{aligned}$$

que leva $m \in M$ para a classe da sequência constante (m) , é um isomorfismo.

A seguir exibiremos um resultado muito importante e que garante a equivalência entre as duas abordagens de completamento: A primeira via sequências de Cauchy; a segunda via limite inverso. A definição de limite inverso é dada no apêndice A.

Proposição 1.4. Seja R um anel, M um módulo, $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ uma filtração. Então $\hat{M} \cong \varprojlim \frac{M}{M_n}$.

Demonstração. Vamos definir uma aplicação $\alpha : \hat{M} \rightarrow \varprojlim \frac{M}{M_n}$. Dada uma sequência de Cauchy (m_ν) , seja q_n a imagem de m_ν em $\frac{M}{M_n}$ para ν suficientemente grande, isto é, $q_n = m_\nu + M_n$. Como a sequência é de Cauchy, basta tomar $n_0 > n$ e teremos, para $\nu \geq n_1$, que

$$m_\nu + M_{n_0} = m_{n_1} + M_{n_0} \Rightarrow q_n = m_\nu + M_n = m_{n_1} + M_n,$$

isso significa que q_n não depende de ν . Agora considere a aplicação

$$\begin{aligned}\alpha_n^{n+1} : \frac{M}{M_{n+1}} &\rightarrow \frac{M}{M_n} \\ m + M_{n+1} &\mapsto m + M_n.\end{aligned}$$

Note que

$$\alpha_n^{n+1}(q_{n+1}) = \alpha_n^{n+1}(m_\nu + M_{n+1}) = m_\nu + M_n = q_n$$

para todo n . Além disso, perceba que

$$0 \text{ é limite de } (m_\nu) \Leftrightarrow q_n = 0 \forall n.$$

De fato, basta tomar $n_0 = n$ e então $m_\nu - 0 \in M_n$, para $\nu \geq n_1$, implicando $q_n = m_\nu + M_n = 0$. Mais ainda, $q_{n-1} = \alpha_{n-1}^n(q_n) = \alpha_{n-1}^n(0) = 0$. Para $n' > n$ repete-se o argumento, chamando $n' = n_0$ e então existe n'_1 tal que $q_{n'} = m_\nu + M_{n'} = 0$ para

1. O funtor completamento I -ádico

$\nu \geq n'_1$. Lembre que a “convergência” não é uniforme, de modo que sempre existirá n_1 que depende de n_0 implicando $q_n = 0$ para cada n .

Reciprocamente, dado n_0 temos $q_{n_0} = m_\nu + M_{n_0} = 0$ isto é, $m_\nu - 0 \in M_{n_0}$.

Com isso defina α por $\alpha(m_\nu) := (q_n)$. Dessa forma, α está bem definida é linear e injetiva.

Para a sobrejetividade, dada a sequência $(q_n) \in \varprojlim \frac{M}{M_n}$, seja $m_\nu \in M$ representante da classe de $q_\nu \in \frac{M}{M_\nu}$ para cada ν . Então $m_\mu - m_\nu \in M_\nu$ para $\mu \geq \nu$ porque $\alpha_\nu^\mu(q_\mu) = q_\nu$ por propriedade de limite inverso. A sequência (m_ν) é Cauchy por construção. Assim α é sobrejetiva e portanto um isomorfismo. $\square$

Seja I um ideal de R (durante o texto vamos algumas vezes utilizar I e outras vezes utilizar $\mathfrak{a}$ para denotar ideal, isso por conveniência de redação). A partir agora vamos definir o funtor completamento I -ádico $\Lambda_I(-)$ por $\hat{M} = \Lambda_I(M) := \varprojlim_t \frac{M}{I^t M}$.

O funtor $\Lambda_I(-)$ é aditivo e covariante. De fato, sejam M, N e P R -módulos e $f : M \rightarrow N$, $h : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ homomorfismos. Defina

$$\begin{aligned} \Lambda_I(f) &:= \Lambda_I(M) \rightarrow \Lambda_I(N) \\ (m_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto (f(m_i))_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Daí

(i) Aditividade:

$$\begin{aligned} \Lambda_I(f + h) &= ((f + h)(m_i))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (f(m_i) + h(m_i))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (f(m_i))_{i \in \mathbb{N}} + (h(m_i))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= \Lambda_I(f) + \Lambda_I(h) \end{aligned}$$

(ii) Funtorialidade (covariância):

$$\begin{aligned} \Lambda_I(g \circ f)(m_i)_{i \in \mathbb{N}} &= ((g \circ f)(m_i))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (g(f(m_i)))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= \Lambda(g)(f(m_i))_{i \in \mathbb{N}} \\ &= (\Lambda_I(g) \circ \Lambda_I(f))(m_i)_{i \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Mesmo sendo aditivo e covariante, o funtor $\Lambda_I(-)$ não é exato em geral, já que o limite inverso não é exato à direita e o produto tensorial não é exato à esquerda. Todavia, ele é exato na categoria dos R -módulos finitamente gerados quando R é Noetheriano. Para provar esse resultado vamos usar o seguinte lema:

Lema 1.5. Considere a sequência exata de módulos

$$0 \rightarrow Q'_n \xrightarrow{\beta_n} Q_n \xrightarrow{\gamma_n} Q''_n \rightarrow 0$$

e os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q'_{n+1} & \xrightarrow{\beta_{n+1}} & Q_{n+1} & \xrightarrow{\gamma_{n+1}} & Q''_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha'^{n+1}_n & & \downarrow \alpha^{n+1}_n & & \downarrow \alpha''^{n+1}_n & & \\ 0 & \longrightarrow & Q'_n & \xrightarrow{\beta_n} & Q_n & \xrightarrow{\gamma_n} & Q''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

então a sequência induzida

$$0 \rightarrow \varprojlim Q'_n \xrightarrow{\hat{\beta}} \varprojlim Q_n \xrightarrow{\hat{\gamma}} \varprojlim Q''_n$$

é exata; além disso, $\hat{\gamma}$ é sobrejetivo se todos os α'^{n+1}_n são sobrejetivos.

Demonstração. Considerando o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \prod Q'_n & \xrightarrow{\prod \beta_n} & \prod Q_n & \xrightarrow{\prod \gamma_n} & \prod Q''_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \theta' & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta'' & & \\ 0 & \longrightarrow & \prod Q'_n & \xrightarrow{\prod \beta_n} & \prod Q_n & \xrightarrow{\prod \gamma_n} & \prod Q''_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e a definição de limite inverso (veja o exemplo A.5), onde $\theta : \prod Q_n \rightarrow \prod Q_n$ é definida por $\theta(q_n) := (q_n - \alpha^{n+1}_n(q_{n+1}))$, e $\prod \beta_n$ é induzida naturalmente por β_n . Assim, temos que o Lema da serpente garante a exatidão

$$\text{Ker}(\theta') \xrightarrow{\varphi} \text{Ker}(\theta) \xrightarrow{\psi} \text{Ker}(\theta''),$$

que é igual a

$$\varprojlim Q'_n \xrightarrow{\hat{\beta}} \varprojlim Q_n \xrightarrow{\hat{\gamma}} \varprojlim Q''_n,$$

mas como $\prod \beta_n$ é injetor, φ é injetor e podemos completar a sequência exata

$$0 \rightarrow \varprojlim Q'_n \xrightarrow{\hat{\beta}} \varprojlim Q_n \xrightarrow{\hat{\gamma}} \varprojlim Q''_n.$$

Além disso, note que temos a injeção $\text{Coker}(\hat{\gamma}) \hookrightarrow \text{Coker}(\theta')$. E se α'^{n+1}_n forem sobrejetivos, temos $\text{Coker}(\theta') = 0$. De fato, dado $(q'_n)_n \in \prod Q'_n$, podemos resolver as

equações $p'_n - \alpha_n'^{n+1}(p'_{n+1}) = q'_n$, já que $p'_n - q'_n \in Q'_n$ no contradomínio de $\alpha_n'^{n+1}$, que é sobrejetivo, logo $\alpha_n'^{n+1}(p'_{n+1}) = p'_n - q'_n$, tomando a sequência $(p'_n)_n \in \prod Q'_n$ obedecendo a igualdade anterior, temos $\theta'(p'_n)_n = (q'_n)_n$. Portanto, $\hat{\gamma}$ é sobrejetora. $\square$

Teorema 1.6 (Exatidão do completamento). *Seja R um anel Noetheriano e $\mathfrak{a}$ um ideal. Então sobre módulos finitamente gerados, o funtor completamento é exato.*

Demonstração. Sejam $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ sequência exata curta de módulos e $M'_n = M' \cap \mathfrak{a}^n M$ filtração. Então obtemos a sequência exata:

$$0 \rightarrow \frac{M'}{M'_n} \rightarrow \frac{M}{\mathfrak{a}^n M} \rightarrow \frac{M''}{\mathfrak{a}^n M''} \rightarrow 0.$$

As aplicações $\frac{M'}{M'_{n+1}} \rightarrow \frac{M'}{M'_n}$ são sobrejetoras. Assim, pelo lema anterior temos a sequência exata:

$$0 \rightarrow \varprojlim \frac{M'}{M'_n} \rightarrow \varprojlim \frac{M}{\mathfrak{a}^n M} \rightarrow \varprojlim \frac{M''}{\mathfrak{a}^n M''} \rightarrow 0.$$

Assuma que R é Noetheriano e M é finitamente gerado. Então $M' = M'_0 \supset M'_1 \supset \dots$ é uma filtração $\mathfrak{a}$ -estável por Artin-Rees. Como qualquer filtração $\mathfrak{a}$ -estável gera uma topologia equivalente à topologia da filtração $\mathfrak{a}$ -ádica, segue a exatidão da sequência

$$0 \rightarrow \hat{M}' \rightarrow \hat{M} \rightarrow \hat{M}'' \rightarrow 0.$$

$\square$

Há ainda um caso especial onde o completamento preserva exatidão de sequências.

Proposição 1.7. Se N é um submódulo aberto de M com respeito a topologia I -ádica (isto é, $I^r M \subset N$ para algum $r \geq 1$), então

$$0 \rightarrow \Lambda_I(N) \rightarrow \Lambda_I(M) \rightarrow \Lambda_I\left(\frac{M}{N}\right) \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que $\Lambda_I(N) \subset \Lambda_I(M)$. A partir de $i : N \rightarrow M$ definamos

$$\begin{aligned} \Lambda_I(i) : \Lambda_I(N) &\rightarrow \Lambda_I(M) \\ (n_j + I^j N) &\mapsto (n_j + I^j M). \end{aligned}$$

Seja $(n_i + I^i N) \in \text{Ker}(\Lambda_I(i))$, ou seja, $(n_i + I^i M) = (I^i M) \Rightarrow n_i \in I^i M$ para todo i , em particular $n_{i+r} \in I^{i+r} M$. Assim,

$$I^r M \subset N \Rightarrow I^i I^r M \subset I^i N \Rightarrow n_{i+r} \in I^i N,$$

1. O funtor completamento I -ádico

mas $n_i - n_{i+r} \in I^i N$ por propriedade de limite inverso. Logo $n_i \in I^i N$ e $\Lambda_I(i)$ é injetiva.

Agora perceba que

$$\Lambda_I\left(\frac{M}{N}\right) = \varprojlim_{i \in \mathbb{N}} \frac{\frac{M}{N}}{I^i \frac{M}{N}} = \frac{\frac{M}{N}}{\frac{I^i M + N}{N}} \cong \frac{M}{I^i M + N} = \frac{M}{N}$$

para $i \geq r$. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : \Lambda_I(M) &\rightarrow \Lambda_I\left(\frac{M}{N}\right) \cong \frac{M}{N} \\ (m_i + I^i M) &\mapsto (m_i + I^i M + N). \end{aligned}$$

A sobrejetividade ocorre porque dado um elemento $(m_i + I^i M + N) \in \Lambda_I\left(\frac{M}{N}\right)$ ele é representado por $m + N$ para algum $m \in M$ por causa do isomorfismo $\Lambda_I\left(\frac{M}{N}\right) \cong \frac{M}{N}$ e temos $\varphi(m + I^i M) = m + N$. Analisando o $\text{Ker}(\varphi)$ temos

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{(m_i + I^i M); (m_i + I^i M + N) = (I^i M + N)\} \\ &= \{(m_i + I^i M); m_i + n'_i + I^i M = n''_i + I^i M\} \text{ para cada } i, \end{aligned}$$

isto é, $m_i + I^i M = n''_i - n'_i + I^i M = n + I^i M$ com $n = n''_i - n'_i$. Portanto $\text{Im}(\Lambda_I(i)) = \text{Ker}(\varphi)$.

□

Exemplo 1.8. Sejam K um anel, $P := K[x]$ o anel de polinômios e $A := K[[x]]$ o anel das séries de potências formais. Então A é o completamento de P na topologia (x) -ádica. Note que a aplicação

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \hat{P} \\ \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i &\mapsto (\alpha_0 + (x), \alpha_0 + \alpha_1 x + (x)^2, \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + (x)^3, \dots) \end{aligned}$$

é um isomorfismo. De fato, dado $(p_1 + (x), p_2 + (x)^2, p_3 + (x)^3, \dots) \in \hat{P}$ temos que $p_1 \in \frac{K[x]}{(x)} \cong K$, isso significa que $p_1 + (x) = \alpha_0 + (x)$ com $\alpha_0 \in K$. Além disso, o algoritmo da divisão nos permite escrever $p_2 = q_2 x^2 + r_2$ onde $\deg(r_2) \leq 1$, ou seja, $p_2 + (x)^2 = r_2 + (x)^2$ e podemos utilizar r_2 ao invés de p_2 . Agora, por propriedade de limite inverso $p_2 - p_1 \in (x)$, isto é, $r_2 - \alpha_0 \in (x)$. Daí, $r_2 - \alpha_0 = \alpha_1 x \Rightarrow r_2 = \alpha_1 x + \alpha_0$ mas $\deg(r_2) \leq 1$ e $\deg(\alpha_0) = 0$ implicam que $\deg(\alpha_1) = 0$. Indutivamente $r_3 = \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0$ com $p_3 + (x)^3 = r_3 + (x)^3$. Assim, $(p_1 + (x), p_2 + (x)^2, p_3 + (x)^3, \dots)$ é imagem de $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i$, provando a sobrejetividade. Além disso, os r_i fornecidos pelo algoritmo da divisão são únicos, e isso garante a injetividade.

Exemplo 1.9. Um exemplo de R -módulo completo é obtido da seguinte forma: Tome $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e Artiniano. Assim, R é um R -módulo completo. De fato,

considerando a filtração $\cdots \mathfrak{m}^n \supset \mathfrak{m}^{n+1} \cdots$, sabemos que $\mathfrak{m}^{n+1} = \mathfrak{m}^n$ para algum n grande, pois R é Artiniano. Dessa forma, pelo Lema de Nakayama, $\mathfrak{m}^n = 0$. Logo, dada $(m_n + \mathfrak{m}^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{R}$, temos que $(m_n + \mathfrak{m}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é constante (m_n) a partir de n . Isso mostra a sobrejetividade. A injetividade decorre de $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$. Portanto, $R \cong \hat{R}$.

Capítulo 2

Funtores derivados do completamento I -ádico

Seja R um anel comutativo (não necessariamente Noetheriano) e I um ideal de R . Seja M um R -módulo. Considere o sistema inverso de R -módulos $\left\{ \frac{M}{I^t M}, \pi_{k,t} \right\}$ com epimorfismos naturais

$$\pi_{k,t} : \frac{M}{I^k M} \longrightarrow \frac{M}{I^t M}$$

para todo $k \geq t > 0$.

Vamos usar $\Lambda_I(M) = \varprojlim_t \frac{M}{I^t M}$ para denotar o completamento I -ádico de M . Foi mostrado no capítulo anterior que o funtor completamento I -ádico é um funtor covariante aditivo da categoria dos R -módulos e R -homomorfismos para categoria $\hat{R}$ -módulos e $\hat{R}$ -homomorfismos. Além disso, esse funtor é exato quando os módulos são finitamente gerados e R é Noetheriano. Infelizmente, mesmo R sendo Noetheriano, ele não é exato na categoria dos módulos em geral.

Vamos denotar por $L_i^I(M)$ o i -ésimo módulo derivado à esquerda de $\Lambda_I(M)$ (veja o apêndice B).

Observação 2.1. (i) Como o funtor tensor não é exato à esquerda e o limite inverso não é exato à direita na categoria dos R -módulos (veja o Lema 1.5), o funtor Λ_I não é exato nem à direita e nem à esquerda. Portanto, em geral, $L_0^I \neq \Lambda_I$. Contudo, L_0^I é um funtor exato à direita (veja o Teorema B.5) e seus funtores derivados à esquerda para $i > 0$ são os mesmos que os funtores de Λ_I . Mesmo não sendo exato em nenhum lado, o funtor Λ_I preserva sobrejeções. De fato, sendo $f : G \rightarrow N$ homomorfismo de R -módulos sobrejetor, então $\Lambda_I(f) : \Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(N)$ é sobrejetor. Chame $L = \text{Ker}(f)$, logo $\frac{G}{L} \cong N$ induzindo homomorfismo sobrejetor de sistemas inversos $\left\{ \frac{G}{I^t G} \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{\frac{G}{L}}{I^t \frac{G}{L}} \right\}_t$.

Daí temos a sequência

$$0 \rightarrow \left\{ \frac{L}{L \cap (I^t G)} \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{G}{I^t G} \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{G}{I^t G + L} \right\}_t \rightarrow 0$$

que é exata pois $\frac{L}{L \cap (I^t G)} \cong \frac{L + I^t G}{I^t G}$ implicando $\frac{\frac{G}{I^t G}}{\frac{L + I^t G}{I^t G}} \cong \frac{G}{L + I^t G}$. Dessa forma, como o primeiro sistema inverso da sequência é sobrejetor, podemos aplicar o limite inverso e a sequência permanece exata (esse resultado será provado no Lema 2.3). Portanto, $\Lambda_I(f)$ é sobrejetor.

Seja $0 \rightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ uma sequência exata curta de R -módulos com P projetivo. Então temos a sequência

$$\Lambda_I(N) \xrightarrow{\Lambda_I(f)} \Lambda_I(P) \xrightarrow{\Lambda_I(g)} \Lambda_I(M) \rightarrow 0$$

que não é necessariamente exata. Mas $\text{Im} \Lambda_I(f) \subseteq \text{Ker} \Lambda_I(g)$ e $\Lambda_I(g)$ é sobrejetiva, então

$$(I) \ L_0^I(M) \cong \frac{\Lambda_I(P)}{\text{Im} \Lambda_I(f)}$$

e

$$(II) \ \Lambda_I(M) \cong \frac{\Lambda_I(P)}{\text{Ker} \Lambda_I(g)}.$$

De fato. Em (I) Calcula-se o 0-ésimo módulo derivado à esquerda “esquecendo” $\Lambda_I(M)$. Daí, $\text{Ker} \Lambda_I(g) = \Lambda_I(P)$. Em (II) usa-se o teorema de isomorfismo.

Portanto existe um epimorfismo natural $\varphi_M : L_0^I(M) \rightarrow \Lambda_I(M)$.

(ii) Dois ideais I e J de um anel R são chamados radicalmente equivalentes se existem inteiros positivos n e m tais que $I^n \subseteq J$ e $J^m \subseteq I$. Se os ideais I e J são radicalmente equivalentes então $\Lambda_I(M) \cong \Lambda_J(M)$ para todo R -módulo M . De fato:

Sejam $0 < p, q \in \mathbb{Z}$, tais que: $I^p \subseteq J$ e $J^q \subseteq I$. Sabemos que $\Lambda_I(M) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{M}{I^n M} = \{(x_n + I^n M); x_n - x_{n+1} \in I^n M, n \in \mathbb{N}\}$. De $I^p \subseteq J$, temos que $I^{pr} \subseteq J^r$, e podemos considerar a projeção: $\theta_r : \frac{M}{I^{pr} M} \longrightarrow \frac{M}{J^r M}$ e de maneira análoga $\theta_s : \frac{M}{I^{ps} M} \longrightarrow \frac{M}{J^s M}$.

Considerando $s \geq r$:

$$\begin{array}{ccccc}
 \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{M}{J^n M} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \frac{M}{I^n M} & & \\
 \searrow & & \swarrow \theta_r \circ \pi_{pr} & & \searrow \pi_{pr} \\
 & & \frac{M}{J^r M} & \xleftarrow{\theta_r} & \frac{M}{I^{pr} M} \\
 \searrow & & \swarrow \theta_s \circ \pi_{ps} & & \searrow \pi_{ps} \\
 & & \frac{M}{J^s M} & \xleftarrow{\theta} & \frac{M}{I^{ps} M} \\
 \uparrow \varphi_s^r & & & & \uparrow \\
 & & \frac{M}{J^r M} & & \frac{M}{I^{pr} M}
 \end{array}$$

Perceba que $\varphi_s^r \circ \theta_s \circ \pi_{ps} = \theta_r \circ \pi_{pr}$:

$$\begin{aligned}
 (x_n + I^n M) &\xrightarrow{\pi_{ps}} x_{ps} + I^{ps} M \xrightarrow{\theta_s} x_{ps} + J^s M \xrightarrow{\varphi_s^r} x_{ps} + J^r M \\
 (x_n + I^n M) &\xrightarrow{\pi_{pr}} x_{pr} + I^{pr} M \xrightarrow{\theta_r} x_{pr} + J^r M
 \end{aligned}$$

mas $x_{ps} - x_{pr} \in I^{pr} M \subseteq J^r M$, por causa da propriedade de limite inverso, as classes são iguais no fim. Assim, existe a aplicação tracejada no diagrama, entre os limites inversos, de maneira única a fazer os triângulos comutarem. Tal aplicação é $(x_n + I^n M) \rightarrow (x_{np} + J^n M)$. De fato:

$$(x_n + I^n M) \rightarrow (x_{np} + J^n M) \rightarrow x_{pr} + J^r M.$$

De maneira completamente análoga a todo processo acima, obtêm-se

$$(y_n + J^n M) \rightarrow (y_{nq} + I^n M)$$

Note que são inversas uma da outra:

$$(x_n + I^n M) \rightarrow (x_{np} + J^n M) \rightarrow (x_{npq} + I^n M) = (x_n + I^n M)$$

$$(y_n + J^n M) \rightarrow (y_{nq} + I^n M) \rightarrow (y_{nqp} + J^n M) = (y_n + J^n M)$$

Portanto, $\Lambda_I(M) \cong \Lambda_J(M)$.

(iii) Suponha agora que R é Noetheriano e M é finitamente gerado. Considere uma resolução projetiva de M

$$P_\bullet : \cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \rightarrow 0$$

onde cada P_i é um R -módulo finitamente gerado. Como Λ_I é exato em módulos

finitamente gerados, temos exatidão em:

$$\Lambda_I(P_\bullet) : \cdots \rightarrow \Lambda_I(P_2) \rightarrow \Lambda_I(P_1) \rightarrow \Lambda_I(P_0) \rightarrow \Lambda_I(M) \rightarrow 0.$$

Assim, $L_i^I(M) = H_i(\Lambda_I(P_\bullet)) = 0$, $i > 0$ que é a i -ésima homologia em $\Lambda(P_\bullet)$. Além disso, temos que

$$H_0(P_\bullet) = \frac{P_0}{\text{Im}(d_1)} = \frac{P_0}{\text{Ker}(d_0)} \cong \text{Im}(d_0) = M$$

pois d_0 é sobrejetivo. Logo

$$\Lambda_I H_0(P_\bullet) = \Lambda_I(M) \Rightarrow H_0(\Lambda_I(P_\bullet)) = \Lambda_I(M)$$

ou seja, $L_0^I(M) \cong \Lambda_I(M)$.

Definição 2.2 (Condição de Mittag-Leffler). Para a exatidão do limite inverso nós precisamos da seguinte condição: um sistema inverso $\{M_t, \varphi_{t't}\}$ de R -módulos satisfaz a condição de Mittag-Leffler (ML) se para cada t , a família decrescente $\{\varphi_{t't}(M_{t'}) \subseteq M_t \mid t' \geq t\}$ dos submódulos de M_t é estacionária. Em outras palavras, para cada t , existe um $t_0 \geq t$, tal que para todo $t', t'' \geq t_0$, $\varphi_{t't}(M_{t'}) = \varphi_{t''t}(M_{t''})$ como submódulos de M_t . Vamos destacar quatros casos onde o sistema inverso obedece (ML):

(i) Se todos os homomorfismos $\varphi_{t't} : M_{t'} \rightarrow M_t$ forem sobrejetivos. De fato, $\varphi_{t't}(M_{t'}) = M_t$ para todo $t' \geq t$. Note que, se $t = 0$, temos:

$$\varphi_{10}(M_1) = M_0, \varphi_{20}(M_2) = \varphi_{10}(\varphi_{21}(M_2)) = \varphi_{10}(M_1) = M_0.$$

E analogamente para $t > 0$.

(ii) Se para cada t existir $t_0 \geq t$ tal que, para todo $t' \geq t_0$, tenhamos $\varphi_{t't}(M_{t'}) = 0$. Direto da definição.

(iii) Se $\{M_t\}$ for um sistema inverso de um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo. De fato: supondo que a dimensão de M_t seja igual a n , temos que dimensão de $\varphi_{t't}(M_{t'}) \leq n$. Se, indutivamente, as dimensões de cada $\varphi_{t''t}(M_{t''})$, $t'' > t'$, forem diminuindo até chegarem em 0, estamos no caso (ii). Se a dimensão estacionar, estamos no caso (i).

(iv) Se $\{M_t\}$ for um sistema inverso de módulos Artinianos. Imediato.

Lema 2.3. Seja

$$0 \rightarrow \{M_t\} \xrightarrow{f_t} \{N_t\} \xrightarrow{g_t} \{P_t\} \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de sistemas inversos de módulos. Então:

- (i) Se $\{N_t\}$ satisfaz (ML) então $\{P_t\}$ também satisfaz.
- (ii) Se $\{M_t\}$ satisfaz (ML) então a sequência de limites inversos

$$0 \rightarrow \varprojlim_t M_t \rightarrow \varprojlim_t N_t \rightarrow \varprojlim_t P_t \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. (i) Considere o diagrama comutativo e $\{M_t, \alpha_t^k\}$, $\{N_t, \varphi_t^k\}$ e $\{P_t, \psi_t^k\}$ os sistemas inversos onde $k \geq t$:

$$\begin{array}{ccc} N_k & \xrightarrow{g_k} & P_k \\ \varphi_t^k \downarrow & & \downarrow \psi_t^k \\ N_t & \xrightarrow{g_t} & P_t \end{array}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} g_t|_{\varphi_t^k(N_k)} : \varphi_t^k(N_k) &\rightarrow \psi_t^k(P_k) \\ b &\mapsto g_t(b) \end{aligned}$$

está bem definida, pois, sendo $a \in N_k$ tal que

$$\varphi_t^k(a) = b \Rightarrow g_t \varphi_t^k(a) = g_t(b) \Rightarrow \psi_t^k g_k(a) = g_t(b)$$

e é sobrejetora, porque $g_t(\varphi_t^k(N_k)) = \psi_t^k g_k(N_k)$ e g_k é sobrejetora, já que a sequência é exata. Assim, como (N_t) satisfaz (ML), segue que $\psi_t^k(P_k) = g_t(\varphi_t^k(N_k)) = g_t(\varphi_t^{k'}(N_{k'})) = \psi_t^{k'}(P_{k'})$ para k, k' suficientemente grandes. Portanto, (P_t) satisfaz (ML).

(ii) Como o limite inverso já é exato à esquerda, resta-nos mostrar que a última aplicação é sobrejetora. Tome $(p_t)_t \in \varprojlim P_t$. Para cada t , seja $E_t = g^{-1}(p_t)$. Então E_t é um subconjunto de N_t e $\{(E_t), \beta_t^k\}$ é um sistema inverso de conjuntos, com $\beta_t^k(x_k) = \varphi_t^k(x_k)$ para todo $x_k \in E_k$. Veja que β_t^k está bem definida. Tomando $x_k \in E_k$ temos que $g_k(x_k) = p_k$ e daí

$$\psi_t^k(p_k) = p_t \Rightarrow \psi_t^k g_k(x_k) = p_t \Rightarrow g_t \varphi_t^k(x_k) = p_t.$$

Além disso, cada E_t está em bijeção com M_t através da aplicação

$$\begin{aligned} \mu_t : M_t &\rightarrow E_t \\ m_t &\mapsto x_t + f_t(m_t) \end{aligned}$$

onde $x_t \in E_t$ é fixo. A sobrejetividade ocorre porque dado $y_t \in E_t$ temos que $g_t(x_t) = g_t(y_t) \Rightarrow (y_t - x_t) \in \text{Ker}(g_t) = \text{Im}(f_t) \Rightarrow y_t - x_t = f_t(m_t)$ para algum $m_t \in M_t \Rightarrow$

$y_t = x_t + f_t(m_t)$. E a injetividade pode ser vista tomando $x_t + f_t(m_t) = x_t + f_t(m'_t) \Rightarrow f_t(m_t - m'_t) = 0 \Rightarrow m_t = m'_t$.

Agora vamos mostrar que E_t satisfaz (ML). O objetivo é provar que existe t_0 tal que $\beta_t^k(E_k) = \beta_t^{k'}(E_{k'})$ para $k, k' \geq t_0$. A inclusão $\beta_t^k(E_k) \supseteq \beta_t^{k'}(E_{k'})$ quando $k' \geq k$ ocorre naturalmente e por isso precisamos mostrar que $\beta_t^k(E_k) \subseteq \beta_t^{k'}(E_{k'})$ para k, k' suficientemente grandes. Antes disso perceba que x_t fixado em μ_t pode ser escolhido arbitrariamente. Dessa forma, analogamente se define

$$\begin{aligned} \mu_k : M_k &\rightarrow E_k \\ m_k &\mapsto \varphi_k^{k'}(x_{k'}) + f_k(m_k) \end{aligned}$$

onde $x_{k'} \in E_{k'}$ e $\varphi_k^{k'}(x_{k'}) \in E_k$, que também é bijetora e sua sobrejeção garante que qualquer $x_k \in E_k$ pode ser visto como $x_k = \varphi_k^{k'}(x_{k'}) + f_k(m'_k)$ para algum $m'_k \in M_k$. Agora tome $y \in \beta_t^k(E_k)$, então $y = \beta_t^k(x_k + f_k(m_k)) = \varphi_t^k(x_k) + \varphi_t^k(f_k(m_k))$. Mas $x_k = \varphi_k^{k'}(x_{k'}) + f_k(m'_k)$ para algum $m'_k \in M_k$. Logo

$$\begin{aligned} y &= \varphi_t^k(\varphi_k^{k'}(x_{k'}) + f_k(m'_k)) + \varphi_t^k(f_k(m_k)) \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + \varphi_t^k(f_k(m'_k)) + \varphi_t^k(f_k(m_k)) \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + \varphi_t^k(f_k(m'_k + m_k)) \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + \varphi_t^k(f_k(m''_k)), \end{aligned}$$

onde $m''_k = m'_k + m_k$. Continuando:

$$\begin{aligned} y &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + f_t(\alpha_t^k(m''_k)) && \text{pela comutatividade dos sistemas inversos;} \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + f_t(\alpha_t^{k'}(m''_{k'})) && \text{pois } \{M_t\} \text{ satisfaz (ML);} \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'}) + \varphi_t^{k'}(f_{k'}(m''_{k'})) && \text{novamente pela comutatividade nos diagramas;} \\ &= \varphi_t^{k'}(x_{k'} + f_{k'}(m''_{k'})) \\ &= \beta_t^{k'}(x_{k'} + f_{k'}(m''_{k'})) && \text{pois } x_{k'} + f_{k'}(m''_{k'}) \text{ é um típico elemento de } E_{k'}. \end{aligned}$$

Portanto $\{E_t\}$ satisfaz (ML) como um sistema inverso de conjuntos (mesma definição). Como cada E_t é não-vazio e considerando o sistema inverso das imagens estáveis como acima, segue que $\varprojlim E_t$ é não-vazio. Portanto, $(p_t)_t$ é imagem de qualquer elemento de $\varprojlim E_t \subseteq \varprojlim N_t$.

□

Em geral, o epimorfismo natural φ_M definido na Observação 2.1 não é um isomorfismo. O teorema a seguir nos dá uma condição para φ_M ser um isomorfismo.

Teorema 2.4. *Seja M um R -módulo e I um ideal de R . Suponha que o sistema $\{I^t M\}$ seja estacionário, isto é, existe um inteiro positivo n tal que $I^t M = I^n M$ para todo*

$t \geq n$. Então o epimorfismo natural

$$\varphi_M : L_0^I(M) \rightarrow \Lambda_I(M)$$

é um isomorfismo.

Demonstração. Seja

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de R -módulos com P projetivo. Daí:

$$N \otimes_R (R/I^t) \rightarrow P \otimes_R (R/I^t) \rightarrow M \otimes_R (R/I^t) \rightarrow 0$$

$$N/I^t N \xrightarrow{f_t} P/I^t P \xrightarrow{g_t} M/I^t M \rightarrow 0$$

$$\Lambda_I(N) \xrightarrow{\Lambda_I(f)} \Lambda_I(P) \xrightarrow{\Lambda_I(g)} \Lambda_I(M) \rightarrow 0$$

por 2.1, essa sequência não é necessariamente exata. Mas, $\text{Im} \Lambda_I(f) \subseteq \text{Ker} \Lambda_I(g)$ e $\Lambda_I(g)$ é sobrejetiva. Basta provar que $\text{Im} \Lambda_I(f) = \text{Ker} \Lambda_I(g)$. Como $\text{Im}(f_t) = \text{Ker}(g_t)$, temos $K_t = \text{Ker}(g_t) = (f(N) + I^t P)/I^t P \cong (N + I^t P)/I^t P \cong N/(I^t P \cap N)$ e $\{K_t\}$ forma um sistema inverso sobrejetivo com aplicações $\varphi_{K_t^s} : N/(N \cap I^s P) \rightarrow N/(N \cap I^t P)$ com $s \geq t$. Segue do Lema 2.3 que

$$0 \rightarrow \varprojlim_t K_t \xrightarrow{\varprojlim_t j_t} \Lambda_I(P) \xrightarrow{\Lambda_I(g)} \Lambda_I(M) \rightarrow 0$$

é exata.

Denote as seguintes aplicações por $\pi_s : \Lambda_I(N) \rightarrow \frac{N}{I^s N}$ e $\pi_t^s : \frac{N}{I^s N} \rightarrow \frac{N}{I^t N}$ e observe o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} \varprojlim \frac{N}{N \cap I^t P} & \xleftarrow{\quad h \quad} & \Lambda_I(N) & & \\ & \searrow & \swarrow & \searrow & \\ & \frac{N}{N \cap I^t P} & & \frac{N}{I^t N} & \\ & \uparrow \varphi_{K_t^s} & \swarrow f_t & \searrow \pi_s & \\ & N & & N & \\ & \uparrow & \swarrow f_s & \searrow \pi_t^s & \\ & \frac{N}{N \cap I^s P} & & \frac{N}{I^s N} & \end{array}$$

O fato de que $f_t \circ \pi_t^s \circ \pi_s = \varphi_{K_t^s} \circ f_s \circ \pi_s$ garante a existência de h no diagrama acima, por propriedade universal de limite inverso. Agora considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_I(N) & \xrightarrow{\Lambda_I(f)} & \Lambda_I(P) \\ & \searrow h & \nearrow \varprojlim_t j_t \\ & \varprojlim_t K_t & \end{array}$$

que é comutativo. De fato, tal comutatividade decorre das seguintes aplicações:

$$\begin{aligned} \Lambda_I(f) : \quad \Lambda_I(N) &\longrightarrow \Lambda_I(P) \\ (n_j + I^j N) &\longmapsto (f(n_j) + I^j P) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h : \quad \varprojlim_t \frac{N}{I^t N} &\longrightarrow \varprojlim_t \frac{N}{N \cap I^t P} \\ (n_j + I^t N) &\longmapsto (f(n)_j + N \cap I^t P) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varprojlim_t j_t : \quad \varprojlim_t \frac{N}{N \cap I^t P} &\longrightarrow \varprojlim_t \frac{P}{I^t P} \\ (f(n)_j + N \cap I^j P) &\longmapsto (f(n)_j + I^j P). \end{aligned}$$

A aplicação h foi definida a partir da seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{N}{I^t N} &\longrightarrow \frac{N}{N \cap I^t P} \\ n + I^t N &\longmapsto f(n) + N \cap I^t P. \end{aligned}$$

Assim, verifica-se a comutatividade $\Lambda_I(f)(n_j + I^j N) = (f(n)_j + I^j P) = \varprojlim_t j_t \circ h(n_j + I^j N)$.

Note que, se h for sobrejetiva, então $\text{Im}(\Lambda_I(f)) = \text{Im}(\varprojlim_t j_t) = \text{Ker}(\Lambda_I(g))$. Assim, resta provar que h é sobrejetiva. Seja $H_t = \text{Ker}(f_t) : \{n \in N; n \in I^t P\}$. Logo, $H_t \cong (I^t P \cap N)/I^t N$ e $\{H_t, \pi_{t+1, t}\}$ forma um sistema inverso, onde $\pi_{t+1, t} : (I^{t+1} P \cap N)/I^{t+1} N \rightarrow (I^t P \cap N)/I^t N$ são induzidas pelas aplicações do sistema inverso $\{N/I^t N\}$. Perceba que h será sobrejetiva se $\{H_t\}$ satisfizer (ML), isso por causa da sequência exata

$$0 \rightarrow \{H_t\} \rightarrow N/I^t N \rightarrow N/(N \cap I^t P) \rightarrow 0$$

que continuará exata após aplicação do limite inverso, graças ao Lema 2.3.

Agora, por hipótese $\{I^t M\}$ é estacionária. Dessa forma, existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $I^t M = I^{n_0} M$ para todo $t \geq n_0$. Como $I^t M = I^t(P/N) = (I^t P + N)/N$, segue que $I^t P + N = I^{n_0} P + N$ para todo $t \geq n_0$.

Portanto, para qualquer inteiro k e todo $t \geq k + n_0$, temos

$$\begin{aligned} Im(\pi_{t,k}) &= ((N \cap I^t P) + I^k N) / I^k N \\ &= (N \cap (I^k(I^{t-k} P + N))) / I^k N \quad (*) \\ &= (N \cap I^k(I^{n_0} P + N)) / I^k N. \end{aligned}$$

Em $(*)$ utilizamos a propriedade: Se $A \supseteq C$, então $(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$, onde $C = N$ e $A = I^k N$.

Continuando a prova, observe que a última igualdade não depende de t , isso prova que $\{H_t\}$ satisfaz (ML). Assim, h é sobrejetiva e o teorema está completamente provado. $\square$

Corolário 2.5. Seja M um R -módulo Artiniano. Então o epimorfismo natural

$$\varphi_M : L_0^I(M) \rightarrow \Lambda_I(M)$$

é um isomorfismo.

Corolário 2.6. Seja M um R -módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $IM = M$;
- (ii) $L_0^I(M) = 0$;
- (iii) $\Lambda_I(M) = 0$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Por hipótese $M = I^t M$ para todo $t \geq 0$. Portanto,

$$L_0^I(M) \cong \Lambda_I(M) = \varprojlim_t \frac{M}{I^t M} = 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Segue do epimorfismo natural

$$\varphi_M : L_0^I(M) \rightarrow \Lambda_I(M).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Suponha para chegar a um absurdo que $IM \neq M$. Dessa forma, tome $m \in (M - IM)$. Assim, teríamos $(m + IM, m + I^2 M, \dots)$ elemento não-nulo em $\Lambda_I(M)$. $\square$

2.1 Completamento I -ádico generalizado e seus funtores derivados à esquerda

Uma interessante definição para o completamento I -ádico para dois módulos foi apresentada recentemente por Tran Tuan Nam em [Nam10, Definition 2.1].

Seja I um ideal de R e M, N R -módulos. O completamento I -ádico de $\Lambda_I(N) = \varprojlim_t \frac{N}{I^t N}$ sugere a seguinte definição:

Definição 2.7. O completamento I -ádico generalizado $\Lambda_I(M, N)$ dos R -módulos M, N é definido por

$$\Lambda_I(M, N) = \varprojlim_t \left(\frac{R}{I^t} \otimes_R M \otimes_R N \right).$$

Dessa forma percebe-se que $\Lambda_I(M, N) \cong \Lambda_I(M \otimes_R N)$ o completamento I -ádico de $M \otimes_R N$.

Seja $\mathcal{C}(R)$ a categoria de todos os R -módulos e homomorfismos. Temos o bi-funtor

$$\Lambda_I(-, -) : \mathcal{C}(R) \times \mathcal{C}(R) \rightarrow \mathcal{C}(R).$$

Para cada R -módulo M , temos o funtor covariante

$$\Lambda_I(M, -) : \mathcal{C}(R) \rightarrow \mathcal{C}(R).$$

Assim como no caso do funtor $\Lambda_I(-)$, note que o funtor $\Lambda_I(M, -)$ não é exato nem à direita nem à esquerda, já que limite inverso não é exato à direita e produto tensorial não é exato à esquerda. Sendo $L_i \Lambda_I(M, -)$ o i -ésimo funtor derivado à esquerda de $\Lambda_I(M, -)$, ocorre que, em geral, $L_0 \Lambda_I(M, -) \neq \Lambda_I(M, -)$; todavia, $L_0 \Lambda_I(M, -)$ é exato à direita.

Observação 2.8. (i) $\Lambda_I(M, N) \cong \Lambda_I(N, M)$.

(ii) Quando $M = R$, tem-se $\Lambda_I(M, N) = \Lambda_I(N)$ o completamento I -ádico de N e $L_i \Lambda_I(R, -) = L_i \Lambda_I(-)$ o i -ésimo funtor derivado à esquerda de $\Lambda_I(-)$.

Denote por $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$ a categoria de todos os R -módulos M (e homomorfismos) tais que $L_0 \Lambda_I(M, N) \cong \Lambda_I(M, N)$ para todo R -módulo N , equivalentemente, o funtor $\Lambda_I(M, -)$ é exato à direita. Para cada R -módulo M , $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ denota a categoria de todos os R -módulos N (e homomorfismos) tais que $L_0 \Lambda_I(M, N) \cong \Lambda_I(M, N)$. Perceba que $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$ e $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ são subcategorias plenas da categoria de R -módulos $\mathcal{C}(R)$ e preservam somas diretas finitas de R -módulos. Mais ainda, se $M \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$, então $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R) = \mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$. Se P for um R -módulo projetivo, então $P \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$.

O seguinte teorema mostra que as categorias $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$ e $\mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ são grandes, e elas contêm todos os R -módulos Artinianos.

Teorema 2.9.

(i) Seja M um R -módulo tal que o sistema $\{I^t M\}_t$ é estacionário, então $M \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$.

(ii) Se N é um R -módulo tal que o sistema $\{I^t N\}_t$ é estacionário, então $N \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ para cada R -módulo M .

Para provar o Teorema 2.9 vamos precisar dos seguintes lemas:

Lema 2.10. Seja $f : G \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Se f é sobrejetivo então o homomorfismo $\Lambda_I(M, f) : \Lambda_I(M, G) \rightarrow \Lambda_I(M, N)$ é também sobrejetivo.

A prova desse lema é análoga à prova presente na Observação 2.1. Na verdade a afirmação na Observação 2.1 (i) é exatamente o corolário que vem a após esse lema.

Prova do Lema 2.10. O epimorfismo $f : G \rightarrow N$ induz o epimorfismo $M \otimes_R f : M \otimes_R G \rightarrow M \otimes_R N$. Sendo $L = \text{Ker}(M \otimes_R f)$, temos que $M \otimes_R N \cong \frac{M \otimes_R G}{L}$. Então o sistema inverso de homomorfismos induzido

$$\left\{ \frac{R}{I^t} \otimes_R M \otimes_R G \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{R}{I^t} \otimes_R \frac{M \otimes_R G}{L} \right\}_t$$

é sobrejetivo. Esse sistema inverso induz a sequência

$$0 \rightarrow \left\{ \frac{L}{L \cap (I^t(M \otimes_R G))} \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{M \otimes_R G}{I^t(M \otimes_R G)} \right\}_t \rightarrow \left\{ \frac{M \otimes_R G}{I^t(M \otimes_R G) + L} \right\}_t \rightarrow 0$$

que é exata já que $\frac{L}{L \cap (I^t(M \otimes_R G))} \cong \frac{L + I^t(M \otimes_R G)}{I^t(M \otimes_R G)}$ e então $\frac{\frac{M \otimes_R G}{I^t(M \otimes_R G)}}{\frac{L + I^t(M \otimes_R G)}{I^t(M \otimes_R G)}} \cong \frac{M \otimes_R G}{L + I^t(M \otimes_R G)}$. Como o sistema inverso $\left\{ \frac{L}{L \cap (I^t(M \otimes_R G))} \right\}_t$ é sobrejetivo, aplicando o limite inverso na sequência exata segue que $\Lambda_I(M, f)$ é sobrejetivo pelo Lema 2.3. $\square$

Tomando $M = R$, temos uma consequência imediata.

Corolário 2.11. Seja $f : G \rightarrow N$ um homomorfismo de R -módulos. Se f é sobrejetivo, então o homomorfismo $\Lambda_I(f) : \Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(N)$ também é sobrejetivo.

Lema 2.12. Seja $G \rightarrow L \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ uma sequência exata de R -módulos tal que o sistema $\{I^t N\}$ é estacionária. Então a seguinte sequência induzida

$$\Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(L) \rightarrow \Lambda_I(N) \rightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Chamando $K = \text{Ker}(f)$, nós temos as sequências exatas induzidas

$$\begin{array}{ccccccc} G & \rightarrow & K & \rightarrow & 0 \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & L & \rightarrow & N \rightarrow 0. \end{array}$$

Do corolário anterior, a primeira sequência exata induz a sequência exata

$$\Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(K) \rightarrow 0.$$

Como no início da prova do Teorema 2.4, a segunda sequência exata fornece a sequência exata

$$\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(L) \rightarrow \Lambda_I(N) \rightarrow 0.$$

Portanto, a sequência exata induzida

$$\Lambda_I(G) \rightarrow \Lambda_I(L) \rightarrow \Lambda_I(N) \rightarrow 0$$

é exata. □

Agora vamos provar o Teorema 2.9.

Prova do Teorema 2.9. (i) Seja $0 \rightarrow K \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$ uma sequência exata curta com P projetivo. Assim temos a sequência exata à direita induzida

$$M \otimes_R K \rightarrow M \otimes_R P \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0,$$

que por sua vez induz a sequência

$$\Lambda_I(M, K) \xrightarrow{\Lambda_I(M, f)} \Lambda_I(M, P) \xrightarrow{\Lambda_I(M, g)} \Lambda_I(M, N) \rightarrow 0 \quad (*)$$

em que $\text{Im}(\Lambda_I(M, f)) \subseteq \text{Ker}(\Lambda_I(M, g))$ e $\Lambda_I(M, g)$ é sobrejetivo pelo Lema 2.10. Assim

$$L_0 \Lambda_I(M, N) \cong \frac{\Lambda_I(M, P)}{\text{Im}(\Lambda_I(M, f))}$$

e

$$\Lambda_I(M, N) \cong \frac{\Lambda_I(M, P)}{\text{Ker}(\Lambda_I(M, g))}.$$

Dessa forma, a prova estará completa se conseguirmos mostrar que $\text{Im}(\Lambda_I(M, f)) = \text{Ker}(\Lambda_I(M, g))$, isso resultaria na exatidão da sequência (*). Lembre que $\Lambda_I(M, K) \cong \Lambda_I(M \otimes_R K)$ para quaisquer R -módulos M, K . Pelo Lema 2.12, é suficiente provar que o sistema $\{I^t(M \otimes_R K)\}$ é estacionário. Por hipótese, existe um inteiro positivo n tal que $I^t M = I^n M$ para todo $t \geq n$. Para cada $\alpha_n \in I^n$, $a \in M$, e $b \in N$, temos que $\alpha_n a \in I^n M = I^t M$. Então existe $\alpha_t \in I^t$ tal que $\alpha_n a = \alpha_t c$, para algum $c \in M$. Daí

$$\alpha_n(a \otimes b) = \alpha_n a \otimes b = \alpha_t c \otimes b = \alpha_t(c \otimes b).$$

Assim $I^n(M \otimes_R N) = I^t(M \otimes_R N)$ para todo $t \geq n$, e isso conclui a prova de (i).

(ii) Note que N obedece às hipóteses de (i), logo $N \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$, ou seja, $L_0\Lambda_I(N, M) \cong \Lambda_I(N, M)$ para cada R -módulo M . Agora pela Observação 2.8, segue que

$$L_0\Lambda_I(M, N) \cong \Lambda_I(M, N),$$

isto é, $N \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ para cada R -módulo M . □

O Teorema 2.9, nos dá as seguintes consequências imediatas.

Corolário 2.13.

- (i) Se M é um R -módulo Artiniano, então $M \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(R)$.
- (ii) Se N é um R -módulo Artiniano, então $N \in \mathcal{C}_{\Lambda_I}(M, R)$ para cada R -módulo M .

Corolário 2.14. Seja M, N R -módulos. Existe um epimorfismo

$$\varphi(M, N) : L_0\Lambda_I(M, N) \rightarrow \Lambda_I(M, N).$$

Demonstração. O epimorfismo segue da prova do Teorema 2.9 e decorre da aplicação

$$\frac{\Lambda_I(M, P)}{\text{Im}(\Lambda_I(M, f))} \longrightarrow \frac{\Lambda_I(M, P)}{\text{Ker}(\Lambda_I(M, g))}.$$

□

Capítulo 3

Homologia local e módulos de homologia Koszul

A partir de agora, vamos assumir que R é um anel Noetheriano. É conhecido que o i -ésimo módulo de cohomologia local $H_I^i(M)$ de um módulo M com respeito ao ideal I pode ser definido por

$$H_I^i(M) = \varinjlim_t \operatorname{Ext}_R^i(R/I^t, M).$$

Como em [SBIW07, Theorem 7.8].

Isso sugere a seguinte definição.

Definição 3.1. Seja I um ideal de R e M um R -módulo. O i -ésimo módulo de homologia local $H_i^I(M)$ de M com respeito a I é definido por

$$H_i^I(M) = \varprojlim_t \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M).$$

Observação 3.2. (i) Note que $H_i^I(M) = \varprojlim_t H_i((R/I^t) \otimes F_\bullet)$, onde $F_\bullet$ é uma resolução projetiva de M . Por outro lado,

$$L_i^I(M) = H_i(\Lambda_I(M)) = H_i(\varprojlim_t M/I^t M) = H_i(\varprojlim_t ((R/I^t) \otimes F_\bullet)).$$

Existem as aplicações $\varphi_i : L_i^I(M) \rightarrow H_i^I(M)$ que são os epimorfismos dados em [GM92, Proposition 1.1].

(ii) Note que $H_0^I(M) \cong \Lambda_I(M)$. De fato,

$$\begin{aligned} H_0^I(M) &= \varprojlim_t \operatorname{Tor}_0^R(R/I^t; M) \\ &= \varprojlim_t (R/I^t) \otimes M \\ &\cong \varprojlim_t M/I^t M \\ &= \Lambda_I(M). \end{aligned}$$

Mais ainda, se M for um módulo finitamente gerado, então pela Observação 2.1 (iii), para todo $i > 0$, $L_i^I(M) = 0$. Portanto, $H_i^I(M) = 0$ por (i).

Teorema 3.3. *Seja M um R -módulo. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

(i) *Para todo $i > 0$, o módulo de homologia local $H_i^I(M)$ é I -separável, isto é,*

$$\bigcap_{s>0} I^s H_i^I(M) = 0.$$

(ii) *Suponha que $(R, \mathfrak{m})$ é um anel local. Então para todo $i \geq 0$,*

$$H_i^I(D(M)) \cong D(H_i^I(M)),$$

onde $D(-) = \operatorname{Hom}(-, E)$ denota o dual de Matlis sendo $E = E\left(\frac{R}{\mathfrak{m}}\right)$ a envoltória injetiva do corpo residual.

Demonstração. (i) Note que, para qualquer sistema inverso, $\{M_t\}$,

$$I \varprojlim_t M_t \subseteq \varprojlim_t IM_t.$$

Basta considerar as aplicações

$$\begin{aligned} I\varphi_t^k : IM_k &\rightarrow IM_t \\ \sum_{i=1}^r a_i m_i^k &\mapsto \sum_{i=1}^r a_i \varphi_t^k(m_i^k) \end{aligned}$$

induzidas do sistema inverso $\{M_t, \varphi_t^k\}$ onde $k \geq t$. A inclusão decorre diretamente da definição de limite inverso.

Assim,

$$\begin{aligned}
 \bigcap_{s>0} I^s H_i^I(M) &\cong \varprojlim_s I^s \varprojlim_t \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M) \text{ (veja o Exemplo A.6) } (*) \\
 &\subseteq \varprojlim_s \varprojlim_t I^s \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M) \\
 &\cong \varprojlim_t \varprojlim_s I^s \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M) = 0
 \end{aligned}$$

já que $I^s \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M) = 0$ para $s \geq t$, pois $I^s \operatorname{Tor}_i^R(R/I^t; M) \subseteq \operatorname{Tor}_i^R(I^s(R/I^t); M) = 0$ para $s \geq t$.

(ii) Sabe-se que para um sistema direto $\{N_t\}$ de R -módulos, $\varprojlim_t D(N_t) \cong D(\varinjlim_t N_t)$ [Rot09, Proposition 5.26]. Tome $F_\bullet$ resolução livre de posto finito de $\frac{R}{I^t}$ e chame $A = \operatorname{Hom}_R(F_\bullet, \frac{R}{I^t}; M)$ para descarregar a notação no seguinte cálculo:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; D(M)) &= H_i(F_\bullet(\frac{R}{I^t}) \otimes D(M)) \\
 &= H_i(F_\bullet(\frac{R}{I^t}) \otimes \operatorname{Hom}_R(M; E)) \\
 &= H_i(\operatorname{Hom}_R(A; E)) \text{ [Rot09, Lemma 9.71]} \\
 &= H_i(D(A)) \\
 &= D(H^i(A)) \\
 &= \operatorname{Hom}_R(H^i(A); E) \\
 &= D(\operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I^t}; M)).
 \end{aligned}$$

Assim nós temos

$$\begin{aligned}
 H_i^I(D(M)) &\cong \varprojlim_t \operatorname{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; D(M)) \\
 &\cong \varprojlim_t D(\operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I^t}; M)) \\
 &\cong D(\varinjlim_t \operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{I^t}; M)) \\
 &= D(H_I^i(M)).
 \end{aligned}$$

□

Suponha agora que o ideal I é gerado por r elementos $x_1, \dots, x_r$ em R . Sejam $\underline{x}(t) = (x_1^t, \dots, x_r^t)$ e $k_\bullet(\underline{x}(t))$ o complexo de Koszul de R com respeito à $\underline{x}(t)$ que será abreviado por $K_\bullet^t$. Para inteiros positivos t, k ($t \geq k$) existem homomorfismos naturais $\theta_i^{t,k} : K_i^{t+k} \rightarrow K_i^t$, dados por $\theta_i^{t,k}(e_\alpha) = x_\alpha^k e_\alpha$, onde $\alpha = (j_1, \dots, j_i)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq r$. Aqui escrevemos x_α para o produto $x_{j_1} \cdots x_{j_i}$.

Verifica-se que as aplicações $\theta_\bullet^{t,k} : K_\bullet^{t+k} \rightarrow K_\bullet^t$ são morfismos de complexos (veja a Proposição [Str90, Proposition 4.3.1]).

Observe que $\theta_{\bullet}^{t,k}$ forma um sistema inverso de complexos $K_{\bullet}^t$.

Para um R -módulo M , definimos $K_{\bullet}(\underline{x}(t); M) = K_{\bullet}(\underline{x}(t)) \otimes_R M$ o complexo de Koszul de M com respeito ao sistema $\underline{x}(t)$ e $H_{\bullet}(\underline{x}(t); M)$ seus módulos de homologia. Então os homomorfismos induzidos

$$H_{\bullet}(\theta_{\bullet}^{t,k}; M) : H_{\bullet}(\underline{x}(t); M) \rightarrow H_{\bullet}(\underline{x}(k); M)$$

fazem de $\{H_{\bullet}(\underline{x}(t); M)\}$ um sistema inverso. De fato, dados dois complexos

$$\begin{array}{ccccccc} C_{\bullet} : & \cdots & \longrightarrow & C_{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & C_k & \xrightarrow{d_k} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\ D_{\bullet} : & \cdots & \longrightarrow & D_{k+1} & \xrightarrow{\delta_{k+1}} & D_k & \xrightarrow{\delta_k} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

onde $f = \{f_k\}$ é uma aplicação de cadeias (morfismo de complexos), temos a boa definição de $H_k(C_{\bullet}) \rightarrow H_k(D_{\bullet})$, no sentido de que leva homologias em homologias:

(i) Leva ciclo em ciclo. Seja $z \in \text{Ker}(d_k)$, daí

$$d_k(z) = 0 \Rightarrow \delta_k f_k(z) = f_{k+1} d_k(z) = 0,$$

pois f_{k+1} é homomorfismo.

(ii) Leva bordo em bordo. Seja $b \in \text{Im}(d_{k+1})$, daí

$$b = d_{k+1}(x) \Rightarrow f_k(b) = f_k d_{k+1}(x) = \delta_{k+1} f_{k+1}(x).$$

Observação 3.4. Em [Str90, Corollary 4.2.7] foi provado que se $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$ e o R -módulo M é anulado por $\mathfrak{b}$, então

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})H_p(x, M) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})H^p(x, M) = 0 \text{ para todo } p.$$

Utilizaremos esse resultado na demonstração do seguinte lema.

Lema 3.5. Sejam F um R -módulo plano. Então para qualquer inteiro positivo t existe um $t_0 > t$ tal que

$$H_p(\theta_{\bullet}^{k,t}; F) : H_p(\underline{x}(k); F) \rightarrow H_p(\underline{x}(t); F)$$

é o homomorfismo nulo para todo $k \geq t_0$ e $p \geq 1$.

Demonstração. Tome $\mathfrak{a} = (x_1, \dots, x_n)$ e escolha r suficientemente grande tal que $\mathfrak{a}^r \subseteq \mathfrak{a}_t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$ (isso é sempre possível, basta tomar, por exemplo, $r = nt$). Agora, para cada complexo $K_{\bullet}^t$ escreva $Z_p^t = \text{Ker}(d_p^t)$ para os ciclos e $B_b^t = \text{Im}(d_{p+1}^t)$ para os

bordos em K_p^t . Pelo lema de Artin-Rees (tomando $M = K_p^t$ e $N = Z_p^t$ nas notações do lema [Str90, Lemma 2.1.1]), $\exists s_1 \geq 0$ tal que, para $s \geq s_1$ tem-se

$$Z_p^t \cap a^s K_p^t = a^{s-s_1} (Z_p^t \cap a^{s_1} K_p^t).$$

Em particular, para $s = r + s_1$, temos as inclusões

$$Z_p^t \cap a^s K_p^t = a^r (Z_p^t \cap a^{s_1} K_p^t) \subseteq a^r Z_p^t \subseteq a_t Z_p^t \subseteq B_p^t.$$

A última inclusão é consequência da Observação 3.4.

De fato, nas notações da Observação 3.4, fazendo $M = R$ temos $\mathfrak{b} = (0)$ e então

$$\mathfrak{a}_t \frac{Z_p^t}{B_p^t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathfrak{a}_t Z_p^t + B_p^t}{B_p^t} = 0 \Rightarrow \mathfrak{a}_t Z_p^t \subseteq B_p^t.$$

Agora, vamos provar que $H_p(\theta_{\bullet}^{t+s,s}) = 0$ para $s \geq s_0 = r + s_1$ e $p \geq 1$. Como $\theta_{\bullet}^{t+s,s}$ é um morfismo de complexos, temos $\theta_p^{t+s,s}(Z_p^{t+s}) \subseteq Z_p^t$, e precisamos mostrar agora que $\theta_p^{t+s,s}(Z_p^{t+s}) \subseteq B_p^t$. Sabemos que $\theta_p^{t+s,s}(K_p^{t+s}) \subseteq \mathfrak{a}^s K_p^t$, pela definição de $\theta_p^{t+s,s}$ (por isso pedimos $p \geq 1$, já que no caso $p = 0$ teríamos $\theta_0^{t+s}(K_0^{t+s}) = R$ que poderia não está contido em $\mathfrak{a}^s K_0^t = \mathfrak{a}^s R$), assim $\theta_p^{t+s,s}(Z_p^{t+s}) \subseteq Z_p^t \cap \mathfrak{a}^s K_p^t \subseteq B_p^t$, ou seja, os ciclos estão indo nos bordos, isto é, no zero do quociente, assim $H_p(\theta_{\bullet}^{t+s,s}) = 0$. Denote agora $k = t + s$ e $t_0 = t + s_0$. Portanto, o resultado segue da exatidão do funtor $- \otimes_R F$ quando F é plano. $\square$

Lema 3.6. Seja

$$0 \rightarrow K \rightarrow F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

uma sequência exata de R -módulos com F_j plano. Então

$$\varprojlim_t H_{j+i}(\underline{x}(t); M) \cong \varprojlim_t H_j(\underline{x}(t); K), \quad j \geq 1;$$

e

$$\varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); M) \cong \text{Ker}(\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(F_{i-1})).$$

Demonstração. Decompondo a sequência exata longa em sequências exatas curtas, nós precisamos apenas provar o caso $i = 1$. A sequência exata curta

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{f} F_0 \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$$

gera a sequência exata longa de módulos de homologia Koszul:

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{f_{j+1}^t} H_{j+1}(\underline{x}(t); F_0) \xrightarrow{g_{j+1}^t} H_{j+1}(\underline{x}(t); M) \xrightarrow{\delta_j^t} H_j(\underline{x}(t); K) \xrightarrow{f_j^t} H_j(\underline{x}(t); F_0) \xrightarrow{g_j^t} \dots \\ \dots \xrightarrow{g_1^t} H_1(\underline{x}(t); M) \xrightarrow{\delta_0^t} K/\underline{x}(t)K \xrightarrow{f^t} F_0/\underline{x}(t)F_0 \xrightarrow{g^t} M/\underline{x}(t)M \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Então temos as seguintes sequências exatas

$$0 \rightarrow \text{Im}(g_{j+1}^t) \rightarrow H_{j+1}(\underline{x}(t); M) \rightarrow \text{Im}(\delta_j^t) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(\delta_j^t) \rightarrow H_j(\underline{x}(t); K) \rightarrow H_j(\underline{x}(t); F_0)$$

para todo $j \geq 0$.

Observe que os homomorfismos do sistema inverso $\{\text{Im}(g_{j+1}^t)\}$ induzidos dos homomorfismos $H_{j+1}(\theta_{\bullet}^{t,k}; F_0)$ são nulos para todo k e para t suficientemente grande, pelo Lema 3.5. De fato,

$$\begin{array}{ccc} g_{j+1}^{t+k} : H_{j+1}(\underline{x}(t+k), F_0) & \xrightarrow{\psi} & H_{j+1}(\underline{x}(t+k), M) \\ \downarrow 0 & & \downarrow \pi \\ g_{j+1}^k : H_{j+1}(\underline{x}(k), F_0) & \xrightarrow{\varphi} & H_{j+1}(\underline{x}(k), M) \end{array}$$

é comutativo e a composição $\pi \circ \psi = \varphi \circ 0 = 0$, ou seja, $\text{Im}(\psi) \subseteq \text{Ker}(\pi)$, isto é, $\pi|_{\text{Im}(\psi)} \equiv 0$. Agora, tem-se

$$\varprojlim_t \text{Im}(g_{j+1}^t) = \{(x_t); x_\mu = f_\mu^\lambda(x_\lambda)\} \Rightarrow x_t = f_t^{t+1}(x_{t+1}) = 0$$

para t suficientemente grande, $x_{t+1} = f_{t+1}^{t+2}(x_{t+2}) = 0$. Logo $\varprojlim_t \text{Im}(g_{j+1}^t) = 0$. Novamente pelo Lema 3.5, temos $\varprojlim_t H_j(\underline{x}(t); F_0) = 0$. Agora pelo Lema 2.3 (ii):

$$0 \rightarrow \varprojlim_t \text{Im}(g_{j+1}^t) \rightarrow \varprojlim_t H_{j+1}(\underline{x}(t); M) \rightarrow \varprojlim_t \text{Im}(\delta_j^t) \rightarrow 0$$

é exata, logo $\varprojlim_t H_{j+1}(\underline{x}(t); M) \cong \varprojlim_t \text{Im}(\delta_j^t)$.

Analogamente, $\varprojlim_t \text{Im}(\delta_j^t) \cong \varprojlim_t H_j(\underline{x}(t); K)$. Portanto,

$$\varprojlim_t H_{j+1}(\underline{x}(t); M) \cong \varprojlim_t H_j(\underline{x}(t); K)$$

para todo $j \geq 1$, e

$$\varprojlim_t H_1(\underline{x}(t); M) \cong \varprojlim_t \text{Im}(\delta_0^t) \cong \varprojlim_t \text{Ker}(f^t) \cong \text{Ker}(\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(F_0)). (*)$$

O segundo isomorfismo é garantido pela exatidão. Também usamos que $\varprojlim_t H_0(\underline{x}(t); K) \cong \Lambda_I(K)$. Isso ocorre porque as topologias são equivalentes, implicando limites inversos isomorfos. Veja:

$$a = (x_1, \dots, x_n), a^t = (x_1, \dots, x_n)^t, a_t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$$

$$a^{nt} \subseteq a_t \subseteq a^t \text{ e } a_{nt} \subseteq a^{nt} \subseteq a_t.$$

Em $(*)$ provamos para o caso $i = 1$, mas o resultado é válido para $i \geq 1$. De fato, considere a resolução livre

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & K_1 & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_2 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & K_0 & & \\ & & & & \nearrow & & \searrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

e note que

$$\begin{aligned} \varprojlim_t H_{j+1}(\underline{x}(t); M) &\cong \varprojlim_t H_{j+i-1}(\underline{x}(t); K_0) \\ &\cong \varprojlim_t H_{j+i-2}(\underline{x}(t); K_1) \\ &\vdots \\ &\cong \varprojlim_t H_{j+i}(\underline{x}(t); K_{i-2}) \quad (\star) \\ &\cong \varprojlim_t H_j(\underline{x}(t); K_{i-1}) \end{aligned}$$

que é o resultado desejado, levando em conta o “pedaço” da sequencia exata:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K_{i-1} & \longrightarrow & F_{i-1} & \longrightarrow & F_{i-2} \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \searrow & & \nearrow \\
 & & & & K_{i-2} & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

e usando $(*)$ para a sequencia exata curta

$$0 \rightarrow K_{i-1} \rightarrow F_{i-1} \rightarrow K_{i-2} \rightarrow 0,$$

observando que K_{i-1} é o módulo K do enunciado e considerando $j = 0$ em $(*)$, temos

$$\varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); M) \cong \varprojlim_t H_1(\underline{x}(t); K_{i-2}) \cong \text{Ker}(\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(F_{i-1})).$$

□

Agora nós já podemos mostrar que o módulo de homologia local $H_i^I(M)$ pode ser calculado pela homologia Koszul, e portanto a definição aqui abordada é equivalente à uma definição apresentada por Z. Tang de homologia local para módulos Artinianos (veja [Tan94]).

Teorema 3.7. *Seja M um R -módulo. Então*

$$H_i^I(M) \cong \varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); M),$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Se $i = 0$, temos

$$\begin{aligned}
 H_0^I(M) &= \Lambda_I(M) && \text{pela Observação 3.2 (ii)} \\
 &= \varprojlim_t \frac{M}{I^t M} \\
 &\cong \varprojlim_t \frac{M}{\underline{x}(t)M} && \text{pois as topologias são equivalentes} \\
 &= \varprojlim_t H_0(\underline{x}(t); M).
 \end{aligned}$$

Agora suponha que $i > 0$. Seja

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

uma sequência exata com P_j projetivos. Daí, pelo Lema 3.6, temos os isomorfismos:

$$\varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); M) \cong \text{Ker}(\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(P_{i-1}))$$

aplicado à sequência $(\star)$ abaixo

$$0 \rightarrow K \rightarrow P_{i-1} \rightarrow K_{i-2} \rightarrow 0 \quad (\star)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K = K_{i-1} & \longrightarrow & P_{i-1} & \longrightarrow & P_{i-2} \longrightarrow \dots & (*) \\ & & & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & & K_{i-2} & & \\ & & \nearrow & & \nwarrow & & & \\ & & 0 & & & 0 & & \end{array}$$

e observando que $H_i(\underline{x}(t); M) = H_1(\underline{x}(t); K_{i-2})$ em $(\star)$.

Por outro lado, temos $\text{Tor}_1^R(\frac{R}{I^t}; K_{i-2}) \cong \text{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; M)$, e também aplicando $\text{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; -)$ em $(\star)$, que induz

$$0 = \text{Tor}_1^R(\frac{R}{I^t}; P_{i-1}) \rightarrow \text{Tor}_1^R(\frac{R}{I^t}; K_{i-2}) \rightarrow \frac{K}{I^t K} \rightarrow \frac{P_{i-1}}{I^t P_{i-1}} \rightarrow \frac{K_{i-2}}{I^t K_{i-2}} \rightarrow 0.$$

De onde temos:

$$0 \rightarrow \text{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; M) \rightarrow \frac{K}{I^t K} \rightarrow \frac{P_{i-1}}{I^t P_{i-1}},$$

aplicando $\varprojlim_t$:

$$0 \rightarrow H_i^I(M) \xrightarrow{\varphi} \Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(P_{i-1}),$$

sequência exata.

Daí,

$$\begin{aligned} H_i^I(M) &\cong \text{Im}(H_i^I(M) \rightarrow \Lambda_I(K)) && \text{pois } \varphi \text{ é injetora} \\ &= \text{Ker}(\Lambda_I(K) \rightarrow \Lambda_I(P_{i-1})) && \text{por exatidão} \\ &\cong \varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); M). \end{aligned}$$

□

Note que $H_i^I(M)$ tem uma estrutura natural de $\Lambda_I(R)$ -módulo. De fato, basta considerar

$$\begin{aligned} \Lambda_I(R) \times H_i^I(M) &\longrightarrow H_i^I(M) \\ ((x_n + I^n)_n, (z_n + B_n)_n) &\longmapsto (x_n z_n + B_n)_n \end{aligned}$$

de modo que $x_n - x_{n+1} \in I^n$ e $z_n - z_{n+1} \in B_n$.

Resta mostrar que $x_n z_n - x_{n+1} z_{n+1} \in B_n$. Note que

$$x_n z_n - x_{n+1} z_{n+1} = x_n z_n - x_{n+1} z_n + x_{n+1} z_n - x_{n+1} z_{n+1} = (x_n - x_{n+1}) z_n + x_{n+1} (z_n - z_{n+1})$$

mas $(x_n - x_{n+1}) \in I^n$ e $(z_n - z_{n+1}) \in B_n$.

Como consequência do Teorema 3.7, daremos a seguir uma versão do Teorema de Independência, bem conhecido em teoria de cohomologia local, na teoria de homologia local.

Teorema 3.8 (Teorema da Independência). *Seja $f : R \rightarrow R'$ um homomorfismo de anéis Noetherianos e M um R' -módulo. Então temos um isomorfismo de $\Lambda_I(R)$ -módulos*

$$H_i^I(M) \cong H_i^{IR'}(M)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Suponha que o ideal I seja gerado por r elementos $x_1, x_2, \dots, x_r$ em R . Então IR' é gerado pelos elementos $y_1, y_2, \dots, y_r$ em R' , onde $y_1 = f(x_1), \dots, y_r = f(x_r)$. Sejam $\underline{x}(t) = (x_1^t, x_2^t, \dots, x_r^t)$ e $\underline{y}(t) = (y_1^t, y_2^t, \dots, y_r^t)$. Então podemos verificar que

$$H_i(\underline{x}(t); M) \cong H_i(\underline{y}(t); M) \quad (*)$$

é um isomorfismo de R -módulos. Vamos provar para o caso $i = 0$ e o caso $i = 1$, considerando $t = 1$ e $r = 1$, e os demais casos são análogos. Observando os complexos

$$0 \rightarrow R' \xrightarrow{y_1} R' \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

obtemos o complexo de Koszul

$$K_\bullet(y_1; M) : 0 \rightarrow R' \otimes_{R'} M \cong M \xrightarrow{\mu_{y_1}} R' \otimes_{R'} M \cong M \rightarrow 0$$

$$1 \otimes m \mapsto y_1(1 \otimes m)$$

com $y_1(1 \otimes m) = 1 \otimes y_1 m = 1 \otimes f(x_1)m$. Analogamente se constrói $K_\bullet(x_1; M)$, onde se estabelece o diferencial $x_1(1 \otimes m) = x_1 \otimes m = 1 \otimes x_1 m = 1 \otimes f(x_1)m$. Daí

$$H_0(x_1; M) = \frac{M}{x_1 M} = \frac{M}{y_1 M} = H_0(y_1; M), \quad (*)$$

e também vemos que $(0 :_M x_1) = (0 :_M y_1)$ já que $x_1 m = 0 \Leftrightarrow f(x_1)m = 0 \Leftrightarrow y_1 m = 0$.

Logo:

$$\begin{aligned}
 H_1(x_1; M) &= (0 :_M x_1) \\
 &= (0 :_M y_1) \\
 &= \{m \in M; y_1 m = 0\} \\
 &= \text{Ker}(\mu_{y_1}) \\
 &= H_1(y_1; M).
 \end{aligned}$$

Perceba que $(*)$ também é um isomorfismo de $\frac{R}{\underline{x}(t)R}$ -módulos, pois temos a boa definição no sentido de que $0' \cdot m_H = 0_H$, já que $\underline{x}(t)H_i(\underline{x}(t); M) = 0$, como em $(\star)$. Aqui $0'$ denota o zero de $\frac{R}{\underline{x}(t)R}$. Portanto, aplicando $\varprojlim_t$ em $(*)$, concluímos que

$$H_i^I(M) \cong H_i^{IR'}(M)$$

como $\Lambda_I(R)$ -módulos, pelo Teorema 3.7. □

Ao leitor mais curioso recomenda-se o artigo [Nam10, Definition 2.1], no qual a definição de i -ésimo módulo de homologia local generalizado

$$H_i^I(M, N) = \varprojlim_t \text{Tor}_i^R\left(\frac{M}{I^t M}, N\right)$$

é apresentada. Neste mesmo artigo, alguns resultados para módulos de homologia local generalizados são exibidos, cujos enunciados e provas assemelham-se com os aqui apresentados para módulo de homologia local.

Capítulo 4

Homologia local de módulos Artinianos

Neste capítulo, vamos estudar módulos de homologia local de módulos Artinianos. Deve-se mencionar que Greenlees e May deram uma definição para módulos de homologia local sobre qualquer anel comutativo em [GM92, Definition 2.4], que, em geral, não coincide com a definição 3.1. Todavia, elas coincidem no caso Artiniano. Além disso, a definição aqui abordada retorna módulos mais satisfatórios (levando em consideração os cálculos e resultados obtidos) no caso de módulos Artinianos.

4.1 Sequência exata longa de homologia local

Primeiro vamos mostrar nesta seção que a definição 3.1 coincide com a definição de Greenlees e May [GM92, Definition 2.4] quando M é Artiniano. A definição de Greenlees e May é a seguinte: $H_i^I(M) = H_i(\text{Hom}(\text{Tel}(K^\bullet(a^r); M)))$ ou de forma alternativa, $H_i^I(M) = H_i(\text{Mic}(K_\bullet(a^r) \otimes M))$. Para melhor compreensão veja o apêndice C.

Proposição 4.1. Seja I um ideal de R e M um R -módulo Artiniano. Então

$$H_i^I(M) \cong L_i^I(M)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Por [GM92, Proposition 1.1] temos a sequência exata curta, para todo $i \geq 0$,

$$0 \rightarrow \varprojlim_t^1 \text{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}; M) \rightarrow L_i^I(M) \rightarrow H_i^I(M) \rightarrow 0$$

onde $\varprojlim_t^1$ denota o primeiro funtor derivado à direita do limite inverso.

Como M é um R -módulo Artiniano sobre um anel Noetheriano, verifica-se que

$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}; M)$ é um R -módulo Artiniano. De fato, como $\frac{R}{I^t}$ é finitamente gerado, podemos tomar uma resolução livre de $\frac{R}{I^t}$, onde cada termo tem posto finito para o cálculo do $\mathrm{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}, M)$. Veja:

$$\mathrm{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}, M) = H_{i+1}(P_\bullet(\frac{R}{I^t}) \otimes M) = \frac{K}{N}$$

onde $N \subset K \subset M^{n_{i+1}}$ e $P_{i+1}(\frac{R}{I^t}) = R^{n_{i+1}}$.

Assim, $\{\mathrm{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}; M)\}$ satisfaz (ML), de modo que o limite inverso é exato, pelo Lema 2.3(ii), acarretando $\varprojlim_t \mathrm{Tor}_{i+1}^R(\frac{R}{I^t}; M) = 0$, de onde segue que $H_i^I(M) \cong L_i^I(M)$. $\square$

Perceba também que, por [GM92, Theorem 2.5], temos ${}^{G-M}H_i^I(M) \cong L_i^I(M)$ (onde ${}^{G-M}H_i^I(M)$ denota aqui a definição de módulo de homologia local dada por Greenlees e May [GM92, Definition 2.4]). Portanto, $H_i^I(M) \cong {}^{G-M}H_i^I(M)$.

O próximo resultado é consequência imediata da Proposição 4.1, que mostra (pela terminologia do J. Rotman [Rot09]) que a sequência de funtores $H_i^I(-)$ é fortemente conectada positiva na categoria de módulos Artinianos, isto é útil na continuação do trabalho.

Corolário 4.2. Seja

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

uma sequência exata curta de módulos Artinianos. Então temos a sequência exata longa de módulos de homologia local

$$\cdots \rightarrow H_i^I(M') \rightarrow H_i^I(M) \rightarrow H_i^I(M'') \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H_0^I(M') \rightarrow H_0^I(M) \rightarrow H_0^I(M'') \rightarrow 0.$$

Demonstração. Basta aplicar o i -ésimo funtor derivado à esquerda do funtor $\varprojlim_t (\frac{R}{I^t} \otimes -)$ à sequência exata curta. A exatidão da sequência longa decorre diretamente da exatidão à direita dos funtores $(\frac{R}{I^t} \otimes -)$ e L_0^I . Por fim, basta usar a proposição 4.1. $\square$

4.2 Aciclicidade de $H_i^I(M)$

Lema 4.3. Seja $\{M_t\}$ um sistema inverso de R -módulos Artinianos e N um R -módulo finitamente gerado. Então temos isomorfismos

$$\mathrm{Tor}_i^R(N; \varprojlim_t M_t) \cong \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(N; M_t)$$

para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Seja

$$F_\bullet : \cdots \rightarrow F_i \rightarrow F_{i-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

uma resolução livre de N com F_i módulos finitamente gerados, que pode ser obtida pois R é Noetheriano e N é finitamente gerado. Agora note que cada F_i é da forma R^{α_i} , cópias finitas de R , assim, para cada F_i :

$$\begin{aligned} F_i \otimes \varprojlim_t M_t &= R^{\alpha_i} \otimes \varprojlim_t M_t \\ &= (R \oplus \cdots \oplus R) \otimes \varprojlim_t M_t \\ &\cong (R \otimes \varprojlim_t M_t) \oplus \cdots \oplus (R \otimes \varprojlim_t M_t), \end{aligned}$$

mas $\varprojlim_t M_t$ tem estrutura de R -módulo, logo $(\varprojlim_t M_t)^{\alpha_i} \cong \varprojlim_t (M_t)^{\alpha_i}$, pois o limite inverso comuta com produto direto, e por α_i ser finito, produto direto e soma direta coincidem. Daí, basta escrever $M_t^{\alpha_i} \cong M_t \otimes R^{\alpha_i}$ e temos:

$$F_i \otimes \varprojlim_t M_t \cong \varprojlim_t M_t \otimes F_i.$$

Dessa forma, para resolução $F_\bullet$:

$$F_\bullet \otimes_R \varprojlim_t M_t \cong \varprojlim_t (F_\bullet \otimes_R M_t). \quad (*)$$

Por outro lado, como M_t é Artiniano para todo t , e F_i é livre de posto finito, temos que $F_i \otimes_R M_t$ é Artiniano, por ser soma direta finita de Artinianos. De fato, sabemos que, dada uma sequência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, temos que M é Artiniano $\Leftrightarrow M', M''$ são Artinianos. Mas podemos escrever $M \cong M' \oplus M''$, de modo que, iterando temos, $0 \rightarrow M^{n-1} \rightarrow M^n \rightarrow M \rightarrow 0$, se M é Artiniano, M^n é Artiniano. Agora, retomando a demonstração, como $F_i \otimes_R M_t$ é Artiniano para todo

$i, t, \{F_i \otimes_R M_t\}$ satisfaz (ML), e pelo Lema 2.3, $\varprojlim_t$ é exato. Portanto

$$\varprojlim_t H_i(F_\bullet \otimes_R M_t) \cong H_i(\varprojlim_t F_\bullet \otimes_R M_t). \quad (\star)$$

Por fim:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_i^R(N; \varprojlim_t M_t) &= H_i(F_\bullet \otimes \varprojlim_t M_t) \\ &\cong H_i(\varprojlim_t (F_\bullet \otimes M_t)) \quad \text{por } (\star) \\ &\cong \varprojlim_t H_i(F_\bullet \otimes_R M_t) \quad \text{por } (\star) \\ &= \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(N; M_t). \end{aligned}$$

□

Proposição 4.4. Seja M um R -módulo Artiniano. Então

$$H_i^I(H_j^I(M)) \cong \begin{cases} H_j^I(M), & i = 0, j \geq 0 \\ 0, & i > 0, j \geq 0 \end{cases}$$

Demonstração. Pelo Lema 4.3,

$$\begin{aligned} H_i^I(H_j^I(M)) &= \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; \varprojlim_s \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) \\ &\cong \varprojlim_t \varprojlim_s \mathrm{Tor}_i^R(\frac{\bar{R}}{I^t}; \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) \\ &\cong \varprojlim_s \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)). \end{aligned}$$

Seja $x = (x_1, \dots, x_r)$ um sistema de geradores de I e $\underline{x}(t) = (x_1^t, \dots, x_r^t)$. Portanto, pelo Teorema 3.7, aplicado ao módulo $\mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^t}; M)$ temos que

$$\begin{aligned} H_i^I(\mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) &= \varprojlim_t \mathrm{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) \\ &\cong \varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)). \end{aligned}$$

Logo

$$H_i^I(H_j^I(M)) \cong \varprojlim_s \varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); \mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)).$$

Do fato de que $I^s \subseteq \mathrm{Ann}(\mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M))$, tem-se $\underline{x}(t)\mathrm{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M) = 0$ para todo $t \geq s$, já que $\underline{x}(t) \in I^s$ para todo $t \geq s$.

Daí, pela exatidão do complexo de Koszul, segue que

$$H_0(\underline{x}(t); \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) \cong \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M).$$

Dessa forma, para $i = 0$,

$$\begin{aligned} H_0^I(H_j^I(M)) &\cong \varprojlim_s \varprojlim_t H_0(\underline{x}(t); \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) \\ &\cong \varprojlim_s \varprojlim_t \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M) \\ &\cong \varprojlim_s \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M) \\ &\cong H_j^I(M). \end{aligned}$$

No caso em que $i > 0$, novamente pela exatidão do complexo de Koszul, temos

$$\varprojlim_t H_i(\underline{x}(t); \operatorname{Tor}_j^R(\frac{R}{I^s}; M)) = 0,$$

de onde segue que

$$H_i^I(H_j^I(M)) \cong \varprojlim_s 0 = 0.$$

□

Corolário 4.5. Seja M um R -módulo Artiniano. Então

$$H_i^I(\bigcap_{t>0} I^t M) \cong \begin{cases} 0, & i = 0, \\ H_i^I(M), & i \geq 1 \end{cases}$$

Demonstração. Como M é um R -módulo Artiniano, existe um inteiro positivo n tal que $I^t M = I^n M$ para todo $t \geq n$. Assim $\bigcap_{t>0} I^t M = I^n M$ e $\Lambda_I(M) \cong \frac{M}{I^n M}$. Portanto nós temos a sequência exata curta de módulos Artinianos

$$0 \rightarrow \bigcap_{t>0} I^t M \rightarrow M \rightarrow \Lambda_I(M) \rightarrow 0.$$

Pelo corolário 4.2, nós temos a sequência exata longa de módulos de homologia local:

$$\begin{aligned} &\rightarrow H_{i+1}^I(\Lambda_I(M)) \rightarrow H_i^I(\bigcap_{t>0} I^t M) \rightarrow H_i^I(M) \rightarrow H_i^I(\Lambda_I(M)) \rightarrow \dots \\ &\rightarrow H_1^I(\Lambda_I(M)) \xrightarrow{h} H_0^I(\bigcap_{t>0} I^t M) \xrightarrow{f} H_0^I(M) \xrightarrow{g} H_0^I(\Lambda_I(M)) \rightarrow 0. (*) \end{aligned}$$

Mas, note que $\Lambda_I(M) = H_0^I(M)$ (Observação 3.2(ii)), daí, pela proposição anterior, $H_0^I(H_0^I(M)) = H_0^I(M)$ implicando, $H_0^I(M) = H_0^I(\Lambda_I(M))$, ou seja, g é bijetora

e $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g) = 0$, assim $\text{Im}(h) = \text{Ker}(f) = H_0^I(\bigcap_{t>0} I^t M)$ isto é, h é sobrejetora, mas $H_1^I(\Lambda_I(M)) \cong H_1^I(H_0^I(M)) = 0$ pela proposição anterior, dessa forma $H_0^I(\bigcap_{t>0} I^t M) = 0$. Novamente pela proposição anterior, $H_i^I(H_0(M)) \cong H_i^I(\Lambda_I(M)) = 0$. Portanto, basta observar a sequência $(*)$ e concluir que

$$H_i^t\left(\bigcap_{t>0} I^t M\right) \cong H_i^I(M),$$

para $i \geq 1$. □

4.3 Módulos de homologia local Artinianos e Noetherianos

Se M é um módulo Artiniano sobre um anel local $(R, \mathfrak{m})$, então para $i \geq 0$ e $t > 0$, $\text{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; M)$ também é um R -módulo. Segue daí que $\text{Tor}_i^R(\frac{R}{I^t}; M)$ tem uma estrutura de módulo sobre o completamento $\hat{R}$ de R . Essa afirmação pode ter a hipótese de M ser Artiniano enfraquecida para $\text{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$.

De fato:

$$\begin{aligned} \hat{R} \times M &\rightarrow M \\ ((a_i + m^i), x) &\mapsto a_n x \end{aligned}$$

onde n é tal que $\mathfrak{m}^n x = 0$, implicando $a_n x = a_{n+1} x$, já que $a_j - a_n \in \mathfrak{m}^n$, para $j \geq n$, daí $(a_j - a_n)x = 0$. No caso em que M é Artiniano, a existência de n é garantida pelo Lema de Nakayama. Suponha agora o caso $\text{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$. Dessa forma, do fato de que $\text{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$, segue que $\text{Supp}(Rx) \subseteq V(\mathfrak{m})$, mas $\text{Supp}(Rx) = V(\text{Ann}(x))$, pois Rx é finitamente gerado, agora aplicando $\mathfrak{I}(-)$, temos $\sqrt{\text{Ann}(x)} \supseteq \sqrt{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$, e digamos que $\mathfrak{m} = (r_1, \dots, r_s)$, pois R é Noetheriano. Daí, para cada r_i existe $\alpha_i \in \mathbb{N}$ tal que $r_i^{\alpha_i} x = 0$, considerando $n = \alpha_1 + \dots + \alpha_s$, segue que $\mathfrak{m}^n x = 0$.

Observação 4.6. Se M é Artiniano, então $\text{Supp}(M) \subseteq V(\mathfrak{m})$.

Demonstração. Suponha por absurdo que existe $p \in \text{Supp}(M)$ tal que $p \subsetneq \mathfrak{m}$. Como R é Noetheriano, temos que $\text{Supp}(M) = \bigcup_{p \in \text{Ass}(M)} V(p)$, daí $\exists q \in \text{Ass}(M)$ tal que $p \supseteq q$.

Como $q = (0 :_R x)$ para algum $x \in M$, podemos considerar o homomorfismo sobrejetor $R \rightarrow Rx, r \mapsto rx$, cujo núcleo é q . Logo $\frac{R}{q} \cong Rx$. Agora note que $\dim \frac{R}{q} \geq 1$ ($\frac{q}{q} \subsetneq \frac{\mathfrak{m}}{q}$), isso significa que $\frac{R}{q}$ não é Artiniano como $\frac{R}{q}$ -módulo, isso implica que $\frac{R}{q}$

não é Artiniano como R -módulo. Dessa forma, Rx não é Artiniano como R -módulo, mas Rx é submódulo de M e isso é um absurdo porque M é Artiniano. $\square$

Portanto $H_i^I(M)$ pode ser considerado como $\hat{R}$ -módulo.

Proposição 4.7. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local e M um R -módulo Artiniano. Então $H_i^{\mathfrak{m}}(M)$ é um $\hat{R}$ -módulo Noetheriano para todo $i \geq 0$.

Demonstração. Pelo corolário 3.8 temos $H_i^{\mathfrak{m}}(M) \cong H_i^{\mathfrak{m}\hat{R}}(M)$, podemos assumir, para fins de homologia local, que $(R, \mathfrak{m})$ é completo. Assim, como M é Artiniano, $D(M)$ é Noetheriano [BS98, Theorem 10.2.12]. Portanto, $H_i^{\mathfrak{m}}(D(M))$ é Artiniano [BS98, Theorem 7.1.3]. Como M é Artiniano, temos a injeção $M \xrightarrow{i} E^n$ [BH98, Theorem 3.2.13], onde $E = E(\frac{R}{\mathfrak{m}})$ e $n \in \mathbb{N}$. Daí temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & E^n \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & DD(M) & \longrightarrow & DD(E^n) \cong E^n \quad (*) \end{array}$$

onde o isomorfismo $M \cong DD(M)$ ocorre por causa dos isomorfismos dos extremos. O isomorfismo $(*)$ acontece porque, quando R é completo, temos o isomorfismo $R \rightarrow D(E)$, implicando no isomorfismo $DD(E) \rightarrow D(R) = E$. Agora, pela Teorema 3.3 (ii):

$$H_i^{\mathfrak{m}}(M) \cong H_i^{\mathfrak{m}}(DD(M)) \cong D(H_{\mathfrak{m}}^i(D(M))).$$

O dual de um módulo Artiniano é Noetheriano. Portanto, $H_i^{\mathfrak{m}}(M)$ é Noetheriano. $\square$

Lema 4.8. Seja M um R -módulo Artiniano e $\mathfrak{a}$ um ideal de R tal que $\mathfrak{a}M = M$. Então existe $x \in \mathfrak{a}$ tal que $xM = M$.

Demonstração. Como qualquer módulo M Artiniano é representável, escreva $M = M_1 + \dots + M_r$ uma representação secundária minimal de M , de modo que cada M_i é $\mathfrak{p}_i$ -secundário, isso significa que $\text{Ann}(M_i) \supseteq \mathfrak{p}_i^{\alpha_i}$ para algum α_i . Além disso, denotando $\mu_x : M \rightarrow M$ a aplicação dada por $m \mapsto xm$ com $x \in R$, temos que

$$\mu_x \text{ é sobrejetiva} \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i.$$

Agora suponha para chegar a um absurdo que $xM \subsetneq M$ para todo $x \in \mathfrak{a}$, dessa forma $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^r \mathfrak{p}_i$, mas pelo Lema da esquiva, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$ para algum j . Sabendo que $\mathfrak{a}M = M$

segue que $\mathfrak{a}^{\alpha_j} M = M$, onde α_j é tal que $\text{Ann}(M_j) \supseteq \mathfrak{p}_j^{\alpha_j}$. Assim

$$\begin{aligned} M &= \mathfrak{a}^{\alpha_j} M \\ &\subseteq \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} M \\ &= \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} (M_1 + \cdots + M_r) \\ &= \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} M_1 + \cdots + \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} M_j + \cdots + \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} M_r \\ &= \mathfrak{p}_j^{\alpha_j} (M_1 + \cdots + M_{j-1} + M_{j+1} + \cdots + M_r) \\ &\subsetneq M. \end{aligned}$$

Absurdo. □

Proposição 4.9. Seja M um R -módulo Artiniano e s um inteiro positivo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $H_i^I(M)$ é Artiniano para todo $i < s$;
- (ii) $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))}$ para todo $i < s$.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii). Seja $i < s$. Como $H_i^I(M)$ é Artiniano para todo $i < s$, temos que $I^t H_i^I(M) = 0$ para algum inteiro positivo t pela proposição 3.3 (i). Portanto $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Vamos usar indução sobre s . Quando $s = 1$, $H_0^I(M)$ é Artiniano, já que $\text{Tor}_0^R(-, M) = - \otimes M \Rightarrow H_0^I(M) = \varprojlim_n \frac{R}{I^n} \otimes M = \varprojlim_n \frac{M}{I^n M} = \frac{M}{I^n M}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, já que M é Artiniano.

Seja agora $s > 1$. Pelo corolário 4.5, para fins de homologia local, podemos “trocar” M por $\bigcap_{n>0} I^n M$. O último módulo na interseção é simplesmente $I^n M$ para n suficientemente grande. Dessa forma, temos $M = \bigcap_{n>0} I^n M = I^n M$ para suficientemente grande. Assim, $M \subseteq I^n M \forall n$, então $M \subseteq IM$ implicando $M = IM$. Podemos considerar essas igualdades porque vamos trabalhar com limite inverso, ou seja, com n suficientemente grande. Como M é Artiniano, existe um elemento x em I tal que $xM = M$, pelo lema 4.8. Assim, como R é Noetheriano e utilizando a hipótese (ii), existe um inteiro positivo t tal que $I^t \subseteq (\sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))})^t \subseteq \text{Ann}_R(H_i^I(M))$, e logo $x^t H_i^I(M) = 0$ para todo $i < s$. Então a sequência exata curta

$$0 \rightarrow 0 :_M x^t \rightarrow M \xrightarrow{x^t} M \rightarrow 0$$

gera, pelo Corolário 4.2, a sequência exata

$$0 \rightarrow H_{i+1}^I(M) \rightarrow H_i^I(0 :_M x^t) \rightarrow H_i^I(M) \rightarrow 0. (*)$$

A sequência (*) ocorre por causa da sequência exata longa

$$\cdots \longrightarrow H_{i+1}^I(M) \xrightarrow{f=x^t} H_{i+1}^I(M) \longrightarrow H_i^I(0 :_M x^t) \longrightarrow H_i^I(M) \xrightarrow{g=x^t} H_i^I(M) \longrightarrow \cdots$$

Como $\text{Im}(f) = 0 = \text{Im}(g)$, podemos construir (*).

Além disso, $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_{i+1}^I(M))}$ e $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))}$ para $i < s - 1$, e como

$$\sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(0 :_M x^t))} = \sqrt{\text{Ann}_R(H_{i+1}^I(M))} \cap \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))},$$

segue que $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(0 :_M x^t))}$.

Agora, suponha que $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))}$ para cada $i < s$. Isso implica que $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(M))} \forall i < s - 1$, e por hipótese de indução $H_i^I(M)$ é Artiniano $\forall i < s - 1$ quando M é Artiniano. Dessa forma, resta provar para $i = s - 1$. Basta considerar o módulo Artiniano $(0 :_M x^t)$, de modo que $I \subseteq \sqrt{\text{Ann}_R(H_i^I(0 :_M x^t))}$ implica $H_i^I(0 :_M x^t)$ Artiniano para todo $i < s - 1$. Considere $i = s - 2$, em (*) temos

$$0 \longrightarrow H_{s-1}^I(M) \xrightarrow{h} H_{s-2}^I(0 :_M x^t) \longrightarrow H_{s-2}^I(M) \longrightarrow 0$$

exata, mas $H_{s-2}^I(0 :_M x^t)$ é Artiniano e h é injetiva, podemos identificar $H_{s-1}^I(M)$ com $\text{Im}(h)$ que é submódulo de um módulo Artiniano. Portanto, $H_i^I(M)$ é Artiniano para todo $i < s$. $\square$

4.4 Resultados de anulamento e não-anulamento

Primeiro, vamos relembrar o conceito de *dimensão Noetheriana* de um módulo Artiniano M , denotado por $Kdim M$, devido a Roberts [Rob75] (que em seu texto original a chama de dimensão de Krull, mas essa nomenclatura não é mais utilizada atualmente). Seja M um R -módulo Artiniano. Quando $M = 0$ consideramos $Kdim M = -1$. Então por indução, para qualquer ordinal α , dizemos que $Kdim M = \alpha$ quando (i) $Kdim M < \alpha$ é falso, e (ii) para qualquer cadeia ascendente $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots$ de submódulos de M , existe um inteiro positivo m_0 tal que $Kdim(\frac{M_{m+1}}{M_m}) < \alpha$ para todo $m \geq m_0$. Assim M é não-nulo e Noetheriano se e somente se $Kdim M = 0$. De fato, pois teríamos que $Kdim M = -1$ é falso e $Kdim(\frac{M_{m+1}}{M_m}) = -1$, para m suficientemente grande, ou seja, toda cadeia ascendente é estacionária. Agora, provaremos um Teorema de anulamento de homologia local, que é dual ao Teorema de Grothendieck de anulamento de cohomologia local para módulos Noetherianos.

Proposição 4.10. Seja M um R -módulo Artiniano com $Kdim M = d$. Então para todo $i > d$,

$$H_i^I(M) = 0.$$

Demonstração. Vamos provar por indução sobre $d = Kdim M$. Quando $d = 0$, M é Noetheriano. Portanto $H_i^I(M) = 0 \forall i > 0$ pela Observação 3.2 (ii). Suponha agora que $d > 0$. Note que $Kdim M \geq Kdim(\bigcap_{t>0} I^t M)$. Logo, pelos mesmos argumentos usados na prova da proposição 4.7, podemos assumir sem perda de generalidade que existe um x em I tal que $xM = M$. Assim a sequência exata curta de módulos Artinianos

$$0 \rightarrow 0 :_M x \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow 0$$

gera a sequência exata longa

$$\cdots \rightarrow H_i^I(0 :_M x) \rightarrow H_i^I(M) \xrightarrow{x} H_i^I(M) \rightarrow H_{i-1}^I(0 :_M x) \rightarrow \cdots$$

Pela prova de [Rob75, Proposition 4] temos que $Kdim(0 :_M x) \leq d - 1$, e por hipótese de indução $H_i^I(0 :_M x) = 0 \forall i > d - 1$. Agora, se $i - 1 = d$, temos $H_{i-1}^I(0 :_M x) = 0$ com $i = d + 1$, ou seja, $i > d$. Assim $H_i^I(M) \cong xH_i^I(M)$, $\forall i > d$, de onde segue que

$$H_i^I(M) \cong x^n H_i^I(M) (*)$$

$\forall n \geq 0$ e $i > d$. Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_i^I(M) & \xrightarrow{x^m} & x^m H_i^I(M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow x^{n-m} & & \uparrow \varphi_m^n & & \\ 0 & \longrightarrow & H_i^I(M) & \xrightarrow{x^n} & x^n H_i^I(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

para $n \geq m$.

A partir desse diagrama, podemos perceber um isomorfismo entre os sistemas inversos $\{H_i^I(M), x^{n-m}\}$ e $\{x^n H_i^I(M), \varphi_m^n\}$, onde cada x^{n-m} é isomorfismo e cada φ_m^n é inclusão. Logo, aplicando $\varprojlim_n$ em $(*)$ (veja exemplo A.6):

$$H_i^I(M) \cong \bigcap_{n>0} x^n H_i^I(M),$$

mas $\bigcap_{n>0} x^n H_i^I(M) = 0$ pela Teorema 3.3 (i).
Assim, $H_i^I(M) = 0 \forall i > d$. □

Observação 4.11. Segue da Proposição 4.1 e de [GM92, Corollary 3.2] que $H_i^I(M) = 0$ para todo $i > \dim R$. Entretanto, foi provado em [Nha] que $Kdim M \leq \dim(\frac{R}{0:_R M})$ em geral, e que existe um módulo Artiniano M sobre um anel Noetheriano não-local R tal que $Kdim M < \dim(\frac{R}{0:_R M})$ [Nha, Examples 5.1, 5.2]. Desse modo, $Kdim M < \dim R$. Isso mostra que a Proposição 4.10 é realmente mais forte que o resultado [GM92, Corollary 3.2].

Para o último resultado nós precisamos de alguns fatos da teoria de representação secundária para módulos Artinianos, que é em alguns aspectos dual da teoria de decomposição primária para módulos Noetherianos. Resultados dessa teoria estão disponíveis em [Kir73], [Mac73] e [Men16]. Aqui seguimos a terminologia de Macdonald em [Mac73]; a qualquer R -módulo Artiniano está associado um conjunto de ideais primos $\text{Att}_R M$ chamados ideais primos anexos de M . Antes disso necessitaremos do seguinte lema.

Lema 4.12. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel local completo e M um R -módulo Artiniano. Denotando por $\ell(N)$ o comprimento do R -módulo N , temos que

$$\ell\left(\frac{D(M)}{\mathfrak{m}^n D(M)}\right) = \ell(0 :_M \mathfrak{m}^n)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Em particular

$$Kdim(M) = \dim D(M).$$

Demonstração. Demonstraremos o isomorfismo $\frac{D(M)}{\mathfrak{m}^n D(M)} \cong D(0 :_M \mathfrak{m}^n)$. Note que

$$\begin{aligned} \frac{D(M)}{\mathfrak{m}^n D(M)} &= \frac{R}{\mathfrak{m}^n} \otimes_R \text{Hom}_R(M, E) \\ &= \text{Hom}_R\left(\text{Hom}_R\left(\frac{R}{\mathfrak{m}^n}, M\right), E\right) \\ &= \text{Hom}_R((0 :_M \mathfrak{m}^n), E) \\ &= D(0 :_M \mathfrak{m}^n). \end{aligned}$$

Como $\ell\left(\frac{D(M)}{\mathfrak{m}^n D(M)}\right)$ é finito segue que $\ell D(0 :_M \mathfrak{m}^n) = \ell(0 :_M \mathfrak{m}^n)$ também é finito.

Mais ainda, pelo Teorema da dimensão [AK12, Theorem 21.4] o grau de $\ell\left(\frac{D(M)}{\mathfrak{m}^n D(M)}\right)$ é igual a $\dim D(M)$. Por outro lado, por [Rob75, Theorem 6] temos que o grau de $\ell(0 :_M \mathfrak{m}^n)$ é igual a $Kdim M$. Portanto $Kdim(M) = \dim D(M)$. $\square$

Proposição 4.13. Seja $(R, \mathfrak{m})$ um anel e M um R -módulo Artiniano não-nulo com $Kdim M = d$. Então $H_d^{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$ e

$$\text{Ass}_{\hat{R}}(H_d^{\mathfrak{m}}(M)) = \{p \in \text{Att}_{\hat{R}}(M); \dim(\hat{R}/p) = d\}.$$

Demonstração. Já que $H_i^{\mathfrak{m}}(M) \cong H_i^{\mathfrak{m}\hat{R}}(M)$ como um $\hat{R}$ -módulo pelo corolário 3.8 e $Kdim_R M = Kdim_{\hat{R}} M$ por [Sha89, Proposition 1.12], é suficiente provar a proposição no caso em que R é um anel local completo. Então o dual de Matlis $D(M)$ é um R -módulo não-nulo finitamente gerado [BS98, Theorem 10.2.12]. Mais ainda, $\text{Att}(M) = \text{Ass}(D(M))$ (*) por [Sha75, Proposition 2.3]. Além disso, pelo Lema 4.12, segue que $\dim D(M) = Kdim M = d$. Assim $H_{\mathfrak{m}}^d(D(M)) \neq 0$ e $\text{Att}(H_{\mathfrak{m}}^d(D(M))) = \{p \in \text{Ass}(D(M)); \dim(R/p) = 0\}$ [BS98, Theorem 7.3.2]. Agora por (*):

$$\begin{aligned} \text{Att}(H_{\mathfrak{m}}^d(D(M))) &= \text{Ass}(D(H_{\mathfrak{m}}^d(D(M)))), \text{ pelo Teorema 3.3 (ii)} \\ &= \text{Ass}(H_d^{\mathfrak{m}}(D(D(M)))), \text{ já que } (R, \mathfrak{m}) \text{ é completo} \\ &= \text{Ass}(H_d^{\mathfrak{m}}(M)), \end{aligned}$$

e segue o resultado por causa de estrutura de $\hat{R}$ -módulo de $H_d^{\mathfrak{m}}(M)$. □

Apêndice A

Limite inverso

Um conjunto de índices J com a relação $\preceq$ é chamado pré-ordenado se satisfaz

- (i) Reflexividade, isto é, $i \preceq i$ para todo $i \in J$;
- (ii) Transitividade, isto é, $i \preceq j$ e $j \preceq k$ implicam que $i \preceq k$.

Diremos que $(J, \preceq)$ é um conjunto dirigido se em adição a (i) e (ii) satisfizer:

- (iii) Para cada par $i, j \in J$ existe um $k \in J$ tal que $i \preceq k$ e $j \preceq k$.

Definição A.1 (Sistema inverso). Sejam A um anel e J um conjunto pré-ordenado, um sistema inverso é uma família de A -módulos $\{M_i\}_{i \in J}$ indexada por J e uma família de A -morfismos $\varphi_i^j : M_j \rightarrow M_i$, para cada par de índices $i, j \in J$ tais que $i \preceq j$ que satisfaçam as seguintes condições:

- (i) $\varphi_i^i = id_{M_i}$, para todo $i \in J$.
- (ii) $\varphi_i^j \circ \varphi_j^k = \varphi_i^k$, sempre que $i \preceq j \preceq k$ em J .

Definição A.2 (Limite inverso). Tome agora o produto direto $\prod_k M_k$ e os seguintes diagramas, para cada $i \preceq j$:

$$\begin{array}{ccc} & \prod M_k & \\ \pi_j \swarrow & & \searrow \pi_i \\ M_j & \xrightarrow{\varphi_i^j} & M_i \end{array}$$

onde $\pi_n : \prod M_k \rightarrow M_n$ são as projeções do produto direto. Em geral, estes diagramas não comutam. Considere então o subconjunto $\varprojlim M_k \subseteq \prod M_k$ dado pelos elementos (x_k) tais que $\varphi_i^j \circ \pi_j(x_k) = x_i$. Perceba que $\varprojlim M_k$ é um submódulo de $\prod M_k$ e restringindo as projeções π_n a $\varprojlim M_k$ os triângulos no diagrama a seguir comutam por definição, sempre que $i \preceq j$ em J :

$$\begin{array}{ccc}
 & \varprojlim M_k & \\
 \pi_j \swarrow & & \searrow \pi_i \\
 M_j & \xrightarrow{\varphi_i^j} & M_i
 \end{array}$$

O módulo $\varprojlim M_k$ é chamado de limite inverso do sistema $\{M_k, \varphi_i^j\}_J$.

Proposição A.3 (Propriedade universal do limite inverso). Seja $\{M_k, \varphi_i^j\}_J$ um sistema inverso de A -módulos. Se M é um A -módulo qualquer junto com morfismos $q_k : M \rightarrow M_k$, para cada $k \in J$, tais que os triângulos do diagrama seguinte comutam

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 q_j \swarrow & & \searrow q_i \\
 M_j & \xrightarrow{\varphi_i^j} & M_i
 \end{array}$$

então existe um único morfismo $h : M \rightarrow \varprojlim M_k$ tais que todos os triângulos no seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \varprojlim M_k & \xleftarrow{h} & M & & \\
 \pi_j \searrow & & \swarrow q_j & & \\
 & M_j & & & \\
 \pi_i \searrow & \downarrow & \swarrow q_i & & \\
 & M_i & & &
 \end{array}$$

ou seja, $\pi_j \circ h = q_j$, para todo $j \in J$.

Demonstração. Para definir h , seja $x \in M$ e $h(x) = (q_k(x))$. Note que se $i \preceq j$ então,

$$\varphi_i^j \circ \pi_j(q_k(x)) = \varphi_i^j(q_j(x)) = q_i(x)$$

porque o primeiro diagrama do enunciado comuta por hipótese. Disso resulta que $(q_k(x)) \in \varprojlim M_k$ e portanto h está bem definida. Como os q_k são morfismos, h também é. Agora, se $x \in M$, calculando

$$\pi_j \circ h(x) = \pi_j(q_k(x)) = q_j(x)$$

vemos que h faz todos os triângulos do segundo diagrama no enunciado comutarem. Se $\gamma : M \rightarrow \varprojlim M_k$ é outro morfismo tal que $\pi_j \circ \gamma = q_j$, para todo $j \in J$, então se $x \in M$, escrevendo $\gamma(x) = (z_k) \in \varprojlim M_k$ e aplicando as projeções canônicas π_j

temos que $\pi_j(\gamma(x)) = \pi_j(z_k) = z_j$ e como $\pi_j \circ \gamma = q_j$, então $z_j = q_j(x)$ e portando $\gamma(x) = h(x)$. $\square$

Corolário A.4. Se $\{M_k, \varphi_i^j\}_J$ é um sistema inverso de A -módulos, então o módulo $\varprojlim M_k$ junto com as projeções $\pi_k : \varprojlim M_k \rightarrow M_k$ são únicos, a menos de isomorfismo, com a propriedade universal da proposição anterior.

Exemplo A.5. No caso particular em que o conjunto dirigido é $(\mathbb{N}, \leq)$ e o sistema inverso é $\left\{ \frac{M}{M_n}, \alpha_n^{n+1} \right\}$ podemos definir o limite inverso $\varprojlim \frac{M}{M_n}$ como sendo o submódulo de $\prod \frac{M}{M_n}$ dos elementos (q_n) tais que $\alpha_n^{n+1}(q_{n+1}) = q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, note que

$$\varprojlim \frac{M}{M_n} = \text{Ker}(\theta)$$

onde $\theta : \prod \frac{M}{M_n} \rightarrow \prod \frac{M}{M_n}$ é a aplicação definida por $\theta(q_n) := (q_n - \alpha_n^{n+1}(q_{n+1}))$.

Outro caso especial e interessante ocorre quando consideramos o seguinte sistema inverso:

Exemplo A.6. Seja $\mathbb{M}$ uma família de submódulos de um módulo A , então podemos definir uma pré-ordem através da inclusão inversa, isto é, dados $M, N \in \mathbb{M}$ então $M \preceq N$ quando $M \supseteq N$. Para $M \preceq N$, a aplicação inclusão $\psi_M^N : N \rightarrow M$ está definida e temos o sistema inverso $\{M, \psi_M^N\}_{M \in \mathbb{M}}$. Agora tome $\mathbb{M}$ fechada para interseção finita, isto é, se $M, N \in \mathbb{M}$, então $M \cap N \in \mathbb{M}$. Por exemplo, a família aninhada $\mathbb{M}$ (se $M, N \in \mathbb{M}$, então $M \subseteq N$ ou $N \subseteq M$) é fechada para interseções finitas. Observe que $\mathbb{M}$ torna-se um conjunto dirigido quando é fechado para interseção finita. Neste caso, $\varprojlim_{M \in \mathbb{M}} M = \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$ considerando o sistema inverso $\{M, \psi_M^N\}_{M \in \mathbb{M}}$. De fato, observando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigcap M & \xleftarrow{\theta} & X \\ & \searrow p_N \quad \swarrow f_N & \\ & N & \\ & \searrow p_M \quad \swarrow f_M & \\ & M & \end{array}$$

defina, para cada $M \in \mathbb{M}$, $p_M : \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M \rightarrow M$ a aplicação inclusão. Se $x \in X$ e $M \in \mathbb{M}$, então $f_M(x) \in M$. Afirmamos que $f_M(x) = f_N(x)$ para todo $M, N \in \mathbb{M}$. Se $D \in \mathbb{M}$ e $D \subseteq M$, então $f_D = \psi_M^D f_M$ e $f_D(x) = f_M(x)$. Como $\mathbb{M}$ é fechada para interseções finitas, $M, N \in \mathbb{M}$ implica $D = M \cap N \in \mathbb{M}$, e assim $f_M(x) = f_{M \cap N}(x) = f_N(x)$. Defina $\theta : X \rightarrow \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M \rightarrow M$ por $\theta(x) = f_M(x)$. Estamos mostrando apenas que $\theta(x)$ é independente da escolha de M ; mais ainda, $\theta(x) = f_M(x) \in M$ para todo $M \in \mathbb{M}$, e então $\theta(x) \in \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$.

No caso geral, defina $\mathbb{M}' = \{M_{i_1} \cap \cdots \cap M_{i_n} : M_{i_j} \in \mathbb{M}, n \geq 1\}$; então $\mathbb{M}'$ é fechada para interseções finitas e $\bigcap_{M \in \mathbb{M}'} M = \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M$.

Exemplo A.7. Se J é um conjunto de índices discreto então o limite inverso do sistema $\{M_j : j \in J\}$ de R -módulos é o produto direto $\prod_j M_j$. De fato, essa é a definição de um produto.

Proposição A.8. O limite inverso é exato à esquerda. Veja o Lema 1.5.

Algumas propriedades úteis de limite inverso são:

- (i) $\varprojlim_s \varprojlim_t M_t = \varprojlim_t \varprojlim_s M_s$ com $s, t \in J$;
- (ii) $\varprojlim_t \text{Hom}_R(M_t, N) \cong \text{Hom}_R(\varinjlim_t M_t, N)$, onde $\varinjlim_t$ denota o limite direto;
- (iii) $\text{Hom}_R(N, \varprojlim_t M_t) \cong \varprojlim_t \text{Hom}_R(N, M_t)$.

Apêndice B

Funtores aditivos e funtores derivados

Lembremos que um funtor F (de qualquer variância) entre duas categorias abelianas, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, é dito *aditivo* quando $F(f + g) = F(f) + F(g)$ para quaisquer dois morfismos, f e g . Estes funtores preservam complexos, ou os tornam cocomplexos no caso dos contravariantes. Mais explicitamente, se (C, d) é um complexo em $\mathcal{A}$, então, $(F(C), F(d))$ é um complexo em $\mathcal{B}$ ou um cocomplexo se F for contravariante. Mais ainda, estes funtores também preservam homotopias: se f e g são aplicações de cadeia homotópicas, então, $F(f)$ e $F(g)$ também são aplicações de cadeia homotópicas.

Observe que $F(M \oplus N) = F(M) \oplus F(N)$ para quaisquer objetos, M e N , em $\mathcal{A}$ e qualquer funtor aditivo (de qualquer variância) F graças à cisão $0 \hookrightarrow M \hookrightarrow M \oplus N \hookrightarrow N \hookrightarrow 0$. Assim, tal cisão transforma-se na cisão $0 \hookrightarrow F(M) \hookrightarrow F(M \oplus N) \hookrightarrow F(N) \hookrightarrow 0$ no caso covariante e em $0 \hookrightarrow F(N) \hookrightarrow F(M \oplus N) \hookrightarrow F(M) \hookrightarrow 0$ no caso contravariante.

Definição B.1. Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato à esquerda desde uma categoria $\mathcal{A}$ com injetivos suficientes e seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo entre objetos de $\mathcal{A}$. Dadas quaisquer resoluções injetivas, $(E^*(M), d^*)$, $(I^*(N), \delta^*)$ e f^* , de M , N e f respectivamente, denota-se o *i-ésimo funtor derivado à direita de F* por $R^i F$ e define-se como $(R^i F)(M) = H^i(F(E^*(M)), F(d^*))$ e $(R^i F)(f) = H^i(F(f^*))$. Dualmente, seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato à direita desde uma categoria $\mathcal{A}$ com projetivos suficientes e seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo entre objetos de $\mathcal{A}$. Dadas quaisquer resoluções projetivas, $(P_*(M), d_*)$, $(Q_*(N), \delta_*)$ e f_* , de M , N e f respectivamente, denota-se o *i-ésimo funtor derivado à esquerda de F* por $L_i F$ e define-se como $(L_i F)(M) = H_i(F(P_*(M)), F(d_*))$ e $(L_i F)(f) = H_i(F(f_*))$.

Esclarecemos que, para definirmos os funtores derivados, não é necessária a hipótese de semiexatidão. Porém, é uma condição cômoda e significativa pois se F é exato à esquerda, então, $R^0 F$ é naturalmente isomorfo a F : de fato, $(R^0 F)(M) = \ker F(d^0) =$

$F(\ker d^0) = F(M)$, $(R^0 F)(N) = \ker F(\delta^0) = F(\ker \delta^0) = F(N)$ e o diagrama a seguir comuta:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(\alpha)} & \ker F(d^0) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow F(f^0)|_{\ker F(d^0)} \\ F(N) & \xrightarrow{F(\beta)} & \ker F(\delta^0). \end{array}$$

As linhas do diagrama anterior são isomorfismos. Similarmente, se F é exato à direita, então, $L_0 F$ é naturalmente isomorfo a F .

Exemplos imediatos de funtores derivados são os funtores $\text{Ext}_R^i(M, -)$ e $\text{Tor}_i^R(-, N)$. O primeiro é derivado do funtor $\text{Hom}_R(M, -)$ e o segundo é derivado de $- \otimes_R N$. Como $\text{Hom}_R(M, -)$ é exato à esquerda, temos que $\text{Ext}_R^0(M, -)$ é naturalmente isomorfo a $\text{Hom}_R(M, -)$. Também, $\text{Tor}_0^R(-, N)$ é naturalmente isomorfo a $- \otimes_R N$.

Os funtores contravariantes também definem funtores derivados. Como este tipo de funtores transforma complexos em cocomplexos, as homologias transformam-se em cohomologias e viceversa.

Definição B.2. Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor contravariante exato à esquerda desde uma categoria $\mathcal{A}$ com projetivos suficientes e seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo entre objetos de $\mathcal{A}$. Dadas quaisquer resoluções projetivas, $(P_*(M), d_*)$, $(Q_*(N), \delta_*)$ e f_* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo funtor derivado à direita de F por $R^i F$ e define-se como $(R^i F)(M) = H^i(F(P_*(M)), F(d_*))$ e $(R^i F)(f) = H^i(F(f_*))$. Dualmente, seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um funtor exato à direita desde uma categoria $\mathcal{A}$ com injetivos suficientes e seja $f : M \rightarrow N$ um morfismo entre objetos de $\mathcal{A}$. Dadas quaisquer resoluções injetivas, $(E^*(M), d^*)$, $(I^*(N), \delta^*)$ e f^* , de M , N e f respectivamente, denota-se o i -ésimo funtor derivado à esquerda de F por $L_i F$ e define-se como $(L_i F)(M) = H_i(F(E^*(M)), F(d^*))$ e $(L_i F)(f) = H_i(F(f^*))$.

Um exemplo de funtor contravariante exato à esquerda é o funtor $\text{Hom}_R(-, N)$ e definem-se seus funtores derivados à direita $\text{Ext}_R^i(-, N)$.

Os funtores derivados encontram-se *conectados* graças ao seguinte teorema e às propriedades de cisão dos objetos injetivos e projetivos.

Teorema B.3. Se $0 \rightarrow (C', \delta) \rightarrow (C, d) \rightarrow (C'', \bar{d}) \rightarrow 0$ é uma seqüência exata de complexos, então, existe uma seqüência exata

$$\cdots \longrightarrow H_i(C') \xrightarrow{H_i(\iota)} H_i(C) \xrightarrow{H_i(\pi)} H_i(C'') \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(C') \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Define-se $\partial_i(x_i'' + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1} d_i \pi_i^{-1}(x_i'') + \text{im } \delta_i$. Demonstra-se que esta aplicação está bem definida: com efeito, se $x_i'' \in \ker \bar{d}_i$, então, $d_i(x_i) \in \ker \pi_{i-1} =$

im ι_{i-1} para cada $x_i \in \pi_i^{-1}(x_i'')$. Logo, existe um único $x'_{i-1} \in \iota_{i-1}^{-1}d_i(x_i)$. Além disso, $\iota_{i-2}\delta_{i-1}(x'_{i-1}) = d_{i-1}\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$, concluindo-se que $\delta_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$ e $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$. Se $y_i \in \pi_i^{-1}(x_i'')$, chamemos $y'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1}d_i(y_i)$. Então, $\pi_i(x_i - y_i) = 0$. Logo, existe um único $z'_i \in C'_i$ com $\iota_i(z'_i) = x_i - y_i$. Deste modo, $d_i(x_i) = d_i(y_i) + \iota_{i-1}\delta_i(z'_i)$ e $x'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1}d_i(x_i) = \iota_{i-1}^{-1}d_i(y_i) + \delta_i(z'_i) = y'_{i-1} + \delta_i(z'_i)$. Assim, $x'_{i-1} + \text{im } \delta_i = y'_{i-1} + \text{im } \delta_i$. Se $x''_i \in \text{im } \bar{d}_{i+1}$, então, $x''_i = \pi_i d_{i+1}(x_{i+1})$ para algum $x_{i+1} \in C_{i+1}$. Também, $x_i - d_{i+1}(x_{i+1}) \in \ker \pi_i$ para qualquer $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$ e existe um único $x'_i \in C'_i$ tal que $\iota_i(x'_i) = x_i - d_{i+1}(x_{i+1})$. Tome $x_i = d_{i+1}(x_{i+1})$. Logo, $d_i(x_i) = 0$ e $x'_{i-1} = \iota_{i-1}^{-1}d_i(x_i) = 0 \in \text{im } \delta_i$. Finalmente, $\partial_i(x''_i + y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1}d_i\pi_i^{-1}(x''_i + y''_i) + \text{im } \delta_i$. Se $\pi_i(x_i) = x''_i$ e $\pi_i(y_i) = y''_i$, então, $\pi_i(x_i + y_i) = x''_i + y''_i$. Deste modo, $\partial_i(x''_i + y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) + \partial_i(y''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1})$.

Devemos demonstrar exatidão em seis etapas para cada $i \in \mathbb{Z}$:

1. $\text{im } H_i(\iota) \subseteq \ker H_i(\pi)$: como $H(-)$ é um funtor *aditivo* (ou seja, $H(f + g) = H(f) + H(g)$ para quaisquer aplicações de cadeias f e g), temos que $H(0) = 0$ e, portanto, $H(\pi)H(\iota) = H(\pi\iota) = H(0) = 0$.

2. $\text{im } H_i(\iota) \supseteq \ker H_i(\pi)$: se $x_i \in \ker d_i$ é tal que $\pi_i(x_i) \in \text{im } \bar{d}_{i+1}$, então, $\pi_i(x_i) = \bar{d}_{i+1}(x''_{i+1})$ para algum $x''_{i+1} \in C''_{i+1}$. Mais ainda, existe $x_{i+1} \in C_{i+1}$ tal que $\pi_{i+1}(x_{i+1}) = x''_{i+1}$.

Agora, $\bar{d}_{i+1}\pi_{i+1}(x_{i+1}) = \pi_i(x_i)$. Mas $\bar{d}_{i+1}\pi_{i+1}(x_{i+1}) = \pi_i d_{i+1}(x_{i+1})$. Assim, $\pi_i(x_i - d_{i+1}(x_{i+1})) = 0$ e existe (um único) $x'_i \in C'_i$ tal que $\iota_i(x'_i) = x_i - d_{i+1}(x_{i+1})$. Portanto, $x_i + \text{im } d_{i+1} = \iota_i(x'_i) + \text{im } d_{i+1}$. Finalmente, $\iota_{i-1}\delta_i(x'_i) = d_i\iota_i(x'_i) = d_i(x_i) = 0$. Como ι é injetora, temos que $x'_i \in \ker \delta_i$ e $x_i + \text{im } d_{i+1} = H_i(\iota)(x'_i + \text{im } \delta_{i+1})$.

3. $\text{im } H_i(\pi) \subseteq \ker \partial_i$: seja $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ tal que $x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1} = H_i(\pi)(x_i + \text{im } d_{i+1})$ para algum $x_i \in \ker d_i$. Logo, $x''_i - \pi_i(x_i) = \bar{d}_{i+1}(x''_{i+1})$ para algum $x''_{i+1} \in C''_{i+1}$. Como $\partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = \iota_{i-1}^{-1}d_i\pi_i^{-1}(x''_i) + \text{im } \delta_i$, podemos escolher $\pi_i(x_i) = x''_i$, isto é, $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$. Portanto, $\iota_{i-1}^{-1}d_i(x_i) = 0$ e $x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1} \in \ker \partial_i$.

4. $\text{im } H_i(\pi) \supseteq \ker \partial_i$: se $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ é tal que $\iota_{i-1}^{-1}d_i\pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \delta_i$, então, para cada $x'_{i-1} \in \iota_{i-1}^{-1}d_i\pi_i^{-1}(x''_i)$ existe $x'_i \in C'_i$ tal que $x'_{i-1} = \delta_i(x'_i)$. Logo, $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = \iota_{i-1}\delta_i(x'_i) = d_i\iota_i(x'_i) = d_i(x_i)$ para algum $x_i \in \pi_i^{-1}(x''_i)$ e $d_i(x_i - \iota_i(x'_i)) = 0$. Deste modo, $H_i(\pi)(x_i - \iota_i(x'_i) + \text{im } d_{i+1}) = x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}$.

5. $\text{im } \partial_i \subseteq \ker H_{i-1}(\iota)$: seja $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$ tal que $x'_{i-1} - \iota_{i-1}^{-1}d_i\pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \delta_i$ para algum $x''_i \in \ker \bar{d}_i$. Então, $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) - d_i\pi_i^{-1}(x''_i) \subseteq \text{im } \iota_{i-1}\delta_i = \text{im } d_i\iota_i \subseteq \text{im } d_i$ e isto implica que $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) \in \text{im } d_i$.

6. $\text{im } \partial_i \supseteq \ker H_{i-1}(\iota)$: seja $x'_{i-1} \in \ker \delta_{i-1}$ tal que $\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = d_i(x_i)$ para algum $x_i \in C_i$. Considere $x''_i = \pi_i(x_i)$. Então, $\bar{d}_i(x''_i) = \bar{d}_i\pi_i(x_i) = \pi_{i-1}d_i(x_i) = \pi_{i-1}\iota_{i-1}(x'_{i-1}) = 0$. Portanto, $x''_i \in \ker \bar{d}_i$ e $\partial_i(x''_i + \text{im } \bar{d}_{i+1}) = x'_{i-1} + \text{im } \delta_i$.

□

Um corolário importante do teorema anterior é o Lema da Serpente.

Teorema B.4. *Seja F um funtor desde uma categoria com injetivos suficientes $\mathcal{A}$ e considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de objetos em $\mathcal{A}$. Então, existe uma seqüência exata $0 \rightarrow (R^0F)(M') \rightarrow (R^0F)(M) \rightarrow (R^0F)(M'') \rightarrow (R^1F)(M') \rightarrow (R^1F)(M) \rightarrow (R^1F)(M'') \rightarrow (R^2F)(M') \rightarrow \dots$.*

Demonstração. Observe que se $(E^*(M'), d^*) = (E^i, d^i)_{i \geq 0}$ e $(I^*(M''), \delta^*) = (I^i, \delta^i)_{i \geq 0}$ são resoluções injetivas de M' e M'' respectivamente, então, $(E^i \oplus I^i)_{i \geq 0}$ é uma resolução injetiva de M . Mais ainda, o diagrama a seguir, com linhas exatas cindidas, comuta:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & E^0 & \longrightarrow & E^0 \oplus I^0 & \longrightarrow & I^0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d^0 & & \downarrow & & \downarrow \delta^0 \\
 0 & \longrightarrow & E^1 & \longrightarrow & E^1 \oplus I^1 & \longrightarrow & I^1 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d^1 & & \downarrow & & \downarrow \delta^1 \\
 0 & \longrightarrow & E^2 & \longrightarrow & E^2 \oplus I^2 & \longrightarrow & I^2 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Como cada E^i é injetivo, as linhas continuam exatas ao aplicar o funtor F desta

maneira:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F(E^0) & \longrightarrow & F(E^0 \oplus I^0) & \longrightarrow & F(I^0) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow F(d^0) & & \downarrow & & \downarrow F(\delta^0) \\
 0 & \longrightarrow & F(E^1) & \longrightarrow & F(E^1 \oplus I^1) & \longrightarrow & F(I^1) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow F(d^1) & & \downarrow & & \downarrow F(\delta^1) \\
 0 & \longrightarrow & F(E^2) & \longrightarrow & F(E^2 \oplus I^2) & \longrightarrow & F(I^2) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

O resultado segue, então, do teorema anterior. $\square$

De maneira totalmente análoga, obtém-se o mesmo resultado para funtores exatos à direita e seus funtores derivados à esquerda.

Teorema B.5. *Seja F um funtor desde uma categoria com projetivos suficientes $\mathcal{A}$ e considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de objetos em $\mathcal{A}$. Então, existe uma seqüência exata $\cdots \rightarrow (L_2 F)(M'') \rightarrow (L_1 F)(M') \rightarrow (L_1 F)(M) \rightarrow (L_1 F)(M'') \rightarrow (L_0 F)(M') \rightarrow (L_0 F)(M) \rightarrow (L_0 F)(M'') \rightarrow 0$.*

Como corolário, temos que $R^0 F$ (respectivamente, $L_0 F$) sempre é exato à esquerda (respectivamente, exato à direita). Ou seja, de alguma forma, o 0-ésimo funtor derivado indica como “deveria” ser definido o funtor para ter pelo menos uma semiexatidão.

O resultado é mantido nos funtores contravariantes.

Teorema B.6. *Seja F um funtor contravariante desde uma categoria com projetivos suficientes $\mathcal{A}$ e considere uma seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ de objetos em $\mathcal{A}$. Então, existe uma seqüência exata $0 \rightarrow (R^0 F)(M'') \rightarrow (R^0 F)(M) \rightarrow (R^0 F)(M') \rightarrow (R^1 F)(M'') \rightarrow (R^1 F)(M) \rightarrow (R^1 F)(M') \rightarrow (R^2 F)(M'') \rightarrow \cdots$.*

Se F é um funtor desde uma categoria com injetivos suficientes $\mathcal{A}$ e $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ é uma seqüência exata de objetos em $\mathcal{A}$, então, existe uma seqüência exata $\cdots \rightarrow (L_2 F)(M') \rightarrow (L_1 F)(M'') \rightarrow (L_1 F)(M) \rightarrow (L_1 F)(M') \rightarrow (L_0 F)(M'') \rightarrow (L_0 F)(M) \rightarrow (L_0 F)(M') \rightarrow 0$.

Apêndice C

Limite Microscópico e Colimite Telescópico - Mic e Tel

Este apêndice foi feito para exibir algumas definições importantes usadas no trabalho, como a definição de *Mic* e *Tel*. Essas definições são necessárias para compreensão do módulo de homologia local definido por Greenlees e May [GM92] e também para que faça sentido alguns resultados usados no trabalho.

Ressaltamos que esse apêndice é a tradução de uma parte de [GM92].

Definição C.1. (δ -funtor) Um δ -funtor $\mathcal{D}$ é uma sequência $\{D_i | i \geq 0\}$ de funtores covariantes $D_i : \mathcal{C}(R) \rightarrow \mathcal{C}(R)$ (onde $\mathcal{C}(R)$ denota a categoria dos R -módulos e R -homomorfismos) junto com os homomorfismos conectantes naturais $\delta_i : D_i(M'') \rightarrow D_{i-1}(M')$ para sequências exatas curtas

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

tal que as composições (dois a dois) são todas zero nas seguintes sequências:

$$\cdots \rightarrow D_i(M') \rightarrow D_i(M) \rightarrow D_i(M'') \rightarrow D_{i-1}(M') \rightarrow \cdots \rightarrow D_0(M) \rightarrow D_0(M'') \rightarrow 0;$$

$\mathcal{D}$ é exato se essas sequências são exatas.

Definição C.2. (δ -funtor apagável) Um δ -funtor $\mathcal{D}$ é apagável se, para cada M , existe um epimorfismo $\psi : N \rightarrow M$ tal que $D_i(N) \rightarrow D_i(M)$ é nulo para $i > 0$. Isto ocorre se $D_i(F) = 0$ para $i > 0$. Quando F for livre.

Definição C.3. (Functor derivado à esquerda) Seja $\Gamma : \mathcal{C}(R) \rightarrow \mathcal{C}(R)$ um functor aditivo. Seus funtores derivados à esquerda são dados por um δ -funtor $\mathcal{L}\Gamma = \{L_i\Gamma\}$ exato e apagável junto com uma transformação natural $\varepsilon : L_0\Gamma \rightarrow \Gamma$, que é um isomorfismo

em módulos livres. O funtor $L_0\Gamma$ é exato à direita e seus funtores derivados à esquerda para $i > 0$ são os mesmos de Γ .

Definição C.4. (Mapping cone) Defina o mapping cone, ou co-fibra, Ck de uma aplicação de cadeias $k : X \rightarrow Y$ por $(Ck)_i = Y_i \oplus X_{i-1}$, com diferencial $d_i(y, x) = (d_i(y) + k_{i-1}(x), -d_{i-1}(x))$. Defina o “shift à esquerda” $\sum X$ e o “shift à direita” $\sum^{-1} X$ por $(\sum X)_i = X_{i-1}$ e $(\sum^{-1} X)_i = X_{i+1}$, com o diferencial $-d$. Temos a sequência exata curta $0 \rightarrow Y \rightarrow Ck \rightarrow \sum X \rightarrow 0$ e o isomorfismo conectante da sequência exata longa derivada na homologia é $k_\bullet$. É conveniente definir a fibra de k como sendo $Fk = \sum^{-1} C(-k)$.

Definição C.5. (Colimite telescópico) Dada a sequência de aplicações de cadeias $f^r : X^r \rightarrow X^{r+1}$, $r \geq 0$, defina a aplicação $i : \bigoplus X^r \rightarrow \bigoplus X^r$ por $i(x) = x - f^r(x)$ para $x \in X^r$. Defina o colimite homotópico, ou telescópico, de uma sequência $\{f^r\}$ como sendo C_i e denote por $Tel(X^r)$. Assim $H_i(Tel(X^r)) = Colim(H_i(X^r))$. A composição da projeção de C_i para suas primeiras variáveis e a aplicação canônica $\bigoplus X^r \rightarrow Colim(X^r)$ é um isomorfismo homologia $\zeta : Tel(X^r) \rightarrow Colim(X^r)$.

Definição C.6. (Limite microscópico) Dualmente ao telescópico, dadas aplicações de cadeias $f^r : X^r \rightarrow X^{r-1}$ para $r \geq 1$, defina a aplicação $\pi : \times X^r \rightarrow \times X^r$ por $\pi(x^r) = (x^r - f^{r+1}(x^{r+1}))$. Defina o limite homotópico, ou microscópico, de uma sequência $\{f^r\}$ como sendo $F\pi$ e denote $Mic(X^r)$.

Referências Bibliográficas

- [AK12] A. Altman and S. Kleiman. *A term of commutative algebra*. Worldwide Center of Mathematics, LLC, first edition, 2012.
- [Alb15] L. A. Alba. *On Local Cohomology and Local Homology Based on an Arbitrary Support*. PhD thesis, Universidade Federal da Paraíba, December 2015.
- [BH98] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings*. Cambridge University Press, second edition, 1998.
- [BS98] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp. *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications*. Cambridge University Press, second edition, 1998.
- [CN01] N. T. Cuong and T. T. Nam. *The I -adic completion and local homology for Artinian modules*. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 131(61):61–72, 2001.
- [GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May. *Derived factors of I -adic completion and local homology*. *J. Algebra*, 149:438–453, 1992.
- [Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.
- [Kir73] D. Kirby. *Coprimary decomposition of Artinian modules*. *J. London Math. Soc.*, 6:571–576, 1973.
- [Mac73] I. G. Macdonald. *Secondary representation of modules over a commutative ring*. *Symposia Mathematica*, 9:23–43, 1973.
- [Mah13] W. Mahmood. *On endomorphism rings of local cohomology modules*. arXiv:1308.2584v1 [math.AC], August 2013.
- [Men16] C. O. S. Menezes. *Sobre ideais primos anexados e cohomologia local*. Master’s thesis, Universidade Federal da Paraíba, March 2016.

- [Nam10] T. T. Nam. *Left-derived functors of the generalized I -adic completion and generalized local homology*. *Communications in algebra*, 38:440–453, 2010.
- [Nha] L. T. Nhan. *Dimension and width of linearly compact modules and the co-localization of Artinian modules*. preprint.
- [Rob75] R. N. Roberts. *Krull dimension for Artinian modules over quasi local commutative rings*. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 26(103):269–273, 1975.
- [Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, second edition, 2009.
- [SBIW07] A. Leykin C. Miller E. Miller A. K. Singh S. B. Iyengar, G. J. Leuschke and U. Walther. *Twenty-four hours of local cohomology*. American Mathematical Society, first edition, 2007.
- [Sha75] R. Y. Sharp. *Some results on the vanishing of local cohomology modules*. *Proc, London Math. Soc.*, 30:177–195, 1975.
- [Sha89] R. Y. Sharp. *A method for the study of Artinian modules with an application to asymptotic behavior*. In *Commutative Algebra*, volume 15, pages 443–465. Math. Science Inst. Pub., Springer-Verlag, 1989.
- [Str90] J. Strooker. *Homological questions in local algebra*. Cambridge University Press, first edition, 1990.
- [Tan94] Z. Tang. *Local homology theory for Artinian modules*. *Comm. Algebra*, 22(5):1675–1684, 1994.